Korden

Noen ganger skjer det et kupp, et hyggelig og positivt kupp. Et slikt kupp har redaksjonen for TANGENTEN vært vitne til da vi skulle lage dette heftet i TANGENTEN. Lesere og bidragsytere har overtatt. Det stormet inn med så mange gode bidrag fra IKT-fronten at vi 'måtte' lage et temahefte om matematikk og IKT på grunnlag av de innsendte bidragene. Det er flott å se at leserne brenner for faget og vil dele sine idéer med andre. Samtidig vet vi hvor viktig tema IKT er i matematikkundervisningen. Her finnes helfrelste datafriker som helst hadde sett klasserommet skiftet ut med et nettlandskap der elvene, hvor de enn akkurat nå måtte befinne seg, kan delta i undervisningen med sine avanserte elektroniske hjelpere. Der finnes også dem som helst vil drive på 'gamlemåten' og ikke la lommeregner og PC overta for solide kunnskaper. Å finne en gyllen middelvei og å kunne bruke IKT på reflektert og kanskje forsiktig måte krever mye av lærere. Det krever at de kjenner verktøyene godt men det krever også at de kjenner alternativene – papir og blyant metodene – godt. Det krever fleksibilitet å se om bruk av data eller lommeregner er fordelaktig i situasjonene eller for de elevene som er aktuelle akkurat nå. Muligheten til å kunne bruke IKT stiller dermed større krav til lærere enn det vi har opplevd før.

To andre store temaer beskjeftiger oss lærere for tiden: de nye læreplanene og de nasjonale prøvene. Et viktig aspekt i debatten er muligens ikke tilstrekkelig belyst og det er sammenhengen mellom begge. På den ene siden ser vi at kompetansebegrepet og matematiske kompetanser som vurderingsgrunnlag nå også preger læreplantenkningen. På den andre siden hører vi stemmer som advarer mot en altfor åpen og diffus læreplan. En slik plan vil nemlig medføre at andre styringsinstrumenter – og det er i dette tilfellet de nasjonale prøvene og lærebøkene – faktisk vil få en større betydning for faget og undervisningen. En slik fare kan muligens være større enn faren for at læreplanen kan være for detaljert og styrende. Her er det to alternativer: Vi kan prøve å utvikle en tydelig og klar læreplanen. Denne blir tross alt til etter et demokratisk mønster med høringsrunder der – i alle fall i teorien – også den enkelte lærer, organisasjonene og større institusjoner har en viss mulighet til påvirk-

Christoph Kirfel

Geir Botten

Om reflektert og ureflektert moromatematikk

De siste årene har matematikkfaget gjennomgått en omfattende fornying, og fornyingen har så avgjort vært nødvendig. Tidligere var den rådende undervisningsformen i matematikk at læreren gjennom tavleundervisning presenterte nytt fagstoff og viste eksempler på hvordan oppgaver skulle løses. Deretter satt elevene med sine lære- og oppgavebøker og løste tilsvarende eller lignende oppgaver som de læreren hadde vist på tavla. Nesten alle matematikktimer hadde denne formen. Mange lærere tilpasset oppgavene til elevene, og lærebøkene støttet opp dette gjennom systemer for å markere vanskegraden på oppgavene. Men det var liten variasjon i arbeidsmåter og lite rom for aktivitet utover det å løse matematikkoppgaver. Kreativitet og skapende aktiviteter var det lite av i matematikktimene.

Hvis en kunne få innblikk i alle klasserom og all matematikkundervisning her i landet nå i dag, vil jeg tro at en deduktiv arbeidsmåte som er beskrevet ovenfor, fortsatt har en stor og kanskje også fremdeles dominerende plass i matematikkundervisningen. Men i stadig flere klasserom foregår det en helt annen matematikkundervisning. Læreren er mer inspirator, tilrettelegger og veileder, og elevene langt mer aktive og skapende i sin egen læring. Ensformige og for mange elever kjedelige matematikktimer, er erstattet med artige timer med mange slags aktiviteter som lek, spill, konstruksjons- og byggevirksomhet og ulike typer skapende virksomhet, gjerne i samhandling mellom elevene og mellom lærer og elever. Moromatematikk kan være en dekkende betegnelse på mye av det som foregår i mange klasserom.

Vi er mange som har bidratt til denne fornyingen av matematikkfaget. Tidsskriftet TANGENTEN har presentert en rekke idéer og tips til aktiviteter og artige opplegg. LAMIS har, både gjennom sine sommerkurs og aktiviteter rundt om i landet og temahefter knyttet til matematikkens dag, vært sentral. Det nasjonale senteret for matematikk i opplæringen har hatt fokus på fornying av matematikkfaget i retning av mer aktivitet og kreativitet helt fra oppstarten. Og vi er flere personer som har holdt kurs og vært veiledere i mer skolebaserte satsinger på fornying av faget. På mange forskjellige måter har vi

Geir Botten er førstelektor ved Høgskolen i Sør-Trøndelag og programansvarlig for mastergradsutdanningen der.
geir.botten@hist.no

bidratt til at vi i dag ser et helt annet matematikkfag enn for bare få år siden.

Samtidig som jeg har vært en sentral bidragsyter, har jeg også opplevd en stadig stigende uro for utviklingen. Jeg synes å registrere at det flere steder foregår for mye av det jeg vil kalle ureflektert moromatematikk. Jeg blir mer og mer tvilende til om denne ureflekterte moromatematikken fører til læring i faget. Jeg synes å registrere at det er en overdreven tro på at aktivitet i seg selv fører til læring av matematikk, og at dersom en bare har det moro i faget, vil det automatisk medføre at elevene får den nødvendige indre motivasjon og lyst til å lære matematikk (også de formelle sidene ved faget).

Det betyr ikke på noen måte at vi bør tilbake til situasjonen med en deduktiv undervisning i tråd med beskrivelsen innledningsvis. Det er absolutt nødvendig med mer allsidig aktivitet og langt flere matematikktimer der elevene opplever å ha det artig, der de er engasjerte og får lov til å være kreative og skapende. Aktivitet er imidlertid ikke nok. Moro er ikke nok. Deweys uttrykk 'learning by doing' vil jeg like å erstatte med 'learning by doing and reflecting'. Jeg er ingen ekspert på Dewey, og har ikke satt meg inngående inn i originallitteraturen. Men jeg har forstått det slik at en lettvint forståelse av uttrykket 'learning by doing' i retning av at bare vi lar elevene drive med aktiviteter, vil de tilegne seg også mer teoretisk kunnskap, ikke er i samsvar med mye av det Dewey selv skrev. Han understreker flere steder at aktivitet i seg selv ikke er tilstrekkelig. Aktiviteten må knyttes til refleksjon, både hos den enkelte elev og i samarbeid og samkvem med andre. Samhandling og refleksjon sammen med andre var kanskje ikke begrep som ble benyttet på den tiden, men de kan være mer dekkende for det Dewey sto for enn en bokstavelig oppfatning av uttrykket 'learning by doing'.

Aktivitet er viktig både som motivasjon for læring og som en forutsetning for og del av elevers læring. Men for meg ser det litt for ofte ut som aktivitetene blir isolert fra den daglige undervisningen. Aktivitetene blir en slags happening som brukes som en legitimering for å drive med nokså tradisjonell undervisning i de fleste matematikktimene. Når jeg snakker med lærere eller elever, hører jeg ofte utsagn som:

- Nå har vi vært ute og hatt det moro, så nå må vi inn å jobbe i bøkene.
- Matematikkens dag var kjempeartig, men jeg forstår ikke helt hva den har med matematikk å gjøre.
- Spill og lek kan være viktig som motivasjon, men det er arbeid med oppgaveløs-

ning som er det viktige i matematikk.
- Hvis dere er snille nå, skal dere få spille i mattetimen på fredag.

Slike utsagn viser at vi i mange klasserom har fått en situasjon der matematikkaktivitetene er løsrevet fra det daglige arbeidet i lære- og oppgavebøker. Da blir det også lett slik at aktivitetene blir en belastning på den måten at de tar mye tid fra den 'egentlige undervisningen'. Dette fører igjen til stressende situasjoner der en må rase gjennom matematikkbøkene, som fortsatt av mange oppfattes som pensum i faget. Slik sett kan ureflektert moromatematikk i enkelte klasserom nesten gjøre vondt verre.

En stor utfordring i tida framover er å utvikle den reflekterte moromatematikken. Vi trenger de gode eksemplene der elevene bygger opp kunnskap gjennom aktivitet, gjennom skapende og kreative prosesser, men der aktivitetene og prosessene kobles sammen med utvikling av også formelle matematikkunnskaper. I dette arbeidet er læreren helt sentral. Vi trenger kunnskapsrike, nysgjerrige og reflekterte lærere for å utvikle gode eksempler på læringssituasjoner som knytter sammen moromatematikken og den nødvendige refleksjonen for at matematikklæring skal skje. Jeg vet vi er mange som på ulike måter gjerne både vil og kan bidra i dette arbeidet.

Litteratur

[1] Dewey, J. (1938/1997). *Experience and Education* New York: Simon & Schuster

[2] Botten, G. (1999). *Meningsfylt matematikk – nærhet og engasjement i læringen*. Bergen: Caspar forlag

[3] Høines, M. J. (2003). Det skjer i mellomrommet I *Tangenten* 2/2003. Bergen: Caspar forlag

Anne Berit Fuglestad

Elektroniske arbeidsark i Cabri

Dynamisk geometri – her er det noe i bevegelse. Vi kan flytte på figurer eller dra i dem, forandre form eller størrelser. Vi starter i utgangspunktet med frie objekter: punkt, linje, linjestykker, sirkler og lignende. Disse kan flyttes fritt og forandre størrelse. Andre objekter konstrueres på grunnlag av disse, som skjæringspunkter, normaler på linjer eller punkt på et annet objekt. Noen av disse blir fast bestemt av konstruksjonen men andre kan flyttes i begrenset grad, som for eksempel punkt på en sirkel (punkt på objekt) kan bare flyttes på sirkelen. Konstruerte normaler, midtpunkt, sirkler følger med og er fortsatt normaler, midtpunkt og sirkler etter flytting. I denne artikkelen bruker jeg Cabri i eksemplene og viser til menyer i dette programmet. Vi finner lignende muligheter i andre programmer, som Geometers Sketchpad, Cinderella, Geonext og andre.

Dynamisk geometri gir gode muligheter for å legge opp undervisningen slik at elevene selv får anledning til å eksperimentere både med geometriske egenskaper og med sammenhenger mellom størrelser i geometriske modeller.

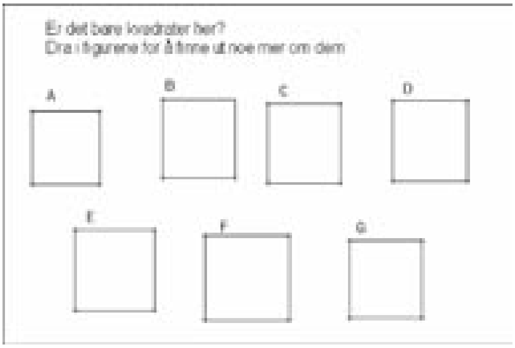
Anne Berit Fuglestad er høgskoledosent ved Høgskolen i Agder, abf@hib.no

I konstruksjoner med papir og blyant kan det ofte være vanskelig å se om en konstruksjon er korrekt utført. Ved å dra i figuren konstruert i Cabri vil det fort avsløres om den henger sammen.

I en artikkel i Tangenten nr. 2 (03) har jeg omtalt Elektroniske arbeidsark i Excel. Det er mulig å tenke på lignende måte med dynamisk geometri for å gi en problemstilling å arbeide med. Arbeidsarket kan gi en start på et problem uten at elevene trenger å gjøre konstruksjonene. Figurene viser utdrag av arbeidsark som omtales. Cabri-filene for disse kan lastes ned fra www.caspar.no/tangenten/2005/cabri.zip.

I noen tilfeller passer det godt å lage en ferdig eller halvferdig konstruksjon som elevene skal eksperimentere med for å gjøre seg kjent med de geometriske egenskapene figurene har eller undersøke sammenhenger. Fokus kan være på egenskaper ved figurene som skal utforskes mer enn konstruksjonen som bygger den opp. I slike tilfeller kan en ferdig figur være god å arbeide med, og så kan elevene senere få utfordringen å konstruere dem selv. Det er også mulig å legge forklarende tekster på arket for kommentarer eller oppgavetekster. Menyvalget ’Skriv kommentar' brukes til å sette inn tekstboks. Tekstboksen kan formateres ved å dra i den til den får passende størrelse. Husk å klikke på pekeren (pila) etterpå. 

Firkanter og kvadrater

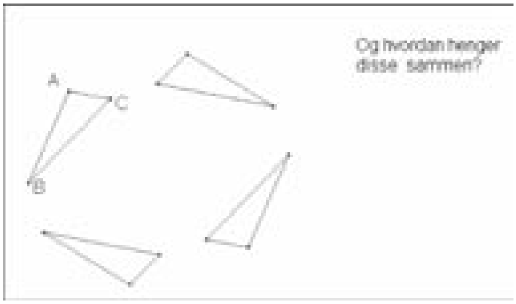


Er alle disse firkantene kvadrater? Se Arbark-Firkanter.fig. Ved å dra i figurene får vi avslørt at det ikke er bare kvadrater, men forskjellige egenskaper ved firkantene. For å forstå et begrep og kunne skille det fra andre trengs det erfaringer med begrepet, både objekter som passer inn og de som ikke passer inn under begrepet. Elevene får nyttige erfaringer gjennom utforsking av hvilke egenskaper de har og ikke har. En utfordring videre kan være å konstruere de forskjellige firkantene.

En slik utforskingsoppgave der elevene kan dra i figurene for å undersøke sammenhenger, kan gi en første innføring i bruk av Cabri. Denne oppgaven er også omtalt i en artikkel i Tangenten tidligere [2] der tema er hvordan konstruktivistisk syn på læring gir utslag i valg av dataprogrammer og oppgaver.

Speilinger

På arbeidsarket ArbarkSpeil.fig er det figurer som henger sammen etter bestemte regler. Det er mulig å dra i punktene A, B og C på en av trekantene og de andre følger med. Hvilke regler følger de?  Kan vi beskrive hvordan de henger sammen? Her er tanken at elevene skal eksperimentere og finne fram til sammenhengen og oppdage speilingslinjene. Her bruker vi menyvalget skjul/vis for å gjøre speilingslinjene usynlige. Det er på knappen helt til høyre i menyen.



Trekanten ABC speiles i en eller flere linjer. Figuren viser hvordan det ser ut med linjer normalt på hverandre. Med hensikt er speilingslinjene skjult her, slik at ikke løsningen gis direkte.

En nytt spørsmål kan være å be dem finne speilingslinjene. Dette er ikke lagt inn i arbeidsarket fordi det ville fortelle at dette er speiling, og dermed får ikke elevene oppdage det selv. Her tror jeg det er viktig å balansere informasjonen som gis direkte slik at vi ikke tar bort utfordringen for elevene.

Firkanter og sirkler

Et arbeidsark om sirkler og firkanter (Arbark-OmSirk.fig) er laget etter inspirasjon fra en artikkel av Hölzl [4]. Midtnormalene for en trekant skjærer hverandre i ett punkt, og det gir sentrum i den omskrevne sirkelen, den som går gjennom alle tre hjørnene i trekanten. Elevene så ikke noe behov for å begrunne eller bevise dette siden Cabri viser at det opplagt er slik. Ved å gi en mer åpen oppgave – å studere omskrevne sirkler for en firkant - ble det en helt annen oppgave, kanskje vanskeligere men mer stimulerende. Case-studien som Hölzl

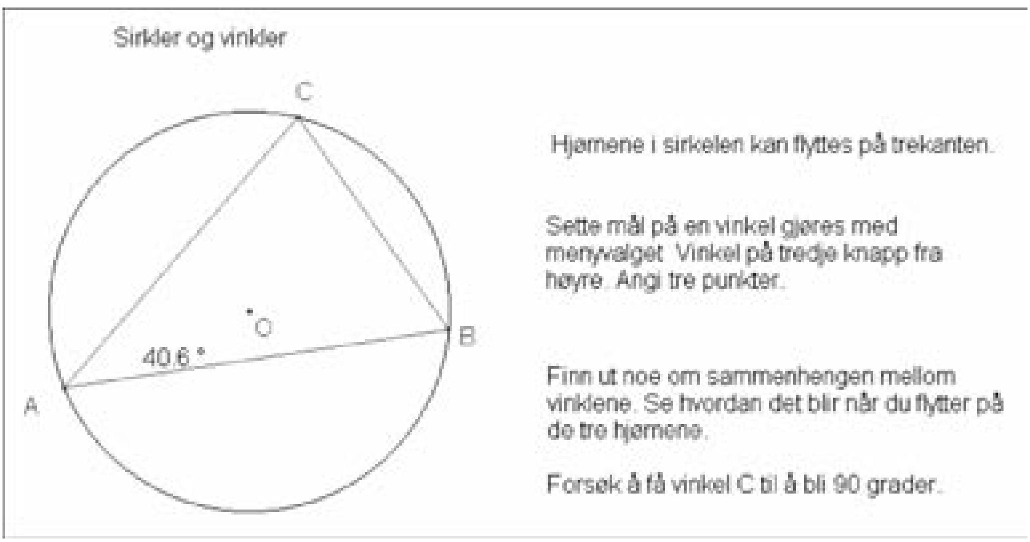
de kan gjøre det samme for denne. Bare første delen av arbeidsarket vises her.

En metode for å løse den første oppgaven i arbeidsarket kan være å bruke diagonalene. Dette viser seg ikke å fungere for den generelle firkanten. Så kommer spørsmålet om det går an i det hele tatt.

Jeg har lagt inn et siste tips – at det fins helt sikkert noen firkanter som har en omskrevet sirkel. Her er firkanten laget slik at hjørnene er på sirkelen. Oppgaven blir å finne ut mer. Her kan tips om å se på vinkler være aktuelt. Men det er ikke sikkert det er lurt å legge alle slike tips inn i arbeidsarket. Det er alltid en fare for at elevene leter seg fram til alle tips først og ikke får gleden av å oppdage sammenhengen selv. Det kan være en bedre strategi å holde noen spørsmål og nye utfordringer i reserve. Kanskje elevene selv kommer

beskriver viser at det fører til større engasjement og dypere utforsking av oppgaven.

Arbeidsarket (ArbarkOmSirk.fig) er lagt opp slik at elevene først ser på kvadrat og rektangel for å komme i gang. Lenger ned på arket kommer en annen firkant med spørsmål om



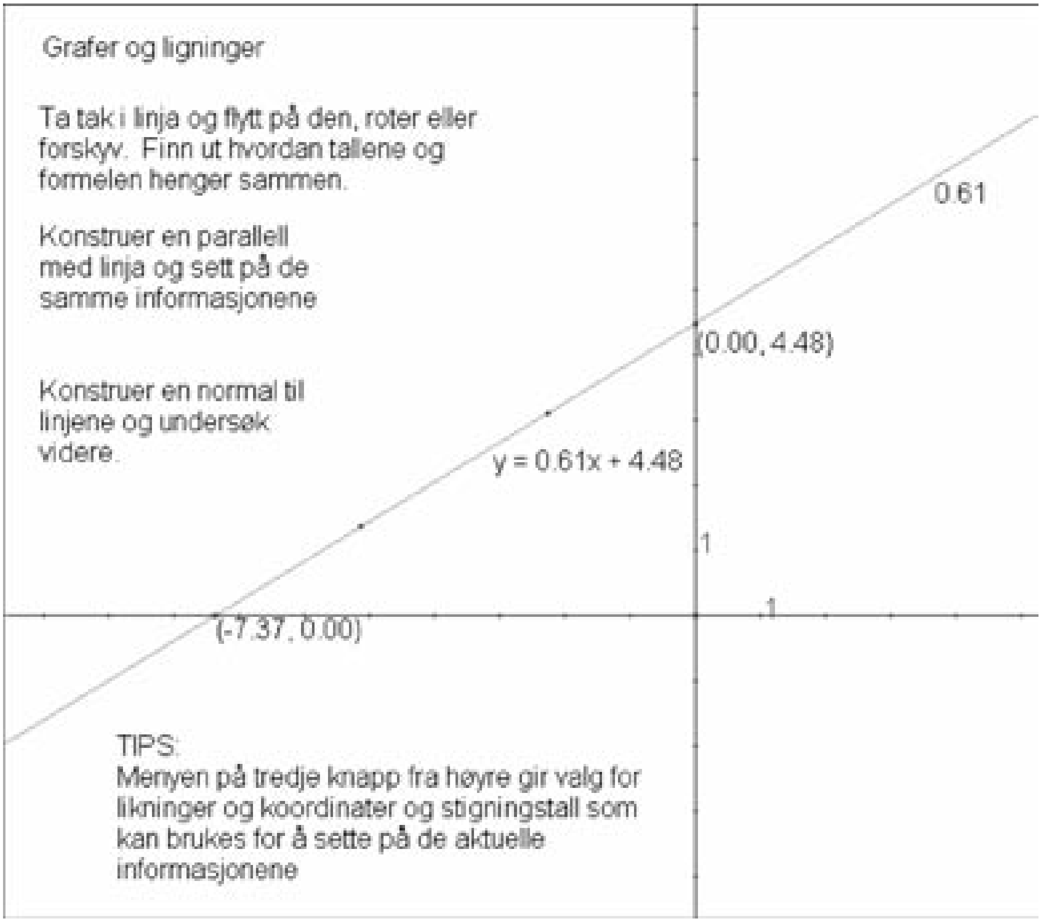
til å stille nye spørsmål? Dette har større verdi for videre utforsking og vil sannsynligvis virke motiverende på arbeidet. Vi bør stimulere dem til selv å stille spørsmål og finne ut av lignende oppgaver.

Vinkler i sirkelen

På arbeidsarket ArbarkVinkler.fig har vi først en trekant med hjørner på en sirkel. Vinklene kan måles, med verktøyet Vinkel på tredje knapp fra høyre, og oppgaven er å finne sammenhenger. Vinkelsum i en trekant kan for eksempel beregnes med 'Beregn (Kalkulator)', på tredje knapp fra høyre. Pek på tallene som skal inngå i beregningen, regneoperasjoner og så på ' = '. Svaret dras fra Kalkulatoren ut til tegneområdet for å vise resultatet. Resultatet blir nå oppdatert fortløpende når figuren forandres (se illustrasjoner forrige side).

Papir og blyant og eventuelt lommeregner kan supplere Cabri dersom det faller enklere i bruk. Det er ikke noe poeng å bruke dataprogrammer til alt, men heller utnytte muligheter for kombinasjoner av flere verktøy når det er enklere.

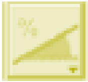
I den neste oppgaven er det en firkant med et hjørne i sentrum og de andre på sirkelen. Her kan vi finne ut noe om sentral- og periferivinkler og om summen av motstående vinkler. Siste punkt på samme arbeidsarket flytter et av punktene på sirkelen utenfor og vi studerer igjen sammenhenger. En annen mulighet kunne også være å se på vinkler i en firkant der alle hjørner er på sirkelen. Til slutt gis en

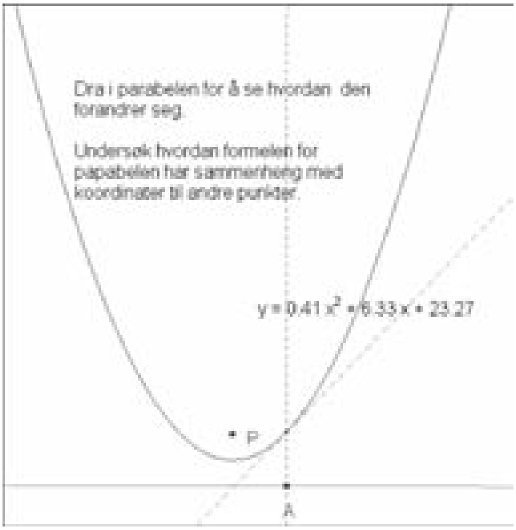


oppfordring til elevene om å finne andre oppgaver av lignende type og undersøke disse.

Hva betyr parametrene – funksjoner og grafer

I arbeidsarket vist på forrige side (ArbarkLiFormler.fig) er poenget å se sammenhenger mellom stigningstall, likningen for linja og skjæring med y-aksen. Vi kan tegne flere linjer og se på tilsvarende størrelser. Her er foreslått parallell og normal til ei gitt linje. Vi kan også starte med en gitt likning og spørre hvordan den vil gå og så forsøke å flytte linja slik at det passer. Menyvalgene 'Likninger og koordinater' og 'Stigningstall' på menyknapp nummer tre fra høyre har disse valgene.

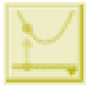




Vi kan lage et tilsvarende arbeidsark for andre kurver. For eksempel har ArbarkParabel.fig en parabel som er konstruert ut fra definisjonen, samme avstand fra ei linje og et punkt P. De stiplede linjene er hjelpelinjer for konstruksjonen. Vi kan bruke menyvalget 'Vis aksene' om vi trenger å se nærmer på hvor parabelen er plassert.

Trigonometriske funksjoner

Dette arbeidsarket ArbarkTrig.fig viser hvordan sinuskurva kan tegnes ut fra en geometrisk illustrasjon. På en sirkel med radius 1 setter vi av lengde langs sirkelen som tilsvarer x-koordinaten til P, buen AB. På figuren viser de stiplede linjene hvordan et punkt K på kurven konstrueres, med en normal fra P og en parallell fra punkt B på sirkelen. Idéen med arbeidsarket er å se på K når P flytter seg. For dette er det god hjelp å bruke menyvalget 'Spor På/Av' på andre knappen fra høyre. Jeg har valgt å bruke første koordinaten til P for å sette av lengde på sirkelen slik at også negative x-verdier blir riktige. 'Lokus' – geometrisk sted – gir hele kurven tegnet opp. Menyvalget fins på femte knapp fra venstre.



Arbeidsarket kan muligens egne seg godt til demonstrasjon i klassen først, og senere kan det være en utfordring for elevene å lage tilsvarende for cosinusfunksjonen. Mye er likt, men det er en liten utfordring i å sette av den riktige lengden langs y-aksen. Det er flere måter å løse dette på.

En ide som bruker noe av det samme som her, er å lage en illustrasjon som viser vinkel i grader på sirkelen og avstand i radianer langs x-aksen.

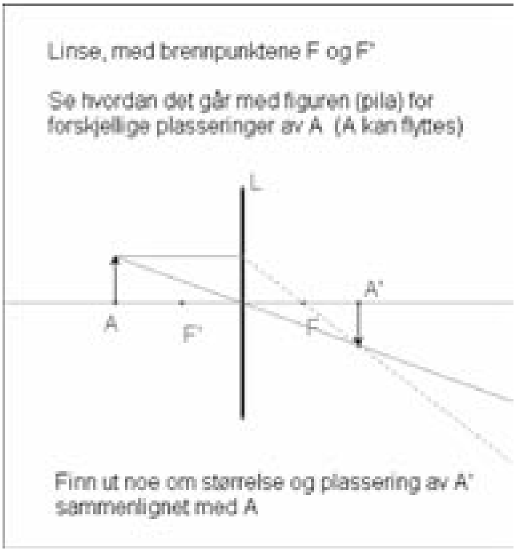
Det er også mulig i Cabri å tegne grafer til funksjoner gitt ved et uttrykk. Vi setter inn uttrykket i eksplisitt form, for eksempel: $x + \sin(x)$, med menyvalg 'Uttrykk'. Vi bruker 'Finn verdien til uttrykk' og bruker resultatet for y-koordinat. De aktuelle menyvalgene fins på andre og tredje knapp fra høyre. Nå kan grafen tegnes ved å bruke 'Lokus'. Vi kan senere redigere uttrykket for funksjonen og får automatisk tegnet graf for det nye uttrykket. Klikk på pila først og dobbeltklikk deretter på utrykket for å redigere det. For å zoome inn og ut kan vi ta tak i et av merkene på aksene og dra til det er passende størrelse.

Å tegne grafer på denne måten er kanskje nærmere det vi gjør med papir og blyant enn med et kurvetegningsprogram. Cabri kan gi en god start før vi tar i bruk programmer som har mange flere muligheter innebygd. Grafen kan også tegnes raskere, ved å velge 'Finn verdien til uttrykk', klikke på uttrykket og deretter et punkt på x-aksen. Kurven kommer da automatisk.

Linse og plasseringer av bildet

Dette eksemplet er en demonstrasjon av reglene for lysbryting i ei linse. Se ArbarkLinse.fig. Dette er aktuelt stoff både i matematikk og fysikk. Bildet i form av en vektor fra punkt A er tegnet opp. A kan flyttes for å se på forskjellige plasseringer, og vi får bildet i linsa ved A'. Brennpunktet F og linsa L kan også flyttes om det er ønskelig.

Her kan det være aktuelt å sammenligne resultatene med det vi ser gjennom ei konkret linse og forsøke å forklare de reglene vi finner.



Hvor må for eksempel A plasseres for at A' skal bli større? Kan vi forklare dette?

Med vilje er spørsmålene i arbeidsarket åpne slik at elevene kan utforske og ha mulighet til å danne egne hypoteser.

Arbeidsarkene skal gi startpunkter for utforsking og en hjelp til å komme i gang. Det gjelder å finne en balanse mellom enkle spørsmål og mer åpne utfordringer som elevene selv skal utvikle videre. Elevenes egne spørsmål vil ofte virke motiverende og stimulere utforsking. Det kan også tenkes at de finner andre regler og hypoteser enn det læreren tenker på.

Det fins flere kilder til arbeidsark eller ferdige Cabri filer laget med tanke på undervisning. Noen eksempler fins i *Data i matematikken* [2] og [1]. *Active geometry* er en samling med arbeidsark på papir og tilhørende filer i Cabri, utgitt av ATM, en engelsk matematikklærerforening [3]. På Cabri World 2004-konferansen presenterte en av forfatterne der også en stor samling med Cabri-filer for både grunnskole og videregående skole[5].
(fortsettes side 15)

Hans Jørgen Riddervold

Gratis dynamisk geometri med GEONExT

Å arbeide med dynamisk geometri går ut på å bruke datamaskinen til for eksempel å lage konstruksjoner som kan utforskes interaktivt: Eleven kan 'ta tak i' et punkt i konstruksjonen, og deretter se hvordan konstruksjonen forandrer seg avhengig av hvordan punktet «dras» omkring på skjermen. Dette åpner med andre ord for en alternativ visualiseringsmulighet, gjerne i kombinasjon med utforskningsaktiviteter eller diskusjon omkring de matematiske begrepene som inngår.

