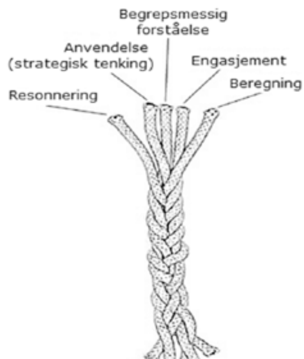
Anita Valenta

Tallforståelse – anvendelse og engasjement

Det sies ofte at tallforståelse er viktig for elevers matematikklæring, men det er ikke åpenbart hva tallforståelse innebærer. Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) beskriver matematisk kompetanse som bestående av fem komponenter, og denne beskrivelsen kan være et utgangspunkt i en analyse av hva tallforståelse kan gå ut på. I de foregående tre numrene av Tangenten ble begrepsmessig forståelse, beregning og resonnement diskutert. Denne artikkelen drøfter ulike aspekt ved anvendelse og engasjement knyttet til tallforståelse, eksemplifisert med episoder fra grupper på 4. til 7. trinn.[1]

Anvendelse (strategisk tankegang)

innebærer å kunne gjenkjenne og formulere matematiske problem, representere dem på en hensiktsmessig måte, tenke fleksibelt i utvikling av en løsningsstrategi og vurdere hvor rimelige løsningene er. Denne komponenten svarer til kompetansen knyttet til det man ofte kaller problemformulering og problemløsing i matematikkdidaktisk litteratur (Kilpatrick et al., 2001). Med matematiske problem menes her problemer i hverdags-, arbeids- og samfunnsliv der matematikk kan anvendes, men også abstrakte matematiske problem og spørsmål. Kjennetegnet på et problem er at man ikke har opparbeidet rutine for å løse det. Man trenger å utvikle en strategi. Dette innebærer at det som er et problem for noen, ikke trenger å være det for andre. Eksemplene og diskusjonen har denne forståelsen av matematisk problem som utgangspunkt.



På skolen er det viktig at elevene får mulighet til å arbeide med problem som de ikke har opparbeidet en løsningsrutine for (se for eksempel DiMatteo & Lester, 2010). Det er viktig fordi det ofte er denne typen problem de møter utenfor skolen. Det er en sentral del av matematisk kyndighet å kunne arbeide med slike problem (Schoenfeld, 1992). Videre bidrar arbeid med matematiske problem til å forstå matematiske begrep, ideer, relasjoner og prosedyrer. Det bidrar til å kunne utvikle og bruke varierte strategier fleksibelt og effektivt i arbeid med matematikk generelt (se Carpenter

Anita Valenta
Matematikksenteret
anita.valenta@matematikksenteret.no

Artikkelen er den siste i en serie på fire artikler.

et al., 1999). Sett gjennom bekrivelsen Kilpatrick et al. (2001) gir av matematisk kompetanse, kan man si at anvendelse (strategisk tankegang) i seg selv er en sentral komponent i matematisk kompetanse, men også vesentlig for å utvikle de andre komponentene som matematisk kompetanse består av.

I undervisning er det er mulig å arbeide med matematiske problem isolert fra andre matematiske tema ved å legge vekt på å utvikle og diskutere problemet. Stadig flere studier (se for eksempel Stein, Boaler & Silver, 2003) fremhever derimot at integrering av arbeid med matematiske problem i arbeid med konkrete matematiske tema gir størst læringseffekt. Dette gjelder både anvendelse (strategisk tankegang) i seg selv og som støtte til å utvikle de øvrige komponentene ved matematisk kompetanse. Følgende aspekt kan sees som sentrale når det gjelder anvendelse (strategisk tankegang) knyttet til tallforståelse:

Gjenkjenning og formulering av matematiske problem innebærer å identifisere situasjoner der ulike begrep og ideer knyttet til tall og talloperasjoner kan brukes til å beskrive situasjonen og formulere og finne en løsning på et matematisk problem.

Eksempler

- Hvor langt kan en bil kjøre med full tank?
- Er det slik at alle hele tall som har 5 som faktor, må ha 0 eller 5 som siste siffer? Hvorfor/hvorfor ikke?

