Joker-matematikk

De fleste matematikklærere er på leting etter problemstillinger fra dagliglivet som både har et solid læringspotensial og som kan fange elevenes interesse. Utgangspunktet for denne artikkelen er et inntrykk av at en del spill, kanskje særlig de som er kjent fra TV, ikke trenger ytterligere reklame for å få oppmerksomhet, og at flere av dem i tillegg inneholder interessant matematikk. I denne artikkelen har jeg valgt å se nærmere på Joker, som er et tilleggsspill til Lotto og Viking-Lotto. Min ambisjon har ikke vært å foreslå et ferdig undervisningsopplegg, men heller å inspirere lærere til å bruke og eventuelt videreutvikle enkeltelementer slik at det passer i deres undervisningssituasjon.

For å delta i Joker, må man først bli registrert og få tildelt et spillerkort med et unikt nummer. De fleste som deltar, gjør det med drømmen om å bli såkalt Joker-kandidat. Joker-kandidaten, som er vinner av premiegruppe 1, trekkes ut som i et vanlig lotteri og får muligheten til å vinne et større premiebeløp ved å gjøre noen valg/gjetninger i en direkte TV-sending (men kan også overlate valgene til en av Norsk Tippings datamaskiner). I januar 2014 sto den utvalgte Joker-kandidaten overfor følgende premiestige:

1. premie: 2 941 000  
 2. premie: 2 118 000  
 3. premie: 1 294 000  
4. premie: 971 000  
 5. premie: 735 000  
6. premie: 588 000

6. premie er et garantibeløp, men det finnes gode muligheter for å komme seg høyere opp på premiestigen. Da må det, med utgangspunkt i en tilfeldig femsifret grunnlagskombinasjon, for eksempel 40265, gjøres noen riktige gjetninger knyttet til sifrene i denne kombinasjonen. Gjetteprosessen starter til høyre, i dette tilfellet ved sifferet 5, og beveger seg mot venstre. Det første Joker-kandidaten skal gjette på, er om et nytt tilfeldig siffer, som datamaskinen skal lage, vil ligge høyere eller lavere enn 5. Siden det finnes fem siffer under 5 og fire siffer over 5, lønner det seg strategisk sett å gjette på at datamaskinen kommer med et som er lavere. Programlederen spør gjerne om kandidaten vil gå «opp» eller «ned», og svaret bør da i dette tilfellet være «ned».

Hovedprinsippet i spillet er at kandidaten faller ett premienivå ved feil gjetning og øker ett premienivå ved riktig gjetning, men siden det er ikke mulig å falle lavere enn 6. premie, vil en feil gjetning ved det første sifferet, som altså i dette tilfellet er 5, ikke gjøre noen endring. Hvis datamaskinen gir det samme sifferet som i kombinasjonen, regnes både «ned» og «opp» som riktige gjetninger.

Hvis man inkluderer et eksempel på en datamaskintrekningen til kombinasjonen 40265, kan det se slik ut:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Grunnlagskombinasjon | 4 | 0 | 2 | 6 | 5 |
| Strategisk riktig gjetning | Opp | Opp | Opp | Ned | Ned |
| Datamaskintrekning/Fasit | 4 | 1 | 5 | 8 | 2 |
| Riktig/Feil | Riktig | Riktig | Riktig | Feil | Riktig |

Her vil kandidaten etter to valg være tilbake på 6. premie. De tre siste valgene er riktige og gir tre opprykk som ender med 3. premie.

Ved å gjøre riktige valg for hvert av de fem sifrene, kan man til slutt ende med toppremien fordi man da har rykket opp ett premienivå for hvert riktig valg, men det finnes en snarvei. Grunnen til at spillet heter Joker, er at Jokeren, hvis den trekkes, bringer kandidaten direkte til toppremien, uansett hvor langt prosessen har kommet. Jokeren ligger ikke noe bestemt sted (slik man kan få inntrykk av fra programledernes språkbruk), men er med som en 11. mulighet hver gang datamaskinen gjør en ny trekning, og den er like sannsynlig som de andre ti mulighetene. Hvis Jokeren trekkes, har det altså ingen betydning om kandidaten har gjettet «opp» eller «ned».

