Korden

Mange ser på matematikkfaget som et nøytralt fag, et fag der verdigrunnlaget ikke spiller noen rolle, et fag som er hevet over følelser og menneskelige trekk, de evige sannheters fag uten plass for personlige forkjærligheter og affeksjoner. I sitt leserinnlegg i dette heftet tenderer Frode Haara til å slå et slag for denne oppfatningen ved å argumentere mot innføring av begreper som gir menneskelige trekk til tallene, og slik prøve å humanisere skolematematikken. Men affektive sider som å gi menneskelige egenskaper til tall i matematikk, har røtter fra langt tilbake i tid. Vi finner eksempler fra pytagoreerne. Selv om det var i disse kretser at det rent logiske resonnement, beviset, så dagens lys, var det også nettopp der at den affektive siden ved matematikken ble fremhevet. Pytagoreerne opererte f.eks. med såkalte vennskapstall. To tall som er slik at summen av faktorene av det ene utgjør det andre (og omvendt), blir kalt vennskapstall. 220 og 284 er et slikt par siden 1, 2, 4, 71 og 142 er de ekte faktorene i 284 og $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$, mens 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 og 110 er de ekte faktorene i 220 med sum 284. Poenget her er at pytagoreerne tilla slike tallpar en magisk kraft som kunne beskytte et vennskap. To venner som bar hver sin amulett med hvert sitt vennskapstall kunne regne med evig samhold. Menneskelige kvaliteter var slikt klart til stede og ble også delvis brukt til å underbygge et magisk verdensbilde i en ellers tørr og nøytral matematikkverden. Hos pytagoreerne hadde også de enkelte tallene klare menneskelige trekk. Totallet, eller forholdstallet 2 : 1, stod for harmoni siden det i musikken representerer oktavintervallet som kan oppfattes som spesielt harmonisk. Andre tallforhold fikk tillagt andre kvaliteter. I en skoleklasse finner vi mange som har et yndlingstall. (Mitt personlige yndlingstall er 5.) Noen har også tall de avskyr. Ulykketallet 13 har blitt «mobbet» i alle år og tallet 7 har også fått en del «juling» siden sju-gangen er ekstra vanskelig. Når vi befatter oss med matematikk vil det alltid frigjøres følelser både positive og negative. Å tro at matematikken kan presenteres på en totalt affeksjonsfri måte mener jeg er en illusjon. Til syvende og sist er vi avhengig av at elevene våre utvikler et positivt emosjonelt forhold til faget og da må det være rom for forkjærligheter og yndlingstemaer.

Christoph Kirfel

Annbjørg Håøy

Primtall og gangerektangler

Som lærer for de yngste elevene i skolen prøver jeg å ta i bruk undersøkende virksomhet og gi elevene mulighet til å utforske ved hjelp av ulike representasjonsformer (Håøy, 2010). I denne artikkelen beskrives et prosjekt der elever inviteres til en undersøkende tilnærming til ganging og deling ved hjelp av tallinje og gangerektangler i tallområdet 1–100. Elevene er i starten av fjerde trinn. Prosjektet er senere utført på tredje trinn og der ble også multilinkklosser tatt i bruk.

Hva er undersøkende virksomhet?

Undersøkende virksomhet i matematikk gir elevene mulighet til å være aktivt handlende i dialog med seg selv og andre om det man undersøker og tenker (Bollerslev et al, 2003, s. 32). Elevene inviteres til å løse et skikkelig problem med mulighet til å arbeide med flere representasjonsformer og ulike abstraksjonsnivåer. Problemstillingen må romme muligheter for å utvikle sentrale matematiske kompetanser. Læreren legger opp til undersøkende virksomhet og dialog, samtidig som hun signaliserer faglige forventninger. Prosessene forutsetter at elevene blir engasjert og at de tør å vise hva de vet og det de ikke vet. Underveis stiller lærer spørsmål ut fra det elevene tenker og finner ut, for å stimulere til faglig diskusjon og skape relasjoner mellom ulike måter å tenke på. Læreren må variere mellom å presse i en retning og være åpen for å skifte fokus når elevene reiser et nytt faglig interessant spørsmål (ibid).

Skovsmose (1998) betegner slik virksomhet som det å gå ut i et undersøkelseslandskap og stiller dette opp som en motsetning til å arbeide etter oppgaveparadigmet. Oppgaveparadigmet har en undervisningsform som er svært lærer- og fasitstyrt, med innledning av nytt stoff og gjennomgang av relevante oppgaver. Deretter regner elevene lignende oppgaver individuelt eller i grupper (Mellin-Olsen, 1996). Skovsmose vektlegger i særlig grad elevenes egne initiativ, og påpeker at lærer må gi slipp på noe av kontrollen over lærestoffet slik at elevene kan påvirke egne mål. Dette stiller særlige krav til at lærer mestrer kommunikasjonsformer som å lytte og være i aktiv dialog med elever (Alrø & Skovsmose, 2005).

Undersøkende oppgave

Multiplikasjon og divisjon ved rektangelmetoden er anerkjent og anbefalt av Anghileri (2000) og Heuvel-Panhuizen (2001). Fra før kjenner elevene til tallinje og har arbeidet både med tellesnor og regning på tom tallinje. En illustrasjon av tallinje med gangestykker er imidlertid helt nytt. Det er omfattende å lage

Annbjørg Håøy
Kastellet skole, Oslo
annbjorg.haoy@kastellet.gs.oslo.no

en slik illustrasjon, og det vil ta tid. Det er lurt å organisere det som et prosjekt som hele trinnet deltar i, og så bruke det aktivt når det er ferdigstilt. Gangerektangler er da en representasjon av ganging og kan gjøres med konkreter eller tegninger, for eksempel i rutepapir (figur 1).

Figur 1: Gangerektangler.

Lærer innleder til klassesamtale ved spørsmålet: Kan gangestykker uttrykke tallene?

Det er hennes egen idé, og hun forklarer at hun ser for seg en illustrasjon som går langs hele langveggen der det vises hvordan man kan uttrykke tallene ved gangestykker uttrykt som rektangler for hvert enkelt tall opp til 100. Hun introduserer ved å fokusere på tall under 10 og elevene har straks forslag til hvordan det kan gjøres. Eksempler på slike gangestykker, som $3 = 1 \cdot 3$ og $6 = 2 \cdot 3$ eller $3 \cdot 2$ gjennomgås og lærer viser dette med å klippe i rutepapir.

Elevene sitter i grupper som får i oppgave å utforme tallene innenfor et intervall, f.eks. 11–20. Det er viktig å porsjonere ut arbeidet til de ulike gruppene, at de innad fordeler oppgavene og at gruppene får støtte, utfordringer og følges tett underveis.

Elevene tok godt imot invitasjonen, de kom raskt i gang, arbeidet ivrig og klarte å fordele oppgaver mellom seg. Ut fra mine og de øvrige lærerne og assistentenes observasjoner, var dette en oppgave de tente på selv om arbeidet hadde ulik framdrift i de ulike gruppene. Ulike barn har ulik tallforståelse og det viser eksempler videre i artikkelen.

Elevenes kommunikative kompetanse utfordres ved at de selv forteller fra arbeidet.

Elev: Jeg jobbet med 5. Det ble $1 \cdot 5$.
Lærer: Hvorfor ble det slik?
E: Det går ikke med 5 i andre regnestykker.
L: Hva slags tall er 5?
E: Det er et oddetall.

De kjenner oddetall og partall, dette er nyttig tallkunnskap.

Ei jente jobbet med 11. Hun får det ikke til.

L: Hva er det du ikke får til?
E: Å lage et rektangel.

Hun viste det fram: 3 gange 3 med 2 ekstra øverst. Jeg spurte om hun hadde prøvd noe annet. Ja, hun hadde prøvd med to. «Det går ikke her heller,» kommer det fra nabobordet. Han jobber med 13. Det er et oddetall.

L: Hva er det med disse tallene? Kanskje dere to kan jobbe sammen?

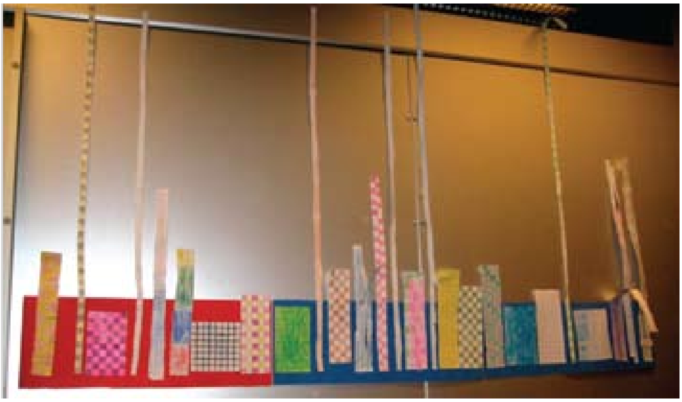
De jobbet litt til. Så løftet vi diskusjonen fram i plenum.

L: Hva er det med 11?
E: Vi får ikke til å lage det som to ganger noe.
L: Får vi det til med tre?
E: Nei.
L: Hva med 4 da?
E: Nei.
L: Men med 5 eller 6?

Barna svarte hele tiden nei. «Dette er noen andre slags tall,» sier lærer. «De heter primtall. De kan bare deles med seg selv og 1.»

Ei jente lager 12. «Det blir $2 \cdot 6$, men det kunne også vært $3 \cdot 4$.» Videre jobbet en med 18, hadde laget $9 \cdot 2$, men fant ut at hun også kunne lage det som $3 \cdot 6$. Hun arbeidet videre og begge rektanglene fikk plass på plakaten. En elev hadde laget 16. «Det ble en is,» sa han, og viste en figur formet som en kuleis. «Men kan du lage et rektangel?» spurte lærer. Det kunne han, det ble 4·4.

En gutt laget illustrasjon til tallet 26. Han var i gang med å fargelegge ruter i en lang remse, altså som 1·26. Han ble utfordret av lærer til å dele opp tallet 26, altså å arbeide med tallets delelighet. Han så ikke dette umiddelbart selv ved å knytte til kunnskap om partall og oddetall. Her ble han utfordret i sin tenkning. Han kjente noe til ganging og deling, men klarte ikke å anvende det i en ny og utvidet sammenheng. Sammen med lærer kunne han utforske, og ved å legge noen striper av rutepapir ved siden av hverandre prøvde han seg fram og fant en løsning.



Figur 2: Her vises illustrasjoner til tall fra 58–83.

Ei jente hadde laget 51 som 16·3 i en stripe + 2 løse ruter (= 50). Dette var jo et resultat med feil, men bearbeidingen ga korreksjon: Lærer jobbet sammen med henne, snakket om det kunne lages som to eller tre striper og hun tenkte gjennom det, klipte og limte. Det ble 3·17.

Det viste seg at kunnskaper om *oddetall og partall* ble repetert og brukt i arbeidet. Elevene jobbet godt med å lage plangeometriske representasjoner av gangestykker, noe som i realiteten besto i å eksperimentere med å dele opp tall. Fra før var de mest vant til å regne ut ferdig oppstilte gangestykker. Utfordringen i dag var å ta utgangspunkt i et større tall og tenke seg hvordan du kan bygge det opp med ruter, uttrykke det på en annen måte. De holder på med utforskning, prøving og feiling. Dette er problemløsning, undersøkelseslandskap (Skovsmose 1998), i kontrast til den tradisjonelle oppgavediskurs (Mellin-Olsen, 1996). Dette er dialogisk læring, der elevenes bidrag står høyt og lærer bistår (Alrø & Skovsmose, 2005).

Elevene hadde mange spørsmål: «Går 3-gangen i 36?» «Går 7-gangen i 55, hva med 11-gangen, når kan vi bruke den?» Den nye måten å arbeide på var utfordrende. Lærer syntes det kunne være lurt å sjekke 2, 3, 5, 7 og 11-gangen. Men hvem sa at vi skulle stoppe på 20 for 2-gangen eller 30 for 3-gangen? Nei, helt opp til 100 går utforskningen. En slik utvidelse av tallkunnskaper er spennende og elevene kastet seg over denne muligheten.

For å utforske ganging helt opp til 100, tok vi i bruk hundrerute. Elevene kunne sammen markere alle tall i f.eks. 4 gangen. Deretter la vi arket på overhead. I samarbeid og i plenum kunne vi dermed oppdage at de fleste tallene opp til 100 lot seg uttrykke som et gangestykke. Det ble også tydelig hvilke tall som ikke kom med i 2, 3, 5, 7 og 11-gangen opp til 100. De vil i arbeidet framstå som 1 ganger seg selv. «De blir en lang stripe og det blir ganske kult,» sa en av elevene. En refleksjon fra samarbeidende lærer: «Vi oppdager jo primtallene, det er helt genialt!»

Etterhvert så elevene mønstre i tabellene: Tallet 65 – ja det går i 5-gangen. Så er det å finne ut hva 5 ganges med i dette tilfellet.

Oppgaven var en åpen oppgave, en oppgave de kunne utforske ved hjelp av ulike strategier og ved hjelp av ulike typer materiell som rutepapir og klosser. Det var muligheter for åpen utforskning og oppgaven innebar absolutt en utfordring for elevene. De færreste hadde gangetabellen inne. De var svært opptatte av gangesangen som har morsom melodi og gjentakelser av tallrekken i hver tabell med «hopp», for eksempel 4, 8, 12 og med utsagn som «4 ganger 1 er 4,» «4 ganger 2 er 8» osv. Elevene hadde jobbet med dobling og halvering, men ikke direkte relatert dobling til ganging. Ethvert tall på tallinja, men spesielt tall over 20 for noen og særlig over 30 representerte store utfordringer som inviterte til problemløsning. Svarene var ikke enkle å finne. Men ved å bruke tidligere kunnskaper kunne de finne ut av det.

Det var også muligheter for elevene til å reflektere på egen hånd og til å ta egne initiativ. Før lærer hadde tenkt på det, var elevene i gang med å utforske de store tallene, 100 ble laget av to elever i samarbeid og de fargela en 10×10-rute som ble hengt opp på tallinja. I den samme timen var flere opptatt av det samme og hadde laget 11×11 og 12×12. Dette er et eksempel på at elevene tar over og utvikler oppgaven videre.