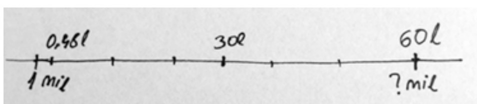
Representasjon av problem. Når et problem er formulert, må det representeres matematisk for å kunne arbeides videre med. Problemet kan representeres muntlig, symbolsk, ved hjelp av tabeller og grafer, tegninger eller konkreter. Den valgte representasjonen spiller en rolle for hvilke muligheter en ser for videre arbeid. Det er derfor viktig å velge representasjonsformen strategisk. For å representere problemet må elevene vurdere hva som er dets nøkkelelementer, og hvilken representasjon som kan fange dem opp. Innhenting av nødvendig informasjon, kvantifisering av ulike størrelser, valg av variabler man skal se på, og relasjonene mellom dem er viktige elementer i arbeidet. Videre vil det å representere strukturen til de involverte matematiske begrepene og relasjonene være sentralt.

Eksempler

- For å finne ut hvor langt en bil kan kjøre med full tank, må vi først finne ut hvor mye en full tank er, og vi må finne ut hvor mye en bil bruker. Det er de to variablene som spiller en rolle her. Størrelsen på tanken og forbruket er forskjellig, og man kan for eksempel søke på nettet etter en oversikt for ulike typer biler. Skal man velge å se på gjennomsnittet for alle typer eller ta utgangspunkt i bare dem som er mest brukt? Bilenes forbruk er avhengig av type kjøring, bilene bruker for eksempel mer drivstoff ved bykjøring enn ved kjøring på motorvei. Skal man se på gjennomsnittet eller ta utgangspunkt i en spesiell type kjøring? Når man har kvantifisert de to størrelsene, må man finne ut hvordan relasjonen mellom dem er, og hvordan problemet kan representeres. Man kan for eksempel bruke en tabell, en dobbel tallinje eller representere problemet symbolsk.

0,48 l/mil   ca 1 l for 20 km

0,48	0,96
10	20



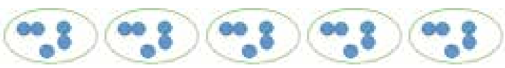
0,48 l for 1 mil

0,48 · 2 for 2 mil

0,48 · ? for ? mil og 0,48 · ?=60

- For å finne ut om alle naturlige tall som har 5 som faktor, må ha 0 eller 5 som siste siffer, må man tenke på innholdet i begrepene naturlige tall, siste siffer og «er faktor i» og på hvordan problemet kan representeres. Naturlige tall er 1, 2, 3, 4, … De er positive og har ingen desimaler. De kan betraktes som antall av noe. Tallet har noen enere, tiere, hundrere, tusener osv. At 5 er faktor i et tall, betyr at tallet kan deles på 5, at svaret er et naturlig tall, og at divisjonen går opp. Tenk på det som tall i 5-gangen, eller et tall som består av bare femmere. Ulike måter å representere situasjonen på kan for eksempel være:

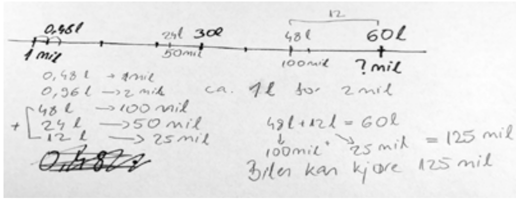
- Et tall = noen enere + noen tiere + noen hundrere + … Hvis 5 går opp i tallet, hvordan må dette tallet være?
- Hvis 5 personer deler penger likt og de får et helt antall kroner (ingen ører), kan vi da være sikre på summen de delte mellom seg, slutter på 5 eller 0?
- Hvilket siffer på enerplassen kan et tall som består av bare femmere, ha?



Utvikling av løsningsstrategi skjer med utgangspunkt i hvordan man har valgt å representere problemet. Man utforsker problemet systematisk, søker etter mønster og system og anvender kunnskap om tall, regneoperasjoner, sammenhenger og fremgangsmåter. For å få bedre innsikt i ulike sider ved problemet kan det være nyttig å skifte mellom ulike representasjoner underveis i arbeidet. Strategisk tankegang innebærer å kunne utvikle, sammenligne og vurdere *ulike* strategier ut fra hvor hensiktsmessige og effektive de er i den gitte situasjonen.