*Strategier knyttet til premiegruppe 1*

Siden det ifølge Norsk Tipping (nettsidene) er omtrent 500 000 ulike spillerkortnummer involvert i en vilkårlig Joker-trekning, vil forholdet 1:500 000 også være et anslag på sannsynligheten for å bli plukket ut som Joker-kandidat. For en gjennomsnittlig Joker-spiller er det med andre ord svært usannsynlig å oppnå premiegruppe 1. En spiller kan imidlertid kjøpe seg flere deltakelser og på den måten øke sannsynlighetsvekten til sitt eget spillerkortnummer.

Når en spiller først har vært så heldig å bli valgt ut som Joker-kandidat, er det ikke så veldig kompliserte strategiske valg som skal foretas. Det kan velges å gå «opp» eller «ned», men reglene sier at kandidaten også har anledning til å stanse underveis i spillet og ta med seg oppnådd premie.

Hvis kandidaten ikke trekker seg underveis, er det strategisk optimalt å gå «opp» på et siffer som er høyst 4 og å gå «ned» på et siffer som er minst 5. Dette er den strategien som Norsk Tippings datamaskiner (Ask og Embla) benytter når kandidaten ikke selv deltar.

Litt mer omtanke er påkrevd når kandidaten skal avgjøre om det er fordelaktig å avbryte spillet underveis. Det gjelder særlig de tilfellene da det allerede er foretatt fire vellykkede valg, slik at andrepremien er sikret. Avstanden opp til førstepremien er vanligvis omtrent like stor som avstanden ned til tredjepremien. Hvis førstepremien oppnås ved å ta stilling til «opp» eller «ned» på grunnlag av en 4-er eller en 5-er, vil det være en sannsynlighet på 4/11 (36 %) for å tape et betydelig beløp siden det i begge disse tilfellene vil være fire ugunstige muligheter av i alt elleve. Det er interessant å legge merke til at relativt få Joker-kandidater lar seg stoppe av en såpass høy risiko for å tape et beløp i millionklassen.

Under forutsetning av at Joker-kandidaten ikke trekker seg underveis og velger å spille «optimalt», som Norsk Tippings datamaskiner, vil jeg nå ta for meg noen andre problemstillinger som kan være av interesse.

*Sannsynligheten for Joker*

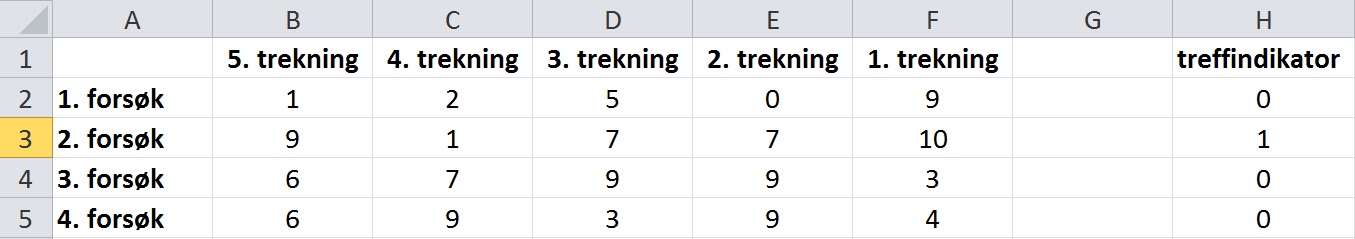
Den som har fulgt med på Joker-trekningene, vil ha oppdaget at Jokeren trekkes relativt ofte. Mer matematisk uttrykt, kan man spørre hvor stor sannsynlighet det er for hendelsen , nemlig at Jokeren dukker opp i løpet av de (inntil) fem trekningene? er standard notasjon for sannsynligheten for . står for den komplementære hendelsen, at Jokeren ikke dukker opp i løpet av de fem trekningene. Siden Jokeren enten vil dukke opp eller ikke dukke opp, gjelder at , som også kan uttrykkes ved . Dette er en nyttig formel fordi det i mange tilfeller (også dette) viser seg å være lettere å bestemme direkte enn . Siden trekningene må antas å være uavhengige, blir sannsynligheten for å bomme i alle trekningene . Da har jeg brukt en regel som sier at det er lovlig å multiplisere sammen sannsynlighetene til to (eller flere) hendelser hvis man vil finne sannsynligheten for at begge (alle) skal forekomme, gitt at de i tillegg er uavhengige. I dette tilfellet er det rimelig å anta at trekningene er uavhengige, slik at dette blir lovlig. Sannsynligheten for at Jokeren trekkes et eller annet sted blir derfor

.