Det finnes flere programmer for dynamisk geometri, og Cabri Geometri II er nok blant de vanligste [3]. En opplagt ulempe er imidlertid at disse programmene fort koster mye penger for en skole: Å kjøpe Cabri så alle skolens lærere og elever kan bruke det, kan for eksempel koste fire, fem tusen kroner… Programmet GEONExT er derimot gratis for alle!

Aldersmessig vil alle elever fra i hvert fall mellomtrinnet til og med videregående skole kunne ha nytte av programmet. Og hvem vet – kanskje noen får sånn «dilla» på programmet at de vil installere det hjemme?

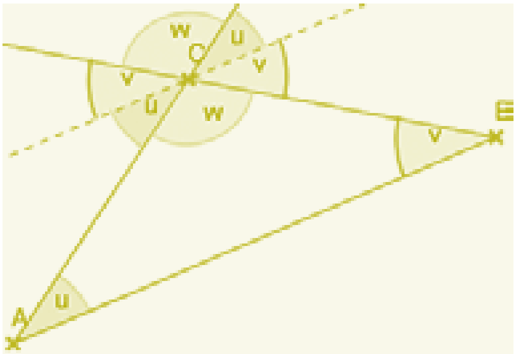
La oss starte med et par eksempler, før vi til slutt sammenligner programmene Cabri og GEONExT.

Hans Jørgen Riddervold arbeider ved Høgskolen i Bergen, Avdeling for lærerutdanning.
hans.jorgen.riddervold@hib.no

En utførlig versjon av denne artikkelen – blant annet med flere eksempler, utfyllende sammenligning og oversettelsestabell fra engelske geometrinavn til norske – kan du lese på Tangentens nettsider: www.caspar.no/tangenten/2005/geonext.pdf

Vinkelsummen i en trekant

Et av mine beste matematikkminner fra ungdomsskolen, er beviset for at summen av vinklene i en trekant blir 180 grader. Dette kan illustreres ved å lage en figur av denne typen i GEONExT, der den stiplede linjen er parallell med linjestykket *AB*:



På en slik figur kan eleven 'ta tak i' og flytte på punktene *A*, *B* og *C*. Da vil figuren endre seg i takt med forflytningene, og vi 'ser' at summen av de tre vinklene alltid ser ut til å bli 180°. Nå er ikke en interaktiv figur av denne typen i seg selv noe bevis for resultatet, men som illustrasjon av resultatet kan figuren være utmerket.

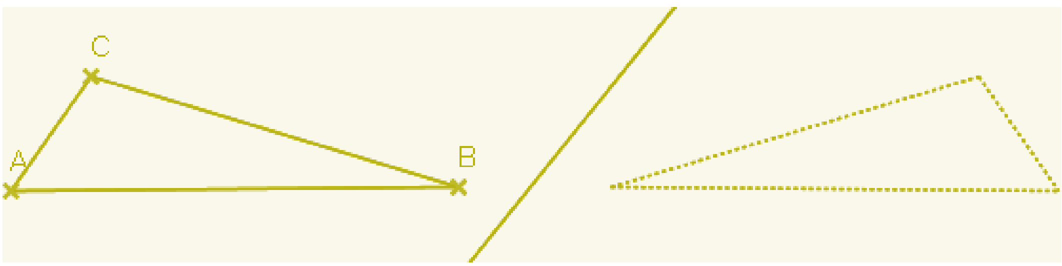
Den stiplede parallellen til AB i figuren ovenfor, laget jeg ved å bruke en funksjon der du selv kan velge et punkt og en linje, før GEONExT konstruerer en parallell til linjen, gjennom punktet.

På lignende måte kan du for eksempel halvere en vinkel ved rett og slett å peke ut den vinkelen du vil halvere. Dette gjøre du ved først å peke på et punkt på høyre vinkelbein, deretter på toppunktet og til slutt et punkt på venstre vinkelbein. Hvis du vil konstruere akkurat som med passer og linjal i stedet for å bruke slike innebygde funksjoner, så er det også mulig – med de samme dynamiske utforskningsmulighetene.

Speiling og symmetri på mellomtrinnet

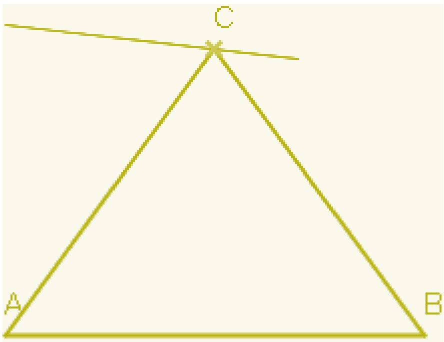
Vi hører ofte at en figur er symmetrisk når det er 'likt på begge sider'. Er den formuleringen god nok? Mange elever misforstår denne symmetribeskrivelsen [1, side 366]. Disse elevene kan for eksempel tro at den stiplede trekanten nedenfor fremkommer ved å speile trekant om linjen som er tegnet mellom de to trekantene:

I dette tilfellet kan elevene få eksemplet som et elektronisk arbeidsark: Ved å utforske en slik konstruksjon i GEONExT – gjerne med en speilingslinje som i utgangspunktet er vertikal – kan elevene se hvordan speilbildet endrer seg når de flytter på speilingslinjen. Da kan de sammenholde dette med sine egne, opprinnelige gjetninger. De kan også forandre på trekanten som skal speiles.



Dynamisk geometri i nasjonale prøver

Eksemplene på nettbaserte nasjonale prøver [5] innbyr til dynamisk geometri på 7. trinn. Oppgaven går ut på å gjøre et areal størst mulig: Eleven skal finne ut hvilken plassering av punktet *C* som gir størst mulig areal for en trekant på en figur som nedenfor, når punktet *C* bare kan flyttes langs den tynne linjen hvor det allerede er plassert.

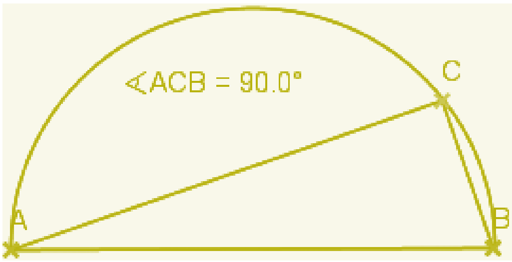


Dette er en interessant eksempeloppgave fordi den virkelig utnytter det dynamiske elementet. Den ville fremstått som ganske annerledes hvis den kun hadde vært gitt på papir.

Periferivinkelsetningen og Thales' setning

Jeg har ofte opplevd at periferivinkelsetningen er et resultat som mange blir forbauset over – og kanskje er ikke det så rart? Selv om dette er noe som vanligvis ikke behandles på grunnskolen, så dreier det seg om en virkelig matematisk skjønnhet det er vel verdt å utforske dynamisk. Med GEONExT er det relativt enkelt å konstruere en passende illustrasjon.

Her kan vi se på det spesialtilfellet som kalles Thales' setning: At en periferivinkel som spenner over en diameter, må være 90°:



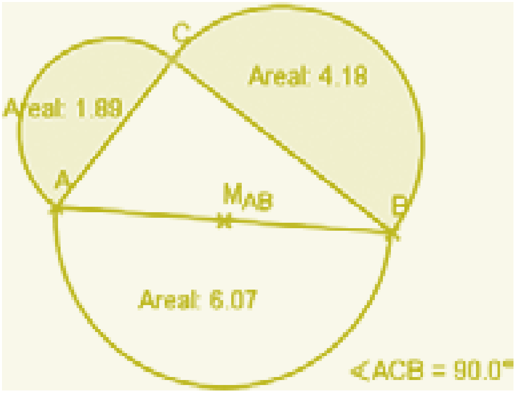
Figuren konstruerte jeg ved å først trekke opp linjestykket AB. Deretter konstruerte jeg midtpunktet på AB ved hjelp av en funksjon i GEONExT, og jeg kunne trekke opp halvsirkelen. Så valgte jeg punktet C et tilfeldig sted langs periferien – dette lot jeg være et såkalt glidepunkt, det vil si et punkt som kan flyttes på, men aldri utenfor en bestemt kurve (i dette tilfellet halvsirkelen). Til slutt kunne jeg trekke linjestykkene *BC* og *AC*, be GEONExT oppgi størrelsen på vinkel og eventuelt skjule midtpunktet på *AB*.

Igjen har vi et bilde som ikke beviser resultatet, men foran en datamaskin kan eleven utforske figuren på en helt annen måte enn hva papirbøker kan tilby: Punktene *A* og *B* kan flyttes for å lage halvsirkler av ulik størrelse, og punktet *C* kan flyttes langs sirkelbuen: Uansett hvor eleven plasserer dem, vil figuren illustrere at periferivinkelen med topppunkt i *C* alltid er en rett vinkel.

Som en alternativ tilnærming til Thales setning, kan vi også bruke arbeidsark. Eksemplet «Vinkler i sirkelen» i Anne Berit Fuglestads artikkel om arbeidsark i dette heftet [2], viser en tilnærming til dette. Det er enkelt å skjule deler av en konstruksjon i GEONExT.

Pytagoras' setning

Hvis vi starter med å konstruere en rettvinklet trekant (bruk for eksempel Thales' setning), kan vi etterpå konstruere kvadrater på hver av sidekantene, eller sirkler eller andre figurer. På den måten kan vi illustrere Pytagoras' setning, og si litt om hvilke konsekvenser vi kan få ut av den. La oss denne gangen konstruere halvsirkler:

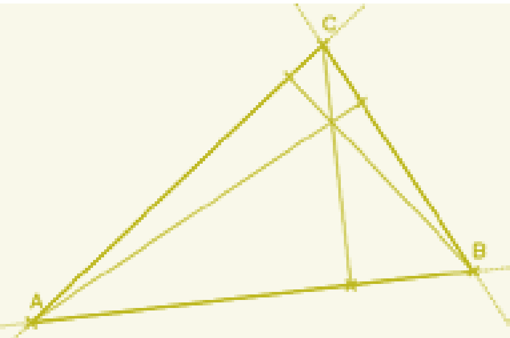


Akkurat hva jeg gjorde for å få frem arealene på figuren, kan du lese om i nettversjonen av artikkelen, men det går i korthet ut på å bruke GEONExT som en kalkulator – med litt trening går det fort. Styrken ligger i at elevene nå kan 'ta tak i' punktene *A*, *B* og *C* for å flytte dem til andre posisjoner, og for hver ny posisjon se at arealene av de to minste (fargete) halvsirklene, alltid blir lik arealet av den største (hvite) halvsirkelen.

Innsenter, omsenter og høydenes skjæringspunkt

Ved å bruke at en halveringslinje for en vinkel består av alle punkter som ligger like langt fra hvert av vinkelbeina, kan vi vise at de tre halveringslinjene i en trekant skjærer hverandre i ett og samme punkt: innsenteret. Vi kan også vise at midtnormalene skjærer hverandre i ett eneste punkt: omsenteret. Men at også høydene og medianene i trekanten har tilsvarende egenskaper, er det kanskje ikke like vanlig å tenke over – det er da også noe mer krevende å vise.

Hvis vi bestemmer oss for å utforske de tre høydene ved hjelp av GEONExT, kan vi først enkelt lage en trekant ved å trekke tre linjer som skjærer hverandre. Deretter kan vi konstruere høydene i trekanten, gjerne med en innebygget funksjon (et valg fra menylinjen i GEONExT) som kan konstruere en normal fra et valgt punkt og bort på en valgt linje.



På denne figuren kan elevene så trekke i punktene *A*, *B* og *C*, og 'se' at høydene alltid skjærer hverandre i ett punkt. De kan også eksperimentere med skjæringspunktets beliggenhet (hvis de forlenger høydene i denne trekanten) – når flyttes skjæringspunktet ut av trekanten?

Dette eksemplet antyder en pussig side ved programmer for dynamisk geometri. Vi kan 'se' at en observasjon kan se ut til å stemme, og kanskje kan vi bli overbevist om det også, men det beviser ingenting: Vi har jo bare sett på spesialtilfeller, uten å finne noe generelt argument! Så mens elever på den ene siden kan komme til å føle mindre behov for å bevise resultatet de studerer – de har jo fått se så mange eksempler – så vil akkurat samme egenskap ved slike programmer gjøre oss i stand til å utforske og eksperimentere på en langt mer effektiv og kraftfull måte enn vi kunne før. Vi kan bruke programmene for dynamisk geometri til å skaffe oss bakgrunn for å opparbeide intuisjon og for å finne frem til beviser, se for eksempel artikkelen Morleys hjerte [4].

Sammenligning mellom Cabri og GEONExT

Det første elevene kommer til å merke når de bruker GEONExT, er at programmet ikke bruker norske navn – det går i tysk eller engelsk. For Cabri er det mulig å få tak i 'ekstrautstyr' som gir norsk eller nynorsk språk. Hvor alvorlig dette er, vil være forskjellig for ulike klasser. Det vil også være avhengig av elevenes alder og innholdet i konstruksjonene de skal lage.

I begge programmene kan konstruksjonene utstyres med måltall, og for eksempel arealer, som forandrer seg når eleven forandrer på konstruksjonen. Dette kan imidlertid oppfattes som til dels vesentlig lettere å få til i Cabri enn i GEONExT, i hvert fall på enkle og ikke for sammensatte figurer.

I GEONExT er hjelpesidene kun på tysk, men de er gode og omfattende. Det finnes også en epostgruppe der deltagerne kan utveksle spørsmål og erfaringer. Cabri har derimot ikke noen egentlige hjelpesider innebygget, selv om det finnes et innføringshefte i papir for salg.

Personlig synes jeg menyene i Cabri kan være noe raskere å bruke, siden hvert av valgene under Objects-feltet i GEONExT rett og slett er lagt direkte tilgjengelig utover som en slags verktøylinje i Cabri. Men jeg vil likevel si at Cabri kan føles mer uoversiktlig når du skal bearbeide en konstruksjon ved å for eksempel gjøre deler av den usynlig.

Å lage det som kalles en makro i Cabri, betyr å lagre en eller annen sekvens av operasjoner som du velger ut selv. Dette kan brukes til å gjøre vanlige konstruksjoner raskere, eller til å 'huske' visse kompliserte konstruksjoner. Det ser ikke ut til at GEONExT gir mulighet for å lage makroer, og det er synd. Men selv om dette ikke er mulig i GEONExT, så har vi her mulighet for å zoome inn konstruksjonen vi jobber med. Den muligheten har vi ikke i Cabri, til tross for at det er en opplagt fordel hvis vi jobber med litt større konstruksjoner.

En annen ting som selvfølgelig er behagelig med programmer som GEONExT og Cabri, er at du som lærer får relativt lett tilgang til å lage dine egne illustrasjoner på datamaskinen, og lagre dem til senere bruk. Hvordan du gjør det, kan du lese om i den utførlige nettversjonen av artikkelen.

Litteratur

[1] Breiteig, Trygve og Venheim, Rolf: *Matematikk for lærere 1*, Universitetsforlaget, 2001.

[2] Fuglestad, Anne Berit: Elektroniske arbeidsark i Cabri, *Tangenten* 2/2005.

[3] Fuglestad, Anne Berit: Internettressurser – Dynamisk geometri, *Tangenten* 3/2000.

[4] Knudtzon, Signe Holm og Aarnes, Johan F.: Morleys hjerte, *Normat*, 51:4 (2003) og 52:1 (2004).

[5] *Nettside for nasjonale prøver i matematikk*, februar 2005: matematikk.nasjonaleprover.no

(fortsatt fra side 10)

Det er mulig å legge Cabri-filer ut på internet slik at vi kan eksperimentere direkte der uten å bruke Cabri. Det begrenser selvsagt mulighetene for videre arbeid, men gir gode dynamiske illustrasjoner som kan trekkes inn i undervisningen. Noen eksempler fins på Cabri Java-sidene og andre nettsteder for matematikkundervisning, se [6] og [7].

Referanser

[1] Breiteig, T. & Fuglestad, A. B. (1997). *Data i matematikken*. (2 ed.) Oslo: Aschehoug.

[2] Fuglestad, A. B. (1999). Læring med datamaskiner i konstruktivistisk perspektiv. *Tangenten*, 10, 27–33.

[3] Hewitt, D., Mackrell, K., & Wilson, D. (2000). *Active Geometry. Files and Activities for Cabri -Géomètre II* [Computer software]. Derby, UK: Association of Teachers of Mathematics.

[4] Hölzl, R. (2001). Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations – a case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 63–86.

[5] Mackrell, K. (2004). *Using pre constructed Cabri files in secondary school* (primay school and post 16 mathematics, 3 sesjoner). Cabri World 2004 Conference

[6] Cabri Java med eksempler: www-cabri.imag.fr/cabrijava/

[7] MathNet Dynamic geometry: www.mathsnet.net/dynamic/index.html

Erik Torp Nilssen

Yatzy, statistikk og store tal

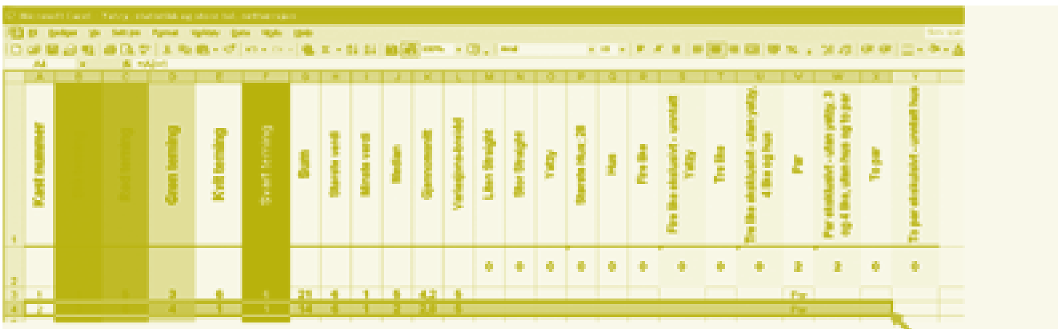
Både gjeldande og kommande læreplan i matematikk peikar på korleis digitale verkty kan nyttast til ulike simuleringar. I denne artikkelen ser vi på terningspillet Yatzy. Vi reknar ut sannsynet for ulike hendingar i Yatzy og samanliknar resultata med simuleringar i ei Excelfil.

Denne arbeidsboka simulerer kast av fem terningar, som i Yatzy, og undersøker korleis ein del utfall (Par, Tre like, To par, Fire like, Hus, Liten og Stor straight, fem like dvs. Yatzy) varierer når vi gjennomfører store kastserier. Arbeidsboka har også frekvenstabell og stolpediagram som viser korleis summane (sjanse) fordeler seg for store og små kastserier.

Arbeidsboka i Excel

er lagt ut på: www.caspar.no/tangenten/2005/yatzy.xls og du kan laste henne ned på di eiga maskin. Det er ei Excel-fil med tre rekneark. I ferdig format krev arbeidsboka ca 7,1 Megabyte, ei altfor stor fil å leggje på nettet. Nettversjonen har berre formlar i to rader. Det fyller 613 Kilobyte – rikeleg stort det og.

Du må gjerne opne fila og leike deg litt med henne ved å trykke F9-tasten mange gangar og sjå kva som skjer, men for å ha fullt utbyte, må du laste fila over på eigen maskin, og kopiere formlane i 4. rad til i alt ti tusen rader. Det vil seie at du merkar området A4:U4, går til nedre, høgre hjørne av området til musepeika-



Erik Torp Nilssen underviser i matematikk, natur- og miljøfag og KRL på Førde ungdomsskule, ernilss@online.no

ren er blitt ein liten trådkross. Så held du venstre musetast nede og dreg heile feltet med deg ned til og med rad 10 002 (ti tusen og to).

Når du prøvar arbeidsboka, er det ein fordel å ha denne artikkelen framfor deg.

På PC med frekvens 3 GHz treng det ferdige arket ca. 2 sekund på å rekne gjennom formlane – på kommandoen F9. Det tok ca. 14 sekund på PC med 266 MHz. Det er kanskje akseptabelt. Eldre maskinar bør truleg nøye seg med formlar i 1000 rader, utan test for 10 000 kast.

Kort oversyn over innhaldet i arbeidsboka

'Talmaterialet' – det fremste arket i arbeidsboka – er laga for ti tusen slike kast. Arket reknar ut summen ('=Sjanse'), nokre få statistiske variablar kvart terningkast og for summane, og utfala: Yatzy, Hus, Liten og Stor Straight, Fire like, Tre like, Par og To par. Celleområdet M2:U2 har formlar som tel kor mange gangar 'terningkasta' gir slike utfall. Vi reknar ikkje ut verdiane; t.d. skil vi ikkje største to par med 22 (6, 6, 5, 5, x) frå det minste, 6; (2, 2, 1, 1, x).

'Frekvenstabell m m' undersøker 'Sjanse'-verdiane i fire seriar: Dei første 30 kasta, dei første 100, dei første 1000 og alle 10 000 kasta. Slik kan vi sjå korleis summane fordeler seg nærmare ein sannsynsmodell dess fleire kast vi undersøker. Stolpediagrammet på arket 'Diagram' viser dette – etter at brukaren har kopiert alle formlane til 10 000 rader.

Formlane i talmaterialet

For den blå 'terningen' er formelen i B3: '=heltall(tilfeldig()*6+1)' brukt. Formelen '=tilfeldig()' gir eit reelt tal mellom 0 og 1. Multipliserer vi dette med 6, får vi eit tilfeldig, reelt tal mellom 0 og 6. Formelen '=heltall' rundar dette talet ned til nærmaste heile, altså dei heile tala 0, 1, 2, 3, 4 og 5. Ved å legge til 1 innanfor parentesen får vi dei seks mogelege utfalla av eit terningkast. Formelen er så kopiert frå blå terning til og med svart terning. Deretter kan vi kopiere denne terningrekka så langt nedover vi vil. (Ein enklare formel er: '=tilfeldigmellom(1;6)', men denne funksjonen må installerast i programmet.)

For å undersøkje summen av auge på fem terningar ('=Sjanse'), har vi i G-kolonnen formelen: '=summer(B3:F3)'. Vi vil også sjå korleis resultata for kvart kast varierer for andre statistiske variablar, difor har vi i dei neste kolonnane lagt inn formlane '=størst(B3:F3)', '=min(B3:F3)', '=median(B3:F3)' og '=gjennomsnitt(B3:F3)'. Vi finn variasjonsbreidda ved å trekke 'minst' frå 'størst', t.d. ved å skrive =, klikke på cella for størst, skrive minusteikn og klikke på cella for 'min' før vi stadfester formelen med ENTER.

Litt Yatzy på 'Tallmateriale'

I dei neste kolonnane ligg formlar som sjekkar kasta for ein del Yatzy-resultat: Straight (stor og liten); Hus, Par, To par, Tre like og Fire like, og naturlegvis Yatzy – fem like. Studer formlane. Her kjem eit døme:

```
=HVIS(ELLER(OG(STØRST
(B13:F13)>MIN(B13:F13);N.
STØRST(B13:F13;2)=STØRST(B13:
F13);MIN(B13:F13)=N.STØRST(B13:
F13;3));OG(STØRST(B13:F13)>MIN(B13:
F13);N.STØRST(B13:F13;3)=STØRST(B13:
F13);MIN(B13:F13)=N.STØRST(B13:
F13;4)));'HUS';")
```

(Det er 226 teikn i denne fæle formelen)

Dette er formelen som undersøker om kastet gir hus: Vi skal anten ha tre 'store' og to 'små' tal eller omvendt, så vi treng operator ELLER. Det skal vere skilnad på store og små tal, så første logiske test er at største tal er større enn minste. Dei to (eller tre) største tala er like, så vi må setje største tal lik nest største (eller tredje største). Vi må også setje minste tal lik tredje minste (eller nest minste). Dersom (HVIS) desse føresetnadane er oppfylte (sjekk med ELLER og OG), skal programmet skrive HUS (i hermeteikn), hvis ikkje skal ingenting skrivast (hermeteikn utan innhald, elles skriv programmet 0, som vi ikkje har lyst å sjå).

Logiske testar som omfattar operatorane HVIS, OG, ELLER krev ganske høgt konsentrasjonsnivå. Det skal vere korrekt plassering av parentesar og semikolon, og det har vore temmeleg mange feilmeldingar før maskina er nøgd. Vi er visse på at nokre av lesarane kan utvikle fleire Yatzy-testar. Prøv også med MAXIYatzy – som har seks terningar.

Likevel peikar vi på at desse digre formlane ikkje er hovudsaka for korleis skulen kan dra nytte av arbeidsboka. Elevar og lærarar skal få høve til å sjå kva som skjer med mange Yatzy-kast, og bli klokare av det. Men nokon vil truleg også ha interesse av formlane.

I området (m2:u2) finn du teljeformelen 'antall.hvis(m3:m10002;m1)' osv. Her tel vi kor ofte terningane gir det yatzy-resultatet som blir testa i kolonnen. Unnataket er formelen for huset med størst verdi, 28.

Lengre ned i denne artikkelen finn lesaren utrekningar av sannsynet for de mogelege utfalla i Yatzy. Eg har elevar som vil late seg engasjere til både statistisk utprøving og ein slags sannsynsanalyse av Yatzy, og eg trur ikkje eg er åleine om å ha slike elevar.

Formlar i frekvenstabell m m

A-kolonnen i dette reknearket har dei mogelege summane du kan få med fem terningar. Du får minst 5 (berre einarar) og høgst 30 (berre seksarar).

Studer nøye korleis vi har fått fram frekvensen i celle B2, i kolonnen for 30 kast. Der står '=ANTALL.HVIS(Tallmateriale!G$3:G$32;A2)/30'. Les formelen slik:

«Vi tel i dei 30 første summane i G-kolonnen (G3 til G32) på arket med namn 'Tallmateriale'. Arkreferansen blir markert med ropeteikn.

Først vil vi berre ha dei summane som stemmer med A2. Derfor brukar vi ANTALL.HVIS, med A2 etter semikolon. Vi deler på 30, fordi vi vil ha den relative frekvensen, slik at vi kan samanlikne med dei andre seriane.

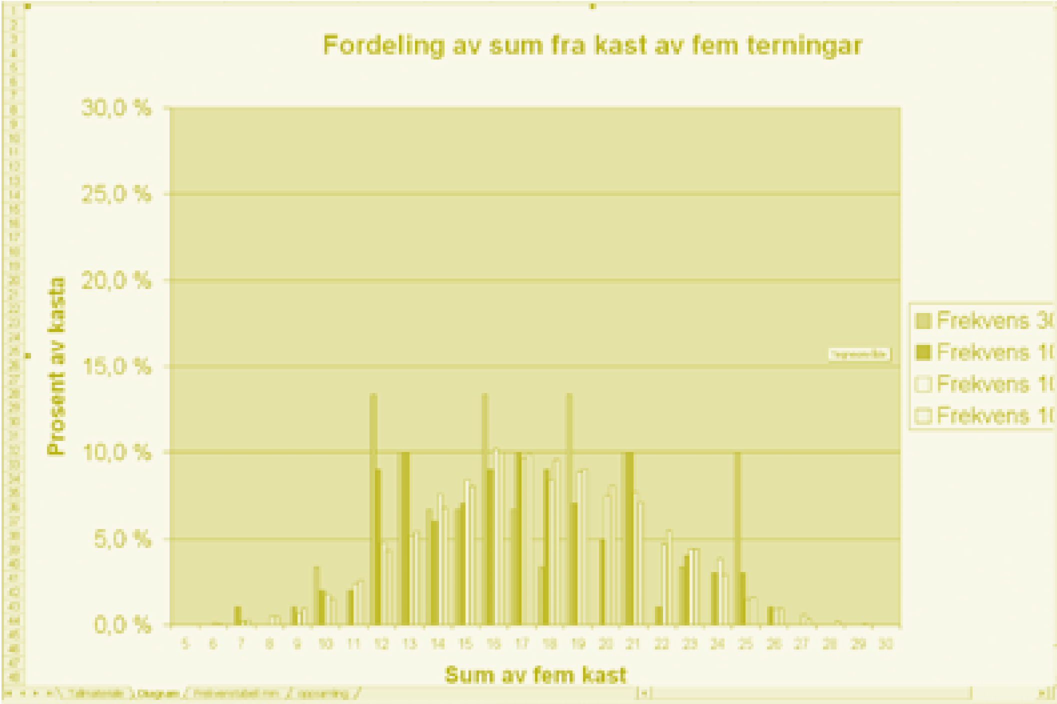
Vi skal også telje kor mange summar som stemmer med A3, A4 osv. ned til A31. Men vi tel heile tida i dei same 30 summane, så vi låser området med $-teikn på rad nummer 3 til 32 i G-kolonnen i arket 'Tallmateriale'.»

Bruk piltastane til å kontrollere formelen nedover i kolonnen. Du ser då at området vi tel i er det same, og at det einaste som varierer er siste cellereferanse i formelen. Bruk også piltastane til å kontrollere formelen i C-kolonnen. Vi tel framleis i G-kolonnen i 'Talmateriale', men no heilt ned til G102, ettersom vi tel dei første hundre summane. For å finne den relative frekvensen deler vi frekvensen på 100, naturlegvis. Men cellereferansen er framleis A3 og nedover. Det blir enkelt å sjå korleis formlane for relativ frekvens tek seg ut i kolonne D og E, for høvesvis tusen og ti tusen kast.

I F-kolonnen finn vi typetalet – summen med høgst frekvens i dei første 30 kasta. Formelen i F3 er: '=HVIS(B2=STØRST(B$2:B$27);$A2;"")'. Les slik:

«Dersom frekvensen for summen 5 (i A2) er størst, så skriv '5' (som står i A2), men viss ikkje, så ikkje skriv noko!»

