Gunnar Gjone: Matematikk på frimerker

Pytagoras fra Samos

(ca. 572 – 497 f.Kr)

Det finnes få skriftlige dokumenter fra den eldste greske matematikken (fra før år 300 f.Kr.). Det finnes flere fragmenter, men det vi kan holde oss til er i hovedsak seinere samleverker og kommentarer. Et slikt eksempel er «den første boka» (Bok 1) til Euklid, med de kommentarene som ble skrevet av Proklos i det 5. århundre e.Kr. Euklid levde rundt år 300 f.Kr. og svært lite er kjent om han. En annen av de tidligste greske matematikerne som vi har kunnskaper om er Thales fra Milet (ca. 624 – 547 f.Kr). Den greske matematikeren som de fleste kjenner navnet til i dag er Pytagoras.

Pytagoras var født på øya Samos utenfor kysten av Lille-Asia (Tyrkia). Vi vet ikke så mye om personen Pytagoras, men vi kjenner han gjennom den gruppen som han etablerte rundt seg – pytagoréerne. Det meste som vi har av skriftlige kilder om Pytagoras og pytagoréerne ble skrevet i det 3. eller 4. århundre – altså omlag 800 seinere.

Om Pytagoras vet vi at han tilbragte mye tid i Egypt og foretok reiser i midt Østen. Mens han var i Egypt ble han tatt til fange av de persiske erobreren Kambyses og tatt med til Babylon – ett av tidas kultursentre. Han oppholdt seg i Babylon i 7 år og fikk innføring i tallære og musikk.

Rundt 530 f.Kr. ble han tvunget til å forlate Samos, og slo seg ned i den

Frimerket viser bilde av Pytagoras på gresk mynt. Frimerket ble utgitt 20. august 1955 for å markere 2500 året for opprettelsen av den første filosofiskolen til Pytagoras på Samos.

greske byen Crotone i sør Italia. Her samlet han en gruppe disipler, som etterhvert ble kjent som pytagoréerne. Pytagoréerne ble imidlertid etter en tid fordrevet fra Crotone og slo seg ned i en annen sør-italiensk by – Metapontum. Her døde også Pytagoras.

Pytagoréerne var både en religiøs orden og en filosofisk skole.Her kan vi passende sitere fra Viggo Bruns bok: *Alt er tall:*

Pytagoréerne lærte at når de ble innviet i harmonienes og tallenes mysterier, nærmet sjelen seg det *guddommelige, og da kunne de unngå dette sjelvandringens kretsløp.*

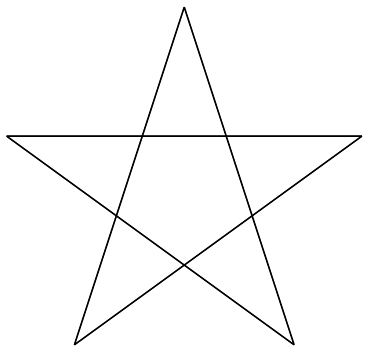
Matematikken var i det hele en del av pytagoreernes religion. Gud har ordnet kosmos – universet – etter tall. Harmonien er guddommelig og består i tallforhold. Den som lærer å utgrunne denne guddommelige tallharmoni, blir selv guddommelig og udødelig hevdet pytagoreerne. «Alt er tall» ble deres slagord. (Brun, 1964, s. 94)

– med andre ord, tall er grunnlaget for alle fysiske fenomener. For eksempel var *musikk* et av de områdene som pytagoréerne studerte. I musikk avhenger musikalske harmonier av numeriske forhold, og dette utforsket pytagoréerne nøye.