Man kan også tenke kombinatorisk. Når det skal velges fem objekter fra mengden M={0,1,2,..,9,Joker}, med tilbakelegging, på en slik måte at rekkefølgen har betydning, kan dette gjøres på 115 måter fordi det er 11 muligheter hver gang. Da er den såkalte produktregelen benyttet. Hvis man skal bomme på Jokeren i alle trekningene, har man 10 muligheter for det i hver trekning, noe som gir 105 kombinasjoner totalt (igjen ved produktregelen). Sannsynligheten for finnes derfor ved .

*Excel-simulering av Joker-sannsynlighet*

Å foreta simuleringer og beregninger av relativ frekvens (antall forekomster dividert med antall forsøk) for å anslå en viss sannsynlighet, er en praktisk tilnærming mange elever har sansen for. Hvis man skriver **=tilfeldigmellom(0;10)** i en Excel-celle, foretas en tilfeldig trekning blant tallene fra 0 til 10. Man kan da tenke seg at tallet 10 representerer Jokeren. Hvis det fem ganger på rad genereres et tall forskjellig fra 10, svarer det til at Jokeren ikke dukker opp. Tabell 1 viser en situasjon der det er foretatt fire serier med fem tilfeldige trekninger.



Tabell 1

I B2 skriver man **=tilfeldigmellom(0;10)**, en formel som kopieres horisontalt frem til F2. Deretter skriver man **=hvis(eller(B2=10;C2=10;D2=10;E2=10;F2=10);1;0)** under treff-indikator, i celle H2. Da får man et ettall hvis det er minst ett 10-tall i området B2-F2 og en null ellers. Man kan så markere hele feltet B2-H2 og kopiere vertikalt så langt man vil for å få nye simuleringer og nye verdier på treffindikatoren. I en test, der det ble kjørt 10 000 forsøk ti ganger, inneholdt 37959 av dem tallet 10, altså Joker. For å få talt opp forekomstene på de første 10 000 forsøkene, skrev jeg: **=antall.hvis(H2:H10001; «1»)** i en celle.

På 100 000 forsøk fikk jeg altså 37959 forekomster, noe som betyr at Joker-sannsynligheten kan estimeres med den relative frekvensen 37959/100000=0,37959, som ligger nær den teoretisk korrekte verdien, .

*Joker-kandidatens premiesjanser*

La oss nå si at en Joker-kandidat har bestemt seg for ikke å trekke seg underveis og ellers følge «optimal strategi» for valgene «opp» og «ned». Anta også at grunnlagskombinasjonen, som enhver Joker-kandidat må forholde seg til, ennå ikke er trukket. Hvor stor sannsynlighet er det da for at Joker-kandidaten til slutt havner i de ulike premienivåene (1.-6. premie)?

Førstepremien kan oppnås enten ved at Jokeren trekkes underveis i spillet eller ved at man gjør fem riktige valg uten at Jokeren er involvert. Siden det allerede er påvist at Jokeren trekkes med sannsynlighet , vil jeg konsentrere meg om tilfeller der Jokeren ikke trekkes.

Sett grunnlagskombinasjonen til . Hvor stor sannsynlighet er det for Joker-kandidaten å velge riktig når man har kommet til for eksempel (eller et vilkårlig av de andre sifrene)? En mulig reaksjon er at man vanskelig kan vite noe om det siden er ukjent. Minste og største verdi for er henholdsvis 0 og 9. For å komme videre, må man dele opp den sammensatte hendelsen «å velge riktig og Jokeren trekkes ikke» fordi det er mange måter å velge riktig på, avhengig av .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| =utgangspunkt | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| P(«velge riktig») | 10/11 | 9/11 | 8/11 | 7/11 | 6/11 | 6/11 | 7/11 | 8/11 | 9/11 | 10/11 |

Tabell 2

Sannsynligheten for hvert av sifrene 0-9, som kan være, er 1/10. Det betyr at den samlede sannsynligheten for «å velge riktig og samtidig at Jokeren ikke trekkes», blir

for å gjøre et riktig valg. Siden førstepremien i premiegruppe 1 oppnås ved å gjøre fem riktige gjetninger (når Jokeren ikke skal dukke opp i noen av dem), blir sannsynligheten for dette Den samlede sannsynligheten for å oppnå førstepremien i Jokerspillet er derfor , og man kan forstå at noe av Joker-spillets suksess henger sammen med denne betydelige sannsynligheten. For å oppnå andrepremie, må den første gjetningen være feil, mens de fire etterfølgende må være riktige. Sannsynligheten for at dette inntreffer blir .