Det tomme hermeteiknet sist i formelen tyder altså 'skriv ingen ting'. Utan dette tomme



hermeteiknet, ville vi på ny fått 0 overalt bortsett frå typetalet. Her har vi låst formelen for cellereferansen til A-kolonnen. Det kunne vi gjort over også. Vi har altså kopiert formelen mot høgre først, og så alle fire formlane i rad 2 nedover.

Formlane i rad 28 er berre ein kontroll på at summen av relativ frekvens alltid er 100 %.

I rad 29 og rad 30 ligg formlar for største og minste sum i seriane for tretti, hundre, tusen og ti tusen kast. Der ligg arkreferanse med ropeteikn og låste områdereferansar, slik at det er greitt å kopiere formlane. Vi har kopiert formlane vi laga for 'størst' bortover mot høgre, skifta nedste celle i samsvar med det stadig større teljeområdet, og så kopiert alle størst-formlane ned til der det skal stå MIN-formlar og vidare nedover til og med rad 34. Så sletta vi dei fem formlane både i rad 31 og 32. Så skifte vi STØRST med MINST i rad 30, GJENNOMSNITT i rad 33, og MEDIAN i rad 34. Variasjonsbreidda i rad 31 fann vi ved å subtrahere minste tal frå det største. Dette materialet viser mellom anna at det slett ikkje er alltid vi får 5 einarar eller 5 seksarar, sjølv på 10 000 kast. Sannsynet er $1/6^5 = 1/7776 = 0{,}0001286\ldots \approx 0{,}13$ promille.

Over til resultat. Først fordeling av summane

Ein sannsynsmodell tilseier at det bør vere flest summar på 17 og 18, og at det er fallande sannsyn for lågare og høgre summar. For kvar sum som er testa her, er det fire delkolonner. Til venstre i kvar 'bunt' er den relative frekvensen for den vesle serien på 30 kast. Der er høgst frekvens for summane 12, 16 og 19 (4), så er det nest høgst frekvens for 13, 21 og 25 (3). Neste kolonne i kvar 'bunt' viser resultatet for 100 kast, og heller ikkje dette er jamne, pene resultat. Resultata for hhv. 1000 og 10 000 kast er betydeleg jamnare. Men jamvel for så store kastserier vil elevane sjå tydeleg variasjon for kvar gang vi tastar F9. For dei store kastseriene ser vi likevel variasjonane best på frekvenstabellen.

Så Yatzy …

Når vi tastar F9 fleire gangar, varierer talet på yatzy frå 4–5 opp til 10–12; sjeldan utover dette. Sannsynet for Yatzy er så enkelt som $1/6^4 = 1/1296 = 0{,}0007716\ldots \approx 0{,}8$ promille.

Dermed er det bra samsvar mellom statistikk (simulering på Excel-arket) og det sannsynet vi kunne rekne ut på førehand.

… Straight …

Finn fram eit avsnitt av reknearket der det er fleire straight-resultat på få rader, slik at det er lett å samanlikne korleis dei ulikt farga terningane gir Straight. Dette illustrerer at det ikkje berre er éin måte å få akkurat 1, 2, 3, 4 og 5 – eller 2, 3, 4, 5 og 6. Vi reflekterer over kor mange ulike rekkefylgjer vi kan få til (for Liten straight).

Det er 5 – fem – plassar for 1-aren, 4 – fire – plassar for 2-aren for kvar plass 1-aren tek osv. Det er altså $1\times2\times3\times4\times5$ kombinasjonar – 5! (fem fakultet) kallar vi det – som gir liten straight. Dette talet – 120 – dividerer vi med 6^5 (som er talet på alle mogelege utfall) og får $120/7776 = 20/1296 = 0{,}015432 \approx 15{,}4$ promille. Vi skulle difor vente rundt 150 straightar av kvart slag i vårt rekneark, og statistikken let tala danse mellom 130 og 170 – og stundom utanfor dette.

… Hus …

Eit hus har tre like pluss to like. Først reflekterer vi over kor mange måtar vi kan plukke ut tre terningar av 5. Vi nyttar fargane vi har sett på terningane våre, og vi får:

BlåRødGrøn
BlåRødKvit
BlåRødSvart
BlåGrønKvit
BlåGrønSvart
BlåKvitSvart
RødGrønKvit
RødGrønSvart
RødKvitSvart
GrønKvitSvart

Det er 10 kombinasjonar for å velje ut tre terningar av fem. Sjansen for å få tre like terningar er $1/6^2 = 1/36$ fordi den eine kan vere kva som helst, og dei to andre må vere lik denne. Dei resterande to må vere ulik dei to første, og lik kvarandre. Difor: $5/6\times1/6 = 5/36$.

Samla sannsyn for hus blir difor $10\times1/36\times5/36 = 50/1296 \approx 0{,}0386 \approx 3{,}9\ \%$.

Vi ventar resultat rundt 386 hus på 10 000 kast. Statistikken ser ut til å stadfeste dette, vi har sett resultat frå 343 opp til 426 hus på ein kastserie.

Sjansen til at vi får det største huset (tre seksarar og to femmarar) må vere dei ti kombinasjonane vi nemnde over multiplisert med $1/6^5$. Det er $10\times1/7776 = 0{,}001286\ldots \approx 1{,}3$ promille og vi har 10/6 av sjansen for Yatzy. Vi kan altså vente rundt 12–13 hus med verdi 28 i vår store kastserie. Og i simuleringa har vi sett alt frå 4 slike hus heilt opp til 22.

Ei anna tilnærming: Divider sjansen for hus (generelt) med sjansen for det største huset:

$$\frac{50}{1296}:\frac{10}{7776}=\frac{50\cdot7776}{1296\cdot10}=5\cdot6=30$$

Dette vil seie at det bør vere 30 ulike måtar å få hus, og vi kontrollerer: tre 6-arar + to 5-arar – eller omvendt; tre 6-arar + to 4-arar – eller omvendt osv. Det gir fem mogelege hus med tre 6-arar, fire med tre 5-arar osv. (Då er det ordna med størst verdi på dei tre like, og så snu på alle. Ein bør nok vise alle tretti kombinasjonane for elevane.) I alt 2×15 hus, eller 30 ulike hus.

Tre og fire like

Sjansen for fire like må vere dei 5 måtane å plukke ut 4 terningar (eller å 'fjerne' ein terning) multiplisert med å få fire like. Dette resultatet må multipliserast med 5/6, fordi den siste terningen skal ha annan verdi enn dei fire: $5 \times 1/6^3 \times 5/6 = 25/1296 = 0{,}01929 \approx 1{,}93\%$.

Det er halvparten av sjansen for hus, og vi kan vente knapt 200 slike resultat, med variasjon.

I Excel-arket vår har vi berre laga formel for minst fire like. Vi sjekkar berre om minste verdi er lik nest største, eller om største verdi er lik nest minste, så vi må trekke frå Yatzy-talet for å få tala som skal jamførast med sannsynet. Vi har sett resultat frå 167 til 235 kast med minst 4 like, mens Yatzy-talet rotar rundt før nemnde 8–9 og vi synest dette viser godt samsvar mellom statistikk og sannsyn.

Sjansen for tre like må vere dei 10 måtane å plukke ut 3 terningar (eller å 'fjerne' to) (jf. resonnement for hus) multiplisert med å få 3 like. Dette resultatet må vi gange med $(5/6)^2$, fordi dei to siste skal ha ein annan verdi. Altså: $10 \times (1/6)2 \times (5/6)2 = 250/1296$. Det er ti gangar så ofte som fire like; eller noko under 2 000 (1929) gangar i vår svære kastserie.

I statistikken vår har vi berre laga formel for minst tre like. Vi sjekkar berre om minste verdi er lik tredje største, om største verdi er lik tredje minste, eller om nest størst er lik nest minst, så vi må trekke frå både Yatzy-talet og fire like for å få tala som skal jamførast med sannsynet. Men slik vi har rekna sannsynet, skal vi ikkje trekke frå talet på hus. I så fall burde vi hatt sannsynsformelen slik: $10 \times (1/6)^2 \times (5/6) \times (4/6)$. Det gir rundt 1500–1600 (1543) på vår serie.

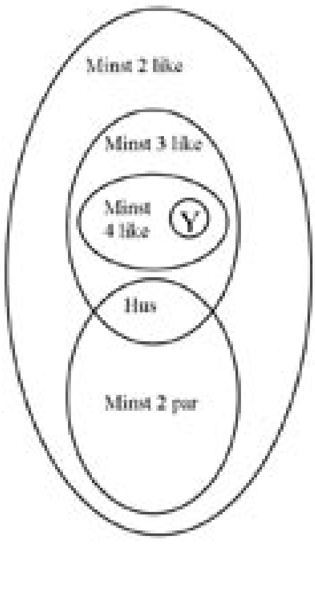
Når vi tel 'Tre like' er vi sjeldan under 2000 og sjeldan over 2200. Ti prosent går vekk til fire like, medan 'svinnet' til Yatzy er forsvinnande. Talet på Hus held seg som nemnt rundt knappe 400, og vi kjem ned i talområdet vi har sannsynsrekna oss fram til.

Par og to par

Sjansen for å få eitt par: det er ti måtar å plukke ut to terningar av fem; den eine kan vise kva tal som helst, og den andre må ha same verdi. Så må dei tre andre terningane vise noko anna, også seg imellom.

Reknestykket er då: $10 \times 1/6 \times 5/6 \times 4/6 \times 3/6 = 100/216 = 25/54 = 0{,}46293$, eller ca 46,3 %.

Vår statistikk viser langt høgre tal, og det kjem av at vi ikkje har utelukka to par, hus, tre og fire like, og Yatzy. Ettersom vi heller ikkje har utelukka Yatzy og fire like frå tre like, kan vi trekke frå talet på tre like. Vi har heller ikkje utelukka hus frå to par, så vi trekker frå det talet også. Men talet på hus er inkludert både i talet på to par og i talet på tre like, så talet på hus må leggast til att. Vi har laga eit eige teljefelt for 'netto'-talet av par ut frå dette tekst-



Første par	Mogelege andre par			Kommentar om kombinasjonar	Utrekning	
1 og 2	3 og 4	3 og 5	4 og 5		3×1/6×5/6×1/6×4/6	5/108
1 og 3	2 og 4	2 og 5	4 og 5		3×1/6×5/6×1/6×4/6	5/108
1 og 4	2 og 3	2 og 5	3 og 5		3×1/6×5/6×1/6×4/6	5/108
1 og 5	2 og 3	2 og 4	3 og 4		3×1/6×5/6×1/6×4/6	5/108
2 og 3	1 og 4	1 og 5	4 og 5	2 komb. brukt; i 3. og 4 rad	1×1/6×5/6×1/6×4/6	5/324
2 og 4	1 og 3	1 og 5	3 og 5	2 komb. brukt; i 2. og 4 rad	1×1/6×5/6×1/6×4/6	5/324
2 og 5	1 og 3	1 og 4	3 og 4	2 komb. brukt; i 2. og 3. rad	1×1/6×5/6×1/6×4/6	5/324
3 og 4	1 og 2	1 og 5	2 og 5	Alle komb. brukt; i 1. 4. og 7. rad	0	
3 og 5	1 og 2	1 og 4	2 og 4	Alle komb. brukt; i 1. 3. og 6. rad	0	
4 og 5	1 og 2	1 og 3	2 og 3	Alle komb. brukt; i 1. 2. og 5. rad	0	
Alle mogelege kombinasjonar av to par er undersøkt. Samla sannsyn er ca. 23,15 %						25/108

avsnittet, og då kjem vi ut med tal i området vi har sannsynsrekna oss til. Vi har registrert mange verdiar; frå 4498 opp til 4738.

Sjansen for 'To par' må starte på same måte. Det er – som i 'Eitt par' – ti måtar å plukke ut to terningar av fem; den eine kan vise kva tal som helst, og den andre må ha same verdi som den første. Altså 10×1×1/6. Så er det tre måtar å plukke ut det andre paret. Det kan ikkje vere same par som det første, og den siste terningen kan ikkje ha same verdi som terningane som er med i eitt av para. Reknestykket er då:

$$10 \times 1 \times 1/6 \times 3 \times 5/6 \times 1/6 \times 4/6$$
$$= 100/216 = 25/54 = 0{,}46293,$$

eller ca 46,3 %. Dette er jo det same som sjansen for eitt par! Men som tabellen viser, har vi då brukt alle mogelege kombinasjonar to gonger, så sannsynet for to par er halvparten av formelen over.

Formelen er då

$$1/2 \times 10 \times 1 \times 1/6 \times 3 \times 5/6 \times 1/6 \times 4/6$$
$$= 50/216 = 25/108 \approx 0{,}231465 \approx 23{,}15\ \%.$$

Vi ventar altså to par rundt 2315 gangar på 10 000 kast. Statistikken ser ut til å stadfeste dette, vi har registrert talet på to par frå 2186 opp til 2430.

(fortsettes side 29)

Anne Berit Fuglestad

Hva de velger og hva de liker

– elevers bruk av IKT-verktøy

Tom og Hans starter på oppgaven de har valgt (navnene er byttet ut). Oppgaven (i farget boks) dreier seg om en busstur der de får presentert forskjellige pristilbud. Informasjoner om prismodeller er gitt, men mer presise spørsmål må de stille selv. Hva er fornuftig å vurdere når de skal reise på klassetur med buss og har forskjellige valg både for hvor de skal reise og hvilket busselskap de skal bruke? De vil sammenligne priser for turen i de forskjellige alternativer.

Tom og Hans hadde begge sine klare valg. De diskuterte, men uten å bli enige om et felles valg. Tom valgte Grafbox og sa han liker dette programmet og kan det ganske godt. Hans var like sikker i sitt valg, men ønsket å bruke Excel og mente det er best for denne oppgaven. De arbeidet side om side ved hver sin datamaskin ut fra sine valg. De kunne se hva den andre hadde på skjermen, og de diskuterte innimellom hvordan løsningen ble og om de fant igjen de samme tallene i begge.

Hans laget en oppstilling i Excel med de aktuelle prisene for hvert turalternativ men

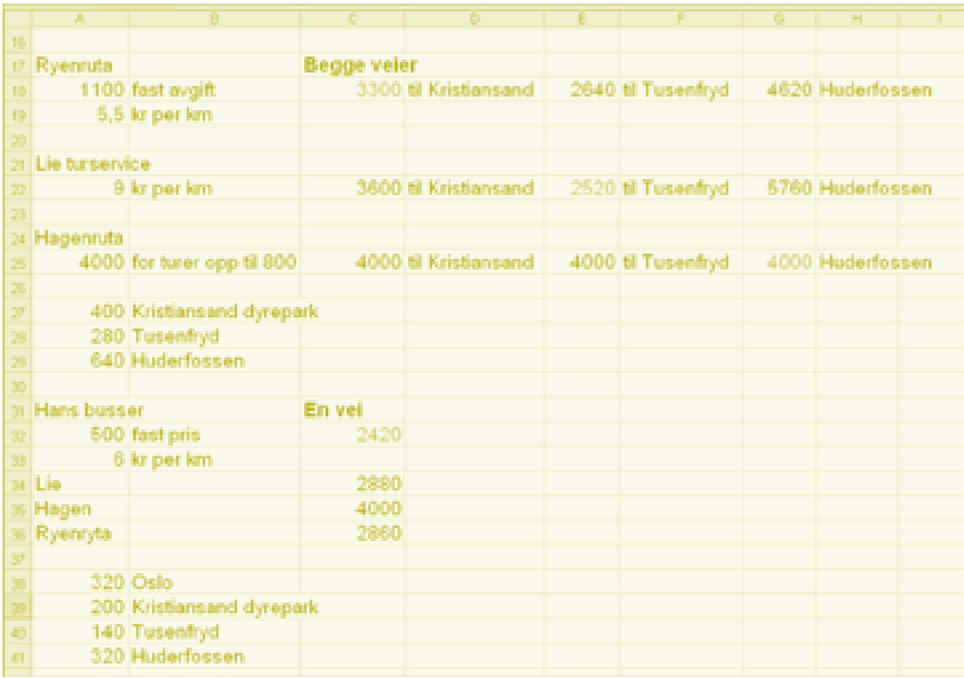
Anne Berit Fuglestad er førsteamanuensis i matematikk fagdidaktikk ved Høgskolen i Agder, abf@hia.no.

Oppgave: Klassetur med buss

Elevene ved Lie skole skal på klassetur sammen med tre lærere. De ber om pristilbud fra tre selskap: Ryenruta gir dette tilbudet: 1100 kr i fast avgift og 5,50 kr per kilometer. Lie turservice gir dette tilbudet: 9 kr per kilometer. Hagenruta tilbyr fast pris: 4000 kr for turer opp til 800 km. Elevene vurderer tre mulige turer:
– Kristiansand Dyrepark ca. 200 km en veg,
– Tusenfryd ca. 140 km en veg,
– Hunderfossen ca. 320 km en veg.

gjorde ikke noen mer generell sammenligning av prisene. Flere andre elever gjorde det på omtrent samme måte. Hans forklarte greit hva han hadde gjort da læreren senere kom innom for å se.

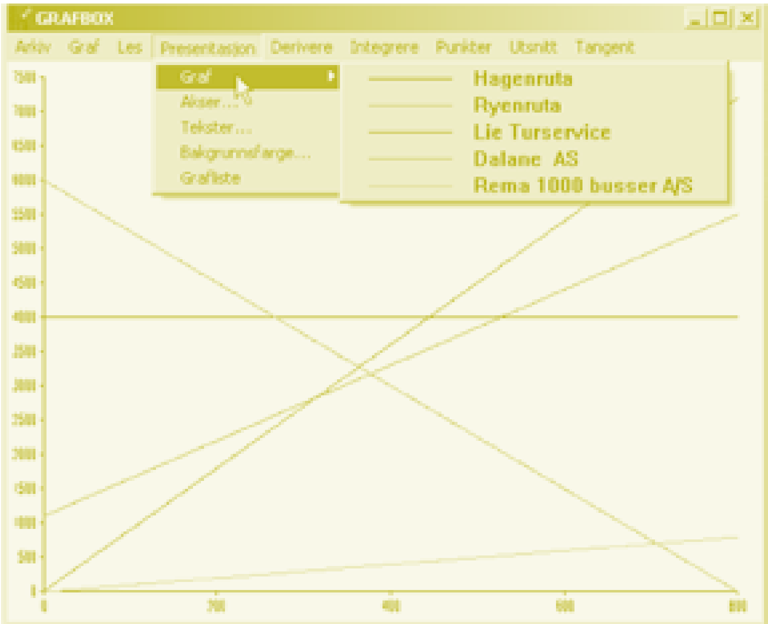
Tom snakket halvhøyt med seg selv om hvordan han løste oppgaven, kanskje også stimulert av å bli observert. Noen feil underveis førte til altfor store tall. Han reagerte og måtte finne ut av feilen som viste seg å være en multiplikasjon i stedet for addisjon. Det førte til litt problemer siden aksene justerte seg automatisk og dermed ble en graf ikke synlig. Ved hjelp av tilleggsspørsmål fra meg som observerte, oppdaget han hva problemet var og rettet det opp.



	A	B	C	D	E	F	G	H
16								
17	Ryenruta		Begge veier					
18	1100	fast avgift	3300	til Kristiansand	2640	til Tusenfryd	4620	Huderfossen
19	5,5	kr per km						
20								
21	Lie turservice							
22	9	kr per km	3600	til Kristiansand	2520	til Tusenfryd	5760	Huderfossen
23								
24	Hagenruta							
25	4000	for turer opp til 800	4000	til Kristiansand	4000	til Tusenfryd	4000	Huderfossen
26								
27	400	Kristiansand dyrepark						
28	280	Tusenfryd						
29	640	Huderfossen						
30								
31	Hans busser		En vei					
32	500	fast pris	2420					
33	6	kr per km						
34	Lie		2880					
35	Hagen		4000					
36	Ryenryta		2860					
37								
38	320	Oslo						
39	200	Kristiansand dyrepark						
40	140	Tusenfryd						
41	320	Huderfossen						

Figur 1: Oppsett i Excel

Bruk av Grafbox gjør det nødvendig å uttrykke prismodellene som funksjonsuttrykk som kan skrives inn. I tillegg til de tre prismodellene som er gitt i oppgaven laget han også sine egne, som han mente skulle bli billigere. Dalane AS gir en modell der det starter dyrt men blir billigere for flere km kjørt, og den er som han sa helt urealistisk, men morsom å lage. Det var lett å se at Tom hadde god forståelse for Grafbox selv om han gjorde noen små feil underveis.



Figur 2: Oppsett i Grafbox

Tom og Hans diskuterte løsningene sine. Litt fra avstand kunne jeg også observere at flere andre elever kom bort til dem og diskuterte løsningene. De var tydelig opptatt av å se på hva de to hadde gjort og av å finne sammenhenger.

Kompetanse til å velge IKT-verktøy

De to guttene var med i prosjektet IKT-kompetanse i matematikk i ungdomsskolen som nylig er avsluttet. Prosjektet fulgte klassene over tre år gjennom 8. – 10. klasse. De første årene var det vekt på utvikling av kompetanse og med tettere oppfølging, med observasjon og evaluering av resultater det siste semesteret. Undervisningsideer og erfaringer ble diskutert med lærerne i egne prosjektmøter hvert semester; og til en viss grad ble det utviklet eget materiell.

Målet med prosjektet var å utvikle elevenes kompetanse til å bruke IKT-verktøy og selv kunne velge hensiktsmessig verktøy for å løse oppgaver eller utforske matematiske sammenhenger. Dette har bakgrunn i L97 som sier at elevene skal «ha kunnskap om bruk av IT-hjelpemidler og etter hvert kunne vurdere hvilke hjelpemidler som er egnet i den enkelte situasjon» [3]. Videre sier L97 at et mål for faget er å «finne løsningsmetoder og alternativer gjennom undersøkende og problemløsende aktiviteter og bevisst valg av verktøy og redskaper». Vi finner lignende formuleringer i høringsutkastet til ny plan for matematikkfaget [4]. Det å kunne bruke digitale verktøy er en av fem grunnleggende ferdigheter i matematikk ved siden av å kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig, lese matematikk og kunne regne.

Med IKT verktøy tenker jeg her på åpne, fleksible programmer som ikke presenterer forhåndsbestemte oppgaver men gir mulighet for brukeren til å bestemme hva som skal gjøres [2]. Da kan programmene brukes til utforsking i mange sammenhenger, bygge modeller, simulere og være hjelpemidler i problemløsning slik den nye planen legger opp til. I prosjektet brukte vi regneark (Excel eller Open Office), dynamisk geometri, Cabri, og Grafbox for kurvetegning. I tillegg ble også Internett brukt for å hente data og informasjoner.

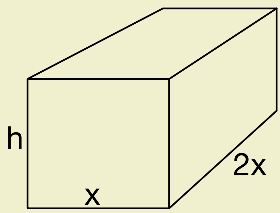
Det er nødvendig å lære en del grunnleggende om programmene for å kunne bruke dem, både funksjonaliteten i programmene og måter å bruke dem på. For at elevene skulle utvikle kompetanse til å velge verktøy, ble det lagt vekt på at de etter hvert skulle få arbeide med åpne oppgaver eller prosjekter der de selv måtte foreta noen valg og bestemme hva de skulle bruke. I praksis ble nok regneark og Internett de mest brukte verktøy i de fleste klassene.

Smørpakka

Tre til fem gutter arbeidet med denne oppgaven (se egen boks nedenfor). Tre var ganske aktive, mens to andre hang med, kommenterte og var mer tilskuere. Det tok lang tid, og de gikk gjennom en utvikling i flere trinn. Første utkastet var å sette inn tall for x, for $2x$ og for h slik at tallene passer sammen og gir volum 500 cm^3. I første omgang regnet de selv og brukte ikke formler i Excel. Det ble mye regnearbeid og en del frustrasjoner. Men de oppdaget etter hvert at de må kunne uttrykke

Oppgave

En fabrikk ønsker å selge smør i pakker med volum 500 cm^3. Bredden på pakka skal være halvdelen av lengden. Av hensyn til holdbarheten på varen bør pakkas overflate være minst mulig.
Hvilke mål må pakka da ha?



en sammenheng mellom de tre størrelsene, først for $2x$, senere for h:

E1: «… det må være en formel»

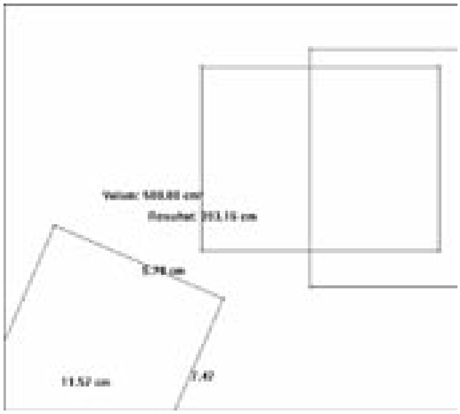
E2 «– må ha en formel som gir en sammenheng mellom de to – vil det bli bare en ukjent?»

	A	B	C	D
1				
2		x	10	
3		2x	20	
4		H	2,5	
5				
6				
7		Volum	Overflate	
8		500	550	
9				
10				

Å sette inn formlene for $2x$ og h førte til større framgang. Men fremdeles var det nødvendig med forbedringer, og etter noen tips snudde de tabellen og kunne lage kolonner med en oversikt for flere x verdier og brukte tabellen for å finne minimum. Etter at de lykkes kom kommentaren: «Å dette er virkelig gøy!» Senere observerte jeg guttene igjen da de arbeidet med bussoppgaven som de valgte å arbeide med få dager senere. Også der fikk de bruk for en lignende tabell i kolonner, for å sammenligne priser og nå gikk det raskere. De hadde tydeligvis lært av det de hadde strevd med.

Jeg observerte flere elever som hadde tilsvarende problemer med å uttrykke $2x$ og h som formler. Spesielt å finne en formel for h var utfordrende, selv om de innså at her måtte de starte med volumet.

Det kom flere forskjellige løsninger på smørpakkeoppgaven: En elev løste den på to måter. Hun tegnet de tre av sidene i pakken i Cabri, i passe målestokk og slik at sidene hang

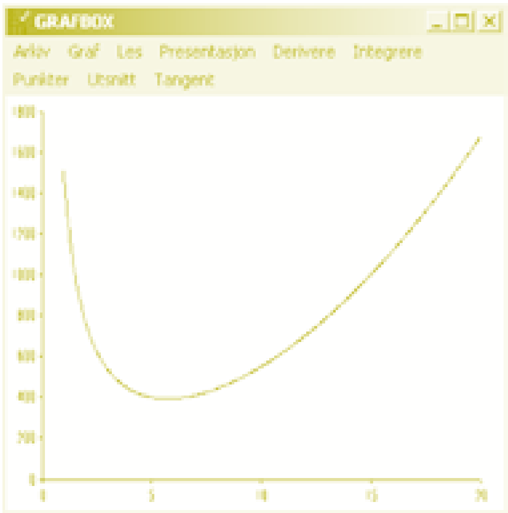


sammen og forandret seg i riktig forhold ved å dra i ett hjørne. Arealet ble beregnet med kalkulatoren i Cabri. Dermed kunne hun finne beste mål ved på prøve seg fram. Samme elev laget også en stor tabell i Excel og fant svaret på den måten.

En annen elev brukte Grafbox, med funksjonen:

2x*500/(2x^2)+4x*500/(2x^2)+4x^2

Dette siste er klart en mer krevende løsning, siden funksjonsuttrykket må finnes først. Deretter er det enkelt å finne løsningen med Grafbox.



Løsning på regneark med tabell kan sees som en god forberedelse for bruk av Grafbox. Det er mulig å bygge opp funksjonsuttrykket gradvis, først finne $2x$ og h og kombinere disse videre.

Strategier for undervisningen

Et viktig mål i prosjektet var å utvikle læringsmiljø med muligheter for elevenes egne valg og initiativ. Sentrale strategier for å oppnå dette er følgende se også [1]:

Motivasjon fører til at elevene engasjerer seg og de er villige til å fortsette selv om de noen ganger må streve litt. Vi ser det i mange sammenhenger, og det kom fram indirekte i elevenes kommentarer til hva de likte.

Det er nødvendig å lære grunnleggende egenskaper ved programvaren, og å sørge for at elevene blir kjent med vanlige teknikker og arbeidsmåter med programmet. Dette er nødvendig for at programmene skal kunne fungere som et verktøy. Samtidig bør vi sørge for at de får noe å utforske underveis, ikke bare lære teknikker.

Å løse en oppgave med forskjellige verktøy kan stimulere innsikt, og gir et grunnlag for senere valg. Gjennom slike erfaringer lærer vi hvilke verktøy som egner seg for ulike problemer.

Vi kan også se på forskjellige løsinger med samme verktøy. En undersøkelse og diskusjon av forskjellige løsninger kan gi økt innsikt, vi kan drøfte hvordan de er like og forskjellige, og om og hvorfor de gir samme løsning.

Elevenes egne oppgaver kan virke motiverende. De bør stimuleres til selv å stille spørsmål og formulere hypoteser. Dette virker utviklende for elevene og er nødvendig om de senere i livet skal kunne utnytte IKT-verktøy når ingen stiller spørsmålene for dem.

Refleksjon, oppsummering og diskusjon i klassen er en viktig del av undervisningen. Det er ofte nødvendig for at elevene skal få mest mulig utbytte av aktivitetene at de selv rapporterer og diskuterer resultatene.

Lærerens rolle i et IKT-rikt miljø er viktig. Vi ser gjennom observasjonene at det ofte er nødvendig med et innspill, et ekstra spørsmål eller hjelp til noen tekniske detaljer med programmene for at elevene skal komme videre. Læreren bør ikke for raskt gi svaret, men gi hjelp slik at eleven kan tenke videre og finne sin løsning. Det er viktig at læreren kan følge opp det elevene gjør, både ved å se inn i elevenes løsninger og i en oppsummering i klassen.