Eksempler

- Problemstillingen om hvor langt en bil kan kjøre med full tank, kan gi en mulig løsningsstrategi som tar utgangspunkt i en dobbel tallinje.



Vurdering av svar dreier seg om å overveie størrelsene, se for seg situasjonen og tenke gjennom om svaret kan være rimelig. Det innebærer også å tenke gjennom om det er noe som kan ha betydning for beregningene, og som det ikke er tatt hensyn til under arbeidet.

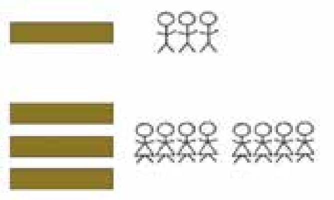
Eksempler

- I løsningsforslaget ovenfor et det notert underveis at det trengs ca. 1 liter for å kjøre 2 mil. Det kan gi et bilde av størrelsesforhold i situasjonen og brukes til å vurdere hvor rimelig svaret er til slutt. Om spørsmålet var annerledes, for eksempel om en full tank rekker til en tur fra Trondheim til Oslo, ville det ikke vært nødvendig med videre beregninger.
- For å finne ut om alle hele tall som har 5 som faktor, har 0 eller 5 som siste siffer, kan man sjekke alle multiplum av 5 opp til 100. Betyr det at det gjelder for *alle* multiplum av 5?

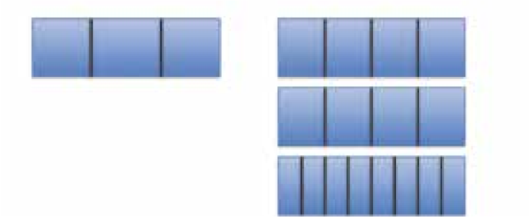
Eksempel fra undervisning – sjokoladekake

Thomas er lærer på sjette trinn, og klassen skal arbeide med følgende oppgave:

> Hvis guttene deler en sjokoladekake likt, og jentene deler sine tre sjokoladekaker likt, hvem får mest, en jente eller en gutt? Hvor mye mer?



Elevene arbeider med oppgaven i grupper. Nedenfor er et utdrag fra samtalen som utspiller seg i en gruppe på tre elever, Mia, Stian og Kristian. De begynner med å tegne sjokoladekakene og deler dem opp som på bildet. Guttenes kake er til venstre, jentenes kaker til høyre.



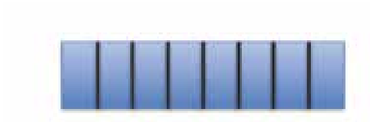
Stian Jentene får en sånn og en sånn. [peker på $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{8}$]
Mia Ja, dette blir liksom den biten de får til overs. Mer enn guttene!
Stian og Kristian: Ja!
Mia Eller … Åh, vi har gjort en liten feil. [Peker på tegningen av jentenes kake] Det her er en fjerdedel, ikke en tredjedel. Så da får kanskje guttene mest!

Elevgruppen *representerer problemet* ved hjelp av en tegning. Det at guttene deler likt mellom seg og jentene deler likt mellom seg, er sentralt her. Elevene knytter problemet til sin kunnskap om brøk. Videre i arbeidet diskuterer de om det kan være at «$\frac{1}{8} + \frac{1}{4}$ er like mye som $\frac{1}{3}$», men de klarer ikke å komme videre med denne strategien. Etter hvert prøver de å se problemet på en annen måte:

Mia Guttene får $\frac{1}{3}$, og for at jentene skal få $\frac{1}{3}$ hver, så må det være 9. Ja, det er guttene som får mest!
Stian En halv, en halv, en halv – 1 ½ cm! [Måler jentenes tegning med linjal] 1! [Måler guttenes tegning med linjal] Jentene får mest! Men du har ikke tegnet ordentlig, så da blir det ikke rett.