Situasjonen er mer uoversiktlig for de øvrige trinnene på premiestigen, men det finnes ulike metoder som kan hjelpe til med å holde orden på alle mulige kombinasjoner av «riktig valg» og «galt valg» for de fem sifrene, eller metoder som automatisk holder orden på dette. Her nøyer jeg meg med å referere resultatene i Tabell 3.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Premienivå | 1. premie | 2. premie | 3. premie | 4. premie | 5. premie | 6. premie |
| Sannsynlighet | 0,583 | 0,051 | 0,216 | 0,054 | 0,077 | 0,019 |

Tabell 3

Det er verdt å legge merke til at det bare er 1,9 % sjanse for å havne nederst på premiestigen, noe som helt sikkert er funnet gunstig med tanke på spilleinteressen.

*Andre premiekategorier*

Det er opplagt at Joker-spillets popularitet også har sammenheng med at andre spillere enn Joker-kandidaten har mulighet for å vinne pengepremier. En Joker-spiller får, avhengig av hvor mye vedkommende betaler (antall deltakelser), generert et antall femsifrede rekker, der hvert siffer er tilfeldig valgt mellom 0 og 9. Det er antall siffer på rett plass sammenliknet med fasiten, en spesiell femsifret sekvens generert av Norsk Tipping, som er avgjørende for hvor stor premie som kan forventes. For å havne i premiegruppe 2, må alle sifrene stemme og være på rett plass. Premiegruppe 3 svarer til eksakt fire på rett plass, og slik fortsetter det ned til premiegruppe 5, der det kreves to siffer på rett plass.

Matematisk sett er det ingen grunn til å unngå tilfellene med én og ingen overensstemmelser, selv om det naturlig nok ikke er premier å hente der.

La oss si at Norsk Tippings femsifrede fasit er 00523. Det er altså antall siffer på rett plass i forhold til denne sekvensen som avgjør om noen av dine rekker (hvis du har spilt Joker) vil gi premie. Jeg vil nå beregne sannsynlighetene for at antall siffer på rett plass i en vilkårlig tippet rekke er 0, 1, 2, 3, 4 og 5.

*Ingen rette*For ikke å få noen rette, må man (i rekkefølge fra venstre mot høyre)

bomme på 0 – bomme på 0 – bomme på 5 – bomme på 2 – bomme på 3

Siden sannsynligheten for å bomme på et bestemt siffer er 9/10, blir sannsynligheten for at man bommer på alle fem sifrene (9/10)5=0,59049.

*Én rett*Dette er litt vanskeligere å håndtere enn ingen rette. For eksempel vil forløpet

treffe på 0 – bomme på 0 – bomme på 5 – bomme på 2 – bomme på 3

være et eksempel på «én rett». Vi kan betegne det TBBBB, der T betyr «treff» og B betyr «bom». Sannsynligheten P(TBBBB) blir (1/10)·(9/10)4=0,06561. Men det ene sifferet som treffer, kan forekomme i fem posisjoner, slik at også BTBBB, BBTBB, BBBTB og BBBBT må regnes med. Dette betyr at sannsynligheten for nøyaktig én overensstemmelse blir 5·(1/10)·(9/10)4=0,32805.

*To eller flere rette*Den samlede sannsynligheten for én eller ingen rette er 0,59049+0,32805=0,91854, så da gjenstår det å fordele den resterende «sannsynlighetsmassen», altså 1-0,91854=0,08146, på de fire premiegruppene.

I beregningen for nøyaktig ett treff endte det med uttrykket 5·(1/10)·(9/10)4. Her står 5-tallet for antall plasseringer man kan gjøre for den ene T-en når den skal settes opp i rekkefølge sammen med fire B-er. Videre forekommer faktorene 1/10 og 9/10 henholdsvis én gang og fire ganger fordi P(T)=1/10 og P(B)=9/10 og fordi det er én T og fire B-er.

