Einar Jahr

# «Lovlige» konstruksjoner

På et etterutdanningskurs i matematikk for ungdomsskolelærere dette semesteret tok jeg opp spørsmålet som matematikklærere ved Nore Neset skule reiste i «Tangenten» nr. 1/1998, og som Svein H. Torkildsen en god kommentar til i nr. 2. Jeg vil gjerne følge opp med ytterligere kommentarer. Det viste seg nemlig på dette kurset at samvittighetsfulle lærere og sensorer faktisk har tatt faglig skade av Eksamenssekretariatets inkompetanse angående hva det vil si å konstruere en figur ved hjelp av passer og linjal (tilsvarende forhold gjelder begrepet «tilnærmingstall», men det kan jeg ta opp i en seinere artikkel).

Spørsmålet er i hvilken grad det skal være tillatt å analysere en konstruksjonsoppgave for å gjøre konstruksjonen så enkel som mulig. Det ble hevdet med stor styrke fra en del kursdeltakere at det ikke skal være tillatt å regne ut en lengde på grunnlag av en innsikt ervervet gjennom studium av en prøvefigur, for så å bruke dette resultatet i konstruksjonen. Dette er fundamentalt galt, og ville føre til forbud mot en rekke klassiske teknikker for å konstruere figurer ved hjelp av passer og linjal. Noen rapporterte om vansker med å få elevene til å godta dette regelverket, for verken de eller elevene fant noen fornuft i det. Men man føler seg jo forpliktet til å tilpasse elevenes kunnskaper og vaner til det som eksamen krever. Derfor er det ikke disse lærerne som skal kritiseres, men Eksamenssekretariatet. Likevel må vi ikke unnlate å påpeke det når disse lærerne faktisk formidler misoppfatninger om viktige matematiske begreper og metoder.

Kritikken skal ikke ramme lærerne, men innholdet i deres faglige formidling. Når det gjelder forbud mot utregninger som grunnlag for konstruksjoner, er det noe riktig ved det, idet vi ikke tillater bruk av tilnærmingstall i denne sammenhengen. For eksempel kan vi ikke ved hjelp av passer og linjal konstruere et kvadrat med samme areal som en gitt sirkel (det klassiske problemet med sirkelens kvadratur). Selv om vi kan regne ut siden i kvadratet med så stor nøyaktighet vi vil ($\pi$ er beregnet med over en milliard desimaler!), er det umulig å konstruere denne kvadratsiden *eksakt*. Vi godtar heller ikke bruk av en utregnet tilnærmingsverdi for for eksempel $\sqrt{3}$. Jeg tror det er avvisningen av slike beregninger som er blitt misforstått og tolket som forbud mot *alle* beregninger før konstrukjonsarbeidet tar til. Når det gjelder $\sqrt{3}$, kan imidlertid oppmåling av den utregnede tilnærmingsverdien erstattes av en *i prinsippet eksakt* konstruksjon. Klarer en å konstruere $\sqrt{3}$ på en egen figur, kan denne lengden ved hjelp av passer transporteres til den figuren som skal konstrueres, og konstruksjonen skal godkjennes. Et klassisk eksempel er konstruksjonen av det gylne snitt, eller, om en vil, en regulær femkant. Uten en analyse og beregning av eksakte verdier for visse lengder er denne konstruksjonen umulig. Det er ikke den slags umulighet som er av interesse i diskusjonen om hvilke figurer som kan konstrueres ved hjelp av passer og linjal. Dette er jo ikke lenger noen diskusjon; problemet er fullstendig løst av Gauss. Dersom en beregning av en lengde gir et måltall som i prinsippet er eksakt, skal denne kunne benyttes i konstruksjonen. Jeg gir to eksempler:

**Eksempel 1**

*Konstruer en trekant ABC der* $AB = 6$ *cm*, $\angle A = 60^\circ$ *og* $\angle B = 30^\circ$.

Her er alle de oppgitte tallene å oppfatte som eksakte. En nokså elementær geometrisk innsikt gir at $AC$ er *eksakt* 3 cm. Å avsette 3 cm fra $A$ langs $AC$ for å finne $C$ gir en langt mer presis konstruksjon av trekanten enn å konstruere 30° ved $B$, og skal roses i stedet for å forbys. Poenget er altså at måltallet 3 her ikke er et utregnet tilnærmingstall, men et eksakt tall. En slik oppgave er *teoretisk*, og vi løser den ved å betrakte en *matematisk modell*. Vi påstår ikke dermed at vi kan produsere en pinne som er eksakt 3 cm lang. Men vi påstår at vår eksakte konstruksjon (som vi egentlig bare kan utføre i tankene) gir oss det beste grunnlaget for å kunne produsere en trekant som er så lik den beskrevne som mulig. Det er essensen i å anvende teori i praksis.