Oppgaven med å lage todimensjonale mønstre i papir ble opprinnelig gitt til fjerde trinn. De uttrykte stor glede over arbeidet og laget fine mønstre i lysende farger. Senere gjorde jeg samme oppgave med elever på tredje trinn. Nå lot jeg dem først lage rektanglene ved i form av klosser. Elevene uttrykte stor glede over å få arbeide med klosser og denne gleden avtok ikke. Etter hvert som de oppdaget kvadrattallene, gikk flere over til å lage så store kvadrater som mulig. Det å lage store tall ble et mål i seg selv. Det er et eksempel på at elevene finner nye faglig interessante spørmål.

Vi ønsket å fullføre tallinja. Lærer måtte stramme inn bruken av klosser og be elevene fullføre prosjektet.

Hva lærte elevene?

Elevene lærte å jobbe med åpne, undersøkende oppgaver. De viste stor glede over å få arbeide med utfordringer som innebar egen aktivitet med andre uttrykksmåter enn oppgaver i boka. De lærte at matematikk kan uttrykkes billedlig som en tallinje med gangestykker. De uttrykte tall på tallinja, i form av gangerektangler opp til 100, noen til og med lenger. De lærte å faktorisere tall. Noen strevde lenge med tall som de fant ut var primtall, som blir 1 ganger tallet selv. De så også at gangerektanglene kunne uttrykkes på ulike måter. F.eks. blir 18 uttrykt ved 2×9 eller 9×2, 3×6 eller 6×3. I etterkant fikk elevene fortelle om arbeidet sitt, både muntlig og skriftlig. Det er viktig å sette av tid til dette, slik at det blir muligheter for å arbeide med den muntlige og skriftlige kommunikative kompetansen.

Videreføring med tallmønstre

En engasjerende fortsettelse av arbeidet er å lage kvadrattall. Dette kan gjøres med klosser, men også med rutepapir. Deretter kan også dette gjøres til en skriftlig oppgave der elevene regner ut hvor mange klosser eller ruter hvert kvadrat har. Sammen kan klassen finne tallrekken til kvadrattallene. En slik prosess kan lede mot arbeid med andre typer tallmønstre. Det gjennomførte prosjektet ble således en inngangsport til arbeidsmåter som la til rette for betydelig matematisk innsikt.

Referanser

Alrø, H. & Skovsmose,O. (2005). *Undersøgende samarbejde I matematikundervisningen – udvikling af IC-modellen.* Aalborg: Aalborg Universitet.

Anghileri, (2000). *Teaching Number Sense.* London, New York: Continuum

Bollerslev, P. (Red.) (2003). *Matematik I læreruddannelsen. Teori og praksis – en fagdidaktik.* København: Gyldendal,.

Heuvel-Panhuizen (2001). *Children learn mathematics. Utrecht:* Freudenthal Institute.

Håøy, A. (2010). Desembertall. *Tangenten* 4/2010.

Mellin-Olsen, S. (1996). Oppgavediskursen i matematikk. *Tangenten* 2/1996.

Skovsmose, O. (1998). Undersøgelseslandskaber. I Dalvang & Rohde (Red.): *Matematikk for alle. Rapport fra Lamis første sommerkurs.* Bergen: Landslaget for matematikk i skolen.

Øistein Bjørnestad

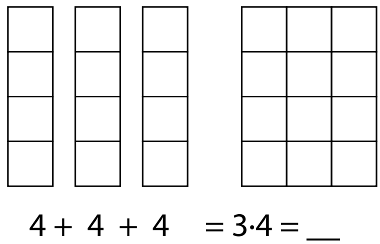
Kan multiplikasjon innføres på en enhetlig måte?

Regneartene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon har alle sine særpreg og alle sine utfordringer i innlæringsprosessen. I denne artikkelen vil vi se på multiplikasjon som regneart og de spesielle problemene som dukker opp når elevene skal arbeide med multiplikasjon. Det har å gjøre med at multiplikasjon innføres på en måte som bare gir mening for naturlige (og etter hvert hele) tall. Når eleven kommer til brøk, later det til at multiplikasjon får et annet innhold.

Multiplikasjon i grunnskolen

Når multiplikasjon innføres i tredje klasse, er det i starten noen forberedende øvelser. For eksempel ser vi et bilde av to hender, sammen med regnestykket $2 \cdot 5 =$ __, eller et bilde av tre terninger som hver viser fire øyne, sammen med regnestykket $3 \cdot 4 =$ __. Dernest kommer en forsiktig formalisering: i stedet for bilder av velkjente dagligdagse ting finner vi en oppstilling av *tallstaver*. For eksempel som vist på figur 1.

I notasjonen $3 \cdot 4$ viser siste faktor «gruppestørrelsen», her 4, mens første faktor viser «hvor mange grupper», her 3. Lærebøker flest skiller mellom *multiplikanden* («gruppestørrelsen») og



Figur 1.

multiplikatoren («hvor mange grupper»). Multiplikatoren er det tallet vi multipliserer multiplikanden med.

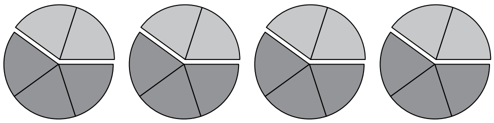
Slik innføres tanken om at multiplikasjon er det samme som *gjentatt addisjon* av multiplikanden, bare med en annen og kortere skrivemåte. I starten opereres det med naturlige tall: når multiplikatoren m i produktet $m \cdot n$ er et naturlig tall, *er* produktet det samme som summen

$$\underbrace{n+n+\cdots+n}_{m \text{ ledd}}.$$

Noe senere, gjerne i sjette klasse, utvides multiplikasjonsbegrepet til å omfatte tilfellet at multiplikanden er en brøk. For eksempel er

$$4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} .$$

Øistein Bjørnestad
Tidligere Høgskolen i Sogn og Fjordane
oisteinb@live.no



Når vi tenker oss om («hvor mange femdeler får vi i alt?»), ser vi at vi får

$$4\cdot\frac{3}{5}=\frac{4\cdot 3}{5} \quad \text{og allment} \quad m\cdot\frac{t}{n}=\frac{m\cdot t}{n}$$

I ungdomsskolen møter elevene så den situasjonen som gjør multiplikasjonsbegrepet så problematisk: at multiplikatoren er en brøk. Forestillingen om multiplikasjon som gjentatt addisjon bryter sammen. Hva betyr

$$\frac{t}{n}\cdot m \quad \text{og} \quad \frac{t}{n}\cdot\frac{p}{q}$$

(der t, n, m, p og q er naturlige, eventuelt hele, tall)?

I de aller fleste lærebøker og på de fleste nettsteder besvares dette spørsmålet ved å sette frem en regel:

> Vi multipliserer et helt tall med en brøk ved å multiplisere telleren i brøken med det hele tallet og beholde nevneren.
> Vi multipliserer to brøker ved å multiplisere telleren med telleren og nevneren med nevneren.

Altså,

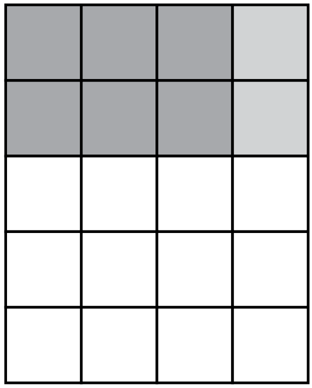
$$\frac{t}{n}\cdot m=\frac{t\cdot m}{n} \quad \text{og} \quad \frac{t}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{t\cdot p}{n\cdot q}\,.$$

En oppvakt elev vil finne dette utilfredsstillende og demotiverende. Han vil ha svar på *hvorfor* det skal være slik.

Noen ganske få lærebøker går litt lenger. I disse bøkene finner en tanker knyttet til tegninger omtrent som den på figur 2.

Spørsmål til tegningen kan være:

– Kan vi finne ut hva $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$ er?
– Hvor stor del av rektanglet utgjør den dobbeltskraverte delen?



Figur 2.

Svar som gis er gjerne at den dobbeltskraverte delen utgjør $\frac{3}{4}$ av $\frac{2}{5}$ av rektanglet, og at dette må bli $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$ (av rektanglet). Vi ser at det blir $\frac{6}{20}$ (av rektanglet). Når det sies at den dobbeltskraverte delen må bli $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$ av rektanglet , ligger nok, bak denne påstanden, den velkjente tanken at arealet av et rektangel er «lengden × bredden.» Spørsmålene og svarene legger opp til at

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{4} \text{ av } \frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 5} \quad \text{og}$$

$$\frac{t}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{t}{n} \text{ av } \frac{p}{q}=\frac{t\cdot p}{n\cdot q}\,.$$

I en lærebok for allmennlærerutdanningen (Bjørnestad et al., 2006) har vi brukt denne måten, med et nokså utførlig forsøk på å begrunne/rimeliggjøre. Vi har dermed en rimelig tolkning av $\frac{t}{n}\cdot\frac{p}{q}$ (og for så vidt av $\frac{t}{n}\cdot m$) og en regel for utregningen, men det mangler en overbevisende argumentasjon for at $m\cdot n$, $\frac{t}{n}\cdot m$ og $\frac{t}{n}\cdot\frac{p}{q}$ hører inn under samme begrep!

Kan multiplikasjon innføres på en enhetlig måte?

Innføringen av multiplikasjon via tallstaver (se figur 1) er svært anskuelig. Elementene i begrepet kan vi manipulere fysisk, tegne, eller se for oss. Multiplikasjon fremlagt slik er tilgjengelig for ganske små barn. Nå ønsker vi å knytte begrepet multiplikasjon til mindre anskuelige saker omkring *tall* og *antall*.

Språklig sett er ordet tall innfløkt. I Grimms store tyske ordbok (Grimm, 2006) opptar *tall* (*Zahl*) om lag seks store sider. Ordet *telle* (*zählen*), enda mer. I nevnte omtale av ordet tall (Zahl) kommer følgende som ellevte og siste punkt: «Endelig er *tall* siden middelalderen brukt også for å angi mål på tellbare saker.» Det bør være nokså sikkert at tall, tellbar, o.l., alltid har kardinaltallene som bakteppe. Nå er det jo slik at i matematikken har begrepene knyttet til tall sin egen historie. Annerledes enn i språkene, betraktet lingvistisk, har vi i matematikken å gjøre med en *bevisst* innskrenkning, utvidelse og finsliping av begrepet tall. Tall er her også rasjonale tall (vanlige brøker eller endelige, eventuelt periodiske desimalbrøker), irrasjonale tall, osv.

Hvorfor så gå til en tysk ordbok for å hente idéer. Ordet tall og beslektede ord har fellesgermansk opphav, og Grimm (2006) er den beste kilden for slikt. *Antall* er ikke på samme måte som tall et viktig matematisk ord. Men i språkene, betraktet lingvistisk, er antall ikke uviktig. I Grimm (2006) finner vi følgende (litt fritt oversatt): «Antall … forholder seg til tall som andel til del, og vil ikke uttrykke det fulle tall, bare et visst tall. Mens *tall* betegner det samlede innbegrep av en liten eller stor mengde, betegner *antall* en del av denne.

Ville det ikke være rimelig å gjøre også begrepet antall til gjenstand for en «innskrenkning, utvidelse og finsliping,» i stil med det vi har når det gjelder tall? Jeg mener selv at et slikt mer sofistikert antallsbegrep faktisk er i bruk, om enn implisitt. Når vi sier 2 mil, tenker vi at det dreier seg om to ut av et uspesifisert forråd av mil! Vi har et *antall*, nemlig to, *av* noe, nemlig mil. Fra Bjørnestad et al. (2006, side 139):

> Enda litt om *antall*, som vi … i utgangspunktet angir ved kardinaltallene. De egner seg til å svare på spørsmål av typen «hvor mange?» hvis den som spør og den som svarer, er enige om hva slags ting det dreier seg om. *Men i dagligtalen og ofte også i matematikken tenker vi at antall også kan angis ved brøker*, for eksempel 4,5 mil som svar på «hvor langt er det fra … til …?», og 2½ år som svar på «hvor gammel er han?»

Dette sitatet roper vel på en mer inngående diskusjon, men den tanken jeg prøver å få frem, er til stede, på et vis. Når vi sier «Det er 2 mil fra … til …» og når vi sier «Det er 4,5 mil fra … til …», er forestillingene våre av nøyaktig samme slag. Altså, jeg mener det er helt ut akseptabelt å utvide betydningen av *antall* til brøker (vanlige brøker eller endelige, eventuelt periodiske desimalbrøker), forutsatt at det som vi har antall av kan tenkes oppdelt i like store deler på en måte som gir mening. Vi kan ikke lett tenke oss 3/4 av et menneske, men 3/4 av 2 m går fint. En utvidelse til irrasjonale tall er ikke noe stort problem.

Med støtte i Grote (1983), kapittel IX, vil jeg fremheve følgende: «Antall er alltid *antall av* noe.» Videre: «I multiplikasjon er antall til stede i multiplikatoren, mens multiplikanden angir et «hvor mye». La oss ta for oss noen eksempler.

$$\text{Tre (av) firere er } 3 \cdot 4,$$

som vi kan representere ved tre tallstaver, hver av lengde fire.

Når 4 identifiseres med tallinjens 4, og vi forstår brøkene som tall på tallinjen, byr det ikke på vanskeligheter å si at

$$\text{tre og en halv (av) firere er } 3\frac{1}{2} \cdot 4,$$

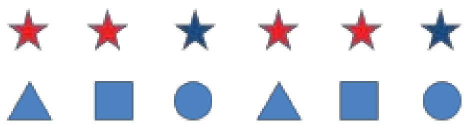
eller at to femdeler av fire (dvs. av én firer) er

(fortsettes side 39)

Lene Christensen

Talmønstre

Arbejdet med at undersøge mønstre i tal bør begynde allerede i de små klasser. Lad eleverne undersøge hvordan en række af geometriske figurer vokser, så kan de måske erfare at der er et system i mønstret. To eksempler er vist herunder.



Elever bør både kunne tegne de manglende figurer og også meget gerne sætte ord på systemet.