Hvis man ser på sannsynligheten for akkurat to treff (og dermed tre bom), kan man uttrykke sannsynligheten for dette slik:

P(akkurat 2 treff)=

Eksponentene 2 og 3 kan forklares med at det skal være to treff og tre bom, men hva betyr uttrykket (som leses «5 over 2»)? Det betyr i denne sammenheng antall ulike rekkefølger man kan lage med 2 T-er og 3 B-er (som er 5 symboler til sammen). Dette er et eksempel på en *binomisk koeffisient*, som blant annet lar seg finne ved hjelp av Pascals talltrekant:

osv

Et av de mest karakteristiske trekkene ved denne trekanten er at en binomisk koeffisient finnes ved å addere nabokoeffisientene i rekka over. Det betyr for eksempel at

Siden 10 ikke er så høyt tall, er det ingen umulighet å kontrollere at antall rekkefølger med to T-er blant tre B-er blir nettopp 10:

TTBBB, TBTBB, TBBTB, TBBBT, BTTBB, BTBTB, BTBBT, BBTTB, BBTBT, BBBTT,

som viser at det er 10 rekkefølger med 2 T-er og 5-2=3 B-er. Sannsynligheten for akkurat to treff blir derfor 10·(1/10)2·(9/10)3=0,0729.

Nå går det lettere å finne sannsynligheten for 3, 4 og 5 treff.

P(akkurat 3 treff)=

fordi Pascals trekant viser at . På tilsvarende måte blir P(akkurat 4 treff)=0,00045 og P(treff på alle 5)=0,00001. Disse resultatene er samlet i Tabell 4.

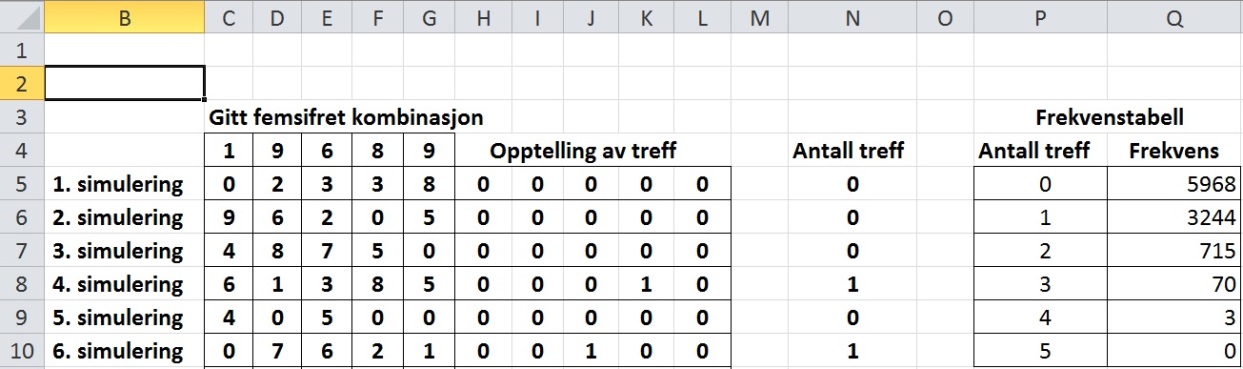
|  |  |
| --- | --- |
| **Gruppering** | **Sannsynlighet** |
| Ingen på rett plass (ingen premie) | 0,59049 |
| Én på rett plass (ingen premie) | 0,32805 |
| To på rett plass (premiegruppe 5) | 0,07290 |
| Tre på rett plass (premiegruppe 4) | 0,00810 |
| Fire på rett plass (premiegruppe 3) | 0,00045 |
| Fem på rett plass (premiegruppe 2) | 0,00001 |

Tabell 4

Den høyre kolonnen i Tabell 4 kalles en sannsynlighetsfordeling fordi den tar den totale «sannsynlighetsmassen», som er 1, og fordeler på de forskjellige mulige tilfellene. En slik fordelingstype er imidlertid så vanlig at man har gitt den et eget navn, *den binomiske fordelingen.* Det er to parametere man må spesifisere i den binomiske fordelingen, og det er *n*=antall uavhengige forsøk (i dette tilfellet totalt antall siffer) og *p* som er sannsynligheten for treff (i dette tilfellet 1/10), ofte kalt suksess-sannsynligheten. Hvis *X* betegner antall treff på *n* forsøk/siffer med en treffsannsynlighet på *p* i hvert forsøk/siffer, vil sannsynligheten for akkurat *k* treff bli

.