Elevenes vurderinger av oppgavene

I siste del av prosjektet hadde elevene en periode der de arbeidet med oppgaver i et lite hefte. Slik ble det presentert for elevene: ”I dette heftet finner du et variert utvalg oppgaver, og på de to siste sidene har vi plassert to tema som du eventuelt selv kan lage deg problemstillinger ut fra. Du trenger ikke gjøre alle oppgavene. Velg noe du synes er en passende utfordring for deg”. Oppgavene var av varierende vanskelighetsgrad, fra enkle oppgaver med klare spørsmål til andre helt åpne tema. Heftet hadde tittelen Hva velger du? Og ideen var at de skulle velge hva de ville bruke i oppgaveløsningen: Hoderegning, praktisk løsning, papir og blyant, lommeregner eller datamaskin. En til to uker etter denne arbeidsperioden fikk elevene spørsmål i tilknytning til arbeidet og bruken av IKT-verktøy, hva de likte og ikke, hvilke hjelpemidler de valgte å bruke og hvorfor. De to eksemplene med elevens oppgaveløsninger som er omtalt foran, er tatt fra denne arbeidsperioden. 163 elever besvarte spørreskjema, med litt varierende svarfrekvens på forskjellige spørsmål. Sitater er gitt i kursiv.

Elevene ble bedt om å velge ut en oppgave de likte godt og skrive litt om hvorfor de likte denne. Svarene viser at mange elever, 39 elever av 151, liker utfordringer, de liker variasjon, ikke det samme om igjen og de liker litt vanskelige oppgaver, men ikke altfor vanskelige (35 elever). Noen av svarene her illustrerer dette: *Fordi den var litt krevende, men vi kom på ideer om hvordan vi kunne regne den ut. Det var noen ganger litt vanskelig, men det er veldig gøy når vi får det til!* Et annet svar i samme retning: *Denne oppgaven var veldig vanskelig, men jeg liker utfordringer. Derfor likte jeg oppgaven.* Begge disse kommenterte hvorfor de valgte smørpakkeoppgaven.

En annen elev valgte å arbeide med priser for abonnement for mobiltelefoner: *Jeg så fort at jeg kunne bruke Grafbox for å løse den. Det er en åpen oppgave så jeg kunne også gå på Internett og finne andre priser og sammenligne. Dette er noe jeg kan bruke utenom skolen også.* Her var det rom for elevens egne valg som virket motiverende.

Noen av svarene viser til hvordan de løste den: *For den er veldig enkel å svar på. Det er jo bare å lage formler og kopiere.* Og noen hadde klar henvisning til fordelen med å bruke datamaskin: *Konkret oppgave med håndfast informasjon. Kunne etterpå fylle inn de tallene jeg selv ville, og beregne for eksempel egen økonomi. VELDIG mye lettere å gjøre på Data.*

Tom som valgte Grafbox på bussoppgaven svarte slik: *Det var fordi dette hadde jeg gjort før i 8 kl. Jeg følte jeg hadde 'teken' på det.* En annen som valgte samme oppgave svarte slik: *Jeg liker oppgaver som jeg må jobbe litt med. Så denne var gøy. Liker å regne på regneark.*

Andre svar viser til at det er lett eller at de mestrer oppgaven: *Det var en lett og fin oppgave å gjøre på dataen.* Og en annen svarte: *Det var fordi den ikke var for vanskelig å løse. Det var en gøy oppgave. Og siden jeg gjorde den på Excel var det gøy, men også litt vanskelig.*

Neste spørsmål gjaldt en oppgave de ikke likte så godt å arbeide med og begrunnelse for det. Her er det svar som viser at de liker ikke for lette oppgaver (11 elever av 139) og noen oppfattes som kjedelige (38 elever av 139). Elevene liker ikke å gjøre det samme om og om igjen. På den andre siden liker de heller ikke altfor vanskelige oppgaver (47 elever av 139).

To uttalelser gjelder smørpakkeoppgaven: *Fordi man må sette inn så mange formler på dataen og det er vanskelig å finne dem. Det tok mye tid og av og til skjønte jeg ikke helt hvorfor jeg satte inn de formlene jeg gjorde …!* Og det andre svaret: *Litt frustrerende oppgave. litt vanskelig, men samtidig utfordrende. Likte egentlig alle oppgavene, men det var vel denne som tiltalte meg minst.*

Et tankevekkende svar viser hvordan det kan bli galt nå læreren gir for mye hjelp: *Fordi det vi gjorde først var en dum måte å løse oppgaven på, så kom læreren å viste hvordan vi heller burde gjøre det, å plutselig var det læreren som egentlig hadde gjort nesten alt.* Her virker det som elevene selv ønsket å løse oppgaven, men fikk ikke sjansen.

Det kom også fram gode refleksjoner over hvorfor de ikke likte oppgaven: *Er vell fordi vi gjorde det galt først, så vi måtte gjøre det igjen. men tror det er fordi vi ikke diskuterte oppgaven skikkelig før vi begynte, da blir det ofte galt!*

Andre svar viser at de liker ikke når det er for lett og heller ikke for vanskelig: *Den var altfor lett å løse, og det var liksom ikke noen utfordringer med den oppgaven!!* Eller dette: *Den var for enkel.* Eller dette: *Den var lang og vanskelig forstod ikke hvordan jeg skulle sette det opp, fikk ikke noe hjelp heller …*

Det kan bli for mye av det samme: *Det er en oppgave som vi har hatt før, det er ikke noen vanskelig oppgave som det er noen utfordring på.*

Utfordringer videre

Elevenes svar gir noen momenter til ettertanke for videre planlegging av oppgaver og arbeidsopplegg i matematikk med bruk av IKT. Elevene liker utfordringer – så la dem få sjansen til å løse oppgavene selv. Læreren bør gi passe hjelp og tips for å komme videre, men ikke overta løsningen. Her kan det være en fin balanse. Det er nødvendig å gi tid til å lære IKT-verktøy samtidig med problemløsningen.

Det bør ikke være for mye av det samme om igjen og om igjen. Det bør være mulig å lage varierte oppgaver der de kan benytte noen av de samme løsningsmodellene og der de kan bidra med sin egen fantasi og stille egne spørsmål.

La dem få tid til å diskutere og prøve forskjellige løsninger. Det kan være mer fruktbart å bruke lang tid på noen få oppgaver framfor å gjøre mye av det samme om igjen. Guttene som arbeidet med smørpakka trengte lang tid, men det viste seg at de kunne bruke en lignende modell senere i en ny oppgave. Tenke gjennom og diskutere underveis var viktig for elevene i dette arbeidet. Oppsummering og refleksjon er viktig for å få fullt utbytte av arbeidet.

Det er nødvendig å finne en balanse mellom lette og vanskelige oppgaver og å gi utfordringer til alle elever. Mange av svarene viser at å mestre oppgavene er et stort behov. Svarene viser også at motivasjon er en viktig faktor i elevenes arbeid. Variasjon, utfordring og at de mestrer oppgaven betyr mye for elevenes engasjement.

Referanser

[1] Fuglestad, A. B. (2004). ICT tools and students' competence development. In M.Johnsen-Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2-439–2-446). Bergen: Bergen University College.

[2] Fuglestad, A. B. (2003). IKT kompetanse i matematikk. In F.Vik (Ed.), *IKT som prosjekt i skolen* (pp. 28–68). Fagbokforlaget.

[3] KUF (1996). *Læreplanverket for den 10 årige grunnskolen*. Oslo: Det kongelige kirke- og utdannings og forskningsdepartement.

[4] UFD. (2005). *Matematikk. Læreplaner for Kunnskapsløftet* – Høringsutkast fra Utdanningsdiretoratet 15.02.05.

(fortsatt fra side 22)

Kombinatorikk

Lesarar med innsikt i kombinatorikk har merka seg – og kanskje irritert seg over – at vi korkje har gått inn på binomialkoeffesientar eller Pascals trekant. Vi har fleire gangar resonnert oss fram til kor mange ulike måtar vi kan plukke ut terningane til ulike Yatzykombinasjonar, og vi har brukt argument og modellar som relativt sterke elevar i ungdomsskulen kan fylgje.

Elevar som arbeider greitt med kvadratsetningane i 10. klasse kan bli inspirert til å utvide operasjonen til høgre potensar, og dei vil kunne sjå at Pascals trekant er eit godt verktøy til å finne koeffesientane.

Sluttkommentar

Alt i alt trur vi at arbeid med Yatzy kan motivere elevane både i sannsynsrekning og i statistikk, og vi vonar at vårt materiale kan inspirere både elevar og lærarar. Mange får vonleg også god hjelp til å betre sine digitale ferdigheter. Forfattaren er takksam for konstruktive kommentarar.

Ronald Bradal

Funksjoner i Excel

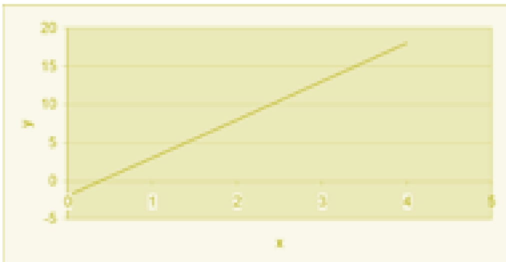
Mange synes å tro at det ikke er mulig å arbeide med funksjoner i Excel. Årsaken må være at man ikke kan lage grafer ut fra en formel eller funksjonsforskrift. Men dette er jo ikke til hinder for at man kan arbeide med funksjoner, vise mange fine sammenhenger og bruke elektronikkens muligheter til å eksperimentere med koeffisienter og konstanter. Jeg vil i det følgende vise noen eksempler.

Lineære funksjoner

Vi kan ta utgangspunkt i den vanlige formelen for lineære funksjoner, $y = ax + b$. Vi starter med å lage rubrikker for konstantene og en verditabell.

	A	B	C
1	Å lage enkelt diagram		
2			
3	Gitt for eksempel formelen y = ax + b		
4			
5	a =	5	
6	b =	-2	
7			
8	x-verdier	y-verdier	
9	0	-2	
10	2	8	
11	4	18	

Vi lager nå en graf ut fra verditabellen. Man må da bruke valget 'Punktdiagram' (xy). Det er her nøkkelen til arbeid med funksjoner i Excel ligger. Dette er det (eneste) valget som gir mulighet til å lage grafer i to variable, en uavhengig og en avhengig. Vi velger den undervarianten som gir linjer mellom punktene.



Nå kan man variere på konstantene a og b. Grafen flytter seg i takt med endringene. Vi kan altså lett synliggjøre og drøfte hvordan konstantene påvirker grafen, skjæringen med y-aksen (b) og stigningen (a). Dersom verdien av a gjøres negativ, vil linjen helle ned mot høyre.

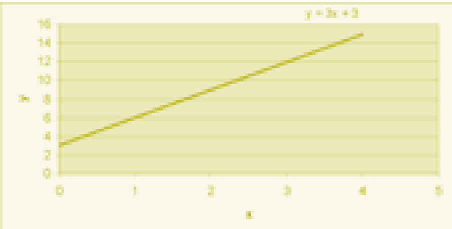
Regnearket gir imidlertid også en annen mulighet som vi bruker alt for lite i skolematematikken. Vi kan nemlig gå fra graf,

Ronald Bradal arbeider ved Høgskolen i Hedmark, avdeling for lærerutdanning.
rbradal@online.no

eller rettere sagt via tabell til graf, og så finne funksjonsuttrykket.

Vi tenker oss nå at vi starter med en datatabell, og at denne gir punkter som ligger på linje; en lineær graf. Etter at diagrammet er laget, kan man markere linja, klikke høyre musetast og velge 'Legg til trendlinje'. Man får da fram en dialogboks. Velg det valget som er merket 'Lineær'. På boksen finnes det også ei fane for Alternativer. Velg denne fanen og merk av for 'Vis formel' i diagrammet.

x-verdier	y-verdier
0	3
2	9
4	15



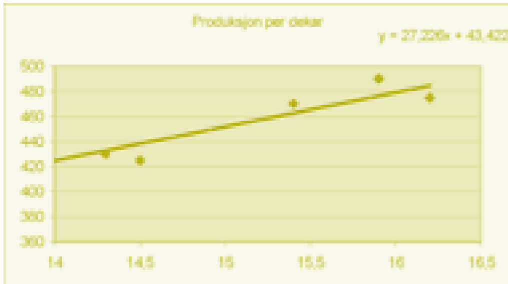
Denne teknikken gir også muligheter til å arbeide med regresjon uten å lage noe stort teoretisk nummer ut av det. Man kan altså arbeide med realistiske statisktiske sammenhenger i grunnskolen på en måte som ikke behøver å være for vanskelig for elevene.

La oss for eksempel si at vi har skaffet oss følgende opplysninger:

Årstall	Middel-temperatur i juli	Kornproduksjon per dekar i Hedmark (kg)
1995	14,5	425
1996	12,2	380
1997	15,4	470
1998	16,2	475
1999	14,3	430
2000	15,9	490

Dette kan så framstilles grafisk i et punktdiagram. Denne gangen velger vi å få fram bare punktene, ikke noen linje mellom dem. (Det kan være greit å formatere aksene etter hvilke verdier vi har. Dette kan man gjøre ved å merke aksene, bruke høyre musetast og velg 'Formater akse'.)

Når vi har fått fram en brukbar graf, gjør vi som i punktet over, det vil si å sette inn trendlinje. Resultatet kan bli slik:



Andregradsfunksjoner

Vi kan jobbe med dette på nøyaktig samme måte som over. I eksempelet under har jeg ganske enkelt vist hvordan arealet i kvadrater varierer med lengden av siden. Deretter har jeg lagt inn ei trendlinje og formelen for den (figur 1).

I dette tilfellet kan vi få med noen små ledd etter andregradsleddet. trendlinjen er laget for å finne beste tilnærming til et datasett, ikke til å lage rene funksjoner. Dette blir ofte litt unøyaktig. Hvis vi bare er litt våkne, kan vi stryke disse leddene.

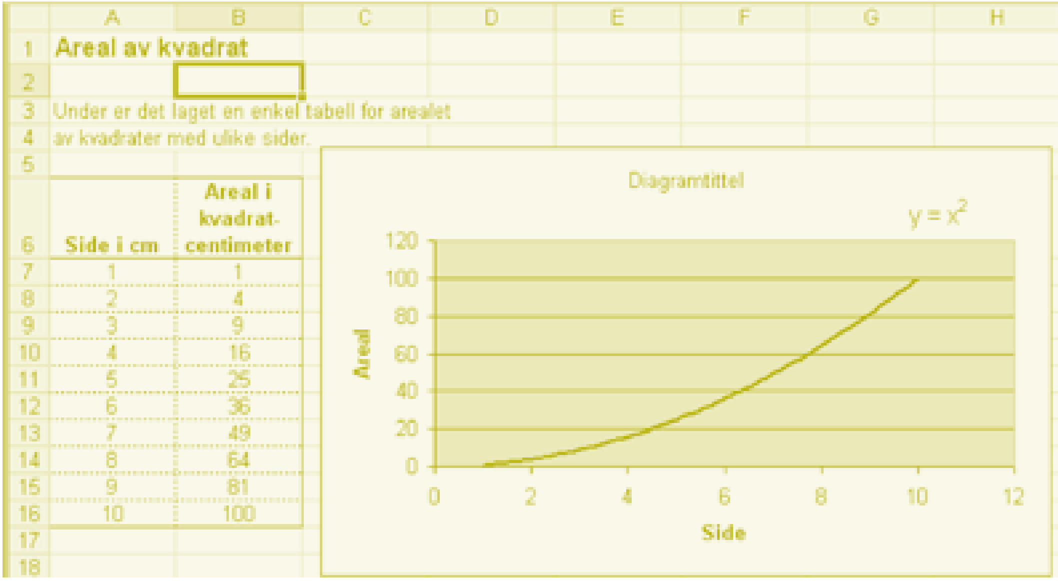
En fin mulighet kan være å synliggjøre maksimerings- og minimeringsproblemer. Et velkjent fenomen er at kvadrater er den firkanten som har størst areal i forhold til omkretsen. Dette kan man lett vise i et regneark. Vi tenker oss at vi skal ha en omkrets på 100 (vi har for eksempel 100 meter gjerde som vi skal bruke mest mulig effektivt). Se figur 2.

Hvis vi setter inn trendlinje her, får vi y =

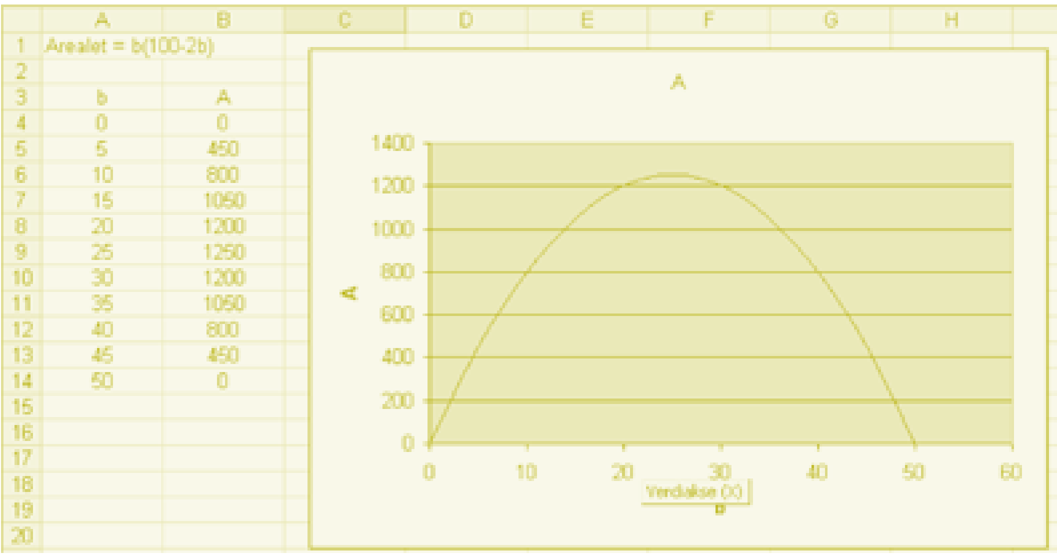
-2x^2 + 100x + 2E-12. Vi sløyfer siste leddet og får -2x^2 + 100x. Nå kan vi drøfte om dette er samme formel som vi startet med.

Man kan også arbeide med parabler på samme måten som vi gjorde innledningsvis med lineære funksjoner. Dersom vi skriver formelen for parabelen på formen y = a(x-b)2 + c, kan vi også her variere på konstantene og se hvordan det påvirker grafen.

Det er altså liten grunn til å ikke bruke regneark i forbindelse med funksjoner. Tvert imot, det gir mange fine muligheter som man ellers må slite mye mer for å få til.



Figur 1



Figur 2

Øystein Nordvik

Eksperimenter med parabler

Hva skjer når vi endrer parameteren *b*?

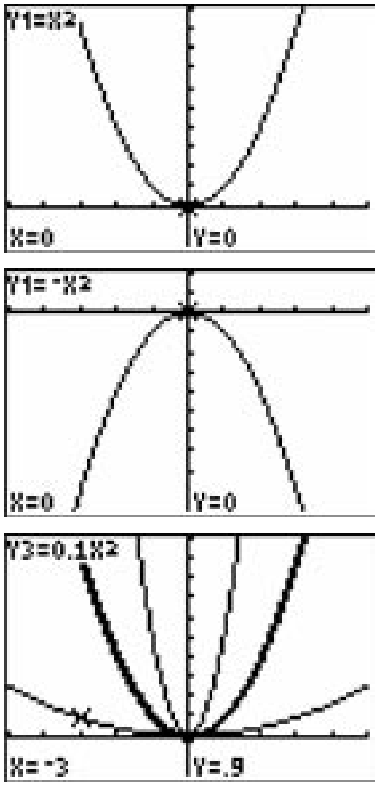
Lærebøkene i matematikk på allmennfaglig studieretning gir en grundig innføring i analyse av andregradsfunksjoner (parabler). Det er litt forskjellig hvilke temaer det fokuseres på, men stort sett behandles andregradsfunksjoner likt i de ulike læreverk.

Disse temaene behandles stort sett i alle lærebøker:

– hvordan finne symmetrilinje og ekstremalpunkt.
– hvordan finne nullpunkter ved hjelp av formelen $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
– Tegne parabler med og uten kalkulator.
– Faktorisering av andregradsuttrykk.

Noen lærebøker sper på med litt ekstra algebra og finner nullpunkter og faktoriserer ved hjelp av fullstendige kvadrater og konjugatsetningen.

Så godt som alle lærebøker kommenterer hvilke endringer vi får når parameteren *a* skifter fortegn og størrelse. Positiv *a* gir en parabel med hulningen opp, mens negativ *a* gir en parabel med hulning ned. Når tallverdien til *a* øker vil parabelen bli smalere, mens det motsatte skjer når tallverdien til *a* nærmer seg null. Noen eksempler på dette sees nedenfor.



Parameteren *c* gir skjæring med *y*-aksen, og

Øystein Nordvik er lektor i matematikk ved Vardafjell videregående skole, nooy6293@vardafjell.vgs.no

endring av denne vil føre til vertikal forskyvning. Dette sier alle lærebøker noe om.

Et tema som ikke omtales er hva endring av parameteren b medfører. Vil endring av denne medføre at parabelen flyttes langs et spesielt mønster?

La oss undersøke dette. Siden bare b skal endres, vil formen på parabelen og skjæring med y-akse være uforandret. En måte å studere denne forflytningen på er å regne ut ekstremalpunktet for ulike verdier av b, og så lage et plott av disse.

Symmetrilinja til parabelen finner vi for $x = \frac{-b}{2a}$, på denne linja vil vi alltid finne parabelens ekstremalpunkt (topp- eller bunnpunkt).

Ekstremalpunktets y-verdi finner vi ved å regne ut

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$
$$= a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c$$
$$= c - \frac{b^2}{4a}$$

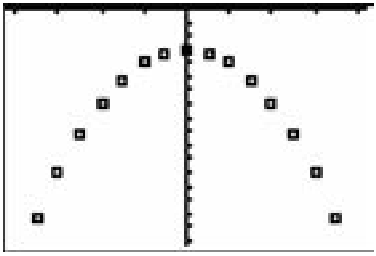
Eksempel

Jeg vil vise fremgangsmåten ved å bruke følgende funksjonsuttrykk: $g(x) = x^2 + bx - 3$.

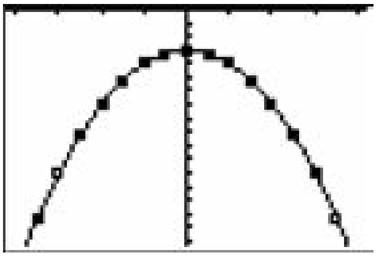
Dette er funksjoner med hulningen opp og bunnpunktene er gitt ved $\left(\frac{-b}{2}, -3 - \frac{b^2}{4}\right)$.

Grafiske kalkulatorer er velegnede hjelpemidler for slike undersøkelser. Vi bruker listene i TI-84(83) til å finne bunnpunktene. Vi tegner opp forskjellige bunnpunkter ved å beregne punkter $\left(\frac{-b}{2}, -3 - \frac{b^2}{4}\right)$ for en rekke forskjellige b-verdier.

Dette gir følgende bilde:

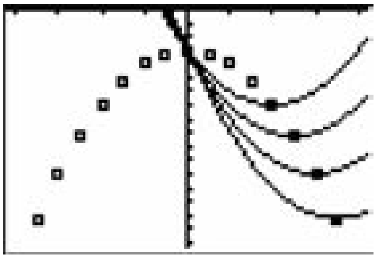


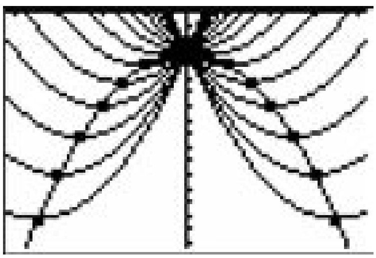
Bunnpunktene til de forskjellige parablene vi får for ulike b-verdier ser selv ut til å ligge på en parabel. Ved å bruke kvadratisk regresjon får vi følgende resultat:



Det ser ut til at punktene faktisk ligger på en parabel.

Vi kan også tegne alle funksjonene slik at vi ser at bunnpunktene nettopp følger dette mønsteret:





I det første bildet har jeg stanset tegningen av grafene for bedre å se hva som skjer.

Det viser seg altså at ved å endre parameteren b i funksjonen $g(x)=x^2+bx-3$ vil bunnpunktene til de ulike parablene igjen danne en ny parabel som har formelen $h(x)=-x^2-3$. Kanskje noe overraskende?

Vi kan generelt vise at for funksjonen $f(x)=ax^2+bx+c$ vil ekstremalpunktene til alle de funksjoner vi får ved å la b variere ligge på funksjonen $y_b=c-ax_b^2$.

Algebraisk bevis

Tidligere har vi sett at parabelen $f(x)=ax^2+bx+c$ har sitt bunnpunkt (topppunkt) for $x_b=\frac{-b}{2a}$ og $y_b=c-\frac{b^2}{4a}$. Her er $b=-2ax_b$. Setter vi dette uttrykket for b inn i formelen for y_b får vi $y_b=c-\frac{(-2ax_b)^2}{4a}=c-ax_b^2$ og vi har vist påstanden.

Går man først inn på betraktninger om hvilken virkning endring av de enkelte parametre har i den generelle andregradsfunksjonen, vil den interesserte elev også undres over b sin betydning. Jeg tror dette vil være et godt utgangspunkt for å eksperimentere litt rundt dette.

Dagens 2MX– og 3MX elever skal ha god innsikt i bruk av kalkulator, og det å gjennomføre denne eksperimenteringen vil utvide elevenes kompetanse når det gjelder parabler, og også gi kunnskap om hvordan listefunksjonene og regresjon på kalkulatoren kan brukes til ulike formål.

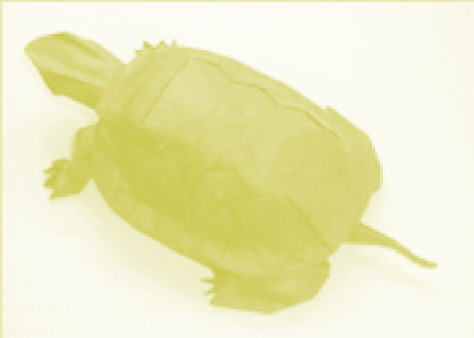
Et læringsoppdrag hvor elevene først prøver å finne y-verdiene til ekstremalpunktene, og så tenker ut en måte å presentere dette grafisk på, er viktige ingredienser i eksperimentet.

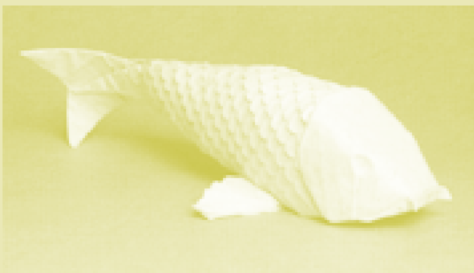
Får de først et bilde av hvordan disse punktene flytter seg, bør det være greit å trekke allmenngyldige konklusjoner.

Beviset vil kanskje falle litt for vanskelig, men dette er noe læreren kan bidra med.

Vi har på vår skole tilbud om International Baccalaureate. Mine Higher Level-studenter i matematikk skal i løpet av to års studier levere inn to portfolioer for intern evaluering. En slik undersøkende oppgave vil passe utmerket for disse elevene.

Artikkelen om Fugletetraederet (side 40) gir deg kanskje lyst til å brette flere figurer? Fra boka *Origami Design Secrets* av Robert Lang (A K Peters Ltd, 2003) har vi hentet tre insirasjonskilder (alle brettet av forfatteren):





Tor Jan Aarstad

Tekniske hjelpemidler og kunnskapsnivå i matematikk

I rundskriv datert 15. juli 1993 [1] ble det gitt anledning til å bruke grafisk kalkulator, numerisk type, til eksamen i matematikk i videregående skole. To år senere startet de første famlende forsøk med symbolbehandlende kalkulator, CAS-type (CAS = Calculator Algebra System), på et par videregående skoler. Mange lærere hadde imidlertid benyttet PC-program, blant annet Derive og Excel, fra midt på 80-tallet i undervisningen, og gjort mange nyttige erfaringer.

I løpet av disse årene er det utarbeidet mye verdifullt materiale til bruk i undervisningen, hvor tekniske hjelpemidler blir tatt i bruk på stadig mer raffinerte måter. Læreplanene som kom i forbindelse med Reform '94, har følgende likelydende formulering i mål 2 på alle nivå:

«… De skal kunne benytte teknologisk verktøy på en hensiktsmessig måte i modellering, utforsking og problemløsing.»

Ved dette settes det store krav til teknisk kompetanse, både blant lærere og elever, for nå skal det vurderes om det er hensiktsmessig å bruke tekniske hjelpemidler i det matematiske arbeidet.

Sentrale myndigheter setter altså sterke føringer på bruk av tekniske hjelpemidler i matematikkopplæringen. Selv om stadig flere lærere har positive erfaringer med å bruke tekniske hjelpemidler i undervisningen, så er det fortsatt en stor gruppe lærere som er kritiske til å bruke teknologi i opplæringen. Mange har etterlyst forskningsresultater som bekrefter at bruk av tekniske hjelpemidler i matematikkopplæringen faktisk innebærer et løft for kunnskapsformidlingen og begrepsforståelsen.

Selv om det kan være delte meninger om nytten ved å benytte teknologi i matematikkopplæringen, kom det fram rimelig klare konklusjoner i en doktoravhandling i 2003. Det var Paul Dreijvers, Freudenthal Institutt i Nederland som disputerte på arbeidet «Learning algebra in a computer environment» [2]. Det får være til en annen anledning å se nærmere på premissene, metodikken og testresultatene som presenteres i Dreijvers sitt arbeid, for i denne artikkelen er det konklusjonene som er mest interessante.

Dreijvers hadde parameter-begrepet som

Tor Jan Aarstad er lektor ved Strand videregående skole i Rogaland og prosjektkoordinator ved Matematikksenteret (NSMO), tjarstad@robin.no

tema i undersøkelsene, og kom fram til følgende fire-trinns utviklingsprosess:

1. Hva menes med å si at en parameter er en 'plassholder'?
2. Forståelsen utvides til å bety en verdiendring.
3. Grafiske visualiseringer leder til antagelsen om at parameterverdiene påvirker det grafiske bildet.
4. Oppdagelsen inviterer til undring, hypoteser, verifiseringer og generaliseringer.

Dreijvers presiserer ved flere anledninger hvor viktig det er at …

- Problemstillingene må være konkrete.
- Utøveren må ha innsikt i meningen og strukturen til uttrykkene og formlene.