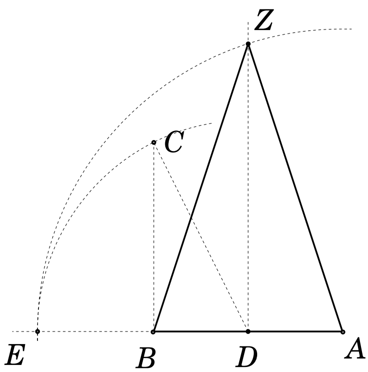
Det er vanlig å skille mellom tre grupper av pytagoréere. Til den første gruppen regner vi Pytagoras og pytagoréerne i hans samtid, den neste var «de tidlige» pytagoréerne i første halvpart av det 5. århundre f.Kr. Den tredje gruppen var «de senere» pytagoréerne som levde i annen halvpart av det 5. århundre og første halvpart av det 4. århundre f.Kr. Vi kjenner navnene på en rekke pytagoréere (jf. Herz-Fischler, 1998). Det er også en rekke forbindelser mellom Platon og pytagoréerne, selv om det er få direkte referanser til Pytagoras eller pytagoréerne i Platons verker.

Pytagoréerne hadde pentagrammet som symbol.

Enkelte historikere har antatt at pytagoréerne kunne konstruere pentagrammet siden de hadde det som symbol. Andre historikere betviler dette og peker på at pentagrammet også kunne tegnes(konstrueres) på andre måter enn ved de strenge reglene for konstruksjon som finnes i Euklids verker.



Nedenfor har vi vist hvordan vi kan konstruere en «tagg» i pentagrammet.



Kort forklaring til konstruksjonen: Utgangspunktet er linjestykket AB. Lengden av BC er lik lengden av AB og den konstrueres normalt på AB i B. D er midtpunktet på AB og DE konstrueres med lik lengde til DC på forlengelsen til AB. Punktet Z konstrueres slik at lengden av AZ er lik lengden av BZ er lik lengden av $+$.

Vi kan kort bemerke at med programmet Cabri II på datamaskin kan en enkelt tegne regulære mangekanter, slik at datamaskinen vil være et egnet verktøy til utforsking av sammenhenger i mangekanter.

Vi skal imidlertid her se litt nærmere på pytagoréernes studium av tall – den tidligste tallteorien. Starten på «teorien» var skillet mellom jamne og ulike tall. De jamne tallene kalte pytagoréerne *kvinnelige* og de ulike *mannlige*. Høyst sannsynlig representerte pytagoréerne tallene med punkter, eller mer konkret med småsteiner. En rekke «tallteoretiske» sammenhenger kan utforskes ved å se på mønstre av slike punkter.

Eksempler på slike mønstre og sammenhenger er vist i rammen.

Pytagoréerne studerte også det som i ettertid har blitt kalt pytagoréiske talltripler – tre heltall som gir mål for sider i rettvinklede trekanter. 3-4-5 er ett eksempel på et slikt talltrippel, 5-12-13 er et annet.

Et annet eksempel på egenskaper ved tall som pytagoréerne visste var såkalte vennskapelige tall:

220 og 284 er vennskapelige, fordi summen av divisorene i ett av tallene (vi regner med 1 men ikke tallet selv) er lik det andre. Et annet slikt tallpar er 1210 og 1184:

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1210$

$1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 = 1184$

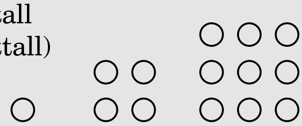
Pytagoréiske talltripler og vennskapelige tall er behandlet for eksempel i Beiler (1964).

For pytagoréerne var tall alltid knyttet til de tingene som ble tellet. Et tall betydde altså en samling av enheter. En konsekvens av dette synetpå enheten var at den ikke kan deles. Enheten – som vi betegner med tallet **1** – ble heller ikke sett på som et tall på samme måte som de andre positive heltallene.