At forstå sammenhænge og kunne opdage mønstre i tal giver en dybere forståelse for vores talsystem og dets opbygning. De fleste børn kender 'remsen' 10, 20, 30, osv. allerede inden de begynder i skolen, men de har ikke forståelse for sammenhængen ud over at de godt kan se at det er 1, 2, 3 … med 0 bagved. Derfor kan det være en god idé at tage udgangspunkt i denne remse for at styrke kendskabet til titalssystemet.

Tal med samme egenskaber

Der er ikke noget i vejen med at eleverne lærer talremser, men det er vigtigt at de også forstår sammenhængen i disse remser. En af måderne man kan gøre det på, er ved at give eleverne nogle tal fra en tabel og lade dem undersøge hvad de udleverede tal har til fælles. Giv dem fx kort med tal fra en af tabellerne og læg dem ud på bordet i tilfældig rækkefølge. Lad eleverne arbejde i grupper. De skal ligeledes have konkret materiale til rådighed som de kan eksperimentere med så de får mulighed for at opdage sammenhængen mellem tal og mængde. Hvis skolen har talfliser med tallene fra 1–100 til rådighed, er det en god idé at bruge dem i denne sammenhæng; dog bør fliserne placeres på en række og ikke i et kvadrat så eleverne får en fornemmelse af tallenes placering på en tallinje. Antallet af fliser bør justeres i forhold til opgaven. Giv hver af eleverne et talkort – gerne et kort hvor både tal og mængde er vist. Bed dem om at stille sig på den talflise der hører til deres talkort hvorved de fysisk kan opleve en sammenhæng. Spørgsmål som: «Hvor langt er der mellem …» og «Hvorfor står der ikke nogen på det tal?» vil automatisk dukke op. Det er vigtigt at lærerne 'holder sig i baggrunden' så det er elevernes egne opdagelser og konklusioner der er i spil.

Senere kan eleverne farve deres 'tal' på et ark med tallene fra 1 til 100 ordnet i et kvadrat på 10×10 felter. Senere kan eleverne skrive deres tal ind på et tomt 10×10 kvadratnet. Ved opgaver som de beskrevne er der rig mulighed for at differentiere. Nogle elever skal måske arbejde med

Lene Christensen
Stavnsholtskolen, Farum, Danmark
lene@lchris.dk

tal fra 2-tabellen mens andre på et tidligt tidspunkt er klar til at arbejde med 6-tabellen. Desuden kan man lade nogle elever starte med et større tal i tabellen.

For at vedligeholde arbejdet med at finde mønstre i talrækken bør eleverne med jævne mellemrum præsenteres for opgaver som: Find de manglende tal i talrækken:

2, 5, 10, 17, 26, … , 50, …

Sværhedsgraden bør differentieres efter elevernes formåen, men gerne så de bliver udfordret.

Primtal

Ved at bede eleverne finde divisorer i tallene fra 1 til fx 50 (D_1 til D_{50}) og lave en optælling af hvor mange divisorer de enkelte tal har, vil de opdage at der findes tal der har netop 2 divisorer. Herefter kan begrebet primtal indføres. Tag en snak med eleverne om hvorfor definitionen på et primtal ikke kan være: 'Et tal hvor kun 1 og tallet selv går op', men at den præcise definition er: 'Et primtal er et tal med netop to divisorer' hvorved 1-tallet automatisk udelukkes.

Udlever et talskema med tallene fra 1 til 200 til eleverne og lad dem lave Eratosthenes' sil. Da arbejdet med primtallene begynder på et tidspunkt hvor flere elever ikke er begejstrede for at farvelægge, kan arbejdet med fordel udføres i et regneark, og eleverne kan således nemt fremstille deres eget talskema.

Fremgangmåde, jf. Eratosthenes' sil:

– Start med at strege 1-tallet ud
– Streg alle tal der kan deles med 2 (men ikke tallet 2)
– Streg alle tal der kan deles med 3 (men ikke tallet 3)
– Find det næste tal der ikke er streget ud
– Streg alle tal, som kan deles med dette tal (men ikke tallet selv)
– Find det næste tal, der ikke er streget ud
– Fortsæt på denne måde indtil du kommer hele skemaet igennem.

Eleverne vil snart opdage at der ikke er noget mønster i primtallenes placering. Lad eleverne herefter markere 6-tabellen og primtallene i et skema med tallene fra 1 til 200. Har de lavet Eratosthenes' sil i et regneark,

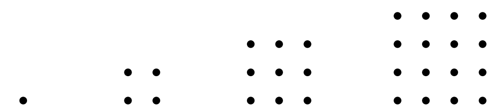
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
4	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
5	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
6	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
7	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
8	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
9	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
10	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
11	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
12	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
13	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
14	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
15	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
16	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
17	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
18	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
19	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
20	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Figur 1: Utsnitt fra regneark som viser Eratosthenes' sil.

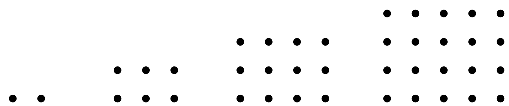
vil det være oplagt at arbejde videre på det. Se Figur 1.

Læreren kan nu fremkomme med følgende påstand: «Alle primtal større end 3 er 'nabo' til et tal i 6-tabellen.» Eleverne skal nu undersøge om denne påstand er korrekt og opfordres til at begrunde hvorfor det er tilfældet. Ved division af et primtal med 6 vil kun resten 1 eller 5 forekomme. En rest på 0, 2, 3, 4 kan på forhånd udelukkes og tilbage er så kun 1 og 5. Dette kan afprøves i et regneark ved at anvende formlen for angivelse af rest. Fx =rest(19;6) vil give resultatet 1 og =rest(23;6) vil give resultatet 5. Er resten 1, vil tallet til venstre for primtallet tilhøre 6-tabellen, og er resten 5, vil det være tallet til højre for primtallet.

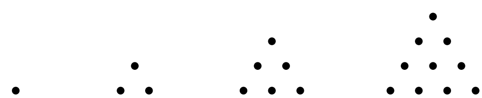
Eleverne skal dog gøres opmærksom på at selvom de undersøger nogle af primtallene, kan de ikke være sikre på at det også gælder for større primtal medmindre de kan argumentere for reglen så den bliver generel.



Kvadrattal



Rektangeltal



Trekanttal

Nummer i rækken	1	2	3	…	9	100	n
Kvadrattal	1	4					
Rektangeltal	2	6					
Trekanttal	1	3					

Kvadrattal, rektangeltal og trekanttal

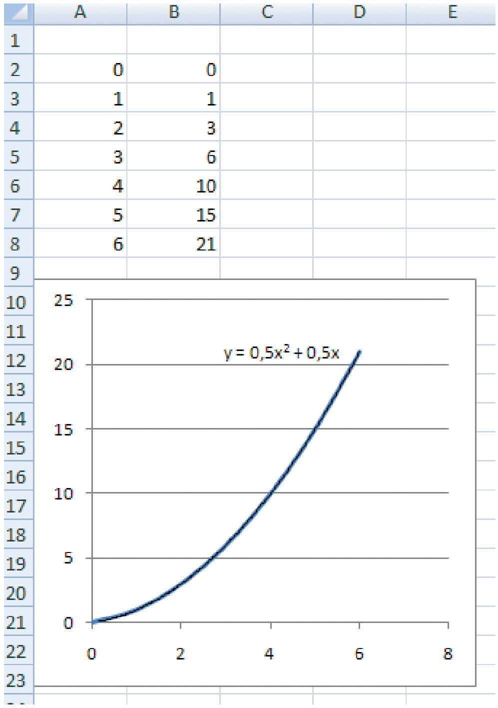
Lad eleverne udfylde skemaet til på siden foran, undersøge og beskrive hvordan talfølgerne vokser.

Nogle elever vil finde systemet ved at se på hvordan tallene i skemaet vokser mens andre vil anvende den geometriske repræsentation af talrækkerne.

Det kan i begyndelsen være svært for eleverne at opstille en matematisk model for en voksende talrække, men erfaringen viser at jo tidligere de har arbejdet med denne type opgave desto nemmere bliver det for dem.

På et senere tidspunkt stilles følgende opgaver til eleverne:

- Find summen af de første 100 tal
- Find summen af de første 50 lige tal
- Find summen af de første 50 ulige tal
- Sammenlign med tallene fra jeres undersøgelse af kvadrattallene, rektangeltallene og trekanttallene



Opstilling af en model

En genvej til at finde en formel for en voksende talrække kan være at indtaste tallene i et regneark, tegne en funktion og bede om at få vist funktionens ligning.

Denne mulighed bør eleverne ikke anvende før de selv har forsøgt at finde formlen, men metoden kan også bruges til at kontrollere om den formel de selv har fundet, passer. Dette kan give anledning til arbejdet med at omskrive algebraiske udtryk. Hvis en elev fx har fundet frem til at formlen for hvordan trekanttallene vokser er: $y = x(x + 1)/2$ og bagefter kontrollerer det ved hjælp af et regneark som fortæller at forskriften er: $y = 0{,}5x^2 + 0{,}5x$, giver det rig mulighed for at undersøge om de to udtryk er ens.

Nordisk Matematikkonkurrence

Flere af de opgaver der er stillet til Nordisk Matematikkonkurrence, indeholder både talmønstre og geometriske mønstre. Herunder er vist to eksempler på opgaver med mønstre i tal.

Talmønstre

Nogle trecifrede tal har den egenskab at det midterste ciffer er summen af de to andre cifre. Hvor mange trecifrede tal med denne egenskab findes der?

Find det næste tal i rækken

Hvad hedder det næste tal i denne talrække?

6, 50, 402, 3218, 25746, … ?

Ved at arbejde med at finde mønstre i talrækker gennem hele skoleforløbet styrkes elevernes forståelse for vores talsystem og dets opbygning. I denne artikel er udvalgt nogle enkelte eksempler, men der findes mange andre interessante talrækker som fx kubiktallene, Fibonaccis talrække, Pascals trekant etc.

Weiqin Chen

Ganging uten gangetabell?

Gangetabellen er et viktig hjelpemiddel når vi utfører multiplikasjon med flersifrede tall med standardalgoritmen. Selvfølgelig kan vi bruke kalkulator, men vi har ikke alltid en kalkulator for hånden. I grunnskolen legges det derfor en del vekt på at elevene lærer gangetabellen utenat. Elevene kan føle dette som et press og de som ikke klarer å lære seg hele tabellen, kan få problemer med ganging senere.

Metoden som presenteres her kan på mange måter sees på som en alternativ tilnærming til arbeid med multiplikasjon som kan berike elevenes forståelse og begrepsapparat. Kina har en lang tradisjon i matematikk, spesielt er det å finne forskjellige løsninger på matematiske problemer svært populært. Forskjellige metoder som har som mål å bedre elevenes matematiske problemløsende ferdigheter blir brukt i mange skoler. I Kina blir gangetabellen kalt «Jiu Jiu Ge», direkte oversatt blir dette Ni-ni-sangen. Elevene lærer gangetabellen utenat som sanger.

I denne artikkelen presenterer vi en kinesisk metode for å multiplisere uten bruk av gangetabell. Den grunnleggende idéen bak denne metoden er å erstatte multiplikasjon med telling og addisjon.

Weiqin Chen
Universitetet i Bergen
Weiqin.Chen@infomedia.uib.no

Metode

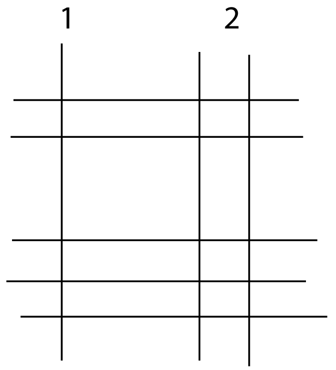
Multiplikasjon av hele tall er i utgangspunkt basert på addisjon. I teorien kan all multiplikasjon gjøres ved å gjøre det om til addisjon (ved å addere multiplikand så mange ganger som multiplikator tilsier, eller ved å addere multiplikator så mange ganger som multiplikand tilsier). For eksempel kan 3×2 regnes ut ved å addere 3 to ganger, 3 + 3, eller ved å addere 2 tre ganger, 2 + 2 + 2. Imidlertid kan det bli tidkrevende å legge sammen samme tall mange ganger når tallene blir store, for eksempel 123×321 kan ta ganske lang tid ved bruk av addisjonsmetoden (eller gjentatt addisjon).

Den kinesiske metoden er også basert på addisjon, men den innebærer systematisk telling og addisjon, noe som gjør prosessen mye mindre tidkrevende. Metoden starter med å tegne et rutenett. Radene representerer multiplikand og kolonnene representerer multiplikator. Her er enere, tiere, hundrere osv. atskilt med mellomrom.

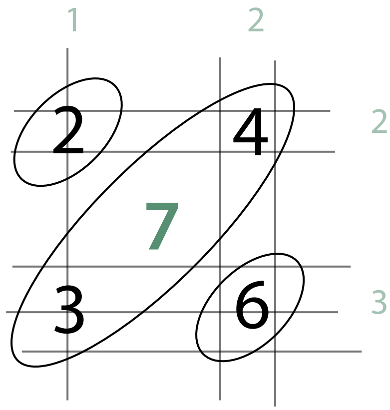
Etter at rutenettet er på plass, blir skjæringspunktene delt inn i forskjellige grupper. Antall skjæringspunkter innenfor disse seksjonene telles så opp, og legges sammen som enere, tiere, hundrere, osv. Eksemplene nedenfor illustrerer metoden.