Erfaringene fra arbeidet ble også notert:

- Læreren har avgjørende betydning for etablering av instrumentell teknikk.
- Demoer i klassen med påfølgende diskusjoner er viktige for å etablere forståelse for hva som er effektiv instrumentering.
- Læringen forutsetter at det er en klar sammenheng mellom CAS-metoden og blyant-og-papir-metoden.
- Løsningsskjema og oppsett for tekniske fremgangsmåter var sjelden problematiske, men en videreføring av kunnskapen til større forståelse var krevende.

Kommentar

Dreijvers poengterer viktigheten av at arbeidet med CAS har et konkret utgangspunkt hvor elevene har innsikt i strukturen til uttrykkene og formlene som benyttes. Forståelsen av dette poenget klargjøres med eksempler, blant annet eksempler hvor de dynamiske mulighetene i grafiske framstillinger utnyttes. I eksemplene studeres hvordan de ulike parametrene i uttrykk og formler påvirker resultatet på ulike måter. Den grunnleggende matematiske kunnskapen er dermed av stor betydning for å skape en arena for mer inngående studier av virkemåtene. I tillegg kommer anbefalingen at det bør være en klar sammenheng mellom CAS-metoden og blyant-og-papir-metoden. Dermed er det skapt en solid referanse for å to-dele evalueringen av matematikkunnskaper, hvor både regneferdigheter uten hjelpemidler og anvendelser med hjelpemidler blir testet.

Eksempel

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 - 4x + 6, \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Finn ved regning bunnpunktet for grafen til funksjonen f, og tegn grafen.

En annen funksjon g er gitt ved

$$g(x) = x^2 + 8x + 12, \quad x \in \mathbb{R}$$

b) Finn bunnpunktet for grafen til g, og tegn grafen i samme koordinatsystem hvor du tegnet grafen til f.

Vi skal studere funksjonen h gitt ved

$$h(x) = (x - a)^2 + a, \quad x \in \mathbb{R}$$

c) Framstill grafen til funksjonen h for ulike verdier til parameteren a, hvor du fyller ut tabellen

Parameter-verdi	Funksjonsuttrykk	Beskrive graf
$a = -4$	$f(x) = x^2 + 8x + 12$	Parabel med bunnpunkt i (–4, –4)
$a = -2$	$f(x) = x^2 + 4x + 2$	
$a = 0$		
$a = 2$		
$a = 4$		

d) Hvilken graf vil bunnpunktet følge når parameteren *a* endrer verdi?

e) Forklar hvorfor bunnpunktet til grafen vil følge grafen du kommer fram til i spørsmål d).

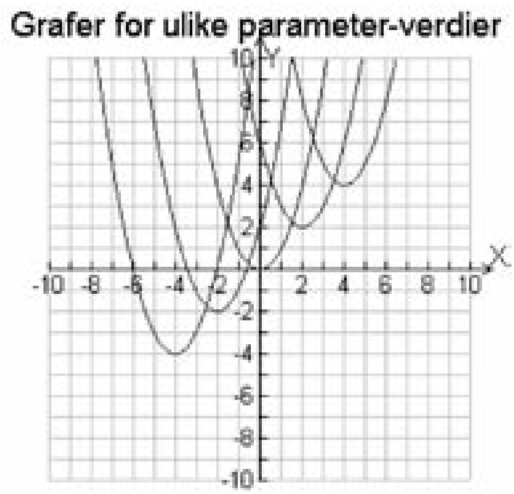
Løsning

Løsning på spørsmål a) og b) inngår i løsningen til spørsmål c) og d).

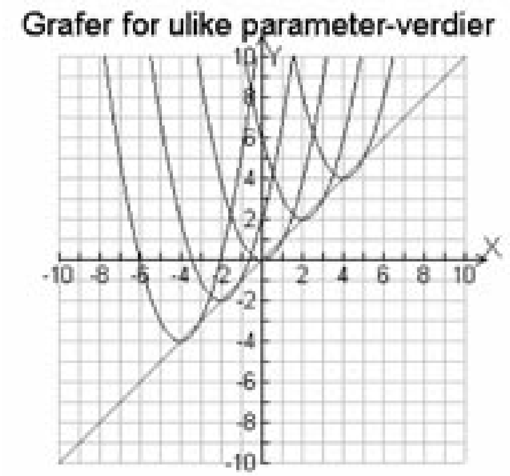
c) Utfylt tabell:

Parameter-verdi	Funksjonsuttrykk	Beskrive graf
a = –4	$f(x)=x^2+8x+12$	Parabel med bunnpunkt i (–4, –4)
a = –2	$f(x)=x^2+4x+2$	P. med bpkt i (–2, –2)
a = 0	$f(x)=x^2$	P. med bpkt i (0, 0)
a = 2	$f(x)=x^2-4x+6$	P. med bpkt i (2, 2)
a = 4	$f(x)=x^2-8x+20$	P. med bpkt i (4, 4)

d) For de 5 parameterverdiene i tabellen, gis følgende grafer:



Det ser ut til at bunnpunktene følger grafen til funksjonen $k(x)=x$.



e) Funksjonsuttrykket bearbeides til

$$f(x)=x^2-2ax+a(a-1)$$

Vi ser at koeffisienten foran 2.-gradsleddet alltid er positiv, og dermed vil grafen alltid få et bunnpunkt. Koordinatene til bunnpunktet kan vi finne på flere måter, bl.a. ved derivasjon, og får koordinatene $(a,\ a)$. Disse koordinatene vil alltid være punkter på grafen til funksjonen $k(x)=x$, og dermed er det vist at bunnpunktet vil følge en rett linje, altså grafen til $k(x)=x$.

Kommentarer til eksempelet

Oppgaven ovenfor viser et eksempel på tankegangen og metodikken som anbefales i Dreijvers avhandling. Utgangspunktet skal være en konkret problemstilling, for deretter å utvikle oppgaven i en mer generell retning.

Det skal være en klar sammenheng mellom papir-og-blyant-metoden og metoden som anvendes med tekniske hjelpemidler. En litt åpen problemstilling, slik som spørsmål d) i eksempelet ovenfor, medfører at prosessen som ble skissert i oppgavens første del, kan gjentas inntil strukturen synes å være klar.

Dette er utgangspunktet for hypoteser, verifiseringer og generaliseringer, før oppgaven avsluttes med en formell bevisføring.

Tanker i etterkant …

Mange av oss har hatt mange positive erfaringer og opplevelser når elevene har arbeidet med problemstillinger som har ført til 'oppdagelser' og 'a-ha-opplevelser'. I mange tilfeller har bruk av tekniske hjelpemidler vært til stor hjelp ved at brysomme og tidkrevende beregninger utføres maskinelt, og gjentagende prosesser har blitt utført ved hjelp av de tekniske hjelpemidlene. Dermed kan fokus settes på begrepsforståelse, og elevens oppmerksomhet dreies bort fra spenningsmomentet om svaret stemmer med 'fasit'. På dette området åpner de tekniske hjelpemidlene uante muligheter, men begrensingen har vært at elevene skal dyktiggjøres til å løse 'tradisjonelle' eksamensoppgaver. Signaler tyder imidlertid på at vi kan vente en viss retningsjustering på dette området i nær framtid. Teknologiens inntog i matematikkopplæringen må få andre konsekvenser enn at elevene på en enklere måte enn tidligere får utført beregninger og tegnet grafer. I denne artikkelen er det satt fokus på anbefalinger og konklusjoner fra en av de sentrale forskerne på dette området. Når Dreijvers gir oss klare anbefalinger om å legge et solid grunnlag i det han omtaler som papir-og-blyant-metoder, før teknologien tas i bruk for å utdype kunnskapen, er det i tråd med erfaringen mange av oss har gjort i egen undervisning. Dette poenget synes å være så sentralt at det bør få betydning for måten undervisningen tilrettelegges og kunnskapene evalueres. Ideen med å to-dele eksamen i matematikk, hvor den ene delen er uten bruk av tekniske hjelpemidler, har blitt nasjonale standarder i både Sverige og Danmark. Vi har hatt gode erfaringer med denne prøvetypen også i Norge, så det er vel bare et tidsspørsmål før den to-delte prøven blir obligatorisk i matematikk også hos oss.

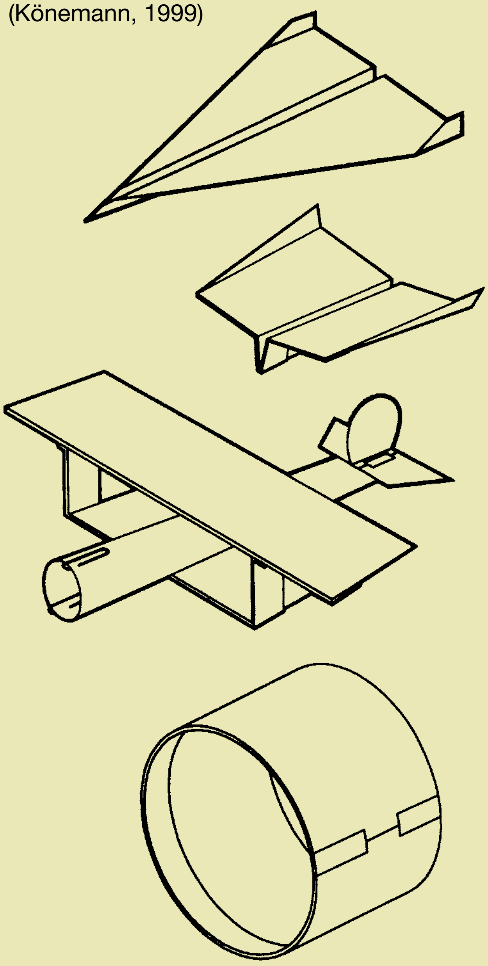
Referanseliste

[1] Rundskriv SUOA/V – 93 – 016

[2] Information: www.fi.uu.nl/~pauld

Avhandlingen og sammendraget kan hentes på www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation

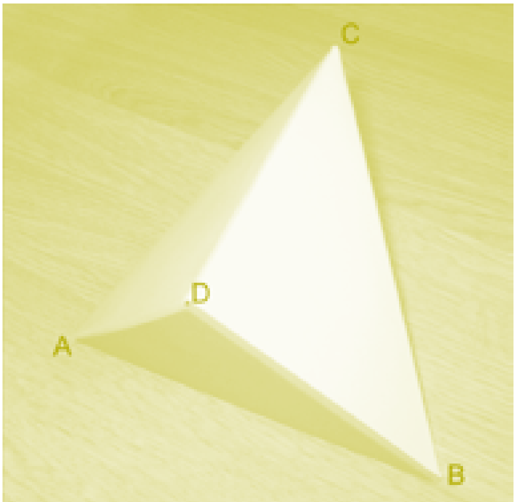
Henrik Kirkegaard skriver om papirfly og fallskjermer på side 60 i dette bladet. Her er et par papirfly, hentet fra *Verdens beste papirfly*, av Blackburn & Lammers (Könemann, 1999)



Øistein Gjøvik

Fugletetraederet

Nå skal vi lage et romlegeme du kanskje ikke har sett før. Det er ikke noe mystisk ved selve figuren, men den hører ikke til blant de mest brukte i undervisningen. Lag figuren før du leser videre. Bretteoppskriften står som et tillegg bakerst. Den ble opprinnelig funnet på adressen [1], men er neppe å oppdrive der lenger. Jeg har derfor tatt meg friheten til å tegne den på nytt etter beste evne så lik originalen som mulig. Du kan også se en interaktiv modell av denne på nettadressen [2] dersom du ønsker å sammenlikne. Når den er ferdig skal den se ut som på bildet.



Du vil kanskje tenke litt selv på oppgavene vi kan lage med denne figuren. Vi kan lage aktiviteter der både kommunikasjon av matematikk, geometri i to og tre dimensjoner og algebra kommer inn. Se for eksempel på følgende spørsmål:

- Finn et 'matematisk' navn på figuren. (Vi har brukt betegnelsen 'fugletetraederet' i overskriften, men dette er bare et kallenavn. Hva kan forresten dette navnet komme av?
- Finn geometriske steder og begreper som dukker opp under og etter bretting av denne figuren.
- Beskriv symmetriene på figuren.
- Finn en formel for volumet av figuren når du går ut fra at sidekanten på papiret du startet med er 2s. Hvis du for eksempel begynte med å lage et kvadrat av et A4-ark, vil det derav følgende kvadratiske arket ha en sidekant som er like lang som kortsiden av et A4-ark. Det er altså denne du kan kalle 2s.

Øistein Gjøvik, Norsk senter for matematikk i opplæringen (oisteing@stud.ntnu.no).

Navnsetting

Ettersom figuren består av seks sider, ser vi at vi kan kalle den et heksaeder. Denne figuren kan også kalles triangulær bi-pyramide. Navnet skyldes da at figuren består av to pyramider med trekantet grunnflate. Sett sammen disse to pyramidene grunnflate mot grunnflate, og du får en triangulær bi-pyramide. Betegnelsen trekantet dobbelpyramide (eller dobbel trekantpyramide) kunne også blitt brukt.

Vi bruker gjerne navnet 'fugletetraeder' siden triangulær bipyramide er litt mer kronglete. Navnet 'fugletetraeder' har sannsynligvis kommet av at figuren, når den holdes med grunnflaten ABC vannrett, likner på et fuglenebb, og samtidig av at den tilsynelatende – med litt klemming – ville vært et tetraeder (et av de platonske legemene).

Figuren kan også betegnes som Johnsonlegeme J12 (Se [3]).

I det etterfølgende bruker vi bokstavene som er tegnet inn på fotografiet. På baksiden av figuren har vi også ett hjørne (speilbildet av *D*). Vi kommer ikke til å sette noe navn på dette, da vi i beregningene ikke benytter dette hjørnet.

Geometriske begreper

En kjapp opplisting av begrepene man kan finne på denne figuren:

Rettvinklet trekant, høyde i trekant, høyde i pyramide, grunnflate, grunnlinje, rette vinkler (halvparten av rette vinkler), likebeint trekant, kvadrat, drakeform, likesidet trekant, speilsymmetri, rotasjonssymmetri … Prøv å finn disse! (Og fins det flere?)

Vi får senere også bruk for Pytagoras og formlike trekanter, samt egenskapene til trekanter med vinkler på 30, 60 og 90 grader.

Symmetrier

Tenker vi fortsatt på figuren som sammensatt av to pyramider kan vi tenke oss en akse som går gjennom begge spissene i pyramidene. Dette blir da en rotasjonsakse, hvor vi kan rotere figuren 120 grader tre ganger.

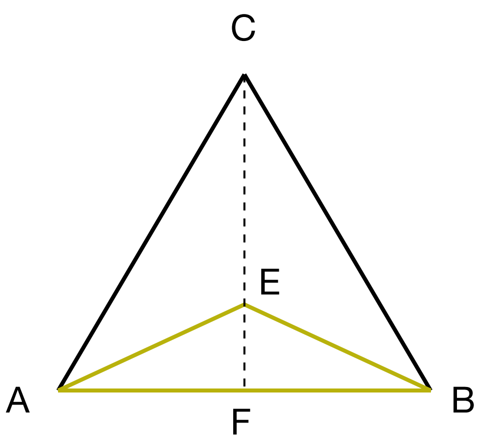
Vi får også tre rotasjonsakser i grunnflaten ΔABC, nemlig gjennom midtnormalene på sidene AB, BC og AC. Her kan vi rotere 180 grader to ganger .

Vi finner også speilsymmetri. Alle de likebeinte trekantene vi finner er jo speilsymmetriske. Vi kan også snakke om speilsymmetri i rommet; hele den tredimensjonale figuren er speilsymmetrisk om ΔABC. Hvilke andre flater kan figuren være speilet om?

Beregning av volumet

Beregning av grunnflatens areal

Vi skal nå beregne volumet av et slikt fugletetraeder. Vi innser først at figuren består av to pyramider med trekantet grunnflate. Vi kan derfor nøye oss med å beregne volumet av en slik trekantpyramide, nemlig pyramiden *ABCD*. Minner om at formel for volum av pyramide er $V = \frac{1}{3} gh$ der g er arealet av grunnflaten ABC i pyramiden og h er høyden.



Treffpunktet til loddelinja fra pyramidetoppen D på grunnflaten g kaller vi for E.

Høyden i g treffer videre grunnflaten AB i punktet F slik at høyden i g blir linjestykket CF. La oss betrakte figuren ovenfra slik at grunnflaten G er en likesidet trekant (hvordan vet vi at den er likesidet?), og skrive på bokstavene vi har så langt. Vi regner først ut CF. Vi fikk oppgitt at sidekanten på det kvadratiske arket vi begynte brettingen med var $2s$. Ser vi på den tredimensjonale figuren ser vi dermed at $DB = s$. Pytagoras gir da

$$AD^2 + BD^2 = AB^2$$
$$s^2 + s^2 = AB^2$$
$$AB = \sqrt{2s^2} = s\sqrt{2}$$

Vi kan så finne høyden CF i grunnflaten g. Da vil CF dele grunnflaten AB inn i to trekanter med vinkler på 30, 60 og 90 grader (hvorfor?). En slik trekant har som kjent egenskapen at korteste side er halvparten av den lengste. Pytagoras igjen gir da:

$$AF^2 + CF^2 = AC^2$$
$$\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + CF^2 = AB^2$$
$$\left(\frac{1}{2}s\sqrt{2}\right)^2 + CF^2 = \left(s\sqrt{2}\right)^2$$
$$\frac{2s^2}{4} + CF^2 = 2s^2$$
$$CF = \sqrt{2s^2 - \frac{1}{2}s^2} = \sqrt{\frac{3}{2}s^2} = s\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Vi kan da finne grunnflaten i pyramiden:

$$g = \frac{1}{2}AB \cdot CF = \frac{1}{2}\left(s\sqrt{2}\right)\left(s\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{s^2\sqrt{3}}{2}$$

Beregning av høyden i pyramiden

En litt større utfordring er det å finne høyden i pyramiden. Her får vi bruk for å kunne forestille oss hvor h $(=DE)$ treffer g inni figuren, altså plasseringen til punktet E.

Vi kan finne toppvinkelen $\angle AEB$. Vi vet at ett helt omløp er 360°, og det er her tre like toppvinkler som til sammen blir 360°. Hver vinkel (og en av dem er $\angle AEB$) blir dermed 120°. Ved å halvere denne vinkelen, som på figuren over, får vi en trekant ΔEFA med vinkler på 30, 60 og 90 grader. Vi kan da finne siden EF i en slik trekant:

$$AF^2 + EF^2 = AE^2$$
$$\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + EF^2 = (2EF)^2$$
$$\left(\frac{1}{2}s\sqrt{2}\right)^2 + EF^2 = (2EF)^2$$
$$\frac{1}{2}s^2 + EF^2 = 4EF^2$$
$$EF = \sqrt{\frac{1}{6}s^2} = \frac{s}{\sqrt{6}}$$

Dette er avstanden fra grunnlinjen AB og ut til punktet E der pyramidens høyde h er oppreist. Vi trenger også siden DF og ser da på ΔAFD. Denne trekanten er rettvinklet og likebeint, og må da ha to vinkler på 45 grader.

$$AF^2 + DF^2 = AD^2$$
$$\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + DF^2 = s^2$$
$$\left(\frac{1}{2}s\sqrt{2}\right)^2 + DF^2 = s^2$$
$$DF = \sqrt{s^2 - \frac{1}{2}s^2} = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

Da kan vi finne høyden h i pyramiden

$$EF^2 + DE^2 = FD^2$$

$$\left(\frac{s}{\sqrt{6}}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{6}$$

$$h = \frac{s}{\sqrt{3}}$$

Sammenfatning

Tilslutt finnes volumet av figuren:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} gh = 2 \cdot \frac{1}{3}\left(s^2 \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}s^3.$$

Dette kan vi også komme fram til på mer avanserte måter. Se referanse [4] for generelle formler for bi-pyramider.

Men vent nå litt …

Om vi snur figuren slik at ΔABD er grunnflaten og DC er høyden i pyramiden $ABDC$, ser vi at vi kan regne ut volumet av den på en mye lettere måte.

Arealet av grunnflaten ΔABD er $\frac{1}{2}s^2$. Høyden $DC = s$, dermed ser vi at volumet av pyramiden er $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}s^2)s = \frac{1}{6}s^3$. Vi har to slike og volumet av hele figuren blir dermed $\frac{1}{3}s^3$. Så enkelt kan det gjøres!

Kommentarer og utvidelser

Vi har sett at man kan komme fram til volumet av figuren på (minst) to måter, der den ene er langt enklere enn den andre. Det kan være fint for elever å se dette aspektet ved matematikk, at det fins flere nivåer av framgangsmetoder i matematikk. Klarer elevene å se den enkle metoden, eller er det mer innenfor rekkevidde å gjøre de i små etapper?

Det fins flere måter å brette fugletetraederet på. Beregningene ovenfor baserer seg på brettingen som er tegnet på siste side i artikkelen. Andre fremgangsmåter fins, for blant annet å brette figuren av ett ark i stedet for tre. I boka [5, s. 138] finner vi andre muligheter for å lage mer kompliserte figurer med fugletetraedere.

Man kan gjerne utføre brettingen sammen med elevene. Det er en rimelig lett og oversiktlig modell med få brettinger. Den er også lett å lære utenat og grei å demonstrere med arket i løse lufta. Man kan underveis føre kontinuerlig samtale med elevene om hvilke geometribegreper som dukker opp underveis og etterpå. Ønsker man at det skal gå raskere kan tre elever gå sammen og lage hvert sitt ark, for så og sette de sammen. Bruk gjerne tre forskjellige farger, da er modellen enklere å måle på og å holde oversikten over. Den blir også mye penere da. Et forslag kan være å forlange at figurene skal ha tre farger, og dernest dele ut farget papir slik at elevene må røre seg litt for å finne to andre med andre farger på papiret.

Det ligger fine muligheter for differensiering her. Man kan finne volumet ved symbolsk formel, slik vi gjorde her, eller ved å måle sidekantene. Begge deler utfordrer evnen til å forestille seg figurer i rommet. Figuren gir gode muligheter for å veksle mellom to- og tredimensjonale synsvinkler. Eller man kan gi en oppgave om hva formelen for volumet ville blitt dersom vi hadde valgt kortsiden av A4-arket til å være s i stedet for 2s?

Starter man med et kvadratisk ark som har 20cm som sidekant vil figuren romme en tredjedels liter når den er ferdig (klipp av en av tuppene, tre en plastpose inni og se hvor mye vann det er plass til).

Det fins også så små utgaver av fugletetraederet at de kan bli brukt som ørepynt. Klarer elevene å lage så bitte små figurer? Noen lærerstudenter tok utfordringen på strak arm, som bildet viser. Eller kanskje man kan bruke fugletetraedere som julepynt?

Figuren har seks sider, hvordan kan vi nummerere sidene for at denne skal kunne brukes som en terning? Den lander jo aldri med bare en side opp. Figuren kan jo minne om terninger brukt i for eksempel rollespill. Kan vi lage en spillterning av figuren ved å skrive tall på kantene eller sidene? Og – litt vanskeligere – klarer vi å sette tall på sidene på en slik måte at de to sidene som vender opp etter et kast til sammen vil kunne vise tallene fra 1 til 6?

Takk til Svein Halvor Halvorsen for gode innspill og kritiske kommentarer.

Referanser

[1] http://www.fabricorigami.com

[2] http://mathworld.wolfram.com/TriangularDipyramid.html

[3] http://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html

[4] http://mathworld.wolfram.com/Dipyramid.html

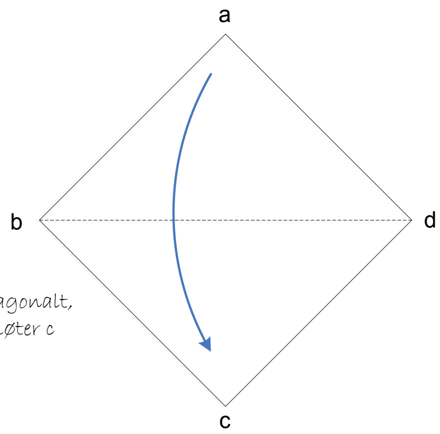
[5] Fuse, Tomoko; *Unit origami – multidimensional transformations*, Japan publications inc. (1990) (Kan bestilles på http://www.amazon.co.uk/exec/obidos/ASIN/0870408526/qid=1108972760/sr=1-13/ref=sr_1_2_13/202-4918682-6795041)

FUGLETETRAEDERET

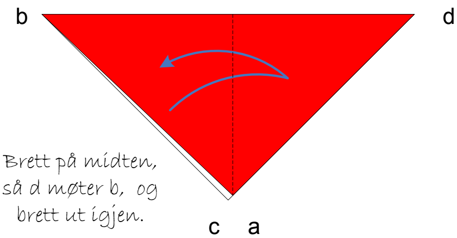
Kilde: http://www.fabricorigami.com
(Tegmet på nytt på MSVisio)

Dette er en forholdsvis enkel modell, som du kan finne i flere bøker. Den lages av tre kvadratiske ark, som alle brettes likt og settes sammen tilslutt.

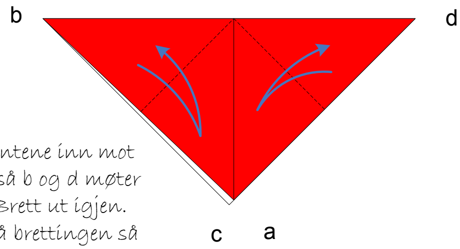
Benytt gjerne tre ark med forskjellige farger. Hvis man ønsker å samarbeide, kan man gå sammen tre personer, og brette en del hver.



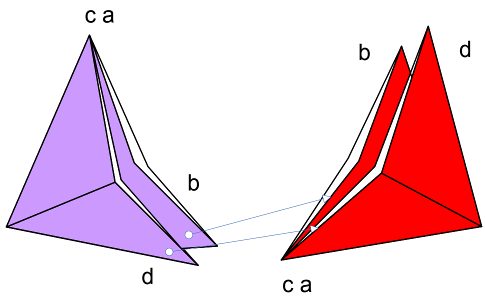
Brett diagonalt,
så a møter c



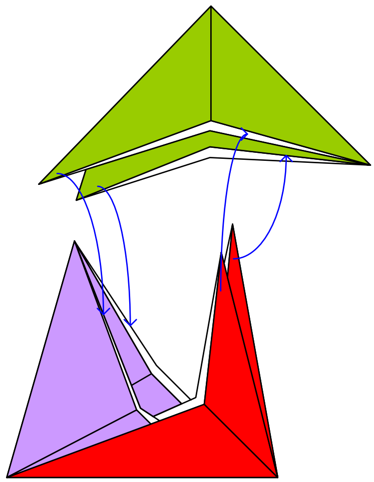
Brett på midten,
så d møter b, og
brett ut igjen.



Brett kantene inn mot
midten, så b og d møter
a og c. Brett ut igjen.
Gjenta så brettingen så
langt med to ark til.



Sett sammen to deler på denne måten. Legg merke til at de to delene står motsatt til hverandre - det er <u>to</u> spisser som peker opp på ene delen, mens det kun er <u>en</u> spiss på den andre delen.
Det er to "tagger" b og d på figuren til venstre, som skal inn i to "lommer" på figuren til høyre.



Føy til slutt til den tredje delen på tilsvarende måte som du satte sammen de to første.

Henning Bueie

Nøtteboksen

Glimt fra klasserommet

De fleste har vel brukt mattenøtter i matematikkundervisningen og opplevd hvor motiverte enkelte elever blir av slike. Dessverre så blir det ofte slik at det er den raskeste eleven som opplever størst glede av å løse slike nøtter, da denne eleven ofte får gleden av å kringkaste sitt resultat til de andre i klassen lenge før de andre har kommet skikkelig i gang med løsningsprosessen. På ungdomsskolen der jeg jobber har jeg forsøkt å sette noe av arbeidet med matematikknøtter i et system. Konkurranseaspektet har jeg bevart, men gjort systemet slik at det nå er klassene som konkurrerer mot hverandre. Det fungerer på den måten at det på hver studieplan som deles ut til den enkelte elev hver fjortende dag publiseres en ny nøtt, sammen med løsningen på forrige nøtt. I tillegg så kommer en liste over hvem om har levert riktig svar på forrige ukes nøtt, og hvor mange riktige svar som er levert av den enkelte klasse totalt så langt i konkurransen.

På denne måten får elevene ikke bare bevart konkurranse aspektet, men de får også mulighet til å løse nøtta i et tempo som passer dem selv, uten å måtte stresse med å bli den første i klassen som klarer å finne det riktige svaret. For å administrere denne nøttekonkurransen har jeg laget en nøtteboks som fungerer som en postkasse der elevene kan stikke innom å levere løsningen på nøtta når de mener de har løst den. En slik nøtteboks kan du enkelt lage ved hjelp av en tom pappeske.

Erfaringene jeg har høstet med nøttekonkurransen er positiv. Elever på alle nivå føler de kan delta, og elevene i en klasse hjelper ofte hverandre for at flest mulig skal få levert så klassen kan stikke av med seieren. Nøttekonkurransen utvikler seg ofte slik at det til å begynne med bare er noen få elever i klassen som deltar, mens det mot slutten gjerne er alle elevene i klassen som leverer besvarelser. Jeg har brukt å la nøttekonkurransen foregå i et halvår om gangen med premieutdeling til slutt.

Henning Bueie er realfagslærer ved Åretta ungdomsskole, Lillehammer, og masterstudent i matematikkdidaktikk ved Høgskolen i Agder. henning_bueie@hotmail.com

Redaksjonen inviterer lærere til å dele sine erfaringer fra klasserommet med andre. Merk bidraget "Glimt fra klasserommet".

Den store nøttekonkuransen

Svar på forrige periodes nøtt var: 12

Riktige svar **med begrunnelse** ble levert av:
9a: Pelle
9b: Kjell, Jonas, Silje, Stein, Kalle, Tora, Pernille, Jens, Bjarne, Vera
9c: Åse, Sigfrid
9d: Simen, Erling

Poeng så langt:
9a: 2
9b: 24
9c: 8
9d: 4

Denne periodens nøtt er:
Pappa gir Kristoffer 54 fyrstikker som Kristoffer skal lage ett stort rektangel av. Men, ikke et hvilket som helst rektangel, det skal være så stort som mulig (dvs. størst mulig flateinnhold) - og selvfølgelig må ikke Kristoffer brekke noen fyrstikker.