Mia begynner å tegne på nytt, med linjal, og guttene følger med:

Stian Vent! Tegn en på 8 cm! En kake på 8 cm!
Mia En kake på 8 cm. Det skal bli!
Stian Tre stykk på 8 cm. Fire!
Mia Fire stykk? Å ja fire kaker ja, det var riktig.
Stian På 8 cm.



Mia tegner som vist, hver bit er 1 cm, før hun stopper:

Mia Nå vet jeg, nå slipper jeg å tegne det andre her, for nå … Det her blir 3 cm langt stykke. Så deler jeg bare denne opp i tre. 8 delt på 3 … 3 er i hvert fall ikke $\frac{1}{3}$ av 8.
Stian Ja, for da blir 1 cm for mye.
Mia Ja for da blir det her. [Måler ca. på den 8 cm lange kaka med linjalen] Det blir bare to, og litt mindre … Jentene får mest! Jess! Da vet jeg det!
Stian Jo, men vi må argumentere for det …
Mia Jo, fordi at se her nå! Når man deler opp … Se, jentene får et 3 cm langt stykke …
Stian Og guttene får mindre enn 3.
Mia Ja, og guttene får mindre enn 3. De får 2,66 eller noe slikt.

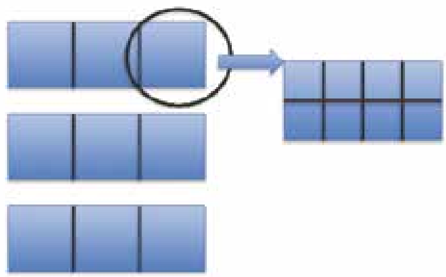
Elevene representerer problemet på en mer strategisk måte nå ved å tegne kaker som er 8 cm lange. Det gir dem en mulighet til å *utvikle en løsningsstrategi* for å avgjøre om det er gutter eller jenter som får mest. Når læreren kommer og spør hvor mye mer kake jentene får, klarer ikke elevgruppen å komme til noe annet svar enn «0,36 cm mer». Representasjonen som var nyttig for elevene i første omgang, kommer i veien i neste spørsmål. Elevene klarer ikke å *vurdere svaret* og innse at størrelsen (eller lengden) på kakene ikke spiller en rolle, at det bare er en representasjon de har valgt. Spørsmålet er uavhengig av størrelsen på kaken og skal uttrykkes som et forhold mellom en del og en hel kake (altså brøk).

En annen gruppe, med Mattias, Even og Lea, har delt både guttenes og jentenes kaker i tredjedeler. Hver gutt får $\frac{1}{3}$ av en kake. Hver jente får $\frac{1}{3}$ av en kake, og de har $\frac{1}{3}$ til som de skal dele mellom seg.

Even — Ja, de får … Det er ikke mye, men de får litt mer.

Mattias — Jeg tror de får en … De får jo for så vidt $\frac{1}{8}$ mer da. Eller nei …

Even — Jo, de får $\frac{1}{8}$ mer. Men da må vi finne ut hva $\frac{1}{8}$ av $\frac{1}{3}$ er. Og så må vi tenke da. $\frac{1}{3}$, hvordan vi skal få delt det opp i 8 biter? Siden de er 8 jenter, må de få 8 like … Det siste kakestykket må bli til 8 like. Vi må finne ut det …



Mattias — Vi ble jo enige om at de fikk 1/8 mer hver?

Even — Vent, vent, vent … Hva er 8 ganger … Da får … Alle jentene får … Da blir det $\frac{1}{24}$ av den ene kaka … $\frac{1}{8}$ av $\frac{1}{3}$ mer får de. Det er $\frac{1}{24}$ av kaka.

Videre i arbeidet fortsetter gruppen å tegne, diskutere og begrunne for hverandre det løsningsforslaget Even har foreslått. I *utvikling av løsningsstrategi* bruker elevene en *representasjon av problemet* der de fremhever nøkkelelementet i problemet og strategien de jobber mot – lik fordeling, forhold mellom en del av en hel, og å se en del (den jentene får når den siste $\frac{1}{3}$ deles på alle åtte) i forhold til to ulike enheter – en hel kake og $\frac{1}{3}$ av kaken. Elevene går stadig tilbake til hva problemet er, oppsummerer hva de vet og stiller selv spørsmålene som fremhever det kritiske videre. På denne måten *vurderer* de stadig det de kommer frem til.