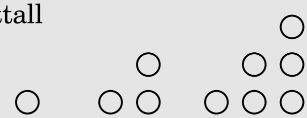
Alt skulle kunne telles – også lengder. For å telle lengder måtte en ha en enhet og pytagoréerne antok at en slik enhet alltid kunne finnes i en aktuell

Figurtall:

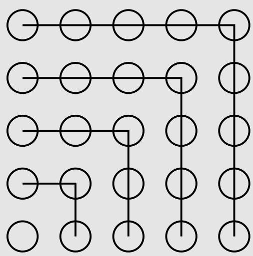
Firkanttall
(kvadrattall)



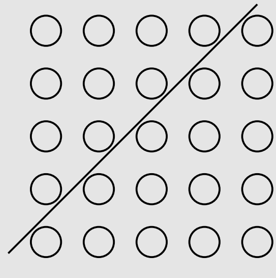
Trekanttall



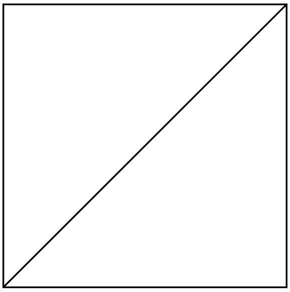
Ut fra mønsteret under kan vi se at
$1 + 3 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 3^2$
osv.



Fra figuren under kan vi se at etthvert kvadrattall er summen av to trekanttall som følger etter hverandre.



situasjon. Dette førte til problemer. Ser vi på et kvadrat,



– kan vi ikke finne noen felles enhet slik at sidene og diagonalen er (heltallige) multipla av denne enheten. Oppdagelsen av dette forholdet blir tidfestet til omlag 430 f.Kr. og førte til en grunnleggende forandring i gresk filosofi om at alle ting var knyttet til (telle-)tall.

Det som vi forbinder med Pytagoras i dag i skolens matematikkundervisning er imidlertid Pytagoras' setning: I en rettvinklet trekant er summen av kvadratene på katetene lik kvadratet på hypotenusen. Pytagoras' setning er illustrert på frimerket.

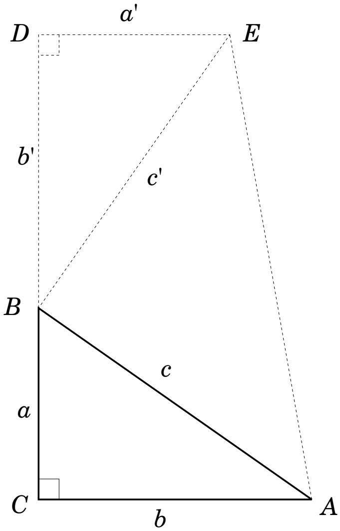
Vi vil bemerke at setningen også gjelder den omvendte veien: Hvis summen av kvadratene på to sider i en trekant er lik kvadratet på den tredje siden, så er trekanten rettvinklet.'

Det er usikkert om Pytagoras kjente «Pytagoras' setning»! Hvis han har gjort det har han antagelig lært den av babylonerne.

Som nevnt er svært lite kjent om Pytagoras som person, men det finnes en rekke historier om han. For eksempel at han skulle ha ofret en okse da han oppdaget «Pytagoras' setning». Noe som Viggo Brun finner høyst usannsynlig fordi Pytagoras og pytagoréerne var motstandre av å ofre dyr. (Brun, 1994)

Frimerket viser Pytagoras' setning. Frimerket ble utgitt 20. august 1955 og er utgitt i samme serie (anledning) som frimerket vist ovenfor.

Det har blitt gitt en rekke ulike bevis for denne setningen. Vi skal her presentere et bevis, som er spesielt fordi det tilskrives den amerikanske presidenten James A. Garfield:



Gitt den rettvinklede trekanten ABC, vi skal vise at: $c^2 = a^2 + b^2$

Forleng CB til D slik at $BD = b' = b = CA$. Konstruer DE er vinkelrett på BD slik at $DE = a' = a = CB$. Trekk linjene BE og AE. Arealet av trapeset $CAED$ er gitt ved:

$$S = \tfrac{1}{2}(a' + b)(a + b') = \tfrac{1}{2}a^2 + ab + \tfrac{1}{2}b^2$$

Hvis vi regner ut arealet av trapeset ved å regne ut arealet av hver av trekantene får vi:

$$S = \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}c^2 + \tfrac{1}{2}ab = ab + \tfrac{1}{2}c^2$$

(det kan forholdsvis enkelt vises at $\angle ABE$ er rett), altså

$$ab + \tfrac{1}{2}c^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + ab + \tfrac{1}{2}b^2$$

som gir $c^2 = a^2 + b^2$.