Eksempler

La oss så si at vi ønsker å regne ut 23×12. Først

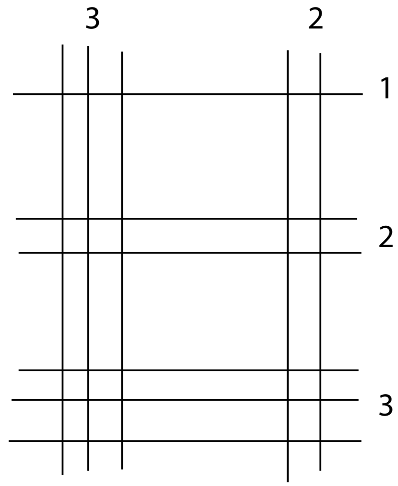


Figur 1 a: «Rutenettet» for 23×12

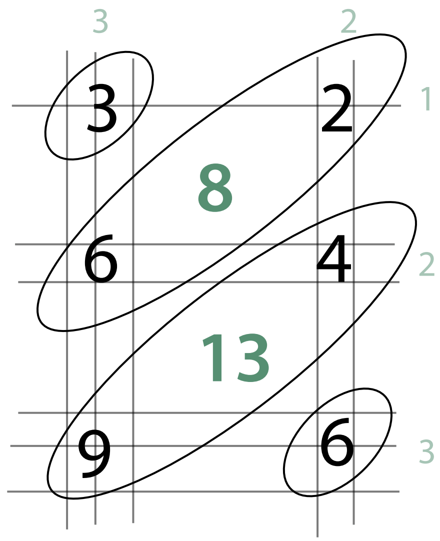


Figur 1 b: 23×12 = 6 enere, 7 tiere og 2 hundrere = 276.

lager vi et rutenett (figur 1 a). Multiplikand 23 har 3 enere og 2 tiere. Først 3 vannrette streker, så to vannrette streker til på toppen og litt plass imellom. Multiplikator 12 har 2 enere og 1 tier. Dvs. 2 loddrette streker og deretter 1 loddrett strek til noe til venstre med litt plass imellom. Nå har vi et rutenett med fire skjæringsfelt. Det nederste feltet til høyre har 6 skjæringspunkter. Dermed skriver vi ned 6 som ener for resultatet vårt (figur 1 b). Nederst til venstre og øverst til høyre «møtes» enere fra den ene faktoren og tierne fra den andre faktoren. Vi har til sammen 7 skjæringspunkter (3 nederst til venstre og 4 øverst til høyre). Dermed skriver vi 7 på tierplassen av resultatet. I øverste hjørne til venstre «møtes» tierne fra hver av faktorene. Her har vi 2 skjæringspunkter, og vi skriver ned 2 på hundrerplassen i resultatet. Sluttresultat blir



Figur 2 a: «Rutenettet» for 123×32



Figur 2 b: 123×32 = 6 enere, 13 tiere, 8 hundrere og 3 tusener = 3936.

derfor 23×12 = 276.

Vi prøver oss nå på enda større tall. Hvis vi ønsker å regne ut 123×32, lager vi et rutenett som i figur 2 a. Her har vi 6 skjæringsfelt. Vi grupperer feltene sammen slik at de tilsvarer enerne, tierne og hundrerne som vist i figur 2b. Vi teller skjæringspunkter og får 6 enere og 13 tiere. Det betyr at vi beholder 3 på tierplassen i resultatet og overfører 1 hundrer til neste posisjon. Dermed blir det 9 hundrere (8 skjæringspunkt pluss en i mente). Til slutt får vi 3 på tusenplassen, og resultatet blir $123 \times 32 = 3936$.

Diskusjon

Tenker vi oss eksempler med større siffer, f.eks. 56×79, ser vi fort at metoden har sine begrensninger. Den krever at man må tegne mange linjer, gjøre de rette plasseringene og være nøyaktig med opptellingen. Hvis sifrene i multiplikand og multiplikator er høye, vil nettet bli mer uoversiktlig, særlig når en skal følge diagonalretningen for å få mellomresultatene. Imidlertid er metoden ganske effektiv når antall siffer i multiplikator og multiplikand ikke er så store, og sifrene selv ikke er så veldig høye. Metoden kan også brukes for å multiplisere desimaltall. Da kan man multiplisere opp tallstørrelsene uten å måtte tenke på komma, og deretter «telle antall desimaler» for å plassere komma på riktig sted.

På grunn av sine begrensninger vil metoden kanskje ikke erstatte arbeid med standardalgoritmen eller andre algoritmer, men den kan fungere som en illustrasjon av standardalgoritmen, der det kan være lettere å sette fingeren på de enkelte mellomresultatenes betydning. – Her har vi ganget ener med ener. Der ganget vi tier med hundrer og her hundrer med tier. Slik vil denne metoden tross sine begrensninger kunne være et kanskje litt overraskende supplement til undervisningen. I kompetansemålene fra læreplanen for sjuende årstrinn kan man blant annet lese følgende: «Elevene skal utvikle og bruke metodar for hovudrekning, overslagsrekning og skriftleg rekning, og bruke lommereknar i berekningar,» og «Elevene skal stille opp og forklare berekningar og framgangsmåtar, og argumentere for løysingsmetodar.»

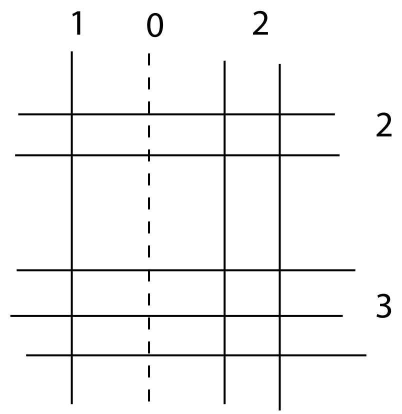
Med denne metoden kan elevene gjøre skriftlig multiplikasjon selv om de ikke kan gangetabellen eller bruker kalkulator. Å involvere elevene i forklaringen om hvorfor den kinesiske metoden virker, kan også hjelpe dem med å forstå vår egen algoritme og dermed utvikle et rikere multiplikasjonsbegrep.

I TANGENTEN 1 (2001) presenterte Richard Harvey artikkelen «Klar ferdig gå, 13 måter å gange på». Her ser vi altså en metode nr. 14. Fleksible tilganger til matematiske begreper kan ofte være en fordel når elevene ønsker å bygge solide kunnskaper.

Utfordring

Hvordan går vi frem når null er et av sifrene i en av faktorene?

Se på eksempelet 102×23. Vi brukte en stiplet linje for sifferet null da vi laget rutenettet (Figur 3). Hvordan skal vi telle skjæringspunktene?



Figur 3: 102×32.

Jeg vil gjerne takke Håvard Sethre og Jon Helge Knudsen for hjelpen med denne artikkelen.

Stig Eriksen

Trigonometriske funksjoner

David Tall (1989) beskriver hvordan et dataprogram kan hjelpe elever å danne en «generic organizer» ved å manipulere eksempler og moteksempler som kan ligge som et grunnlag når det senere skal arbeides med de mer formelle strukturene av matematikken. «Generic» kan bety at man er i slekt med, eller at noe er felles. Undervisningsopplegget jeg beskriver gir elevene eksempler som hører sammen med de trigonometriske funksjonene elevene skal studere i ettertid. Opplegget som presenteres er gjennomført på første år i videregående skole, men kan godt brukes i ungdomsskolen for elever som er klar for ekstra utfordringer.

Mye av matematikken på første år i videregående skole er en videreføring av matematikken på ungdomsskolen. Elevene møter emner som funksjoner, likninger, algebra og sannsynlighet som de skal kjenne til fra før. Blant de helt nye ordene for de fleste elevene er *sinus*, *cosinus* og *tangens*, og de færreste elever kjenner til hvordan disse trigonometriske funksjonene kan brukes til å gjøre beregninger i rettvinklede trekanter. Når elevene i min klasse skulle møte disse ordene for første gang, var det en god anledning til å søke større innsikt i prosessen der elevene utviklet mening til ordene. I følge Wenger (1998) tillegger vi mening til ord gjennom deltakelse og samarbeid med noe utenfor oss selv, samtidig som vi gjennom en konkretisering gjør ordet til et redskap for tenkningen vår. Dette er en del av en sosial læringsteori der læring ved å identifisere seg med rollemodeller har større vekt enn i kognitiv og konstruktivistisk teori.

For å få tilgang til elevenes samarbeid med hverandre og med datamaskinen, laget jeg et opplegg med et arbeidsark og bruk av programmet GeoGebra der det passet å ha to og to elever sammen ved en datamaskin. Jeg er vant til å bruke video fra forskningsprosjekt ved Universitet i Agder, og jeg så muligheten til å inspirere elevene ved å vise min interesse for deres læring. I ettertid har det også vist seg at datamaterialet har vært nyttig for meg på konferanser og i denne artikkelen. I starten av timene spurte jeg om noen ville hjelpe meg med undersøkelsen min, og to jenter svarte ja. Jentene var to arbeidsomme jenter som begge fikk karakteren 3 ved slutten av året, og som året etter valgte matematikk S1 som programfag. Et filmkamera ble plassert bak elevene og filmet PC-skjermen over skuldrene deres. Det ble også brukt en ekstern mikrofon som jeg plasserte ved elevenes datamaskin. Jeg kunne da gjøre lydopptak av dialogen deres samtidig som jeg filmet det de gjorde på skjermen. Jentene har jeg her kalt Heidi og Kari.

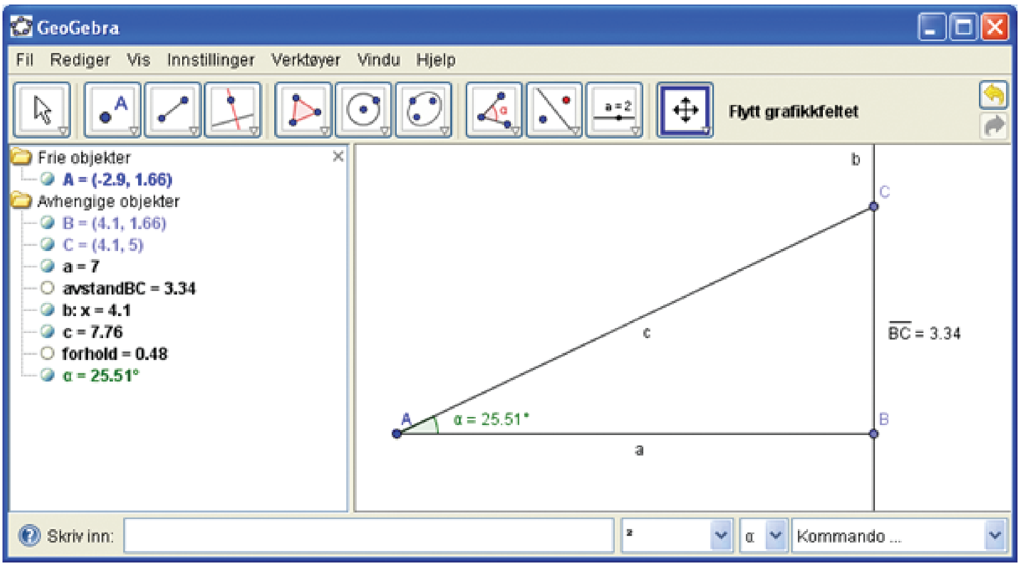
Stig Eriksen
Dahlske videregående skole
Stig.Eriksen@dahlske.vgs.no

Arbeid du skal gjøre	Funksjoner i GeoGebra
Tilpass arbeidsflaten ved å skjule aksene.	Fjern haken ved «Akser» i Vis-menyen
Start med en grunnlinje på 7 cm.	Linjestykke med fast lengde
Vinkel *B* skal være 90 grader.	Normal
Tegn punkt *C*. Kontroller at lengden *BC* kan varieres.	Punkt
Mål *BC*.	Avstand eller lengde
Regn ut forholdet mellom motstående katet og hosliggende katet.	Skriv: forhold=avstand*BC*/a i inntastingsfeltet nederst (sjekk at *AB* har fått navnet a først)
Mål vinkel *A*.	Vinkel

Figur 1

Figur 1 viser et utdrag av arbeidsarket. Hvis du ønsker å gjøre oppgaven selv, men ikke har programmet, gå til til www.geogebra.no, klikk på «Download» og deretter på «Webstart». Programmet er gratis.

Figur 2 viser hvordan skjermbildet ser ut etter å ha gjennomført instruksjonene i figur 1. Arbeidsarket ber deretter elevene om å lage tabeller med vinkler og forholdstall. Etterpå gjentas prosedyren med å tegne en trekant der

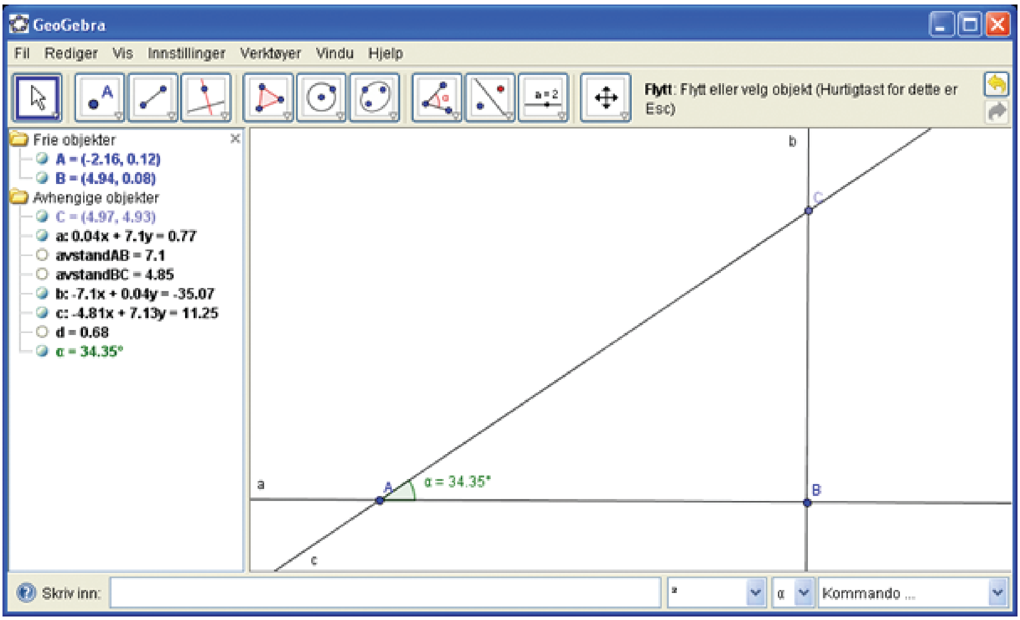


Figur 2

både *AB* og *BC* kan varieres. Arbeidsarket var ikke tenkt på som et selvinstruerende opplegg uavhengig av læreren. Mange av elevene mine trengte veiledning underveis og brukte begge skoletimene som var avsatt til dette. For meg var det et poeng å komme fram til at elevene testet de trigonometriske funksjonene på lommeregneren for å sammenlikne med tabellene de produserte. For en klasse uten klart definerte læreplanmål om dette, kunne opplegget avrundes med litt historikk omkring skyggetabeller (se lenka på arbeidsarket). Arbeidsarket i sin helhet finnes på den såkalte GeoGebra wikien som du finner ved å gå til www.geogebra.no og klikke deg gjennom «Undervisningsopplegg», «Videregående skole» og «Vg1T og Vg2T». Dersom du leser denne artikkelen elektronisk så kan du klikke på www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Arbeidsark_om_trigonometriske_tabeller for å komme dit direkte.