Engasjement

handler om å se på matematikk som fornuftig, nyttig og verdifullt. Videre innebærer det å ha tro på at det er mulig bli kompetent i matematikk, og at man lærer ved å streve og ikke gi opp. For å kunne utvikle de andre komponentene i matematisk kompetanse – begrepsmessig forståelse, beregning, resonnering og strategisk tankegang – er det nødvendig at man har tro på at matematikk er mulig å forstå, at det ikke er en samling tilfeldige regler som må følges. Motsatt vil de andre komponentene bidra til utvikling av engasjement. For eksempel vil elever som ofte arbeider med matematiske problem og utvikler en strategisk tankegang, være mer tilbøyelige til å ha tro på at det er mulig å bli kompetent i matematikk enn elever som hovedsakelig arbeider med rutineoppgaver (Schoenfeld, 1989). De vil også i større grad oppleve at faget gir mening og er nyttig. Matematikklærernes rolle, deres syn på matematikklæring og måten de legger opp undervisningen på, er viktig for elevenes positive innstilling i matematikk (Thompson, 1992). Innen tallforståelse kan engasjement ses som bestående av følgende aspekt:

Å ha tro på at innsats fører til læring handler om å se seg selv som en som kan lære matematikk. Å utvikle kompetansen til å gjenkjenne og bruke ulike relasjoner, utvikle varierte strategier i arbeid med tall og aritmetiske operasjoner, utforme og begrunne hypoteser osv. tar tid og krever innsats og konsentrasjon, men det er mulig for alle.

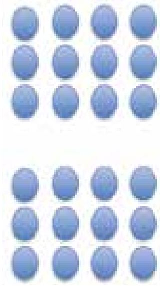
Å oppleve det som meningsfullt å søke etter relasjoner i arbeidet med tall handler om at elevene bør få erfare at å se etter sammenhenger og strukturer gir mening og gjør faget kreativt og skapende. Mønster og sammenhenger er selve kjernen i matematikk og kan gjøre tilsynelatende kjedelige regnestykker til utgangspunkt for spennende utforskninger og utfordringer.

Å se det som nyttig å bruke ulike representasjoner i arbeidet med tall handler om at ulike representasjoner gir innblikk i ulike egenskaper og aspekt ved et tall. Noen ganger kan det passe bedre å representere tallet på en spesiell måte enn en annen måte. Noen ganger representeres tallet «seks» med symbolet 6, andre ganger som $4 + 2$ eller $3 \cdot 2$. I noen tilfeller kan det være lurt å tenke på det som et punkt på tallinjen, i andre tilfeller som en mengde på 6 eller som en lengde på 6. En bevissthet om muligheter til å representere tall, operasjoner og relasjoner på ulike måter og verdien av å bruke det er viktig for elevers læring.

Å se verdien av å utvikle flere fremgangsmåter for samme type problem handler om at ulike fremgangsmåter og det å sammenligne dem gir mulighet til å se et problem fra ulike sider. Det gir mulighet for å tenke kreativt, velge hensiktsmessige fremgangsmåter og etablere relasjoner mellom ulike ideer. Elevene bør se på disse elementene som viktige i arbeid med ulike problem knyttet til tall og regneoperasjoner.

Eksempel fra undervisning: $(4 \cdot 3) \cdot 2$

Jørn Ove er læreren på 4. trinn. Han viser bildet til høyre til elevene og spør elevene hvordan de tenker for å finne ut hvor mange prikker det er. Målet med timen er en diskusjon om den kommutative og den assosiative egenskapen til multiplikasjon. Ulike tenkemåter kommer frem, blir diskutert mot bildet og representert symbolsk på tavla og sammenlignet. Her er et utdrag av oppsummeringen av timen:



Jørn Ove	Nå lurer jeg på en ting. Hva har vi lært i dag? Hva handlet dette vi har snakket om i dag, om? Birk?
Birk	At mange regnestykker kan få det samme utgangspunktet.
Jørn Ove	Ja. Vi hadde et tall, 48 der, så kan vi dele opp det på en måte. Slik Johanne holdt på å dele opp en firer. Vi kan sette opp mange regnestykker som blir det samme.
Anna	At andre tenker sykt vanskelig.
Jørn Ove	Du har hørt at mange tenker forskjellig. [Ler]
Anna	Eller vanskelig.
Jørn Ove	Ja, det kan være vanskelig, men så kan det være veldig lett for den.
Anna	Og så inne i hodet så høres det sykt enkelt ut, men å måtte skrive det ned da er kjempevanskelig.
	[Samtalen fortsetter mot det faglige innholdet i aktiviteten]

Hele aktiviteten og det faglige målet med den baserer seg på at det at bildet kan ses på ulike måter. Dermed legger selve aktiviteten opp til at elevene skal *se verdien av å utvikle flere fremgangsmåter for samme type problem*. Det symbolske matematikkspråket er vanskelig for elevene (slik Anne også påpeker i episoden), men nødvendig for elevenes videre læring. Samspillet mellom bildet og den muntlige og symbolske beskrivelsen av hvordan man ser bildet, er sentralt i diskusjonen. Aktiviteten kan sies å legge opp til at elevene skal *se det som nyttig å bruke ulike representasjoner i arbeid med tall*. I episoden uttrykker Anne at det er vanskelig å forstå hvordan andre tenker, og at de er vanskelig å beskrive tankegangen symbolsk. For at elevene skal *ha tro på at innsats fører til læring*, kan det kan det være viktig å diskutere hva som er vanskelig, og hvorfor det er vanskelig, hvorfor det er viktig å lære det, og hvordan man kan gå frem.

Utvikling av tallforståelse

De fem komponentene i matematisk kompetanse – begrepsmessig forståelse, beregning, anvendelse / strategisk tankegang, resonnering og engasjement – og aspektene av tallforståelse knyttet til hver av dem er tett sammenflettet og avhengige av hverandre. De støtter hverandre, og de utvikles samtidig. Utvikling av strategier henger tett sammen med forståelse av relasjoner mellom tall og operasjoner, ulike representasjoner, begrunnelser for strategier og verdsetting av ulike måter å tenke på. Tilsvarende gjelder alle andre aspekt av tallforståelse; de utvikles sammen, forsterkes av hverandre og kan ikke tenkes i en bestemt rekkefølge. En oppgave legger gjerne opp til noen aspekt i større grad enn noen andre, og det kan være viktig at lærere også velger hvilke aspekt de ønsker å fremheve under arbeidet med en gitt oppgave. Det er viktig at alle de ulike aspektene arbeides med over tid. Elevene får da mulighet til å utvikle en tallforståelse som er varig, fleksibel, nyttig og relevant både for deres videre matematikklæring, i hverdagslivet og senere i deres profesjonelle karriere.

Noter

1 Eksemplene fra praksis er utviklet innen prosjektet «Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning» ved Matematikksenteret, og filmene eksemplene er hentet fra, er lagt ut på: http://www.matematikksenteret.no/content/4793/Innholdsside. Aktivitetene er fra filmene med tilsvarende overskrift. På siden kan det også leses mer om de ulike type aktivitetene som diskuteres her.

Referanser

Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Hielbert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A., & Wearne, D. (1999). Learning Basic Number Concepts and Skills as Problem Solving. I E. Fennema & T. A. Romberg (Red.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (s. 45–61). Lawrence Erlbaum Associates.

DiMatteo, R. W., & Lester, F. K. (2010). The role of Problem solving in the Secondary School Mathematics Classroom. I J. Lobato & F. Lester (Red.), Teaching *Teaching and Learning Mathematics. Translating research*. NCTM.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington DC: National Research Council, National Academy Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. I D. A. Grouwes (Red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334–370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 338–355.

Stein, M. K., Boaler, J., & Silver, E. A. (2003). Teaching mathematics through problem solving: Research perspectives. I H. Schoen, & R. I. Charles (Red.), *Teaching Mathematics through Problem Solving: Grades 6–12* (s. 245–256). Carmel, California: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. I D. A. Grouwes (Red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 127–146). New York: Macmillan.