Etter en stund klarte han det. Hvor langt og hvor bredt var rektangelet?

Husk begrunnelse.

Inspirasjonsbok fra *Tangenten*

Tangenten er i gang med å lage en inspirasjonsbok som henvender seg til lærerne i den videregående skolen. Dette som et ledd i satsningen på matematikk og naturfagene i skolen. På den måten ønsker vi å bidra til større rekruttering til realfagene i den norske skolen.

Vi ønsker å gi lærere en inspirasjon og gjøre dem kjent med bladet som kilde til idéer til egen undervisning. På den måten tenker vi oss at vi kan bidra til å heve kvaliteten i undervisningen i realfag og dermed også å kunne øke rekrutteringen til fagene. Vi tenker oss at boka kan sendes gratis i 4–5 eksemplarer til alle videregående skoler i Norge. Slik kan boka være både en inspirasjonskilde samtidig som det kan gi grunnlag for faglige diskusjoner ved realfagsmiljøene i skolene.

Tangenten har funnet noen støttespillere til en slik produksjon men vi trenger flere.

Innhold:
historiske artikler, sannsynlighetsregning, geometri, IKT, algebra/likninger, funksjoner, matematiske aktiviteter, modellering og didaktikk

Mona Røsseland

Hva er matematisk kompetanse? – del 2

Dette er andre del av en artikkel som tar for seg de matematiske kompetansene som ligger til grunn for de nasjonale prøvene i matematikk. Den første delen (Tangenten nr. 1/2005) tok for seg tankegangs-, resonnements- og kommunikasjonskompetansen. Denne gang vil jeg beskrive modellerings-, problembehandlings-, hjelpemiddel-, representasjons-, symbol og formalismekompetansen. Men aller først vil jeg starte med et glimt fra klasserommet.

Sissel og Lars sin matematiske kompetanse

For en tid tilbake møtte jeg to fjerdeklassinger som begge hadde et problematisk forhold til matematikk. Klasselærer og jeg ble enige om å 'teste' dem i lys av de matematiske kompetansebegrepene. Lite ante jeg da om hvilke oppdagelser som skulle komme frem eller om hvorfor dette hadde vært så vanskelig å finne ut av tidligere.

Dette var to elever som opplever at matematikk var vanskelig. Sissel får gjort svært lite i timene, og hun har problem med å følge klassens løp i faget. Lars har en mer sammensatt problemsituasjon. Han sliter både med konsentrasjonsvansker og det sosiale samspillet i klassen. Han liker ikke matematikk, sier han og gjør minst mulig i timene.

Jeg laget en del varierte oppgaver, som tok utgangspunkt i de ulike kompetansene. Sissel og Lars var sammen med meg en og en og mange av oppgavene foregikk i en muntlig form. Jeg leste opp teksten eller problemstillingen, mens de svarte muntlig ofte ved hjelp av tegninger og utregninger på ark.

Eksempler på oppgaver som Sissel fikk: *– Du skal dele 24 kr med to andre. Hvor mye får dere hver? – Du har 45 kr. En is koster 10 kr. Hvor mange is kan du kjøpe? – Jeg har 15 drops og du har 25 drops. Hvor mange flere har du?*

Sissel har store problemer med disse oppgavene. Hun hører hvilke tall som kommer frem i oppgavene, men vet ikke hva hun skal gjøre med dem for å finne et svar. Jeg må gjøre oppgavene enklere og enklere, og det er først når tallene er under 10 og det bare er en regneoperasjon at hun klarer oppgavene uten hjelp. Hun har få og rigide strategier, enten teller hun på fingrene eller så tegner hun rundinger på arket og krysser ut ved subtraksjon.

Mona Røsseland er nettverkskoordinator ved Matematikksenteret, mona.rosseland@hjemme.no

Brått får jeg meg en overraskelse. Vi er kommet til de oppstilte stykkene som hun skal regne på ark. Det er både to og tresifrete tall, og både addisjon og subtraksjon. I det jenta ser oppgavene, lyser hun opp og utbryter: – *Dette kan jeg*! Og ganske riktig, regnestykkene går unna, og hun viser at hun mestrer både minnetall og veksling. Dette klarer hun på tross av at hun tidligere i testsituasjonen har vist at hun ikke er trygg på posisjonssystemet.

Lars møter meg med et mørkt blikk. Han vet at dette gjelder matematikk, og han har gjort det helt klart for meg at han hater matte. Jeg prøver meg frem med små enkle problemoppgaver. Til min overraskelse svarer han lynraskt på alle sammen. Han forandrer også holdning og er riktig glad og fornøyd mens svarene triller ut som erter ut av en sekk. Jeg må begynne å improvisere vanskegraden, for mine ferdiglagde oppgaver er tydelig for lette. Oppgavene er sammensatte og tallområdet er over hundre. Lars forklarer tydelig hvordan han tenker, og han viser også alternative løsningsmåter på flere av oppgavene.

Jeg merker gåsehuden på ryggen, for det er helt tydelig at jeg sitter fremfor en gutt med usedvanlige evner i matematikk. – *Hvordan i all verden kan han hate matematikk?* Jeg begynner å få en liten anelse på hva svaret er når jeg spør hva han får hvis han deler 63 på 3. Plutselig forandrer han ansiktsuttrykk. Det mørke blikket møter meg igjen: – *Jeg kan ikke dele*! sier han bestemt, … *men svaret er 21!*

Jeg får indikasjon på hva som er i vente. Når de oppstilte stykkene kommer frem, går det helt i styr for Lars. Han blir tydelig utilpass og usikker: – *Jeg kan ikke dette*! Gjentar han igjen og igjen. – *Kan jeg ikke heller sette stykkene bortover, for da ser jeg hva svaret blir*? Lars klarer omsider å løse alle de oppstilte stykkene, men først etter at jeg har bearbeidet og motivert han til å prøve. Det begynner i midlertidig å demre for meg hvorfor gutten hater matematikk. Det er trolig dette han forbinder med faget: Han tvinges til å regne side opp og side ned med matematikkstykker, der han blir tvunget til pugging av huskeregler: – *Husk å sette minnetall. Husk å sette strek over riktig tall når du låner*!

Gåsehuden er forsvunnet og tilbake sitter vemodet. Lars vil ikke bli en ny Abel likevel, ikke i den tradisjonelle skolen i alle fall. Slik jeg ser det, vil både Sissel og Lars bli tapere i matematikkfaget. Sissel fordi hun innehar en ferdighet som hun ikke *kan* bruke, fordi hun fullstendig mangler innsikt og forståelse, selv om hun er flink til å kunne huskereglene. Lars fordi han ikke *får* bruke sin kompetanse i matematikktimene. Han blir tvunget til å sitte med det han ikke mestrer eller forstår meningen med.

Hvor mange talentfulle barn mister vi i den tradisjonelle matematikkundervisningen dersom eneste fokus er pugging av regler og regning av oppgaver som utelukkende styrker en side ved matematisk kompetanse, nemlig symbol og formalisme?

Anvendelse og matematisk modelleringskompetanse

Kompetanse i modellering inneholder det å kunne strukturere den situasjonen som skal bearbeides, å kunne matematisere situasjonen. Det vil si å kunne oversette situasjonen til et matematisk språk med matematiske problemstillinger, med nødvendige symboler og matematiske uttrykk. Når en så har klart å lage et matematisk uttrykk, som representerer den opprinnelige situasjonen, må en også evne å behandle uttrykket. En skal kunne forklare hva svaret betyr for den praktiske situasjonen, og hvilke forutsetninger som må være oppfylt for at modellen skal kunne brukes og svaret være gyldig. Kompetansen inneholder også å kunne diskutere modellen med andre og vurdere ulike modeller opp mot hverandre (NSMO).

Modellering inneholder altså en rekke forskjellige elementer. For det første må en finne matematikken i en praktisk situasjon, for så å oversette den til et matematisk språk og løse de matematiske problemene. Kompetansen går også på om elevene klarer å vurdere om løsningen er realistisk og drøfte løsningene i forhold til den opprinnelige situasjonen.

Kompetansen inneholder altså evne til å analysere modellen kritisk, det vil si å vurdere om den valgte modellen er den mest fornuftige i forhold til mulige andre modeller eller om modellen i det hele tatt egner seg til rent matematiske beregninger. En slik kompetanse vil gjøre elever bedre rustet til å vurdere andres valg av modeller. Jeg tenker spesielt på medias ofte ukritiske bruk av statistikk. I mange tilfeller kan de være i liten overensstemmelse med fakta og gi misvisende konklusjoner.

Å anvende matematikk ligger også innenfor dette kompetanseområdet. For de yngste elevene vil bruk og behov for matematikk være mer naturlig enn modellering i mer teoretisk forstand, med formler og beregninger i ulike modeller. Modelleringskompetansen har også mange likhetstegn med problembehandlingskompetansen, men skiller seg altså ut ved at elevene her også må gjøre mange utenommatematiske vurderinger, mens en i problembehandling kan forholde seg til rene talloppgaver.

Eksempler på oppgaver

Elevene skal planlegge en dag i en fornøyelsespark. De må forholde seg til en viss sum penger, og ut i fra den skal de planlegge hva de skal gjøre i parken.

En kan gjerne ta utgangspunkt i en eksisterende park, f.eks. Tusenfryd, men læreren må legge inn priser på aktivitetene. Elevene skal planlegge aktivitetene både ut fra et pengeperspektiv og et tidsperspektiv. De må beregne tiden de bruker på hver aktivitet, men også tiden som går med til køståing og forflytning, både til og fra parken, og også mellom aktivitetene. Elevene får eller lager et kart over parken, og de får/lager liste over hva de ulike aktivitetene koster.

Elevene kan godt lage et oppsett for hele familien sin, ikke bare seg selv. Det kan legges inn minimum en halv time til lunsj. Alle kan lage en liste over hva de kjøper i kiosken. Elevene lager en fullstendig oversikt over dagen. I denne oversikten har de med hvilke aktiviteter de har vært med på, det totale pengeforbruk og tidsbruk.

En kan også legge inn en oppgave der elevene må beregne hva som svarer seg av å ha en pris på inngangsbilletten og så er aktivitetene gratis, eller gratis inngang og så betaler en for hver aktivitet. Her kan elevene lage ulike modeller og utforske med flere forskjellige tallstørrelser. Hva må prisen være på de ulike aktivitetene, for at det til sammen skal bli omtrent samme pris som inngangsbilletten? En bør kanskje se hele familien under ett når en beregner dette, for vil det ene alternativet passe best for alle?

Problembehandlingskompetanse

Kompetansen inneholder det å kunne ***finne*** og ***formulere*** matematiske problemstillinger, kunne ***løse*** matematiske problemstillinger og etter hvert også kunne løse dem på forskjellige måter (ibid). Et matematisk problem er en spesiell form for matematisk spørsmål, der oppgaven krever en matematisk undersøkelse for å komme frem til svaret. Spørsmål eller oppgaver som kan besvares med rutineferdigheter eller standardalgoritmer blir ikke regnet som et matematisk problem.

Begrepet matematisk problem er altså ikke absolutt, men relativt i forhold til den personen som skal løse det. Det som for en person kan være rutineoppgave, kan for en annen være et problem som en ikke vet nøyaktig fremgangsmåte på. Et eksempel på det kan være oppgaven: 2544 : 6 = . For en tredjeklassing vil dette være et matematisk problem, som gjerne lærer må knytte til en sammenheng før eleven klarer å komme i gang. For mange syvendeklassinger vil dette være en rutineoppgave, der de kjenner fremgangsmåten. De vil da ikke ha bruk for problembehandlingskompetansen i denne oppgaven.

Eksempler på oppgaver

«Hiros mor er syk»

Historien foregår i Japan. Hiros mor er havnet på sykehus, og han bestemmer seg for å ta lillebroren med seg og gå i tempelet hver dag for å be om at hun snart må bli frisk. Hver gang gir de en mynt hver i kollekt, som de legger i en kurv ved utgangen til tempelet.

Hiro har 18 ti-yen mynter, mens lillebroren har 22 fem-yen mynter. De går til tempelet hver dag, helt til en av dem går tom for mynter. Hiro har selvsagt mest penger, men en dag de er på vei hjem fra tempelet har dette forandret seg.

Fra hvilken dag har lillebroren mest penger?

Vis hvordan du kom frem til svaret. Kan du finne flere fremgangsmåter?

Elevene kan løse oppgaven på ulike måter. De kan ta i bruk enkle løsningsstrategier, for eksempel ved hjelp av tegning eller konkretiseringsmidler, eller de kan finne løsningen med tilfeldig prøving og feiling. Men de elevene som har høy problemløsningskompetanse vil kunne resonnere og løse problemene med systematisk valg av strategi, og de vil være i stand til å velge mellom ulike løsningsstrategier, for så å velge den mest hensiktsmessige.

Andre eksempler på oppgaver:

- En bonde har 26 dyr på gården sin. Han har både griser og høner. Til sammen har de 84 bein. Hvor mange griser har han, og hvor mange høner har han?
- Skriv tre regnestykker som gir 100 til svar.
- Finn så mange figurer som mulig med

strikk på geobrettet der omkretsen av figuren er 12.

Representasjonskompetanse

Representasjonskompetanse inneholder det å kunne ***forstå og avkode, tolke og bruke*** ulike representasjoner av matematiske objekter, fenomener, problemer eller situasjoner. Denne kompetansen inneholder også bruk av symboler, både algebraiske, visuelle, geometriske og verbale representasjoner, diagrammer, tabeller og konkrete representasjoner (for eksempel at en knapp kan symbolisere et menneske). I kompetansen ligger også det å kunne ***forstå forbindelsene mellom*** ulike representasjonsformer, kunne velge blant dem og oversette mellom dem (ibid).

Et elementært eksempel på denne kompetansen kan være evnen til å representere et naturlig tall med prikker eller klosser av lik form og størrelse, eller oppskriving av tall i posisjonssystemet ved hjelp av enerbrikker, tierstaver, hundrebrett og tusenkuber. Et annet eksempel er tidsangivelser, både på analog og digital måte (to ulike representasjoner av det samme klokkeslett).

Elevenes representasjonskompetanse kommer til uttrykk gjennom deres evne til å abstrahere kronkrete ting som fire halve pizza pluss tre firedels pizza. Kompetansen kommer også til syne blant annet gjennom deres evne til å tegne figurer, sette opp tabeller og skjemaer som hjelp til å forstå mer abstrakte ting, som rene tallsymboloppgaver.

Et eksempel på representasjonskompetanse i tilknytning til oppgaven om «Hiros syke mor» kan være elevers ulike besvarelser. Noen elever vil lage en tegning der de fordeler pengene til guttene i hver sin kurv. De tegner da gjerne 22 og 18 sirkler og stryker ut en mynt fra hver gutt og hele tiden teller hvor mye de har igjen. Andre lager seg en tabell, der noen starter fra dag 1 og fortsetter utover, mens andre begynner med dag 18 og teller seg bakover. Det finnes også elever som løser oppgavene ved å sette opp en likning:

$$180 - 10x = 110 - 5x.$$

Av særlig betydning i matematikk er symbolske representasjoner. Derfor er det nær forbindelse mellom representasjonskompetansen og symbolbruk– og formalismekompetansen, som blant annet fokuserer på 'spillereglene' for omgangen av matematiske symboler.

Symbolbruk og formalismekompetansen

Symbol- og formalismekompetanse inneholder det å kunne ***bruke og avkode*** symbol- og formalismespråket og ***oversette mellom*** matematisk symbolspråk og dagligtale. Det vil også si å ha innsikt i de matematiske "spillereglene". Denne kompetansen skiller seg dermed fra representasjonsfasen ved at den fokusere på symbolenes karakter, status og betydning og på selve håndteringen av dem, inklusive regler (ibid).

Her er det altså evnen til å kunne bruke det formelle matematiske språket på en måte som gir mening for deg selv og andre. Den består også i å beherske vedtatte regler og definisjoner, som for eksempel å vite at multiplikasjon har fortrinn fremfor addisjon i et matematisk uttrykk [2]. Kompetanse tilsier også at de skal kunne lage en tilknytning til det virkelige liv (regnefortelling) ut fra et rent regnestykke.

Elevene kan bruke streker, fingrer og konkreter for å representere tall. De med lav representasjon- og symbol/formalismekompetanse har ofte problemer med blant annet posisjonssystemet, måleenheter og geometriske symboler.

Elever med høy representasjon-, symbol-og formalismekompetanse klarer å se sammenhengen mellom bilde, symbol og virkelighet. De kan manipulere med symboler og regneoperasjoner, og de regner lett mellom ulike regneoperasjoner og velger den mest hensiktsmessige representasjonen i en gitt situasjon (ibid).

Eksempler:
- 453 står for 4 hundreder, 5 tiere og 3 enere.
- 0,5 betyr det samme som 'en halv'.
- Lag regnefortelling til 12 – 7 = 5.
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ betyr at kvadratet av summen av to tall er lik kvadratet av det første tallet pluss det dobbelte produktet av begge tallene pluss kvadratet av det siste tallet.

Hjelpemiddelkompetanse

Kompetansen inneholder det å ***vite om*** ulike hjelpemidler som egner seg til matematisk virksomhet, ha innblikk i ***muligheter og begrensninger*** disse hjelpemidlene gir, og ***kunne bruke*** dem på en hensiktsmessig måte.

Matematikken har alltid benyttet seg av diverse tekniske hjelpemidler, både til å representere og fastholde matematiske saksforhold og til at håndtere dem, for eksempel i forbindelse med målinger og utregninger. Det dreier seg ikke kun om IT, altså lommeregnere og datamaskinen (herunder beregningsprogrammer, grafiske tegneprogrammer, computeralgebra og regneark), men også om tabeller, kulerammer, linjaler, passere, vinkelmålere, logaritme- eller normalfordelingspapir m.v. Kompetansen går altså ut på å kunne omgås og forholde seg til slike hjelpemidler [1].

Eksempler på hjelpemidler:
Tellemateriale som knapper, brikker og steiner, ulike konkrete representasjoner for brøk, tallinjer, måleinstrumenter, passer, vinkelmåler, geobrett, centicubes, cuisinnairstaver, terninger, spesialpapir, polydronbrikker osv. I tillegg kommer ulike former for lommeregnere og programvare (Cabri, TI-interactive, regneark, Maple, Matemania, Chefrens pyramide osv.).

Oppsummering

Det er ikke tvil om at en slik kompetansebeskrivelse av matematikkfaget tilfører faget en ny dimensjon. Det kan være til god hjelp for mange lærere som underviser i matematikk og som selv føler seg usikre i faget. For mange har læreboken vært eneste alternativ i undervisningen, og elevene er i altfor stor grad blitt sittende og regne på oppstilte oppgaver. Ved å sette fokus på at matematikk består av mange kompetanser og at alle disse må stimuleres i undervisningen, vil det forhåpentligvis presse frem en mer allsidig undervisning. Det holder ikke å kun drille algoritmer og formler, for at elevene skal klare seg best mulig til prøvene eller eksamen. Jeg håper det vil tvinge seg fram et metodeskifte rundt om i mange klasserom, bort fra instrumentell innlæring til mer fokus på innsikt, forståelse og varierte arbeidsmetoder.

Litteraturliste

[1] Niss, M, Jensen, T. H. (2002) Utdannelsesstyrelsens temahefter nr. 18-2002; *Kompetancer og matematiklæring*. Undervisningsministeriet, København

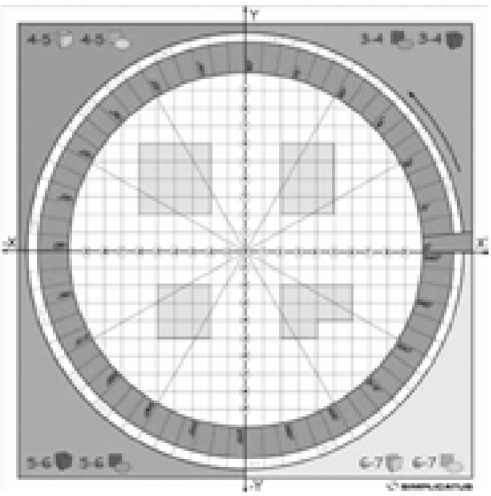
[2] Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen (NSMO); www.matematikksenteret.no/ Informasjon om de Nasjonale Prøver i matematikk.

Magni Hope Lossius

Konge av koordinatene

Anmeldelse av spillet

Konge av koordinatene er et spill som øker forståelsen for bruk av koordinatsystem og vinkelmåling, og spillerne får trening i å navngi forskjellige geometriske figurer. Spillet kan også brukes til begrepslæring innenfor matematikk. I tillegg kan spillutstyret benyttes til ulike puslespill. Spillet er i første rekke produsert for elever i ungdomsskolen.

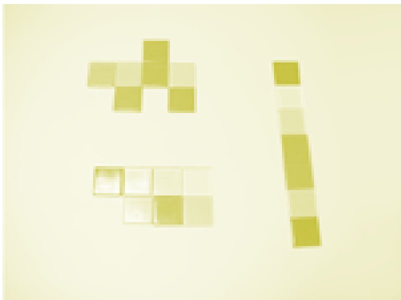


Magni Hope Lossius er høgskolelektor i matematikk ved Høgskolen i Bergen, Avdeling for lærerutdanning: mehl@hib.no

Produsent av spillet: SIMPLICATUS AS
Postboks 27, 2006 Løvenstad

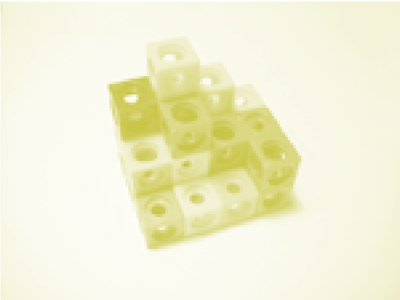
Puslespill

Puslespillene stimulerer til kreativitet og systematisering. Ved hjelp av kvadrater eller kuber blir elevene oppfordret til å bygge så mange forskjellige figurer som mulig med alt fra 2 til 8 kvadrater eller kuber.

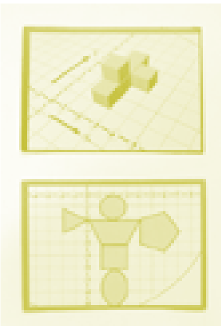


Her kan læreren tilpasse reglene for å bygge figurene slik at man kan møte behovet for tilpasset opplæring. Tilslutt skal elevene bygge en høy skyskraper ved å sette sammen allerede eksisterende figurer. Skyskraperen skal bygges under bestemte regler blant annet er det ikke lov å bygge høyere enn to etasjer over en uferdig etasje. Dette er en aktivitet som stimulerer i stor grad til undersøking og logisk tenkning.

Figuren viser en skyskraper som har en etasje for mye fordi første etasje ikke er bygget ferdig.



Spillet



Spillet går i korte trekk ut på at eleven skal forklare en figur til medspilleren. Deretter skal medspilleren bygge figuren i riktige koordinater i koordinatsystemet. Dette gjøres på ulike måter. Først trekker man et kort med en ferdig bygget figur som skal forklares. Selv om tiden er begrenset ved hjelp av timeglass er dette en oppgave som vil kunne løses av de fleste. Figurene er bygget opp av kuber som passer nøyaktig inn i hver rute i koordinatsystemet. Elevene oppfordres derfor til å bruke koordinatene under forklaringen på beliggenheten. Man kan variere spillet ved at eleven selv bygger en figur av kubene istedenfor å trekke denne fra en kortbunke. Dersom dette viser seg å være enkelt kan elevene settes til å lage formasjoner av ulike geometriske former. Utfordringen blir å forklare for medspilleren nøyaktige koordinater til ellipser, sirkler, trekanter og mangekanter. Speiling om x- eller y-aksen er et annet spillalternativ. Underveis får spillerne poeng slik at man forflytter seg langs poengsirkelen. Den som får 360 poeng vinner spillet og tituleres som «Konge av Koordinatene», får man færre poeng blir man kanskje «Hertug av Hoderegning» eller «Greve av Geometri». Spillet er nyttig i forhold til begrepslæring i matematikk og i utviklingen av et presist matematisk språk. Gjennom selve kommunikasjonen lærer elevene hvilken utfordring det er å forklare begrep til andre på en slik måte at motparten oppfatter riktig. Det er umulig for elevene å være passiv eller å melde seg ut av denne prosessen.

Fordeler

Spillet **imøtekommer kravene fra L97** på mange punkter. Jeg velger å nevne noen:
«Elevene skal kunne lage figurer, foreta avbildninger og skape mønstre»
«Opplæringen i faget har som mål

– at elevene utvikler et positivt forhold til matematikk, opplever faget som meningsfylt og bygger opp selvfølelse og tillit til egne muligheter i faget
– at elevene stimuleres til å bruke sin fantasi, sine ressurser og sine kunnskaper til å finne løsningsmetoder og -alternativer gjennom undersøkende og problemløsende aktivitet og bevisste valg av verktøy og redskaper
– at elevene utvikler innsikt i grunnleggende begreper og metoder i matematikk, og utvikler sin evne til å se sammenhenger og strukturer og kunne forstå og bruke logiske resonnementer og trekke slutninger»

Spillet **stimulerer til problemløsende aktivitet** i forhold til koordinatsystem. Elevene frigjøres fra lærebøkene og møter koordinatsystemet på en annen måte. Gjennom spillet kan elevene få en bedre forståelse av de fire kvadrantene og ulike punkter i koordinatsystemet. Elevene får også kunnskap om vinkelmåling ettersom de forflytter seg langs gradene og ser at målet er 360 grader.

Spillet er **laget av solid materiale** som tåler røff behandling.

De **geometriske formene** som følger med spillet er svært varierte. Her har produsenten tydelig fokusert på innlæring av matematiske begrep og ulike geometriske former for her finnes mangekanter som 5-kant, 6-kant, 7-kant og 8-kant samt tradisjonelle figurer som trapes, kvadrat og sirkel.

Puslespillene og spillene er av **ulik vanskelighetsgrad** slik at kravet om tilpasset undervisning og differensiering imøtekommes på en fin måte. I hvert hjørne i hver kvadrant er det satt opp et forslag til antall geometriske former eller kuber man skal bygge figurer med. Dersom man ser på antallet som veiledende i hver kvadrant (eksempel 3–4 stykker i første kvadrant, 6–7 i fjerde kvadrant) kan man også tilpasse hver enkelt elevgruppe ved å variere antall byggeklosser/geometriske former.

Ulemper

Spillet har mange positive sider, men jeg savner en variant av spillet om koordinatsystem relatert til vårt daglige liv. Her kunne produsenten utnyttet spillet på mange måter. Hva med relasjon til kart, retninger som nord, sør, øst og vest? Det er viktig at man ikke lærer matematikk bare for matematikkens skyld, men prøver å se anvendelsen av matematikken i det daglige liv. Emnet koordinatsystemer lar seg lett knytte til hverdagssituasjoner og med små endringer kunne dette vært utnyttet bedre. Et eksempel er at man ber elevene bygge en halvdel av et hus og ber eleven forklare hvordan den skal se ut for medspilleren når den speiles om en akse. Produsentens begrunnelse for å utelukke en slik spillvariant kjenner jeg ikke, men kanskje produsenten ønsker en matematisk spørrende lærer som stiller spørsmål av typen: «Ja, men hva skjer dersom vi lar y-aksen være nord, x-aksen øst» osv.? Kanskje er denne siste varianten utelukket nettopp fordi man ønsker at hver enkelt gruppe/klasse skal lage sin variant av spillet knyttet mer opp mot elevenes hverdag?

Et annet ankepunkt er prisen. Spillet er innholdsrikt, men med en trang skoleøkonomi tror jeg prisen er noe i overkant.

Sluttkommentar

Jeg håper likevel at spillet vil bli brukt flittig fordi det har mange gode kvaliteter som jeg har nevnt tidligere. Gjennom spillet får elevene prøve seg i samarbeid og konkurranse og forhåpentligvis oppleves matematikk som gøy. Kanskje blir det mange «Konger av koordinatene» blant dine elever?

Svein Anders Heggem

EMIL

– et etterutdanningsprogram for å øke lærerens undervisningskompetanse i matematikk

EMIL-prosjektet, Etterutdanning i Matematikk I Lillesand, er nå ført frem til en avslutning og har fått sin sluttevaluering.

Etterutdanningsprogrammet i matematikk er svært spesielt med hensyn til omfang og varighet: Det ble brukt et helt år i planleggingsfasen hvor man knyttet til seg samarbeidspartnere, informerte organisasjoner og foreldrene og tok de ulike lærerkollegiene med på råd med hensyn til innholdet i etterutdanningen. Prosjektet ble også politisk behandlet og fikk sin godkjenning i kommunestyret.

Deretter har selve etterutdanningen foregått over 3 år hvor programmet var obligatorisk for lærere som underviser i matematikk i Lillesand kommune. Det har vært intensive kursperioder med ulike tema etterfulgt av lange utprøvingsperioder. Deretter ble det avholdt erfaringsutveksling mot slutten av hvert semester hvor skolene delte sine erfaringer og ga hverandre råd og tips.

En slik bredt anlagt etterutdanning fører selvsagt med seg mye kreativ tenkning og aktivitet omkring matematikkfaget i skolen. Det har blant annet vokst frem spesielle side- og underprosjekter med egne og mer spesifikke tema eller områder innen matematikkfaget i skolen. Skolene har organisert egne matematikkdager og det har vært avhold en matematikk-spillkonkurranse hvor elevene i de ulike klassene utviklet spilleregler og designet sine egne spill. Det ble kåret vinnere på både småskole-, mellom- og ungdomstrinnet, og delt ut priser til de seirende klassene.

Emil-prosjektet må vel sies å være ganske unikt i sitt slag i Norden og således et pilotprosjekt. Vi kjenner i alle fall ikke til noe liknende etterutdanningsprosjekt med hensyn til omfang og varighet.