Se for eksempel Løvås (2013, s. 172-176) for mer stoff om binomisk fordeling.

Selv om den binomiske fordelingen er innen rekkevidde i Excel, vil nok mange elever ha større utbytte av å utnytte simuleringsmulighetene. Man må vanligvis gjennomføre svært mange trekninger for oppnå registreringer der alle sifrene treffer. Tabell 5 viser til venstre seks simuleringer, der resultatene sammenliknes med den gitte kombinasjonen 19689. Antall treff, basert på 10 000 simuleringer, er gjengitt i frekvenstabellen til høyre.   
  
   
  
 Tabell 5

For å få fram liknende resultater, kan man for eksempel gjøre følgende:

1. Generer den rekka som skal anses som gitt ved å skrive **=tilfeldigmellom(0;9)** i celle C4 og deretter kopiere C4 til feltene D4-G4. Fjern så bindingen til de underliggende formlene ved å kopiere C4-G4 og deretter lime inn samme sted som uavhengige verdier (alternativer for innliming).
2. I C5 genereres også et tilfeldig tall mellom 0 og 9 på samme måte som i C4, med en etterfølgende kopiering til området D5-G5. I H5 skriver man så **=hvis(C$4-C5=0;1;0)**Da vil man registrere 1 ved «treff» og 0 ved «ikke treff». Deretter kopieres H5 til området I5-L5.
3. For å samle opp antall treff i den første simulerte rekka, skriver man i N5 **=summer(H5:L5)**
4. Man kan så skaffe seg for eksempel 10 000 simuleringer ved først å markere hele området C5-N5 og deretter kopiere vertikalt ved på vanlig måte å dra korset i nedre høyre hjørne.
5. Tilsvarende frekvenser som til høyre i Tabell 4 kan man få ved først å fylle inn P-kolonnen med de mulige verdiene for antall treff og deretter skrive **=antall.hvis(N$5:N$10004;P5)** i Q5. Til slutt kopieres Q5 til området Q6-Q10.

For 1 000 000 simuleringer ble frekvensene i mitt tilfelle 590 627, 328 024, 72 826, 8 060, 446 og 9 for henholdsvis 0, 1, 2, 3, 4 og 5 treff, noe som samsvarer godt med de teoretiske sannsynlighetene i Tabell 4.

Det kan for øvrig bemerkes at Norsk Tipping på sine nettsider opererer med litt høyere premiesannsynligheter, se <https://www.norsk-tipping.no/produktinfo/vinnersannsynlighet>. Deres tall samsvarer med en situasjon der de femsifrede kombinasjonene ikke kan ha null som førstesiffer. Slik reglene nå er formulert (september 2014) og slik jeg har sett dem praktisert, er det imidlertid ti muligheter for hvert siffer.

*Sluttkommentar*

I skolesammenheng er mye gjort hvis man oppnår elevenes oppmerksomhet og interesse. Beregning, eksperimentering og simulering med basis i sannsynlighetsrelaterte problemstillinger fra spill og dagligliv tror jeg er undervurdert i så måte. I tillegg til at slike problemstillinger i seg selv er motiverende, kan også deler av elevenes digitale kompetanse være relevant med tanke på å forstå sannsynlighetsregning. Det populære spillet Minecraft har for eksempel gitt mange elever et naturlig forhold til tilfeldige trekninger ved at de har lært seg enkel Java-kode. Mange kjenner også til nettstedet [www.random.org](http://www.random.org), der random-generatoren er basert på atmosfærisk støy. Her finnes diverse lenker med interessante anvendelser. Å trekke inn og anerkjenne slike elementer fra elevers kunnskaps- og interessesfære vil gi motivasjon og faglig grunnlag for arbeid mot en dypere forståelse av sannsynlighetsbegrepet, selv om man selvsagt også vil måtte benytte mer tradisjonelle aktiviteter og virkemidler for å nå et slikt mål.

**Referanseliste**

Løvås, G.G. (2013). *Statistikk for universiteter og høgskoler* (3. utgave). Oslo. Universitetsforlaget.

**Kontaktopplysninger**:  
Navn: Kai Forsberg Kristensen  
Arbeidssted: Høgskolen i Telemark  
Epost: kai.f.kristensen@hit.no