Videoen jeg tok av elevenes effektive arbeidstid, var på litt over 60 minutter. Før dette hadde jeg brukt tavla til å forklare hva som mentes med navnene motstående og hosliggende katet. For de to elevene jeg filmet var tidsbruken de første 50 minuttene omtrent slik.

– 10 minutter til å konstruere den første trekanten med fast lengde på *AB*.
– 10 minutter til å lage en tom tabell i Excel. I Excel prøvde de å bruke menyvalget «Sett inn tabell» om kom dermed opp i litt problemer.
– 5 minutter til å fylle tall i tabellen.
– 5 minutter på å finne ut hvordan de skal gjøre *AB* med fast lengde om til variabel lengde, før de innser at de må begynne helt på nytt. Om dette kunne nok arbeidsarket være tydeligere.
– 10 minutter til å tegne en trekant hvor alle lengdene kunne endres. Jentene var litt nølende i starten her. «Jeg kan bevege på hele linja,» sa den ene. Videoen viser at de ønsket en linje som lå fast horisontalt, men i GeoGebra kan slikt roteres. De geometriske egenskapene blir likevel beholdt når verktøyet «Normal» brukes i konstruksjonen, men det virket som om jentene ikke var vant med å behandle geometriske figurer slik.
– 5 minutter på å lage en ny tabell.



Figur 3: Rekonstruksjon av jentenes konstruksjon.

Etter 45 minutter ber jentene om hjelp til å regne ut forholdstallet. De gjorde dette for den første trekanten, men nå uten konkrete instrukser for hva de skal skrive inn i programmet er de litt usikre på hva de skal gjøre. Jeg hjelper dem med å bruke kommandoene Avstand[A,B] og Avstand[B,C] for å finne lengden på katetene for deretter å forklare at man kan finne forholdstallet ved å regne med disse størrelsene. Heidi som er den mest aktive av jentene i denne episoden, skriver inn avstandAB/avstandBC og finner forholdstallet som får navnet d slik som i algebrafeltet i figur 3.

Jeg sier så at de kan flytte på punkt A og se hva som skjer med forholdstallet, men det som skjer med denne konstruksjonen er at når punkt A flyttes mot høyre så blir avstanden mellom B og C mindre slik at vinkelen og forholdstallet er uforandret. Alle tre følger med på skjermen når Kari drar punkt A mot høyre.

I transkripsjonen under antyder … at en setning ikke fullføres eller at det er en kort pause i dialogen. Hele episoden varer i 2 minutter og 15 sekunder.

Kari: Men … men (lavt).
Heidi: Får ikke …
Lærer: Ja hva var det? Det var litt rart.
Kari: Får bare eeeh … 30,01 grader?
Lærer: Ja, fikk (sier noe ikke hørbart – peker på vinkel A).

Nå går det 14 sekunder hvor filmen viser at Kari flytter punkt A både mot høyre og venstre og opp og ned. Vinkelen og forholdstallet er uforandret hele tiden. Ingen sier noe.

Lærer: Ja, hva er det som skjer der. Hva var det du venta at skulle skje egentlig?
Kari: Jeg vet ikke. Jeg vet ikke i det hele tatt.
Lærer: Jo jeg tror du vet det, du bare vil ikke si det.
Kari: Nei, jeg vet det faktisk ikke. (Alle ler.)
Lærer: Hva var det som var overraskende da? Dere virka litt sånn … overraska over noe.
Heidi: Hva som var overraskende?
Kari: At det blir 30,01 grader uansett. Er det det som er viktig, eller er det? Jeg vet ikke.
Heidi: Men det er jo det vi har, men vi skal jo komme fram til et tall. Skal vi ikke det da?
Lærer: Jo det forholdstallet. Det står jo der. Det er den d (peker på tallet d i algebrafeltet).
Heidi: Ja, null komma (sier noe ikke hørbart som kommer samtidig med neste)
Lærer: Hva er det … hva er det tallet da?
Heidi: Er det det samme tallet hele tiden? Prøv å flytte litt sånn på den. Eller … står den der hele tiden?
Lærer: Ja, hva kan det være?
Heidi: For det der (peker på skjermen) er samme vinkel?
Kari: Ja (høyt) sånn der (sier noe ikke hørbart).
Lærer: Men prøv å flytt den der da se om det … (peker på punkt C).
Heidi: Men da synker jo gradene. (Heidi peker på skjermen og sier dette før Kari drar i punkt C slik at gradetallet endres.)
Lærer: Ja skjer det noen med det tallet der da?
Begge jentene: Ja.
Heidi: Så så lenge vinklene er like lange … så har ikke lengdene noe å si på en måte for eh …
Lærer: Ja, jeg tror du tenker veldig riktig der. Men jeg vet, tror kanskje du sa det litt …
Heidi: Ok.
Lærer: Annerledes enn jeg ville sagt det. Så lenge … du begynte med: så lenge vinkelen er det samme. Var det det du?
Heidi: Ja, vinklene er de samme. Så blir på en måte BC delt på AB det samme tallet? Uansett lengde.
Lærer: Ja.
Heidi: På AB og BC.
Lærer: Det var akkurat det jeg ville … Det

Vinkel	Motstående katet delt på hosliggende	Motstående katet delt på hypotenus	Hosliggende katet delt på hypotenus
20°			
30°			

Tabell 1

var akkurat det som var spørsmålet her (rasling i papir høres på videoen – sannsynligvis når jeg peker på oppgavearket). Selv om dere ikke har laget tabellen ennå så har dere oppdaget det som står her.

Heidi: Ja.

Lærer: Hva oppdaget dere?

Heidi: At *BC* delt på *AB* er det samme tallet så lenge vinklene er like store.

Jentene går deretter i gang med å fylle inn vinkler og forholdstall i Excel.

Denne episoden er nok ikke helt utypisk for norsk matematikkundervisning. Episoden kan nok i alle fall illustrere noe som ofte skjer i mitt klasserom når jeg beveger meg bort fra oppgaveregning i boka. Vi ser at jentene strever både litt med matematikken og litt med å finne ut hva læreren egentlig vil med dette. Læreren prøver å lede elvene fram til svaret uten å gi elevene for mye hjelp, slik at de må tenke selv. Med læreren til stede formulerer tilslutt elevene det læreren ønsker på en matematisk måte.

Episoden som er tatt fra siste del av jentenes samarbeid viser at de i samarbeid med læreren og datamaskinen formulerer at det er en direkte sammenheng mellom vinkelen i rettvinklede trekanter og forhold i trekanten. I forhold til disse elvenes læreplan gjenstår det da å knytte dette til de trigonometriske funksjonene. I dette klasserommet ba jeg først elevene om å fylle ut en tabell slik som tabell 1 før jeg forklarte hvilke knapper på kalkulatoren som «oversatte» fram og tilbake mellom forholdstall og vinkler.

Noen av elevene, slik som jentene jeg filmet, gikk da i gang med å lage nye forholdstall til akkurat de vinklene jeg hadde skrevet opp. Andre elever brukte sine egne vinkler og det fungerte jo like bra. Disse elevene som sa at det var det samme hvilke vinkler de brukte, hadde muligens kommet lenger i koblingen mellom vinkler og forholdstall.

Med utgangspunkt i programvaren og hvordan denne fungerte til dette arbeidet, er det spesielt interessant hvordan Heidi kom fram til den riktige konklusjonen her uten å fylle ut tabellen med vinkler og forholdstall. Min tanke bak opplegget – å utarbeide tabeller med mange eksempler som en «generic organizer» før de matematiske funksjonene presenteres – tok kanskje ikke hensyn til mulighetene med dynamisk geometri. Å kunne dra i punkt *A* slik at forholdstall og vinkler endrer seg samtidig, er i seg selv å se (uendelig) mange eksempler. Uten å skrive tallene inn i en tabell kom jentene fram til den sammenhengen jeg ønsket, før innføring av sinus, cosinus og tangens. Det er likevel vanskelig å konkludere at utfylling av tabellene ikke er viktig. Tabellene gir en systematisk registrering av hva som skjer når det «dras» i GeoGebra slik at man kan se tilbake på hva som er gjort. Muligens hadde jentene nytte av den første tabellen de fylte ut til den første trekanten med fast lengde på *AB* når de trakk konklusjonen sin til den andre trekanten? I alle tilfeller virker det betydningsfullt at elevene fikk prøve å dra i trekantene for å se samvariasjonen mellom vinkler og forholdstall «på direkten». Denne visualiseringen ser derfor ut til å støtte elevenes meningsdannelse om trigonometri.

Med nye elever hvert år i videregående skole føles det ofte travelt å skulle etablere en klassekultur som inspirerer elevene til undring og

(fortsettes side 23)

Kjetil Idås

Digitale verktøy

Bedre kvalitet og høyere motivasjon?

Etter fem år med aktiv bruk av digitale verktøy (CAS-software, LMS, Smartboard, ebøker, Mathtv.com) i den videregående skolen, tilhører jeg dem som opplever betydelig *bedre resultater* og *økt interesse* for matematikkfaget. Elevene presterer godt over landssnittet. Er vi på sporet av en resultateffekt basert på en god digital arbeidsform?

Bruk av IKT i forhold til læringseffekt

Etter å ha holdt mange kurs og foredrag om mine erfaringer både i Norge, Sverige, Finland og USA, forundrer det meg at diskusjonen jeg møter om IKT i matematikkfaget primært er knyttet til IKT som «kalkulatorerstatter». De fleste fylkene har nå en god IKT-infrastruktur og det bør derfor være mulig å få resultater som effektivitet, kvalitet og motivasjon i matematikkfaget.

Min erfaring er at den digitale arbeidsformen fører til resultatforbedringen. Det vil si at vi skriver matematikk digitalt i de temaene det er hensiktsmessig for å kunne dele informasjon, gi raskere tilbakemelding, forbedre notasjonskvaliteten og dermed få større aktivitet i læringssituasjonen. Jeg mener det er her vi kan ta ut effekten av IKT. Som på andre områder i samfunnet handler implementering av software om å effektivisere, forbedre og forsterke prosesser som fører til bedre resultater. Jeg mener det derfor er interessant å se litt på hvilke aksepterte læringseffekter vi kan forbedre med IKT i matematikk, og om det kan være med på å forklare de gode resulatene.

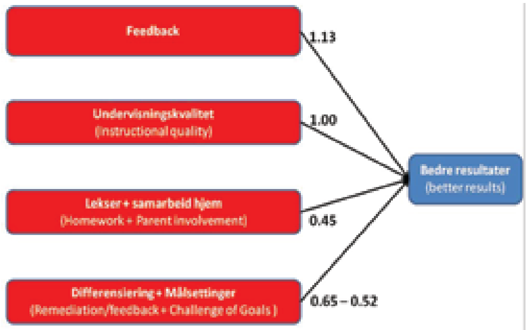
John Hatties (1999) studie om læringseffekt er basert på 52 627 undersøkelser med totalt 83 millioner respondenter og regnes som valid. Av hans 117 identifiserte læringseffektparametre er det spesielt interessant å se nærmere på:

- Feedback
- Undervisningskvalitet
- Differensiering og målstyring
- Lekser og trening

De siste årene har jeg arbeidet med å undersøke om disse faktorene kan effektiviseres, forsterkes og forbedres med bruk av en god infrastruktur og gjennomtenkt metodikk. Min infrastruktur består av bærbare PC-er, itslearning, TI-nspire og Smartboard. Jeg har også testet ut bruk av ebøker og «digitale lærere» som Mathtv.com og Cahn.com.

For å vurdere den digitale arbeidsformen bruker jeg læringsparametrene i figur 1.

Kjetil Idås
Horten videregående skole
www.kjetili@wordpress.com



Figur 1: Korrelasjonen mellom effektparametere og læringseffekt – jfr. Hattie (2009).

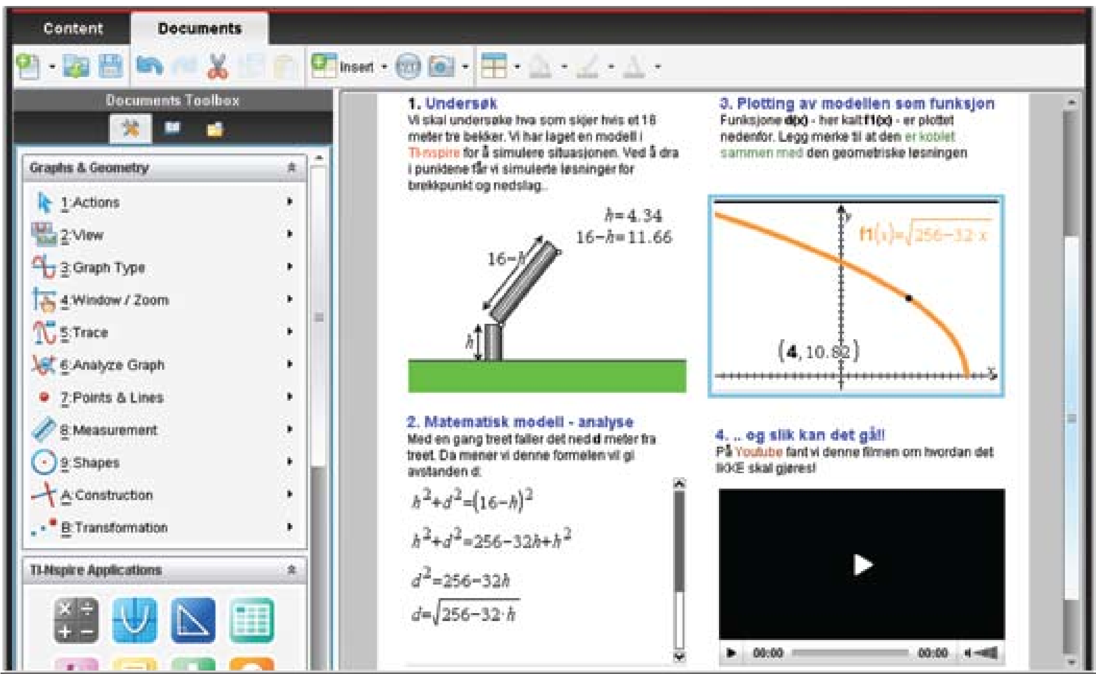
Den digitale arbeidsformen

Mine viktigste verktøy for å få til positive læringseffekter ved hjelp av IKT, er itslearning og TI-nspire. itslearning bruker jeg til å effektivisere, differensiere, informere og kommunisere. TI-nspire brukes for å skrive matematikk digitalt, som kalkulator og grafplotter som vist i figur 2. For meg er TI-nspire like sentralt i faget som Microsoft Word for norsklæreren. Ved å bruke disse programmene, som elevene lærer på svært kort tid, har vi allerede oppnådd en betydelig kvalitets- og effektiviseringsgevinst.