I rammen er det en kort biografisk skisse av James A. Garfield.

Beviset til president Garfield er et eksempel på et bevis som er laget av det vi kan kalle en «amatør» – en person som ikke var profesjonell matematiker. Opp gjennom matematikkhistorien finnes det en rekke eksempler på «amatører» som har levert bidrag til matematikkens utvikling.

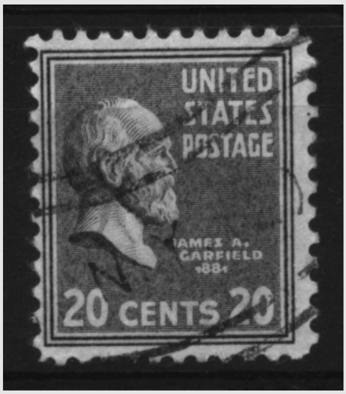
Oppgaver

1. Vis at vinkelen i en spiss i pentagrammet er 36 grader.
2. Vis at lengden AZ i konstruksjonen av pentagrammet er $(1+\sqrt{5})/2$. Dette tallet kalles det gyldne snitt. Takken i pentagrammet som er konstruert kalles derfor et gyldent triangel.
3. Finn flere pytagoréiske talltripler.
4. Utforsk sammenhengen som er gitt ved formelen for tre tall: $(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$ for et positivt heltall n.

James A. Garfield (19.11.1831–19.9.1881)

USAs 20. president (1881). James A. Garfield var født i en tømmerhytte og faren døde da han var 2 år gammel. Han hadde en fattig oppvekst og arbeidet hardt og sparte penger for å få en utdanning. Han ble utdannet lærer i gresk og latin da han var 26 år gammel. Det fortelles at han som ung mann kunne skrive gresk og latin samtidig, med en penn i hver hand. Under den amerikanske borgerkrigen tjenestegjorde han i hæren, og oppnådde å bli general. Etter å ha blitt oppmuntret av Lincoln til å stille til valg, ble han valgt til kongressen. Ved presidentvalget i 1880 ble han republikanernes kompromisskandidat for president, og ble valgt. Hans presidentkarriere fikk imidlertid en brå slutt da han den 2. juli 1881 ble skutt av en person som ikke hadde fått en føderal jobb. Han døde av skadene 19. september det samme året.

James A. Garfield er avbildet på flere frimerker fra USA, dette ble utgitt 20. november 1938:



En annen slik formel (som tilskrives Platon) er $(2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$ for $n \geq 2$.
Utforsk også denne formelen, finnes det for eksempel talltripler som framkommer ved begge formler?

5. Finn flere par av vennskapelige tall.

6. Det finnes også en rekke regler for å finne vennskapelige tall. Den følgende regelen finnes i Beiler (1964):

Ta en potens av 2, for eksempel 2^x der x er større enn 1. Lag tre tall

$$a = 3 \cdot 2^x - 1$$
$$b = 3 \cdot 2^{x-1} - 1$$
$$c = 9 \cdot 2^{2x-1} - 1$$

Hvis disse er primtall så er $2^x ab$ og $2^x c$ vennskapelige tall. Utforsk denne regelen.

Litteratur

Beiler, A.H. (1964) *Recreations in the Theory of Numbers – The Queen of Mathematics Entertains*. New York: Dover.

Brun, V. (1964) *Alt er tall*. Oslo: Universitetsforlaget

Herz-Fischler, R. (1998) *A Mathematical History of the Golden Number.* Mineola, NY: Dover.

Huntley, H. E. (1970) *The Divine Proportion*. New York: Dover.

Katz, V.J. (1993) *A History of Mathematics. An introduction* New York: HarperCollins College Publishers