Prosjektledelsen i Emil avholdt en større utdanningskonferanse i januar 2004 hvor det kom deltakere fra hele Norden. Emil-deltakerne fikk presentere sine ulike idéer, erfaringer og prosjekter på konferansen. Siste dag av konferansen ble besøkt av tett innpå 500 lærere, lærerutdannere, forskere og byråkrater. Prosjektledelsen har gjort noen erfaringer i løpet av disse årene. Disse erfaringene, og nå også i lys av den eksterne evalueringen, er vi klare for å kunne dele med andre kommuner som er i startfasen med å utvikle egne etterutdanningsforløp av noe varighet.

Svein Anders Heggem er prosjektleder ved EMIL-prosjektet i Lillesand, sah@emil.no

Prosjektet har altså nå fått sin eksterne sluttevaluering. Denne er utført av Telemarksforskning på Notodden ved forskerne Åse Streitlien og Gard Brekke. Rapporten ble lagt frem på to ulike samlinger i Lillesand i januar og februar 2005. Først ble de involverte lærerne orientert på en stor fellessamling. Deretter ble presse, utdanningsbyråkrater, personale fra Høgskolen i Agder, foreldre, enhetsledere eller rektorer i landsdelen og andre interesserte invitert til et dagsseminar. Her ble evalueringen lagt frem og det ble muligheter for å komme med innspill, kommentarer og spørsmål.

Telemarksforskning har intervjuet foreldre, skoleledere, elever, lærere og prosjektledelsen og vært til stede ved matematikkdager og under noe av etterutdanningen av lærerne.

Hovedmål

Hovedmålene for evalueringen fra Telemarksforskning har vært:

- Å frembringe ny kunnskap om sammenhengen mellom etterutdanning i matematikk og profesjonsutøvelsen i klasserommet.
- Å kartlegge kvaliteter ved prosjektets oppbygging og innhold. (Brukermedvirkning, organisering, veksling mellom teori og praksis, tidsbruk.)
- Å identifisere kritiske suksessfaktorer i etterutdanningen. (Hva fremmer og hindrer suksess?)

Metoden Telemarksforskning har benyttet har vært dokumentanalyse, intervjuer av skoleledere, et utvalg av lærere og prosjektledelsen, observasjon og spørreundersøkelser til elever, lærere og foreldre.

Når det gjelder sammenheng mellom etterutdanningsprogrammet og lærerens undervisning i klasserommet, er det hovedsakelig spørreundersøkelsen til elever og lærere som ligger til grunn for evalueringen.

Her konkluderes det med at lærerne er blitt mer bevisste på matematikkfaget, de varierer undervisningsmetodene mer, og de er blitt mer selvstendige i sitt forhold til, og bruken av, læreboka i undervisningen. Lærerkommentarene viser i stor grad at programmet har vært inspirerende og lærerikt.

Elevene gir et variert og overveiende positivt bilde av matematikkundervisningen. De har sterke synspunkter på hva de liker best og dårligst ved faget. Særlig interessant er den sammenlikningen Telemarksforskning har gjort mellom svarene i KIM-prosjektet (Kvalitet i matematikk-undervisningen fra 1998) og svarene fra elevene i EMIL-prosjektet. Analysen tyder på at EMIL-elevene har en mer positiv holdninger til matematikk enn det KIM-elevene hadde. Det kan ikke med sikkerhet sies at dette skyldes EMIL alene, men dersom vi sammenlikner elevsvar med lærersvar, er det mye som tyder på at det er en sammenheng mellom den effekten EMIL har hatt på lærerenes undervisning, og det at mange elever synes matematikk er 'gøy', interessant og 'det beste faget'.

Undersøkelsen viser videre at det er en markert synkende interesse for matematikk fra 6. til 9. klasse. Det er verdt å merke seg at gutter har mye større tiltro til egne kunnskaper og ferdigheter i faget enn jentene. Disse funnene er overensstemmende med en rekke andre og tilstøtende undersøkelser.

Å kartlegge eller avdekke kvaliteter ved prosjektets oppbygging og innhold, var også et av forskernes mål. Dette omfattet en evaluering av brukermedvirkning, organisering, veksling mellom teori og praksis og tidsbruken.

Skolelederne er entydige positive til at det var riktig av Lillesand kommune å satse så tungt på kompetanseutvikling i matematikk. Prosjektet har virket samlende på lærerne og hele skolemiljøet og betyr en positiv giv i undervisningen. Lærerne på barnetrinnet slutter seg hovedsakelig til skoleledernes syn, mens noen av ungdomstrinnets lærere mener at prosjektet har tatt for mye tid fra andre aktiviteter.

Strukturen i programmet ser ut til å ha vært vellykket. Når det gjelder innhold, går det klart frem at deltakerne er mer tilfredse med forelesninger som er rettet mer direkte inn mot faget og undervisningen på de ulike nivå eller trinn (altså trinnvise samlinger for lærere på småskole-, mellom- og ungdomstrinnet hver for seg). Man foretrekker en slik oppdeling og 'spissing' inn mot de enkelte trinn fremfor fellesforelesninger for samtlige lærere.

Utprøving i praksis har ikke vært entydig enkel for deltakerne. Det var en del usikkerhet i begynnelsen om bl.a. graden av forpliktelse. Dette gikk seg til da det var stort rom for justeringer i prosjektet underveis. Dette var noe av fordelen ved at Emil-prosjektet strakk seg over såvidt lang tid. Prosjektet var i utvikling gjennom hele perioden. Tilbakemeldinger fra deltakerne og referansegruppa har blitt tatt hensyn til underveis både når det gjelder innhold, struktur, tidspunker og -bruk for samlingene.

Foreldre/foresatte gir uttrykk for å være fornøyd med at kommunen satset så tungt på matematikk, men et stort mindretall mener likevel informasjonen rundt prosjektet burde vært bedre. Selv om denne gruppa mener barna trives på alle trinn, opplever foreldrene at den positive holdningen til undervisninga generelt og matematikken spesielt, avtar etter-som elevene kommer oppover i trinnene.

Sett i forhold til den aktuelle debatten om lavt nivå hos matematikklærerne, er det verdt å merke seg at over halvparten av foreldrene som har respondert i undersøkelsen, er fornøyd med lærerens matematikkunnskaper.

Det som nå er spennende å se, er hvilken varig effekt EMIL-prosjektet vil ha når prosjektperioden er slutt, og hvordan programmet vil virke inn på elevenes læringsresultater. Telemarksforskning konkluderer med at det er grunn til å tro at det å arbeide såpass intenst med ett skolefag gjennom tre år, setter varige spor både hos lærer og elev.

Svarene på spørreundersøkelsen til lærerne gir inntrykk av en middels positiv vurdering av EMIL. Men når en så ser på de enkelte kommentarene, virker de langt mer positive enn spørreundersøkelsen skulle tilsi. Eller for å sitere rapporten: «Mange av de åpne utsagnene vitner om en begeistring og positiv holdning som man sjelden ser i undersøkelser hvor lærere blir bedt å vurdere etterutdanning som de har deltatt i.»

Vi har i tillegg fra prosjektledelsens side, utarbeidet en rapport om selve prosjektet og de erfaringer man her har gjort seg. Begge rapportene kan kjøpes ved å henvende seg til Lillesand kommune på nettadresse: www.lillesand.kommune.no eller til Lillesand kommunetorg på telefon + 47 37 26 15 00.

Gard Brekke fra Telemarksforskning, sa i kommentar ved presentasjonen av evalueringsrapporten, at 'som en oppsummering for hele evalueringen må resultatene sies å være bedre enn forventet'. Fra en nøkterne forskers munn velger jeg å tolke et slikt utsagn som et ganske oppløftende resultat.

Henrik Kirkegaard

Høyt å fly…

«Det er fine vær i dag og!» Folk på Vestlandet var helt overgitt. Det hadde regnet hele høsten, ja så lenge folk med overveiende korttidshukommelse kunne huske. Vi hadde av pur vane gummistøvler på hver dag, regnfrakk og paraply. Matpakken ble pakket inn i plastposer og skolesekken i bossekker.

Nå sto påskeferien for døren og solen boltret seg på en skyfri himmel. Det var ikke «tel å tru». Vi gikk rett fra høst til sommer. Hjemmearbeidet som skulle ha vært gjort i påsken ble skubbet frem på ubestemt tid. Endelig kunne vi nyte den storslåtte naturen utendørs. Gå på ski til spisse tinder, grille og kose seg i skibakken og legge om til sommerdekk og nyte vinden i håret i en åpen kabriolet.

Været holdt seg og jeg skulle være sammen med 67 sjetteklassinger de første tre timer torsdag på en skole jeg ikke kjente. Hadde jeg lyst å være inne? Løsningen lå i luften. Papirfly. Gi en elev, gutt eller jente, et ark papir og brett et papirfly og deres øyne lyser opp, forventningsfullt.

Henrik Kirkegaard arbeider ved Flisnes skule i Ålesund. Han er fast bidragsyter til Tangenten. henrikkirkegaard@hotmail.com

Elever og lærere ble samlet til felles informasjon i første time. Lag et papirfly og en fallskjerm hver i første økt. Enkelt og greit. Jeg hadde trykt opp bretteveiledningen på åtte forskjellige papirfly fra boken *Origami Airplanes* av Temko (bokkilden.no), et av disse fly måtte brettes. Det finnes mange andre bøker med papirfly, spør på biblioteket mens det ennå er gratis. Fallskjermene laget vi av avfallsposer, garn og tape. Elevene brukte en liten stein eller et viskelær som 'mann'. Da gikk elevene til klasserommene sine og brettet, klippet og klistret på livet løs. Matematikken i å brette papirfly? Vi snakket under brettingen om det å finne midtnormaler, å brette vinkelhalveringslinjer, dele en kant i tredeler, ulike geometriske figurer som trapes, parallellogram, ulike trekanter, ja de matematiske innfallsvinkler er mange. Bare det å følge en veiledning kan være en utfordring for mange.

I andre økt skulle vi være ute. Elevene ble delt inn i grupper på fire, og hver gruppe ble utstyrt med en linjal og en stoppeklokke. De skulle kaste papirflyet hver sin gang og måle lengden i meter og centimeter. Etterhvert skulle gruppen summere kastene sine (addisjon av desimaltall) og komme så nær 100 meter som mulig. Alt skulle føres i loggboken.

Tiden fallskjermen var i luften skulle også måles i sekunder, summeres og komme så nær 5 minutter som mulig (addisjon i 60-tallsystemet).

Det gikk veldig bra og alle elever var engasjerte og følte at tiden 'fløy'. Det er dog enkelte som stadig venter på at fallskjermen deres skal falle ned fra trær eller takrenner.

Dette kan brukes på de ulike klassetrinn. De minste elever kan måle avstanden i helt antall meter på to kast og addere. Eller: Hvem finner minste differanse mellom to kast? Eller: Kaste på blink, addere og komme nærmest 50. Eller …

Det er også grei skuring for de eldste klassetrinn å måle hvor høyt flyet/fallskjermen kastes, å måle tid og lengde og finne hastigheten, eller …

Ville det ikke være en kjempeidé, hvis skolen hadde Den Store Papirflydagen?

De har for øvrig lovet regn i morgen.

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Realfagbygget A4, NTNU
7491 Trondheim
Telefon: +47 73 55 11 42
Faks: +47 73 55 11 40
merete.lysberg@matematikksenteret.no

Nye læreplaner

Ingvill Merete Stedøy

Nye læreplaner for den obligatoriske matematikken i grunnopplæringa ligger ute til høring. Dette er Utdanningsdirektoratets forslag til ny plan, og det er grunn til å påpeke at den er vesensforskjellig fra den planen som ble levert av faggruppen, under ledelse av Bjørnar Alseth, i desember 2004. Slik jeg forstår det, er det et ønske om at planene i de ulike fagene skal se omtrent like ut i omfang, og ha samme type mål, som ligger til grunn for endringen. Det ser ikke ut som rettelsene er foretatt av noen med faglig innsikt.

Da læreplangruppene ble nedsatt i september 2004, fikk vi mange føringer for arbeidet. En del av føringene var motstridende. For eksempel het det at læreplanmålene skulle være tydeligere, samtidig som de skulle være mindre detaljerte. For læreplangruppen fortonet dette seg som en selvmotsigelse. Det skulle ikke sies noe om arbeidsmåter i de nye planene, med mindre selve arbeidsmåten var en del av kompetansemålene for faget. Alle læreplanene for fag skulle bygges opp etter disse retningslinjene:

Fagplanene skal inneholde:

- formålet med faget
- beskrivelse av hovedmål
- grunnleggende ferdigheter
- kompetansemålene
  (4., 7., 10., 11., 12. og 13. trinn)
- vurdering i faget

De grunnleggende ferdighetene innebærer ferdigheter i lesing, skriving, muntlig presentasjon, regning og digitale ferdigheter. Hvert fag skal være med å ivareta opplæring i disse fem grunnleggende ferdighetene. I disse ferdighetene kan vi kjenne igjen kompetansene vi har lagt til grunn for de nasjonale prøvene.

I tillegg til dette var det et krav om en sammenhengende plan fra grunnskole til videregående skole. Det skulle være en tydelig progresjon, uten gjentagelse av de samme målene. Planene skulle presiseres slik at de uttrykte kompetansemål etter 4 år, 7 år, 10 år, 11 år og 12 år. Vi fikk klarsignal til å dele matematikken i to kurs fra første dag i videregående skole, med en «Matematikk i praksis» og en «Studieforberedende matematikk». Etter de nye planene skal alle elever som ikke velger yrkesfaglige retninger, ha 8 uketimer med obligatorisk matematikk. Normalt vil dette bety 5 uketimer i Vg1 og 3 uketimer i Vg2.

Læreplangruppa laget en relativt detaljert plan, med presisering av faginnholdet på de ulike trinnene. Det ble lagt vekt på grunnleggende ferdigheter, men med mål som vil gi muligheter til utforsking, eksperimentering og utvikling av egne metoder og strategier. Det lå mange og grunnleggende diskusjoner bak gruppas forslag. Faglig progresjon, innhold og omfang var det viktigste å få på plass. Det kan diskuteres om planene vi levert var tydelige nok. Men det er enda mer diskutabelt om direktoratets forslag er tydelig i det hele tatt. Med tanke på at elevenes grunnleggende ferdigheter i regning med tall og algebra har gått sterkt tilbake de siste årene, og at begrepsforståelse for helt vesentlige matematiske begreper er svært mangelfulle, mener jeg det er viktig å se på forslaget til læreplanene med kritisk blikk. Sikrer dette forslaget at elevene vil få nok trening i grunnleggende matematikk som skal hjelpe dem i egne liv og videre studier? Nedenfor er læreplangruppas forslag til målformuleringer for TALL etter 4 år i grunnskolen, etterfulgt av Direktoratets forslag. Jeg ber dere sammenlikne diss i lys av det som er skrevet foran. Slike forskjeller finnes gjennom hele planen på alle trinn.

Fra læreplangruppa, desember 2004

Tall

Målet for opplæringen er at elevene etter 4. trinn skal kunne

- Forstå plassverdisystemet for hele tall og kunne dele opp tall i enere, tiere, hundrere osv., og kjenne til bruk av negative tall i praktiske sammenhenger.
- Uttrykke tallstørrelser som hele tall og enkle brøker og desimaltall på varierte måter.
- Anslå og bestemme antall ved hoderegning, bruk av tellemateriell og skriftlige notater og gjennomføre overslagsregning med enkle tall.
- Forstå, utvikle og bruke ulike regnemetoder for addisjon og subtraksjon av flersifrede tall både i hodet og på papiret.
- Beskrive, forstå og gjennomføre multiplikasjon og divisjon knyttet til ulike praktiske situasjoner og strukturer.
- Bruke tabellkunnskaper tilknyttet regneartene, se sammenhenger mellom regneartene og selv oppdage enkle tallmessige sammenhenger.
- Kunne velge og begrunne valg av regneart, metode og redskap og vurdere svar ved bruk av tall og regning i praktiske situasjoner.
- Eksperimentere med, gjenkjenne, beskrive og videreføre strukturer i tallmønstre, som partallene, oddetallene og kvadrattallene.

Fra Utdanningsdirektoratet februar 2005

Tall

Mål for opplæringen er at eleven etter 4. trinn skal kunne

- bruke positive og negative hele tall, enkle brøker og desimaltall i praktiske sammenhenger på varierte måter
- anslå og bestemme antall ved hoderegning, bruk av tellemateriell og skriftlige notater, og gjennomføre overslagsregning med enkle tall
- forstå, utvikle og bruke ulike regnemetoder for addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon av flersifrede tall knyttet til ulike praktiske situasjoner og strukturer.

Jeg stiller meg undrende til at målformuleringen om plassverdisystemet ikke finnes i Direktoratets forslag. Etter min mening er dette noe av det viktigste å arbeide med innen tema 'Tall' for begynneropplæringen. En mulig forklaring til at det er tatt bort, er at det målet gjentas som mål etter 7. trinn. Det er bare den forskjellen at der gjelder det også desimaltall, i tillegg til positive og negative hele tall. Dette er etter læreplangruppas vurdering, en utvidelse av det viktige målet i forslaget for 4. trinn.

Som det går fram av eksempelet, er læreplanmålene for dette temaet redusert fra åtte til tre mål. Jeg har en ekkel fornemmelse av at det er administrative og strukturelle hensyn som har styrt denne reduksjonen snarere enn faglige overveielser og begrunnelser. Dette gjør meg svært urolig. Jeg ber alle som skal sende inn høringsuttalelser å se på presiseringsnivået og faginnholdet i Direktoratets forslag, og vurdere om det representerer en vesentlig bedring i forhold til gjeldende læreplan. Dere kan finne læreplangruppas forslag på nettstedet til matematikksenteret, www.matematikksenteret.no. Kanskje det vil være nyttig å sammenlikne de to forslagene når det skal skrives høringsuttalelse.

Arbeidet med læreplaner i fordypningsfaget matematikk for Vg2 og Vg3 er i full gang, og læreplangruppas første utkast ligger på åpent på nettet. Disse planene skal også omarbeides av Utdanningsdirektoratet før de sendes ut på høring. Også her anbefaler jeg alle involverte om å gjøre seg kjent med læreplangruppas forslag i tillegg til Utdanningsdirektoratets forslag. Jo flere som sender inn sine meninger og sine bekymringer, desto større sjanse er det for at det blir tatt hensyn til.

Lykke til med høringsarbeidet!

Nasjonale prøver – utviklingen videre fra 2004 til 2005

Guri A. Nortvedt

Våren 2004 ble nasjonale prøver i matematikk gjennomført for første gang for 4. og 10. trinn i grunnskolen. 2004 var et forsøksår og prøvene ble derfor evaluert av flere faginnstanser. I tillegg til de evalueringene faggruppene selv har gjennomført, har prøvene og prøvegjennomføring vært evaluert i tre undersøkelser (alle UFD, 2004):

- lærer- og rektorundersøkelsen: Spørreundersøkelse gjennomført med et utvalg rektorer og lærere om prøvegjennomføring, informasjon og lærerkurs. Utført av Norsk gallup på oppdrag fra Utdanningsforbundet og Læringssenteret (nå Utdanningsdirektoratet)
- ekspertvurdererundersøkelsen: Spørreundersøkelse tilsvarende lærer- og rektorundersøkelsen, utført av Norsk Gallup på oppdrag fra Utdanningsforbundet og Læringssenteret (nå Utdanningsdirektoratet)
- utvalgsundersøkelse for å vurdere prøvenes reliabilitet og validitet, gjennomført av Svein Lie, Marion Lunde Caspersen og Julius Björnsson på oppdrag fra Læringssenteret (nå Utdanningsdirektoratet)

Utfallet av evalueringene har vært brukt i videreutviklingen av prøvene. Kort oppsummert viser evalueringene at prøvene har høy validitet – de måler sentrale mål i læreplanverket. Oppgaveformatene er i følge lærerne kjente for elevene. De fleste lærere deltok på kurs i vurdering av prøvene, men mange savner informasjon om hva som skal skje etter at prøvene er avholdt. Lærerne har brukt mye tid på å vurdere prøvene. Det viste seg også at elevprofilene i 2004 ikke var reliable (pålitelige nok) til å kunne publiseres. Dette har i hovedsak to årsaker. Dels er det for få oppgaver innenfor enkelte kompetanseområder, og dels er det for stor samvariasjon mellom kompetansene fordi en rekke oppgaver måler flere kompeanser.

Kort oppsummert har faggruppen som lager prøvene, for gjennomføringen i 2005 utviklet prøver der man har tatt hensyn til følgende:

- Kodeboken der det står kommentarer til ulike typer elevsvar har vært godt mottatt og skal videreføres.
- Tiden hver enkelt lærer har bruk til vurdering av prøvene har vært lang, denne har man ønsket å korte ned på ved å gjøre vurderingen enklere.
- Elevprofiler med fem kompetanseområder krever et så stort antall oppgaver at det ikke lar seg gjennomføre i løpet av tidsrammen (90 minutter/ 120 minutter). For å få reliable profiler må antall kompetanseområder reduseres.
- Prøveformatene beholdes og overføres til 7. trinn og grunnkurs
  – for 4. og 7. trinn: en prøve som løses uten bruk av kalkulator
  – for 10. trinn og grunnkurs: en kalkulatorfri del og en del som løses ved hjelp av kalkulator.
- Lærerkursene skal utvides til å inneholde pedagogisk bruk av prøvene og gi innspill til eksempler på undervisningaktiviteter.

I tillegg er arbeidet med å utvikle nettbaserte prøver i matematikk igangsatt. De nettbaserte prøvene prøves ut for 7. trinn våren 2005. I denne første utprøvingen vil det være frivillig for skoler å delta på den nettbaserte prøven. Vi synes selv at prøven inneholder spennende oppgaver, særlig fordi bruken av IKT gir elevene mulighet til å manipulere objekter, undersøke og gjøre vurderinger før de avgir et svar. Det er også mulig for elevene å gå tilbake til oppgaver og endre svarene sine, helt til de 'leverer' prøven. For mer informasjon og eksempeloppgaver (www.nasjonaleprover.no).

Når dette skrives er prøvene for 7. trinn med lærerkurs avviklet. Prøven for 10. trinn er også avviklet, men her gjenstår en rekke lærerkurs. Fra tilbakemeldinger fra ekspertvurdrere som har holdt kurs i vurdering av nasjonale prøver ser vi at endringene som har vært gjort for å lette vurderingen har vært vellykket. Kompetansene er slått sammen til tre kompetanseområder på bakgrunn av erfaringer fra utprøvingene. Hver oppgave 'teller' innenfor ett slik område.

Lærerne får fortsatt en kodebok der de vanligste elevsvarene er listet opp (korrekte svar så vel som svar som inneholder feil eller som bygger på manglende begrepsforståelse). I tillegg er oppgavene vektet ved hjelp av poeng. En oppgave kan gi ett, to eller tre poeng avhengig av kompleksitet og arbeidsmenge. Dersom en oppgave gir maksimalt to poeng, vil delvis riktige svar kunne gi ett poeng. Til slutt telles antall poeng opp for hvert kompetanseområde, og læreren kan ved hjelp av en tabell finne ut hvilket nivå eleven ligger på.

Også i år har vi fått utviklet en profilberegner som kan hjelpe læreren i arbeidet med å lage elevprofilene. I tillegg til å få ut gjennomsnittspoeng for hver enkeltoppgave, har vi også lagt inn statistikk om enkelte utvalgte oppgaver for å gi lærere ekstra informasjon om svartyper som er typiske i egen klasse.

Ut over våren vil det gjennomføres evalueringer av de nasjonale prøvene. NSMO vil på bakgrunn av de slutningene man trekker utvikle prøvene videre. I tillegg vil de ulike evalueringene gi bakgrunnsmateriell for å utvikle undervisningsaktiviteter som kan legges ut på nettet til hjelp og støtte for lærere.

Potentiale for ændringer?

Tine Wedege

Det nordiske forskningsprojekt *Ændring af holdninger og praksiser?* om matematikkonkurrencen KappAbel lagde i december 2004 ud med en spørgeskemaundersøgelse blandt alle matematiklærere 9. klasser i den norske ungdomsskole.

Breve ud til 1193 ungdomsskoler med 1–7 spørgeskemaer, følgebreve og svarkonvolutter i hvert brev – det var stort! Vi var spændte på at se hvor mange lærere som har givet deres tid og engagement ved at svare. Svarene kom ind fra halvdelen, og vi var godt tilfredse. Den store kvantitative undersøgelse handler om lærernes opfattelse af god matematikundervisning, om hvorfor deres klasser deltager eller ikke deltager i KappAbel og om deres vurdering af de tre grundprincipper i konkurrencen (samarbejde i klassen og fælles løsning; projektarbejde ud fra et givet tema; to drenge og to piger på finalehold). Derfor var det godt at vi modtog svar både fra lærere som deltager i KappAbel, og fra lærere som *ikke* deltager i skoleåret 2004–2005.

Baggrund, formål og metode

Hovedmålet med forskningsprojektet er at undersøge potentielle virkninger af deltagelse konkurrencen KappAbel målt i *mulige ændringer* i elevernes affektive forhold til matematik (forestillinger og holdninger) og af lærernes klasserums-praksisser.

Baggrunden er at det officielle formål med matematikkonkurrencen KappAbel kan opdeles i to dele: (1) at påvirke elevernes affektive forhold til matematik og (2) at påvirke udviklingen af pædagogikken i skolematematik: gå fra individualisme til samarbejde og vise at matematik er mere et korrekt svar, at den også er opdagelse, kreativitet, nysgerrighed og samarbejde.

Udover den store kvantitative undersøgelse omfatter projektet en spørgeskemaundersøgelse i februar-marts blandt de matematiklærere som deltager med deres klasser i projektarbejde med temaet «Matematik og kroppen» og herefter kvalitative studier (observationer i klasserum, gruppeinterviews med elever og interviews med lærere).

Økonomi og forskergruppe

Prosjektet er initieret af Nordisk Kontakt Komité for ICME-10 og finansieret af Nordisk Ministerråd og Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen. Forskergruppen består af Tine Wedege, Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen, NTNU, (projektleder og forsker), Jeppe Skott, Institut for Curriculumforskning, Danmarks Pædagogiske Universitet (forsker), Inge Henningsen, Afdeling for anvendt matematik og statistik, Københavns Universitet (konsulent), og Kjersti Wæge, Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen (forskningsassistent).

Seminarer på Matematikksenteret (SMS)

Seminarene er for alle med interesse for matematikkens didaktikk. De holdes kl. 14-16 en dag i hver måned og består av foredrag (60 min.) pause med lett servering (15 min.) og diskusjon (45 min.). Seminarene organiseres av Kjersti Wæge og Torkel Haugan Hansen.

Neste seminar:
Tirsdag 19. april, kl. 14.00–16.00: «Hvordan integreres ligestilling i matematikundervisningen – en udfordring og en mulighed» ved Inge Henningsen, Afdeling for anvendt matematik og statistik, Københavns Universitet. **Sted:** matematikkrommet i senterets lokaler.

Påmelding til seminarene:
torkel.hansen@ntnu.no eller kjersti.wege@matematikksenteret.no

5000 deltar i årets konkurranse

Anne-Gunn Svorkmo og Arne Gravanes

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen arrangerer i år for første gang konkurransen i Norge. Kengurukonkurransen er en internasjonal matematikk-konkurranse. Den kom til Europa i 1991. I 2004 deltok 3 millioner elever fra 35 medlemsland. Vi samarbeider med Sverige og Nationellt Center för Matematikutbildning som er med i konkurransen for sjette år på rad.

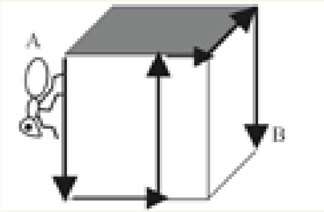
Hensikten med kengurukonkurransen er å øke og stimulere interesse for matematikkfaget blant elever. Elevene skal få oppdage at oppgavene kan være en ny og spennende måte å lære seg matematikk på. Oppgavene er valgt ut slik at alle elevene får utfordringer.

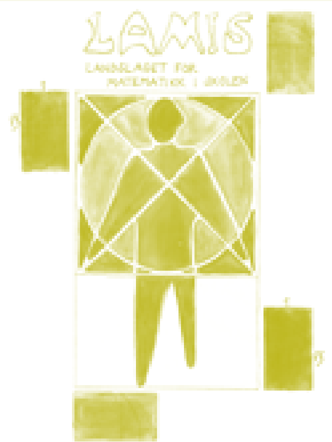
Det oppfordres sterkt til å arbeide med oppgavene i etterkant av konkurransen. Alle elevene på et trinn kan delta, og dermed kan trinnets erfaringer brukes som et utgangspunkt for videre arbeid.

Rundt 5000 elever fra 4. – 7. trinn har meldt seg på årets Kenguru-konkurranse, noe vi er veldig fornøyde med. Deltakerne melder fortløpende inn resultatene fra sine elever via kengurusidene til Matematikksenteret: www.matematikksenteret.no/content.ap?thisId=311 Her finnes også lenke til en oppdatert liste over de 10 elevene med høyest poeng fra hvert trinn. Alle deltakerne som melder inn resultatene innen 20. april er med i trekningen av flotte spillpremier.

I hvert nummer av Tangenten vil det framover finnes egne Kenguru-sider. Disse vil gi eksempler på Kenguru-oppgaver med løsningsforslag, forslag til aktiviteter knyttet til oppgavene, informasjon om kommende konkurranser og annet relevant stoff. Vi håper at dette vil inspirere både til lærerike matematikkaktiviteter og til enda større deltakelse i konkurransen neste år.