**Eksempel 2**

*Eksamen 1996 nr. 21:*

a) *Konstruer først* $\Delta AED$ *der* $AE = 6{,}0$ *cm*, $\angle E = 90^\circ$, *og* $\angle A = 45^\circ$.
b) *Forklar hvorfor* $DE = 6{,}0$ *cm.*
c) *Regn ut lengden av AD.*
   $\Delta AED$ *er en del av* $\Delta ABD$. *B ligger på forlengelsen av AE, og* $\angle ADB = 75^\circ$.
d) *Fullfør konstruksjonen av* $\Delta ABD$.
e) *Forklar hvorfor BD er dobbelt så lang som BE.*

Oppgaven har flere punkter, men jeg behandler ikke dem her. I oppgaven er det også gitt en prøvefigur som er nokså formlik med den som skal konstrueres.

I et fasithefte som er utgitt (Skoleservice, 12. utgave 1997), er $\angle A = 45^\circ$ konstruert på tradisjonelt vis. Spørsmålet er nå om dette er den eneste løsningen som skal godkjennes. Det er det ikke. Her får vi nemlig den beste konstruksjonen av $\Delta AED$ ved å begynne i $E$, oppreise normalen på $AE$ (før en markerer $A$), og så avsette 6,0 cm fra $E$ til $A$ og $D$. Selv om lengden av $AE$ her er gitt som et tilnærmingstall, gir setningen som konkluderer med $AE = ED$ at $ED = 6{,}0$ cm med samme nøyaktighet som den gitte lengden av $AE$. Dermed er det like legitimt å bruke $ED = 6{,}0$ cm i konstruksjonen som å bruke oppgavens opplysning $AE = 6{,}0$ cm. At en i punkt a) bruker en innsikt som en så blir bedt om å gjøre rede for i punkt b), spiller ingen rolle. Det gjør heller ingen forskjell at ordet «først» er brukt i pkt. a). Denne konstruksjonen må selvfølgelig godkjennes! På samme måte må det være tillatt å finne ut og bruke at $\angle EDB = 30^\circ$, noe som gir en bedre konstruksjon av $DB$ enn standardkonstruksjonen av $75°$ som $90° - 15°$ eller $60° + 15°$. Også her blir en seinere i oppgaven bedt om å forklare noe som følger fra en innsikt en brukte i konstruksjonen, noe som selvsagt ikke diskvalifiserer konstruksjonen!

—oo00oo—

Jeg hører til dem som forsvarer konstruksjoner med passer og linjal som viktig del av geometripensumet i grunnskolen. Det er mange grunner til det. Dette er klassisk matematikk, som har både historisk interesse og faglig substans. Det å studere hvilke figurer en kan få til ved å transportere avstander og tegne rette linjer gir økt romforståelse. Avstand og rett linje er ikke uviktige begreper i geometrien! De begrensningene som ligger i at vi for eksempel ikke skal avmerke vilkårlige linjestykker på linjalen, har ledet til mye god matematikk. En kan nevne algebraisk tallteori og ikke-euklidske geometrier. Stoffet appellerer til andre sanser enn for eksempel algebra. En ser, og en bruker hendene, og disse sanseopplevelsene leder til genuine matematiske resonnementer. Og så inneholder konstruksjonsgeometrien et vell av gode problemløsingsoppgaver (som for det meste ville være uløselige dersom en skulle holde seg til Eksamenssekretariatets retningslinjer). Mange har gjennom dette stoffet fått sine eneste estetiske opplevelser i matematikken!

Til slutt en liten kommentar til oppgave 23 til avgangsprøva 1998 (Figur i Svein H. Torkildsens artikkel i «Tangenten» nr. 2/98): Den enkleste måten å konstruere punktet $C$ på, er å avsette $FD$ fra $F$ langs forlengelsen av $FE$. En lærer eller sensor som ikke godkjenner slik bruk av geometrisk innsikt, er på linje med læreren i Alexander Kiellands «Gift», som ikke bare forlangte navnene på byene i Belgia, men også den rekkefølgen av dem som sto i boka. La oss håpe at den skolen som Kielland beskriver, hører historien til!