I praksis jobber jeg slik at klassen er inndelt i homogene grupper på itslearning. Før timen mottar elevene differensiert opplegg. De kommer raskt i gang og jobber på et nivå som passer dem. I de temaene vi bruker TI-nspire, sender elevene alltid inn TI-nspire-fila på itslearning. I TI-nspire løser elevene alle oppgavene fra et kapittel i samme fil. Dermed har jeg hele tiden tilgang til elevens «kladdebok», slik at jeg til enhver tid kan gi feedback og veiledning. Da får de også feedback på hva de må arbeide med for å nå egen målsetting. Kan effektiv differensiering og lettere tilgang til elevenes arbeid være forklaringen på bedre resultater? Eller kan det være at elevens oppfattelse av bedre struktur og notasjon på produsert fagstoff gir økt motivasjon og bedre forhold til faget?

Målstyring og feedback

Ut fra samtaler med elevene kjenner jeg elevenes faglige målsettinger. All feedback er rettet mot



Figur 2: Eksempel på hvordan elevene leverer oppgaver digitalt i TI-Nspire *CAS* software 3.0.

målsettingen som både bevisstgjør elevens nånivå og skaper en resultatforeventning. Siden elevene hyppig leverer inn sitt arbeid digitalt, er det både raskt og enkelt å gi tilbakemelding. Sammenliknet med tradisjonell undervisning, opplever jeg at det er enkelt å øke antall veiledninger.

Med denne arbeidsmåten bestemmer jeg også når og hvem som skal veiledes. Ved hyppig kommunikasjon med elevene får jeg også mye feedback på min undervisning. Det gjør at jeg kan korrigere undervisningen og fange opp signaler fra elever som normalt er stille i timen.

Høyere motivasjon?

Ved sensurering og gjennomgang av elevenes kladdebøker er det nok flere enn meg som blir negativt overrasket over føring og grafplotting. Arbeidene representerer ikke den kvaliteten vi bør forvente i 2011. Jeg opplever at spesielt svake elever får bedre motivasjon i faget når det de presterer blir levert digitalt. Gjennom denne arbeidsformen mener jeg det også blir bedre struktur, og at elevene får bedre oversikt over fagstoffet.

Jeg opplever også at motivasjon er avhengig av om oppgavene er relevante i forhold til elevenes hverdag. Oppgaver med Ola Normann og Kari Åsen har gått ut på dato. Ved å koble matematikken mot reelle situasjoner elevene kjenner til, for eksempel nyhetsbildet på Internett, kan ny aktualitet skapes i faget. Å hente verdensrankingen i friidrett på 100 m på Internett med kjente navn, bilder og masse data kan oppleves som mye mer motiverende enn å arbeide med Per Rekrutt. Kan denne type aktualitet bidra til å bedre resultatene hos elevene?

Bedre resultater

Norske elever har over tid prestert vesentlig svakere enn ønsket i matematikk. Jeg mener vi faglærere må ta en vesentlig del at ansvaret for dette. Vi må lete etter et annet treningsopplegg for elevene – vi må bruke en annen metodikk. Dagens 17–19-åringer tilhører generasjon y og har andre forventninger til vår visuelle frem–stillingsform.

Mitt datamateriale er ikke stort, og kan angripes fra mange hold. Jeg stiller i artikkelen flere spørsmål som foreløpig ikke har klare svar. Imidlertid har våre resultater de siste årene blitt så gode i forhold til landssnittet i 1T, 1P og 2P at arbeidsformen må studeres. Både John Hattie på New Zealand og Thomas Nordahl her i Norge viser interesse for arbeidet. Vi arbeider med å sette i gang et forskningsprosjekt i samarbeid med Universitet i Oslo, forhåpentligvis med oppstart høsten 2011. Ønsker du å følge årets prosjekt i 2P, kan du følge med på www.kjetili.wordpress.com

Referanser

Hattie, J. (2009). *Visible Learning: A Synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement.* Oxford: Routledge.

(fortsatt fra side 20)

utforsking. En slik kultur fordrer bevisste valg hos læreren der læreren fremstår som rollemodell, deltar aktivt i utforskende samtaler med elevene og tilrettelegger for utforskende læringsaktiviteter. GeoGebra er et program hvor elevene må gjøre egne valg, og sammen med den åpne oppgaven om forholdstall la dette et grunnlag for undring og utforskning hvor elevene fant sine egne løsningsmetoder. Dette var et lite steg mot en ønsket klassekultur. I tillegg tror jeg at jeg kan være en rollemodell og inspirator for elevenes utforsking og undring ved at jeg selv utforsker matematikklæringen deres.

Referanser

Tall, D. (1989). Concept Images, Generic Organizers, Computers and Curriculum Change. *For the learning of Mathematics*, *9*(3), 37–42.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gert M. Hana

Definisjoner av gjennomsnitt

Et begrep som *gjennomsnitt* kan beskrives på flere måter. Undervisning av dette begrepet innebærer å velge beskrivelser – definisjoner – som egner seg i den aktuelle konteksten. Ofte må en velge en definisjon som passer til den problemstillingen en står overfor. Et mål for matematikkundervisning bør være elever som greier å bruke og velge definisjoner på en hensiktsmessig måte. I denne artikkelen vil jeg se på forskjellige definisjoner av gjennomsnitt. Disse definisjonene representerer tre forskjellige måter å tenke gjennomsnitt: gjennomsnitt som fordeling, balanse og utjevning. Alle disse måtene å tenke gjennomsnitt på er nyttige og hører hjemme i undervisningen om gjennomsnitt. Artikkelen inneholder også samtaleutdrag fra lærerstudenter omkring to undervisningsøkter i deres praksis hvor gjennomsnitt var tema. Disse utdragene illustrerer hvordan kommunikasjon om definisjoner kan ha betydning for undervisningen og potensialet som ligger i innsikt om definisjoner og deres roller.

Denne artikkelen kan leses på to forskjellige måter. I seg selv er dette en artikkel om gjennomsnittsbegrepet, og kan leses som en uavhengig artikkel om nettopp gjennomsnittsbegrepet.

Gert M. Hana
Høgskolen i Bergen
Gert.M.Hana@hib.no

Den kan derimot også leses som en artikkel om bruk og valg av definisjoner i matematikken, og er skrevet som en fortsettelse til Hana (2011). Den artikkelen beskrev en klassifisering av rollene til definisjoner i hovedkategoriene økonomiske, logiske og strukturelle roller. Den foreliggende artikkelen om gjennomsnittsbegrepet er ment som en eksemplifisering av idéene beskrevet der.

Definisjoner av gjennomsnitt

Det finnes mange måter å definere gjennomsnitt på. Definisjoner av et ord eller uttrykk er *ekvivalente* dersom det som defineres får akkurat samme betydning ved de forskjellige definisjonene. At definisjoner bestemmer ekstensjonen, utstrekningen til et begrep, er en del av den logiske rollen til definisjoner som beskrevet i Hana (2011).

Når to definisjoner er ekvivalente kan vi veksle mellom dem og bruke den som er mest hensiktsmessig i den situasjonen vi befinner oss i. At definisjoner er ekvivalente er ikke alltid like enkelt, og det kreves alltid argumentasjon for å vise at det er slik. Nedenfor blir det gitt ti ekvivalente definisjoner av gjennomsnitt, *G*1 til *G*10.[1] Disse er gruppert inn etter tre forskjellige måter å tenke gjennomsnitt – gjennomsnitt som fordeling, balanse og utjevning – som gir forskjellige definisjoner av gjennomsnitt.

Gjennomsnitt som fordeling

Gjennomsnitt som fordeling er den modellen for gjennomsnitt som er mest brukt i norsk skole. Den er gjengitt i alle lærebøker. Spør man en tilfeldig norsk person om gjennomsnitt, er det sannsynlig at en får en beskrivelse i tråd med «legg sammen alle tallene og del på antallet.»

Definisjonene $G1$, $G2$ og $G3$, gitt under, er ekvivalente. Det er akkurat samme utregningsprosedyre som blir beskrevet i dem. Dersom vi har en samling tall, vil definisjonene gi det samme tallet som gjennomsnitt.

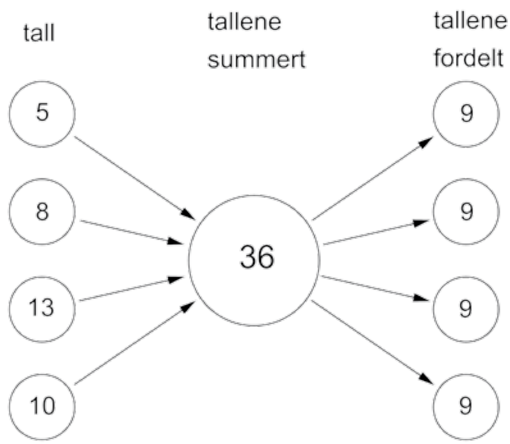
$G1$: Gitt en samling tall med størrelse n. Legg sammen alle tallene og fordel summen utover slik at en får n like store tall. Størrelsen på disse like store tallene er gjennomsnittet.

$G2$: Gitt en samling tall, så finner man gjennomsnittet ved å legge sammen tallene og dele på antall tall.

$G3$: Gitt en samling tall $x_1, x_2, \ldots, x_n$, så er gjennomsnittet av disse tallene

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Selv om disse definisjonene er ekvivalente, er det klare forskjeller mellom dem. Definisjon $G2$ og $G3$ er mest like, men språkbruken er forskjellig. Definisjon $G3$ benytter en algebraisk språkdrakt, mens $G2$ er rent verbal uten bruk av matematiske symboler. Definisjon $G1$ beskriver akkurat samme utregningsprosedyre som $G2$ og $G3$, men den beskriver den på en slik måte at problemstillingen hvor gjennomsnittet blir brukt er tydelig. Dette kommer også til syne i visualiseringen av $G1$ som er gitt i figur 1. Visualiseringen kan ses som en definisjon i seg selv. I enkelte sammenhenger, spesielt i skolematematikken, kan visuelle definisjoner være hensiktsmessige.



Figur 1: Visualisering av gjennomsnitt som fordeling.

Gjennomsnitt som balanse

De seks definisjonene $G4$-$G9$ under er alle ekvivalente, og ser på gjennomsnitt som balanse. Dette er nok uvant for noen, men disse definisjonene er ekvivalente med $G1$-$G3$ ovenfor selv om de gir en helt annen måte å tenke gjennomsnitt på. Denne måten å betrakte gjennomsnitt på er relatert til balansepunktet til en vektstang.

$G4$: Gitt en samling tall, fordel disse tallene på tallinjen. Balansepunktet for tallinjen er gjennomsnittet til tallene.

$G5$: Gitt en samling tall. Gjennomsnittet er da et tall $\bar{x}$ slik at den samlede avstanden fra $\bar{x}$ til tallene i samlingen som er mindre enn $\bar{x}$ er lik den samlede avstanden fra $\bar{x}$ til tallene i samlingen som er større enn $\bar{x}$.

$G6$: Gitt en samling tall. Gjennomsnittet er da et tall $\bar{x}$ slik at den samlede avstanden regnet med fortegn fra $\bar{x}$ til tallene i samlingen er null.

$G7$: Gitt en samling tall $x_1, x_2, \ldots, x_n$, så er gjennomsnittet til tallene tallet $\bar{x}$ slik at

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x}) = 0.$$

$G8$: Gitt en samling tall $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i stigende rekkefølge, så er gjennomsnittet til tallene et tall $\bar{x}$ slik at $x_i \le \bar{x} \le x_{i+1}$ for et tall i og

$$(\bar{x} - x_1) + (\bar{x} - x_2) + \cdots + (\bar{x} - x_i) =$$
$$(x_{i+1} - \bar{x}) + (x_{i+2} - \bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x}).$$

$G9$: Gitt en samling tall $x_1, x_2, \ldots, x_n$, så er gjennomsnittet til tallene tallet $\bar{x}$ slik at

$$\sum_{x_i \le \overline{x}} (\overline{x} - x_i) = \sum_{x_i \ge \overline{x}} (\overline{x} - x_i).$$

En prosedyre for å finne gjennomsnittet er ikke like tydelig i *G*4–*G*9 som for *G*1–*G*3. Definisjon *G*4–*G*9 gir en metode for å finne ut om et tall $\overline{x}$ *er* gjennomsnittet for en samling tall x_1, x_2, …, x_n, men ikke til å finne dette tallet. Dette peker mot at definisjonene kan ha forskjellig funksjon. Definisjonene *G*2–*G*3 er nyttige for utregning av gjennomsnitt, mens definisjonene *G*4–*G*9 er nyttige for å sjekke om et tall er gjennomsnittet.