Oppgaver	Løsningsforslag / videre arbeid
Ecolier (4.–5. trinn) 3 poeng Denne oppgaven er regnet riktig, men en sommerfugl har satt seg på det siste tallet. Hvilket tall dekker sommerfuglen? 2005 – 205 = 1300 +  (A) 250 (B) 500 (C) 600 (D) 910 (E) 1800	(B) 500. 2005-205=1800 For å få like mye på hver side av likhetstegnet må man legge til 500 på høyre side. La elever lage lignede oppgaver til hverandre. Klistre en figur over det ene tallet, slik at figuren kan brettes opp og tallet under kommer til syne. La elevene regne hverandres oppgaver. Ved å klistre en lapp over andre tall enn det siste leddet, kan man variere vanskelighetsgraden på oppgavene. Eller ved å forandre på det ene leddet vil oppgaven være utfordrende nok for mange elever: Eks. 2005 – 205 = 25 + 2005 – 205 = 350 +
Ecolier 4 poeng Dyrepasseren blåser i fløyta og apekattene stiller seg på 6 rekker. Det står 4 apekatter i hver rekke. Dyrepasseren blåser på nytt og apekattene stiller seg i 8 rekker. Hvor mange apekatter er det nå i hver rekke? (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5	(C) 3 6 • 4 = 24. 24: 8 =3 Bruk knapper eller lignende og legg 4 knapper i 6 rekker. Hvor mange knapper er det til sammen? Bruk samme antall knapper til å legge knappene i 8 rekker. Hvor mange er det nå i hver rekke? Elevene kan også leke apekatter! Velg ut et antall elever som det gir mange muligheter til å danne rekker av for eksempel 12, 18 eller 24 avhengig av størrelsen på elevgruppa. La elevene danne nye rekker på et signal. Tegn de ulike formasjonene.

Benjamin (6. – 7. trinn) 3 poeng Kantene på terningen er 12 cm lange. En maur går på terningen fra A til B langs den veien vi har tegnet inn på terningen. Hvor langt går mauren?  (A) 4 cm (B) 48 cm (C) 50 cm (D) 60 cm (E) Vi vet ikke nok til å kunne avgjøre det	(D) 60 Mauren går langs 4 hele kanter og to deler som tilsvarer en hel. Dermed går mauren 5 kanter à 12 cm, til sammen 60 cm. Elevene kan undersøke andre ruter mauren kan gå. Hva må kravet til ruten være for at vi skal være sikker på at den blir akkurat 60 cm? Kan man stille andre krav som sikrer at lengden på ruten alltid blir en annen, f eks 84 cm? Hva skjer om størrelsen på terningen endres? La gjerne elevene jobbe med terninger av tre som dere selv kan lage. Tegn inn ruter og mål disse.
Benjamin 4 poeng Hvor mange forskjellig hele tall kan settes inn i ruta: 100 : = et helt positivt tall (A) 3 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9	(E) 9 forskjellige tall Dersom elevene forsøker å sette inn ulike tall i ruta, vil de finne følgende løsninger: o 100 : 1 = 100 o 100 : 2 = 50 o 100 : 4 = 25 o 100 : 5 = 20 o 100 : 10 = 10 o 100 : 20 = 5 o 100 : 25 = 4 o 100 : 50 = 2 o 100 : 100 = 1 Be elevene gjøre samme undersøkelse for andre tall. Fins det tall under 100 som har flere faktorer enn 100? Har partall flere løsninger enn oddetall, i tilfelle hvorfor? Hva kjennetegner de tallene som har mange løsninger? Primtallene har bare to løsninger, de kan bare deles på 1 og seg selv.



LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
v/Randi Håpnes
Høgskoleringen 5
7491 Trondheim

post@lamis.no · www.lamis.no
Postgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det overordnede målet for Landslaget for matematikk i skolen er å heve kvaliteten på matematikkundervisningen i grunnskolen, den videregående skole og på universitet/høyskole.

Landslaget skal stimulere til kontakt og samarbeid mellom lærere på ulike utdanningsnivåer og mellom lærere og andre som er opptatt av matematikk.

Styret for LAMIS

Fra barnetrinnet
Mona Røsseland, Samnanger (leder)
Kari Haukås Lunde, Bryne

Fra ungdomstrinnet
Grete Tofteberg, Våler
Beate Stabell, Østre Toten

Fra videregående skole
Helge Flakstad, Horten
Jan Finnby, Lillehammer

Fra høyskole/universitet
Bjørnar Alseth, Oslo
Kristian Ranestad, Oslo

Medlemskontingent

Skole/institusjon	550,–
Enkeltmedlem	300,–
Husstandsmedlem	150,–
Studenter	200,–

Tangenten inngår i kontingenten. (Gjelder ikke husstandsmedlemmer.)

Bergen og omegn lokallag:

Matematikk og IKT-ressurser

Torsdag 14. april kl. 18.00–21.00 vil Christoph Kirfel demonstrere nettressurser.
Sted: Fusa videregående skole, Eikelandsosen.
For invitasjon og påmeldingsfrist, se www.lamis.no/bergen

Lederen har ordet

Det er med et viss vemod jeg skriver i dag, og grunnen er alle de svært stressa kollegaene jeg har møtt denne våren. De er alle sammen frustrerte og oppgitte over det voldsomme presset de kjenner i forhold til alle de nasjonale prøvene.

De nasjonale prøvene skal ha to formål. For det første skal de være til hjelp for lærerne i deres vurderingsarbeid, både i forhold til elevene og sin egen undervisning, men også for skolen i deres utviklingsarbeid. For det andre skal resultatene brukes til å rangere skolene både nasjonalt og lokalt. Dessverre er det siste formålet som får all fokus, og som skaper den største frustrasjonen. Kristin Clemet hevder at det er gjennom denne rangeringen at det skal skje forbedringer i skolen, slik at vi skal motiveres til å gjøre det bedre. Da er det selvsagt underforstått at prøvene virkelig måler kvaliteten på det som skjer rundt om på skolene i Norge, og det kan nok diskuteres. Jeg håper virkelig at vi klarer å flytte fokus fra rangeringen til det som betyr noe i forhold til prøvene, nemlig at de kan være et nyttig hjelpemiddel i vårt utviklingsarbeid.

Norge har valgt et spennende utgangspunkt for prøvene i matematikk, ved å måle ulike kompetanseområder. Dette har vært nybrottsarbeid, der en er nødt til prøve og feile for å komme i mål. Årets prøver ser derfor noe annerledes ut enn i fjor, der en har tatt hensyn til de innspillene som kom fra lærerne etter fjorårets prøve. Men det er ennå et stykke igjen før vi har fått et fullgodt vurderingsredskap. Det er uhyre vanskelig å lage gode nok oppgaver som bare tester en og en kompetanseklasse, og det er også et problem at mange lærere ikke er fortrolige med hva de ulike kompetansene representerer.

Fokuset på kompetansene har satt i gang en nyttig diskusjon omkring matematikkundervisning. Nye vurderingsmåter i matematikk presser også fram et behov for kompetanseheving blant lærerne. Alle lærerne som har gjennomført prøvene i sin klasse må på kurs for å rette prøvene, og det går et betydelig beløp til akkurat dette. Målet må være at en utnytter den kursdagen til også å sette fokus på selve matematikkundervisningen og hvordan elevene kan utvikle seg innen de ulike kompetanseområdene. Men det vil være behov for ytterligere kompetanseheving blant lærerne enn denne ene dagen!

Jeg har også lest **høringsutkastet til de nye fagplanene i matematikk**, og det satte meg helt ut en stund. Sjelden har jeg lest noe så diffust og utydelig. *Kjære kollegaer, dette kan vi* *ikke la bli stående!* Jeg oppfordrer dere på det sterkeste til å komme med tilbakemeldinger, la deres stemme bli hørt! Jeg og resten av styret har skrevet et debattinnlegg til flere av landets aviser om utkastet. Dere finner innlegget på vår hjemmeside.

Avslutningsvis vil jeg hylle alle skolene og lærerne som til nå har arrangert Matematikkens dag. Vi har hatt rekordmange som har registrert seg på vår hjemmeside, og i neste nummer vil vi presentere vinneren av en 'matematikkoffert' eller 'matematisk ryggsekk'.

Jeg ønsker dere også lykke til med Abeldagen i mai. Husk at alle som arrangerer dagen vil få tilsendt et eksemplar av boken om Nils Henrik Abels liv: «Skjulte koder» av Arild Stubhaug. Registrer dere på www.abelprisen.no.

Læreplaner og fag- og timefordeling i matematikk

Utdanningsdirektoratet inviterer til høring på nye læreplaner for fellesfaget matematikk (1.-12. trinn) med frist 10. mai. Samtidig inviterer Utdannings- og forskningsdepartementet til høring om fag- og timefordeling i grunnutdanningen med frist 26. april.

LAMIS er blant de tilsendte høringsinstanser, selv om høringene er åpne for alle. I styret har vi hatt en diskusjon om hvordan LAMIS som organisasjon best kan delta i høringen. Etter vårt syn er LAMIS mer et torg enn en partiorganisasjon, så eventuelle ulike syn innad i LAMIS må kunne vises også utad, selv om svært sprikende syn kan svekke effekten.

Derfor oppfordrer styret alle lokallagene og enkeltmedlemmer til å delta i høringene. Vi ønsker at de som deltar, samtidig sender en kopi av sine synspunkter til styret, helst innen 12. april. På denne måten kan styret, når vi sender egne uttalelser, samkjøre disse i forhold til lokallagenes innspill.

Lamis (og styret) har vært godt representert i læreplanarbeidet, men det er utdanningsdirektoratets forslag som ligger til høring, og det er forandret på flere punkter fra læreplangruppas forslag. Se forøvrig forrige nummer av Tangenten om det arbeidet som er gjort.

Fag og timefordeling er mer en diskusjon om *hvilke* fag som skal ha *hvor* mye tid, og vi regner det som vanskeligere å få gjennomslag for endringer her enn i læreplanene, men dette skal ikke forhindre oss i å si vår hjertens mening!

Styret håper saken engasjerer i lokallagene, og vi har forventninger til mange innspill i saken.

Utkast til læreplaner er lagt ut på siden:
http://skolenettet.no/lp

Utkast til fag og timefordeling ligger på adressen:
www.kunnskapsloeftet.no/

Alle innspill til styret kan sendes til post@lamis.no

– Styret –

Matematikk i skolegården: Abeldagheftet

En markering av Abelprisen; verdens største matematikkpris, som deles ut i Norge hvert år i mai.

Vedlagt Tangenten finner dere Abeldagheftet «Matematikk i skolegården». Det er et hefte med forslag til aktiviteter ute i skolegården med fokus på matematikk, men dere finner også mange grublisoppgaver som kan brukes inne. Oppgavene er i første omgang beregnet på barneskolen, men det vil være fullt mulig å tilpasse aktivitetene slik at også ungdomsskoleelever finner dem utfordrende.

Heftet er resultatet av et samarbeid mellom Abelprisens barne og ungdomsutvalg, Lamis og Heggedal skole i Asker. Vi ønsket å lage en markering av Abelprisutdelingen i mai, der også barn og unge fikk delta. Inni heftet finner dere mer informasjon både om Abel og Abelprisen.

Abelprisen har tatt alle kostnadene med å få laget heftet, iberegnet trykking og utsendelse, mens Lamis, ved Mona Røsseland, og lærere ved Heggedal skole har stått for det faglige innholdet.

Vi håper mange skoler får glede og nytte av heftet, og Abelprisen ønsker å belønne de skolene som gjennomfører dagen med en flott bok, «Skjulte kodar» av Arild Stubhaug. Den handler om Nils Henrik Abels liv og er skrevet for barn og unge. Dere får tilsendt boken ved å registrere dere på Abelprisens nettsted: www.abelprisen.no Vi trekker ut noen av dere til å bli presentert på Lamis sin hjemmeside og i Tangenten.

Abelprisvinneren til Bergen!

Torsdag 26. mai kommer Abelprisvinneren til Bergen, og lokallaget vårt er invitert til å hjelpe til med en matematikkfest for barn og unge. Det blir matematikkaktiviteter på Festplassen, og vi trenger hjelpemannskap i ulike funksjoner. Ta kontakt med oss (else.aaro@bergen.kommune.no) hvis dette høres interessant ut, enten du kan stille opp med en aktivitet eller foretrekker andre roller.

Om målformuleringene i den nye læreplanen

Kjartan Tvete

Leder av plangruppa for ny matematikklæreplan i skolen, Bjørnar Alseth, skriver i Tangenten nr. 1/2005 om mål for matematikkopplæringen, i stor grad knyttet an til tabellkunnskaper. Alseth synes å ville lage et alvorlig skille i kunnskapssyn mellom de av oss som mener at eksplisitte målformuleringer som «å kunne den lille gangetabellen» er gode, og «vi» (fagplangruppen), som framholder at en slik målformulering er uheldig, nemlig av to grunner: Det vil medføre en innsnevring av det elevene bør kunne, og: Det vil kunne føre til fokusering på unødvendige detaljer. I argumentasjonen anvender Alseth en velkjent metode, beskrevet i Piet Heins gruk: «En yndet form for polemikk består i det probate trikk at dytte folk en mening på hvis vanvidd alle kan forstå». Han peker på hvor galt det blir om tabellkunnskap *kun* skal gjelde den lille gangetabellen, eller hvis *all* fokus i undervisningen er på terping av gangetabellene, og på at gangetabellen *alene* ikke er tilstrekkelig for å løse praktiske oppgaver (mine uthevinger).

Et annet framholdt argument er at dersom det «å kunne den lille gangetabellen» først står i læreplanen, så har ikke læreren noe valg, men er nødt til å bruke tiden på at de siste elevene lærer de siste rester av tabellen. Jeg mener dette er en feil oppfatning av hva et målpunkt i en læreplan betyr. Målformuleringens hensikt er selvsagt at dette skal en arbeide og strekke seg mot. En kan ikke gi garantier for at noe målpunkt fullt og helt skal være nådd av alle elever.

Etter mitt syn er læreplanframlegget generelt en del mangelfull på området faktakunnskaper og basisferdigheter, og på å klargjøre og skille ulike typer og nivåer av mål. PISA/TIMSS-rapportene framholder betydningen av trening på elementære ferdigheter i matematikk, ikke bare for sin egenverdi, men som redskap for anvendelser og problemløsing. Plandokumentet er påfallende slapt i å beskrive regneferdigheter, se for eksempel det merkelige avsnittet *Å kunne regne* under kapitlet «Om grunnleggende ferdigheter i faget», der det i stedet skrives om modellbygging og problemløsing.

Det er vel slik at fagplangruppa sitt framlegg er omformet. Men det er verdt å bemerke at gruppas medlem Ingvill Stedøy under et intervju med Aftenposten 18.12.04 berettet om tunge diskusjoner og at hun for sin del ville hatt mer konkrete mål og presise krav til grunnleggende ferdigheter og til hva elevene skal kunne.

Å kunne regne selv har mistet sin tidligere selvsagte status. Mener vi at det i en bestemt grad fremdeles er viktig, så må det gis en presis beskrivelse og plass i planene. Vi kan ikke la det være, av frykt for at læringsarbeidet da vil degenerere til gammeldags drill. Tvert imot må variasjonsrikdommen i arbeidsformene poengteres, og bestrebelser gjøres på presisjon også i beskrivelsene av de rikere og høyere målområdene.

Det står mye bra i planframlegget – det gir interessante muligheter for sterke lærere med god arbeidskapasitet, velutdannede i matematikk og fagdidaktikk. Men i dagens situasjon kan det ikke forventes som det normale at våre allmennlærere, med mange skolefag i en hektisk arbeidshverdag, skal ha tid, krefter og kompetanse til en matematikkundervisning som i noen videre grad er basert på selvstendige målfortolkninger.

Pisa/TIMMS-undersøkelsene har vist at norske elever lærer mindre enn før, og mindre enn elevene i mange andre land. Det gjelder både basisferdigheter og problemløsing. Jeg mener skolematematikken i denne tiden trenger en samlet satsning – som også angår spørsmål om lærerrollen, elevrollen og skoledagens organisering – og der målinndeling og -presisering er et viktig fagpolitisk virkemiddel. Lærebokforfattere, lærere og elever trenger målformuleringer som en kan fatte operasjonalisering og fortolkning av. Med velmente, men lite presise målformuleringer, er det fortsatt stor fare for at skoletiden fylles med like velmente, men ofte sløve prosjekter, der en er fornøyd med å kunne peke på at vi har «holdt på med» det og det.

Allerede nå, nettopp under den negative oppmerksomheten omkring testresultatene, ser vi eksempler på debattinnlegg til fordel for sterk reduksjon av skolematematikken. Om noen år kommer nye testrapporter. Vi bør ikke risikere en reaksjon som skolematematikkens gode, moderne mål ikke har råd til. En sannsynlig vei er imidlertid at de frigitte testoppgavene fra PISA/TIMSS/Nasjonale prøver kommer til å bli rettesnoren for forfattere, lærere og skoleeiere, i takt med at den nasjonale læreplanen mister mye av sin praktiske betydning.

Bergen og omegn lokallag:

Temakveld: Ny læreplan

Hans Jørgen Riddervold

Forrige temakveld i Bergen og omegn lokallag, ble satt av til ny læreplan i matematikk. Vi hadde invitert Bjørnar Alseth, som startet med å fortelle om både Utdanningsdirektoratets læreplanforslag og læreplangruppens utkast til læreplan. Deretter var det åpent for spørsmål og eventuelt diskusjon.

De fremmøtte medlemmene ga uttrykk for at Utdanningsdirektoratets læreplanutkast kunne se ut til å legge mest vekt på instrumentell matematikklæring, og det dukket opp mange spørsmål og synspunkt omkring direktoratets bearbeidelse av læreplangruppens forslag. Innholdet i foredraget kan du lese på Alseths hjemmeside (http://home.hio.no/~bjornara).

Styret for Bergen og omegn lokallag vil utarbeide et utkast til synspunkter fra lokallaget. Deretter kan medlemmene komme med innspill før vi sender det fra oss. Vi oppfordrer alle lokallag til å delta i høringsrunden, og minner om at hvert enkelt medlem også kan formidle sine synspunkter direkte til Utdanningsdirektoratet. Det er *nå* vi har sjansen til å påvirke!

Matematikkdager på Jørstadmoen skole

Anita Røste

Torsdag og fredag i uke 6 hadde vi matematikkdager ved Jørstadmoen skole. Det var et ønske fra lærerne på skolen å ha to matematikkdager i år. I fjor hadde vi en dag og opplevde at det ble litt lite tid til flere av oppgavene, fordi heftet fra Lamis inneholder så mange idéer man kan bruke.

Før jul tok vi kontakt med Jan Finnby på Lillehammer videregående og fikk en avtale om samarbeid i forbindelse med årets opplegg. Idéen fikk vi i fjor da vi hørte at Jan og elever han underviser på videregående, hadde besøkt andre barneskoler i kommunen og vært med å arrangere matematikkdager.

Jan kom til skolen vår torsdag 10. februar sammen med 20 elever fra 3. klasse på videregående. Temaet denne dagen var spill og problemløsning. Elevene fra videregående hadde tatt utgangspunkt i spill og problemløsningsoppgaver fra årets Lamis-hefte og prøvd ut oppgavene på forhånd. De laget stasjoner med de ulike oppgavene slik at elevene våre

kunne gå fra stasjon til stasjon og få ulike utfordringer. Elevene fra videregående hadde med seg alt utstyret de trengte selv. Vi hadde på forhånd delt inn i grupper på 10–20 elever. Totalt hadde vi 15 grupper; 39 elever fra 1. og 2. klasse var fordelt på 4 grupper. 64 elever fra 3. og 4. klasse var fordelt på 6 grupper og 100 elever fra 5., 6. og 7. klasse var fordelt på 5 grupper. Elevene fra videregående fikk altså utfordringer med å tilpasse oppgavene til ulike aldersgrupper. Lærerne ved skolen var med for å administrere og passe på at elever havnet på riktig sted. Ellers ga denne dagen mulighet for at lærerne på 7. trinn kunne rette nasjonale prøver.

Eksempler på oppgaver som ble brukt: Terningspillet 10 000, Tre på rad, Plump, Tangram, Froskefamiliene, Fyrstikkoppgaver, Escher, Korttriks, Erobre land, Kodemeldinger.

På slutten av dagen ble alle klasser bedt om å evaluere dagen skriftlig eller muntlig, og gi tilbakemelding til undertegnede. De ble blant annet spurt om hvordan de likte at det kom elever fra videregående, hva de hadde lært og å nevne minst fire ting som hadde vært bra med denne dagen. Det var mange synspunkter på hvilken oppgave som hadde vært mest morsom, men mange likte terningspill. Når det gjaldt å ha besøk fra videregående syns noen det var «kult», «helt perfekt bra!», «snille og greie», «gøy med yngre, morsomme lærere», «morsomt med andre lærere enn de vi har til vanlig». Elever i 1. klasse syns det var bra de hadde lært om matematikk og lært pluss og minus. Noen artige kommentarer på hva de hadde lært denne dagen: «Hjernetrim!», «At matte kan være gøy», «Å samarbeide med andre», «At matte ikke bare er tall». Det var et enstemmig «JA» blant både elever og lærere på skolen da de ble spurt om vi skulle gjøre dette igjen neste år. Alle lærerne ved skolen syns dette hadde vært i hovedsak positivt. Et slikt samarbeid mellom grunnskolen og videregående skole om matematikkens dag, kan absolutt anbefales!

Fredag 11. februar hadde vi uteskole-matematikk. Vi tok utgangspunkt i Lamis sitt hefte, og laget vår egen utgave av matematikkløypa. Lærerne som jobber med 1. og 2. klasse laget en egen tilpasset løype for sine elever. Det samme gjorde lærerne i 3. og 4. klasse. De hadde 5-6 poster ute i skolegården hvor elevene fikk ulike oppgaver og utfordringer. Noen av postene var identiske med de som var foreslått i heftet, andre hadde lærerne idéen til selv. Elevene var ute i ca. to timer.

For 5.–7. klasse hadde vi en egen matematikkløype laget av to lærerstudenter som var i praksis hos oss denne uka. De hadde hovedansvaret for opplegget denne dagen, under veiledning fra undertegnede.

Studentene gjorde en formidabel jobb med å utarbeide 10 poster, noen var hentet fra Lamis-heftet og noen var egne ideer. Med 20 minutter på hver post, var vi ute fra kl. 9–13. Lærerne som skulle stå på de ulike postene kom til 'dekket bord' denne dagen, ettersom studentene hadde funnet fram og lagt alt utstyret klart. Elevene var delt i 10 grupper og hver gruppe hadde en gruppeleder. Alle gruppene hadde med seg et skjema rundt på alle postene og her skrev lærerne ned kommentarer: Hvordan oppgaven ble løst, evne til samarbeid, humør og lignende. Dette ble levert til undertegnede på slutten av dagen, slik at man kunne vurdere gruppenes innsats. På skolens samlingsstund 18. februar, fikk alle medlemmene av den gruppa som hadde fått flest positive kommentarer et diplom.

Noen av elevene syns det var litt kaldt å være ute lenge, men å ha matpause inne hjalp litt. Ellers var det imponerende å se hvor mange positive og blide elever som viste stort engasjement og jobbet ivrig med utfordringene de fikk.

Alle teller

Victoria Sandberg

Fra åpningen av matematikkutstillingen på Abel-loftet i Sandnes

Onsdag 9. februar åpnet Sandnes museum (en avdeling av Jærmuseet) 'Abel-loftet' og matematikkutstillingen ALLE TELLER. Sandnes museum er et regionalt industrimuseum og et vitensenter under oppbygging. I årene frem mot kulturbyåret 2008 presenterer museet bl.a. denne pilotutstillingen for publikum som ønsker å utforske matematikk gjennom interaktive eksperimenter. ALLE TELLER er utviklet i samarbeid med bl.a. Universitetet i Stavanger, NHO, Lyse energi, Stavanger astronomiske forening, NITO, TEKNA samt en rekke andre aktører.

Mennesket har sannsynligvis hatt kunnskap om matematiske fenomen lenger tilbake enn den nedtegnede historie. Funn fra steinalderen viser at vi allerede for 30.000 år siden hadde forestillinger om form og tall. Omfanget av matematisk kunnskap har stadig vært i forandring og vekst, selv om mye av kunnskapen som ble funnet flere tusen år tilbake har tålt tiders ulike oppfatninger av virkeligheten rundt seg.

Matematiske problemstillinger har blitt løst ulike steder i verden til ulike tider. Uten flerkulturell påvirkning og sameksistens mellom forskjellige folkegrupper hadde matematikken aldri nådd dit den er i dag.

Med utstillingen ALLE TELLER ønsker vi å formidle noen sammenhenger mellom matematikk og verden rundt oss. Foreløpig tilbyr museet formidlingstilbudene «Alle teller» (en reise fra Mesopotamias tallsymboler frem til det indiske titallsystem), «En dag i det Pytagoreiske samfunn», «En dag i visdommens hus», «Orientering og kartforståelse» og «Astronomi» (For mer info: *Jærmuseets formidlingskatalog* eller www.jaermuseet.no). De besøkende møter personer fra matematikkens historie som Pytagoras og Teano, Galilei og Kepler, Al- Khwarizmi og Fibonacci gjennom rollespill. Etterpå arbeides det med aktiviteter som konkretiserer de ulike emnene som hører til.

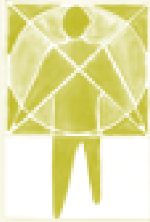
De besøkende kan bl.a. studere bikuben innenfra, se hvorfor biene bygger sekskantede celler, bygge mosaikkflater,

erfare hvordan grekerne brukte π, lage thailandske pavitrammønstre, utforske kubikken i motorer og regne i gamle tallsystemer. Ellers kan et besøk i planetariet kanskje gi nye perspektiver (det er fascinerende stort der ute) og for mange bringe frem nye spørsmål. En sykkeltur på firkantede hjul kan anbefales- eller hva med et besøk på Hilberts hotell før du finner brøkene på Pytagoras strengeinstrument. Dette er noe av det som er på plass i ALLE TELLER foreløpig.

I løpet av våren vil tekster samt flere illustrasjoner komme opp på veggene, i tillegg til at de siste installasjonene vil være på plass. Vi vil da også kunne åpne utstillingen for besøkende som vil utforske mer eller som kanskje ikke lenger går på skolen.

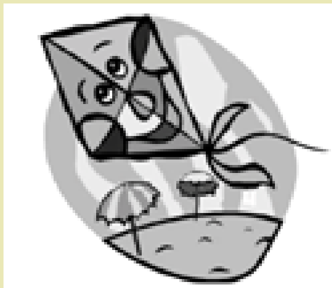
Jærmuseet med alle sine avdelinger er både museum og vitensenter. Formidlingen og utstillingene bygger på interaktive formidlingsprinsipper («læra ved å gjera»). ALLE TELLER er bygget opp etter samme prinsipp der elevene konstruerer og justerer sin kunnskap i samtale rundt utforskningen av ulike praktiske utfordringer.

Som et av seks regionale vitensentre i landet tilbyr Jærmuseet (sammen med en rekke andre i det nasjonale museumsnettverk) gratis formidling til grunnskolene i regionen. At vi nå kan tilby et eget rom tilegnet ene og alene matematikken er en



stor glede for oss. Kalenderen fylles opp og vi er svært glade for at så mange lar seg begeistre. Utstillingen vil vare frem til vitensenteret er på plass og blir vel utnyttet. Elevene i regionen skal få oppdage at matematikk er noe som både er vakkert, fascinerende, mystisk og ikke minst få ta del i den godt bevarte hemmeligheten — årsaken til at en del mennesker motiveres til å velge realfaglige studier.

Velkommen til matematikkfest i Bergen!



Vi markerer at årets Abelprisvinneren, Peter D. Lax, kommer til Bergen **26. mai**, ved å lage til stor matematikkfest for barn og voksne på Festplassen fra kl.10–13.

Abelprisvinneren sammen med ordføreren kommer på besøk i løpet av formiddagen.

Arrangementet er et samarbeidsprosjekt med Abelprisen, Høgskolen i Bergen, Universitet i Bergen og Lamis. Det kommer til å bli mange spennende matematikkaktiviteter som; spill, origami, dragebygging, rebusløp, bowling, løpe på tid, bygging av skulptur, fiskedam og målestasjoner. Dere finner mer informasjon om arrangementet på http://skolelab.uib.no

Skoler fra hele Hordaland blir invitert til å være med. Meld dere på via: http://skolelab.uib.no

For arrangementskomiteen, Mona Røsseland

Vil du bidra?

Jan Finnby

Til hva?

Jo, Lamis ønsker å lage en skriftserie med hefter, gjerne temahefter, som inneholder kortere og lengre artikler skrevet av dere og beregnet på dere. Det er ikke meningen at disse heftene på noen måte skal konkurrere med Tangenten eller liknende tidsskrifter. Dette er ment som ressurshefter for pedagoger på alle nivå i skolen og det er derfor viktig at artiklene i tillegg til beskrivelser og annet bakgrunnsstoff har forslag til oppgaver/aktiviteter knyttet til artikkelen. Oppgavene kan være alt fra rene regneoppgaver til mer prosjektliknende oppgaver.

La oss lage en ressursbank for idéer til bruk i undervisningen.

Hva gjør Lamis?

Vi i Lamis tar arbeidet med å samle de bidragene som kommer fra dere. Lese gjennom artiklene og eventuelt komme med forslag til endringer. Sette artiklene sammen til passende hefter, gjerne temahefter. Trykke heftene og la dem komme dere til gode for en billig penge.

Vi har ikke tenkt å la bidragsyterne gjøre jobben uten godtgjøring, så dere vil få betalt for bidragene gjennom at vi kjøper rettigheten til å bruke artikkelen.

Hva gjør du?

Du har et undervisningsopplegg om et tema, som fungerer. Skriv en artikkel som forteller om hva det går ut på, hvordan det gjøres, i det hele tatt det som trengs for at en hvilken som helst lærer kan gjøre seg umiddelbart nytte av dette. Husk å lage (et vell) av oppgaver og aktiviteter i tilknytning til artikkelen. Kanskje har du allerede skrevet en artikkel, da trenger du bare se til at den inneholder nok av forslag til aktiviteter, så ordner vi resten.

Hvor langt er vi kommet?

Foreløpig bare i startgropa. Vi vet at flere av dere har skrevet om papirbretting, origami, og kanskje er dette ett eksempel på et emne som kan samles i et temahefte. Men, vi ønsker et mangfold av temaer og pedagogiske idéer, som kan være som en Sareptas krukke for den norske lærerstanden, en uuttømmelig kilde i undervisningen.

Det praktiske

Send artikkelen som vedlegg (gjerne som word-fil) til: finnby@online.no

Jeg og andre i styret i Lamis leser gjennom og avgjør hvorvidt dette er en egnet artikkel for disse temaheftene. Dere vil få en forespørsel om å selge artikkelen til oss, med et forslag til pris. Er dette ikke akseptabelt, vil artikkelen bli returnert.