Definisjonene *G*4–*G*9 er som sagt ekvivalente. Forskjellen på *G*4 og *G*5 er at i *G*5 er det satt inn en matematisk beskrivelse av hva det vil si at et tall er et balansepunkt. Ved å bruke en definisjon av balansepunkt i definisjonen av gjennomsnitt, fremkommer det en annen definisjon av gjennomsnitt. Matematisk sett er disse definisjonene ekvivalente, men for en person som ikke har erfaringer med balansepunkt kan definisjonene oppfattes forskjellig og definisjon *G*4 vil være mer visuell. Sammenhengen mellom *G*4 og *G*6 er likedan. Sammenhengen mellom *G*5–*G*6 og *G*7–*G*9 er som sammenhengen mellom *G*2 og *G*3. Det blir brukt forskjellige matematiske uttrykksformer for å beskrive det samme. At *G*7–*G*9 er ekvivalente følger fra algebraisk manipulasjon av likningene. Definisjon *G*9 er en mer kompakt formulering av *G*8, men ukjent notasjon kan gjøre *G*9 uhensiktsmessig i grunnskolen.

Det er et poeng her som er verdt å merke seg. Jeg har formulert *G*6 og *G*9 med «tallet $\overline{x}$», mens *G*5, *G*7 og *G*8 benyttet formuleringen «et tall $\overline{x}$». Slike lingvistiske forskjeller har betydning matematisk sett. Strengt tatt, for å vise ekvivalens av definisjonene, trengs det også å vises at det i alle definisjonene *G*5 til *G*9 finnes akkurat ett (1) tall · som oppfyller betingelsen i definisjonen.

Det må også argumenteres for at definisjonene *G*1–*G*3 er ekvivalente med definisjonene *G*4–*G*9. Dette kan gjøres på flere måter. En måte er å ta utgangspunkt i *G*3:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \Leftrightarrow n\overline{x} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\overline{x} + \cdots + \overline{x}}_{n \text{ ganger}} - x_1 - x_2 - \cdots - x_n = 0 \Leftrightarrow$$

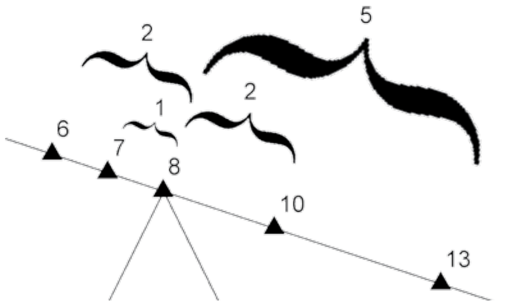
$$(x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + \cdots + (x_n - \overline{x}) = 0$$

La oss bruke gjennomsnitt som balanse til å se på gjennomsnittet til tallene 6, 7, 10 og 13. La oss prøve med 8 som gjennomsnitt. Da får vi (figur 2):

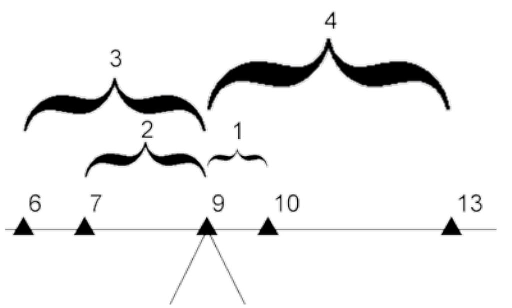
$$(8-6) + (8-7) \overset{?}{=} (10-8) + (13-8)$$
$$2 + 1 < 2 + 5$$

Her blir høyre side av ulikheten størst. For å oppnå balanse må venstre side økes, mens høyre side senkes. Gjennomsnittet er derfor større enn 8. Prøver vi med 9 som gjennomsnitt får vi (figur 3):

$$(9-6) + (9-7) \overset{?}{=} (10-9) + (13-9)$$
$$3 + 2 = 1 + 4$$



Figur 2: Ubalanse: 8 er ikke gjennomsnittet av 6, 7, 10 og 13.



Figur 3: Gjennomsnitt som balanse: 9 er gjennomsnittet av 6, 7, 10 og 13.

Dette betyr at 9 er gjennomsnittet til tallene.

Gjennomsnitt som utjevning

En tredje måte å se på gjennomsnitt er se på det som utjevning.

*G*10: Gitt en samling tall. Det er lov å legge en verdi til et tall, så lenge samme verdi trekkes fra et annet tall. Gjør dette med tallene i samlingen helt til alle tallene er like store. Størrelsen på tallene er da gjennomsnittet.

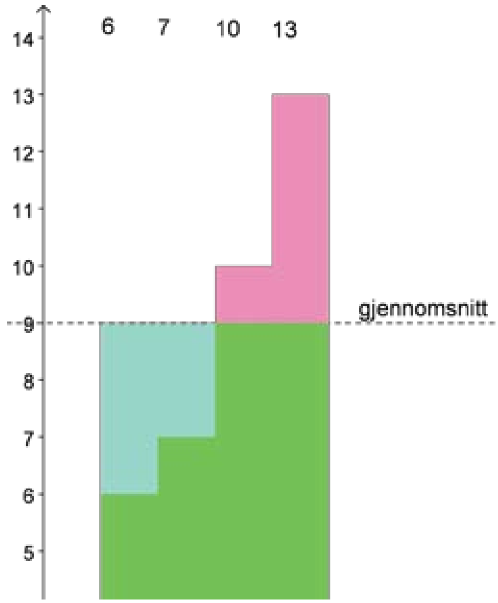
*G*8 og *G*9 kan også tolkes som å tilhøre utjevningsmodellen. Dette er alltid tilfelle ved algebraiske uttrykk. De kan tolkes som å representere forskjellige situasjoner, alt etter hvordan det algebraiske uttrykket tolkes i verbal språkdrakt.

Definisjon *G*10 gir også en prosedyre for å finne gjennomsnittet. Denne prosedyren er (i de fleste tilfeller) mer omstendelig enn den som kommer fra definisjon *G*1–*G*3, men den viser andre sider ved gjennomsnittsbegrepet.

La oss bruke gjennomsnitt som utjevning til å se på gjennomsnittet til tallene 6, 7, 10 og 13. Vi kan forandre tallene på følgende måte:

$$\begin{aligned} 6, 7, 10, 13 &\rightarrow 6 + 3, 7, 10, 13 - 3 \\ 9, 7, 10, 10 &\rightarrow 9, 7 + 2, 10 - 2, 10 \\ 9, 9, 8, 10 &\rightarrow 9, 9, 8 + 1, 10 - 1 \\ &\quad 9,9,9,9 \end{aligned}$$

Dette er bare en av mange måter å forandre tallene på. Se figur 4 for en visuell fremstilling.



Figur 4: Gjennomsnitt som utjevning. Det blå området er lagt til og det røde er trukket i fra. Gjennomsnittet finner en når alle søylene er like lange og de blå og rød områdene er like store.

Hvilken definisjon er best?

Ingen og alle – de forskjellige definisjonene fremhever forskjellige aspekter ved gjennomsnittsbegrepet. I forskjellige situasjoner vil forskjellige definisjoner være hensiktsmessige. Betraktninger over hvilken definisjon som passer best til en bestemt situasjon, er knyttet til den strukturelle rollen til definisjoner.

Dersom en bare tar utgangspunkt i en definisjon som *G*2, vil det å forstå definisjonen lett kunne oppfattes å sammenfalle med å forstå prosedyren beskrevet i definisjonen. Ved å se på andre beskrivelser av gjennomsnittsbegrepet som ikke er like prosedyrefokuserte, er det enklere å få frem at gjennomsnitt handler om mye mer enn bare å kunne regne ut en verdi. De forskjellige definisjonene vektlegger forskjellige strukturer ved gjennomsnittsbegrepet.

Det er hensiktsmessig å ha et ord – gjennomsnitt – for å beskrive lik fordeling, balanse og utjevning. Siden tallet i alle situasjonene blir det samme er det besparende å benytte ett ord. Denne besparelsen blir ikke gjeldende dersom brukeren av ordet gjennomsnitt ikke er klar over at ordet kan beskrives på så kvalitativt forskjellige måter. Ekvivalente definisjoner får på denne måten også en besparende, økonomisk rolle. Å vite at samme ord kan beskrives på flere forskjellige måter med samme betydning, kan gjøre bruken av ordet mer fleksibel og lettere åpne for relevansen til ordet blir tydelig i forskjellige situasjoner.

Det er ikke alle typer problemstillinger som kan besvares like enkelt med alle de alternative definisjonene. Ta en problemstilling som «Sammenlign gjennomsnittet av 7, 8, 9 og 7, 8, 9, 5, 11.» Fra definisjonene *G*3 kan dette besvares ved å sammenligne $(7 + 8 + 9)/3$ og $(7 + 8 + 9 + 5 + 11)/5$. Dette virker vanskelig å gjøre uten å regne ut brøkene. Fra definisjon *G*5 er situasjonen enklere: siden 8 er gjennomsnittet av de tre første tallene og 5 og 11 ligger like langt fra 8, har de to tallsamlingene samme gjennomsnitt. Samme type problemstilling finner en i spørsmålet: «Gjennomsnittet av ti tall er 50. Hva blir gjennomsnittet av disse ti tallene og et annet tall med verdi 50?» Dette spørsmålet kan være problematisk for elever som bare baserer seg på *G*3.

Om definisjonen er hensiktsmessig til utregning av gjennomsnitt beror på hvilke typer utregning det er behov for. Dersom en skal finne gjennomsnittet av hundre tall, er *G*3 effektiv. Dersom en skal finne gjennomsnittet til hundre tall og en allerede kjenner gjennomsnittet til de første nittini, er det gjerne vel så effektivt å se på gjennomsnitt som balanse eller utjevning.

En undervisningssituasjon

Følgende utsagn er fra en lærerstudent som beskriver en skoletime i praksis om sentralmål:

> Så vi begynte med en oppgave der det var snakk om fem gutter som skulle reise på kanotur og de hadde med seg sekker med forskjellige vekter: 13, 15, 15. Og så skulle de finne ut hvordan de ville fordele vektene på likt. Og så hadde vi en liten gjennomgang med hva gjennomsnitt var for noe: at du skal summere og så dele på antall verdier. (Student 1)

Definisjonen som studenten bruker, «summere og så dele på antall verdier,» tilsvarer definisjon *G*2. Her ser vi at selv om definisjon *G*1 kan brukes på konteksten med kanoturen, er det ikke denne som blir brukt. Når studentene skal beskrive «hva gjennomsnitt var for noe,» blir *G*2 benyttet. Definisjon *G*2 har stor innflytelse, selv om læreboka benytter seg av en definisjon som ligger nærmere *G*1. Det å ha et bevist forhold til hvordan en selv definerer et begrep er avgjørende for hvordan en kommuniserer en definisjon med andre. I en utdyping av hvordan elevene reagerte på oppgaven sier samme student:

> Og da [når studenten spurte hvordan kan disse fordeles best mulig] kom det opp begge forklaringene. Det var en som kom frem og sa at han ville ha lagt i sammen alle og så fordelt de utover, mens en annen en ville bare ha tatt fra den største bunken og så tatt [her blir student 1 avbrutt av en annen student].

Student 1 er her klar over at elevene presenterer kvalitativt forskjellige forklaringer for løsningen av oppgaven. De to forklaringene kan knyttes til henholdsvis gjennomsnitt som fordeling og gjennomsnitt som utjevning. Selv om elevene presenterte forklaringer som gir et variert bilde av begrepet gjennomsnitt, så ble det brukt en mye snevrere beskrivelse overfor elevene: «at du skal summere og så dele på antall verdier du har.» Her finnes en mulighet for å la flere forskjellige beskrivelser – til og med beskrivelser som er elevinitierte – av gjennomsnittsbegrepet være tilstede i klassen samtidig. Dette kunne vært med å gi et rikere begrepsbilde av gjennomsnitt. Det ville òg åpnet for å la elevene selv definere gjennomsnitt. Å få erfare at løsningen til et problem kan abstraheres til et begrep gjennom en definisjon, er en rik matematisk erfaring.

I timen dagen etterpå holdt studentene seg til definisjon *G*2, og benyttet ikke fordelingssituasjoner som svarer til *G*1. En annen student begrunnet denne økten slik:

> Og så var det egentlig bare at de [elevene] skulle få det inn i skrivingen og tenkemåten hvordan gjennomsnitt regnes. Så det var

> noe av det som var målet med den økten. At de skulle få regne litt med det. (Student 2)

Definisjon *G*2 blir knyttet til en undervisningsøkt hvor intensjonen var at elevene skulle «få det inn … hvordan gjennomsnitt regnes.» Til dette formålet passer *G*2 ypperlig. Det ser imidlertid ut til at tenkemåten omkring gjennomsnitt også ønskes primært koblet til *G*2:

> Og de som virket å ha litt problemer med [å bruke metoden å fordele likt utover for å regne gjennomsnitt] så er det lettere med den legge sammen og dele på antall observasjoner, vil jeg tro. I hvert fall vil den være den letteste for de fleste etter hvert. (Student 2)

Studenten argumenterer her for *G*2 ut ifra at denne gir den enkleste prosedyren.[2] Her blir den strukturgivende funksjonen til *G*2 sentral: *G*2 viser en struktur som gjør det lett å regne. Et spørsmål blir da hvorvidt *G*2 også gir og bestemmer en rikest struktur på andre måter. Eksempler ellers i artikkelen tyder på at dette ikke nødvendigvis er tilfelle. Her må en lærer se på hvilke sammenhenger elevene senere vil møte gjennomsnittsbegrepet i. Ofte når en møter gjennomsnitt i dagliglivet, er det ferdig utregnet. Det er i hvert fall klart at en lærer må gjøre et bevist valg på hvilke erfaringer det skal legges opp til med et begrep som gjennomsnitt. Forskning peker på at utregningsaspektet blir stående sentralt hos mange elever.[3]

Egenskaper ved gjennomsnitt

I matematikken er aldri definisjonen slutten på historien. Definisjoner brukes til å arbeide videre med matematikken, og til å studere strukturene og egenskapene som er knyttet til begrepet. Strauss & Bichler (1988) lister opp syv egenskaper ved gjennomsnitt som de mener det er sentrale i forståelsen av gjennomsnitt (se figur 5). Disse egenskapene er naturligvis ikke alt elever bør kunne om gjennomsnitt. Det er for eksempel også viktig å

- kjenne til praktiske situasjoner hvor gjennomsnittet dukker opp
- kjenne til sammenhengen mellom gjennomsnitt og andre sentralmål og når hvilket sentralmål er best egnet
- kunne bruke gjennomsnitt til å tolke datasett og kunne forklare variasjoner i gjennomsnitt fra et datasett til et annet.

I matematikk er det slik at et utsagn om et begrep bare regnes som en egenskap til begrepet dersom en kan argumentere for utsagnet ut fra definisjonen. La oss se på egenskap *A*. Denne egenskapen går det an å argumentere for med de forskjellige definisjonene. Fra *G*5 er det enkelt å argumentere for gyldigheten til egenskap *A*: Dersom gjennomsnittet var mindre enn den minste verdien eller større enn den største verdien, så vil en av de samlede avstandene bli null mens den andre er positiv. Dette er umulig ettersom de skal være like. For *G*3 er argumentasjonen noe mindre opplagt (dersom en ikke

A. Gjennomsnittet ligger mellom den største og minste verdien.
B. Summen av avvikene fra gjennomsnittet er null.
C. Gjennomsnittet avhenger av verdier utenom gjennomsnittet.
D. Gjennomsnittet er ikke nødvendigvis lik en av verdiene.
E. Gjennomsnittet kan være en brøk som ikke har en parallell i den reelle situasjonen som verdiene er hentet fra.
F. Når en beregner gjennomsnittet må en ta verdier lik null med i betraktningen.
G. Gjennomsnittet er representativt for de verdiene en finner snittet av.

Figur 5

er vant til å behandle algebraiske uttrykk): La $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være ordnet i stigende rekkefølge. Da er

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\overbrace{x_1 + x_1 + \cdots + x_1}^{n \text{ ganger}}}{n} \\ &\leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \\ &\leq \frac{\overbrace{x_n + x_n + \cdots + x_n}^{n \text{ ganger}}}{n} \leq x_n \end{aligned}$$

For egenskap E derimot er argumentet med *G*3 enklere enn med *G*5.

Det er en god øvelse å argumentere for de forskjellige egenskapene ved hjelp av definisjonene over. Prøv spesielt å argumentere for egenskapene med å bruke *G*1, *G*4 og *G*10, og å relatere egenskapene til reelle data.

Et spørsmål å stille seg er hvorvidt definisjonen omfatter det vi ønsker. Gir gjennomsnittet som definert her svar på de problemstillinger og situasjoner som vi ønsker? Gjennomsnittsbegrepet slik vi vanligvis møter det i grunnskolen er bare en av mange typer gjennomsnitt, og andre sentralmål, som selvvektet og harmonisk gjennomsnitt, er naturlige variasjoner og videreutviklinger av gjennomsnittsbegrepet. Dette vil være tema i en senere artikkel i Tangenten.

Noter

1 Listen er på ingen måte fullstendig. Jeg har konsentrert meg om definisjoner som knytter seg til tre bestemte modeller for gjennomsnitt. Et eksempel på en definisjon som ikke passer inn i noen av disse modellene er: Gjennomsnittet til tallene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er tallet som minimerer uttrykket $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$.

2 Det er interessant at studentene mener at *G*2 er enklest da de ellers i praksissamtalen peker på hvor greit elevene fikk til å lage prosedyrer for utregning av svaret i kanoturoppgaven. Dette på et tidspunkt da ordet gjennomsnitt og definisjon *G*2 ikke var presentert for elevene.

3 Leavy & O'Loughlin (2006) referer til en undersøkelse av Leavy hvor tre fjerdedeler av de undersøkte elevene i grunnskolen så på gjennomsnitt som en «entirely computational act».

Referanser

Hana, G. M. (2011). Definisjoner. *Tangenten, 22*(1), 24–30.

Leavy, A. & O'Loughlin, N. (2006). Preservice teachers understanding of the mean: Moving beyond the arithmetic mean. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 53-90.

Strauss, S. & Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(1), 64–80.

Tine Wedege

Køn, matematik og prestige

Professor Kari Hag, Institutt for matematiske fag, NTNU, fyldte 70 år i april 2011. Igennem et langt liv i og med matematik og matematikuddannelse har ligestilling været hendes mærkesag. Det er den konkrete anledning til at jeg sætter køn, matematik og prestige på dagsordenen i dette indlæg.

Hvad kan matematik og køn have med hinanden at gøre? I sin banebrydende bog, *Counting girls out*, gjorde Valerie Walkerdine (1998) opmærksom på kønsstereotypiseringen af matematik – ikke bare i skole og samfund, men også i matematikdidaktisk forskning internationalt. Sådan satte hun tingene på spidsen:

> Women, after all, are clearly irrational, illogical and too close to their emotions to be good at Mathematics. Or so the story goes. Endlessly repeated variations on the theme are still being reworked, in one empirical investigation after another. (…) When examining these issues one can fall into the trap of attempting either to prove exactly what girls lack so that it can be put right, or to demonstrate that there is no lack at all. (p. 15)

Tine Wedege
Malmö Högskola
tine.wedege@mah.se

Kort om Kari Hag

Kari Hag er professor i matematik ved Institutt for matematiske fag, NTNU, Trondheim, hvor hun har haft et særligt ansvar for læreruddannelse og desuden har været prodekanus for undervisning ved Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektroteknikk.

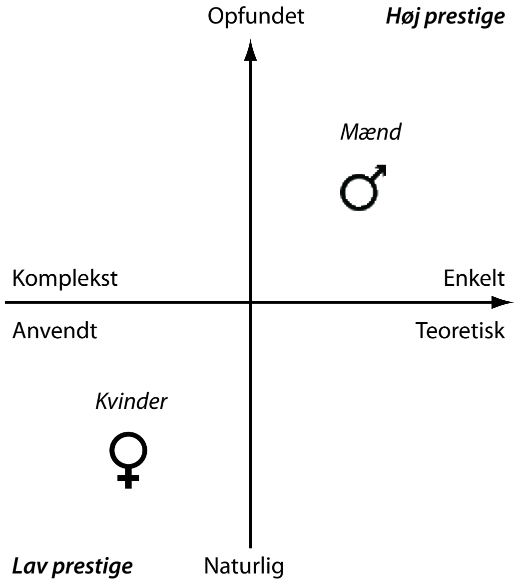
Hendes forskningsfelt er *Geometrisk funksjonsteori*. Andre hovedinteresser er undervisningsspørgsmål (og studenter!) samt rekrutterings- og ligestillingsarbejde. Det sidste er også kommet til udtryk i et internationalt engagement hvor hun har været ICMIs repræsentant i Norge og aktiv i netværket IOWME (The International Organization of Women and Mathematics Education).

I Norge, har Kari Hag været en drivende kraft i arbejdet med «jenter og matematik». Den første norske konference om kvinder og matematik blev holdt 1992 i Kristianstad i samarbejde med Norsk Matematikkråd repræsenteret ved Kari Hag (Sekretariat for kvinneforskning, 1993). Den anden konference – denne gang med et fokus på piger og matematik i et klassrumsperspektiv blev organiseret i Trondheim i 1999 med Kari Hag som initiativtager (Hag, Holden & Marion, 2000). Den sidste konference «Women in science (including mathematics)» blev holdt i Bergen 2003. Her spurgte Hag (2004) i sin forelæsning: «Kvinner i matematikk: hvorfor så få?» På det tidspunkt var der bare 10 kvinder i faste videnskabelige stillinger i matematik ved norske universiteter. I sit foreløbige svar på spørgsmålet om årsagen til de få kvinder, henviste Hag til kultur og tradition.

I det følgende vil jeg tage udgangspunkt i *det strukturelle køn*. Det vil sige den sociale struktur som konstitueres af køn, når mænd og kvinder fx er ujævnt fordelt på uddannelser og erhverv, når mænd tjener mere end kvinder, og når mænd indtager flere ledende positioner i samfundet (se Wedege, 2007).

Mænd og kvinder i Norge er næsten lige erhvervsaktive, men de arbejder i forskellige sektorer. Som i de andre nordiske lande er der en tydelig kønssegregation på det norske arbejdsmarked. Typiske kvindeerhverv er førskole- og grundskolelærere, sygeplejersker, rengøringspersonale og sekretærer. Typiske mandeerhverv håndværkere, bygge- og anlægsarbejdere, chaufførere og ingeniører. Blandt studerende på universiteter og højskoler har kvinderne været i overtal siden 1980. Men også studievalget er kønnet. Groft sagt studerer kvinder social- og sundhedsvidenskab og læreruddannelse, mens mændene læser naturvidenskab og teknik (SSB, 2010).

I et dansk forskningsprogram om køn i den akademiske organisation gjorde Inge Henningsen (2000) opmærksom på forbindelsen mellem det kønnede valg af studiefag og prestige



Figur 1: Dimensioner i det naturvidenskabelige forskningsfelt (efter Henningsen, 2000, s. 68).

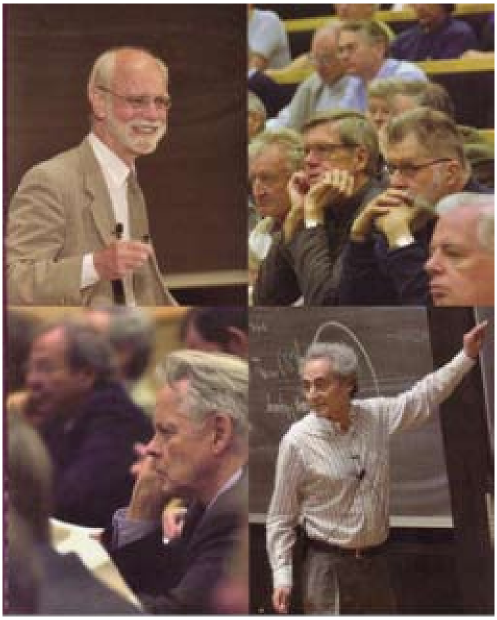
i videnskabens verden. Hun har udvalgt vigtige dimensioner i naturvidenskabelig forskning for at danne et relationelt rum med to akser (se figur 1). På den vandrette akse er videnskabelige fag og fagområder placeret i forhold til begrebsparrene «anvendt – teoretisk»; «konkret – abstrakt»; og «kompleks – enkel». Ude til højre findes fag som ren matematik og fysik, mens biologi og anvendt matematik befinder sig ude til venstre. På den lodrette akse er videnskabelige fagområder placeret i forhold til parrene "opfundet – naturlig»; «kunstig – eksisterende»; og «konstrueret – organisk». Denne akse adskiller for eksempel ren kemi og biokemi. Fagene med høj prestige befinder sig i øverste højre kvadrant, mens fagene med lav prestige er at finde i nederste venstre kvadrant. Henningsen knytter køn og videnskabelig prestige sammen ved at indplacere mænds og kvinders faglige præferencer som vist i figur 1.

Indenfor det matematiske felt afspejler figur 1 at ren matematik er mere prestigiøs og magtfuld end anvendt matematik på de svenske universiteteter, som vist af Gerd Brandell (in press).

Hun har lavet en opgørelse over kvindelige professorer i matematik, matematisk statistik, anvendt matematik og numerisk analyse og andre kvindelige professorer ved matematiske institutter, inclusive professorer i matematikdidaktik. I 2008 var der 13 kvindelige professorer, svarende til mindre end en tiendedel af de mandlige professorer (138) inden for de samme områder. I relation til diskussionen om hierarki og prestige er det interessant at størstedelen af den kvindelige gruppe befinder sig inden for anvendt matematik. Det største område er statistik (fem professorer) fulgt af matematikdidaktik (tre), anvendt matematik (to), ren matematik (to) og numerisk analyse (1). Næsten halvdelen af de 138 mandlige professorer (67) befinder sig indenfor ren matematik (algebra, geometri og analyse). I Norge giver en første hurtig optælling på de matematiske institutter i Oslo, Bergen, Trondheim og Tromsø 76 mandlige professorer i matematik og 7 kvindelige professorer. Man må altså formode at det samlede antal kvinder i matematik i faste videnskabelige stillinger ved norske universiteter er vokset til mere end 10 som i Kari Hags optælling fra 2003.

I sin artikel «Progress and stagnation of gender equity: Contradictory trends within mathematics research and education in Sweden», dokumenterer Brandell (2008) at kvinder i Sverige igennem de sidste 10 år har reduceret mænds dominans i master- og ph.d.uddannelser i matematik og i professionelle karrierer som matematikere. Men hun viser også at udviklingen er ujævn og langsom. På de højeste niveauer fx som professorer i matematik er antallet af kvinder kun steget marginalt.

For at illustrere nogle af pointerne om prestige, magt og matematik, har jeg valgt et barokt eksempel fra Norge. Da Abelprisen blev etableret i 2002 som en parallel til Nobelprisen i økonomi for at tildeles til enestående videnskabeligt arbejde i det internationale matematikfelt, fik Det Norske Videnskaps-Akademi designet et flot hefte for at informere offentligheden om prisen. Når man bladrer i heftet må man spørge



To sider kopieret fra heftet *Abelprisen*, 2003.

sig selv om høj-prestige matematik kun er en verden for hvide, midaldrende mænd. Heftet er rigt illustreret med mænd som beskæftiger sig med matematik bortset fra et enkelt foto med en kvindelig lærer og en gruppe piger som «leger» i solen.

De kønnede strukturer danner efterhånden kønssymboler og diskurser i folks hoveder. Det bliver fx normalt og naturligt at mænd indtager de ledende positioner i samfundet og at kvinder har deltidsarbejde for at kunne tage sig af hjem og familie. På den måde får *symbolsk køn* konsekvenser for den videre udvikling af strukturelt køn og omvendt. Strukturelt og symbolsk køn fortæller os hvad der er normalt, og hvad der er afvigende for mænd og kvinder, for drenge og piger, selv om vi personligt kan være uenige i disse normer.

Efter et langt professionelt og engageret liv med matematik og matematikundervisning, går Kari Hag på pension i 2011. Men vi som kender hende, ved at Kari Hag ikke vil holde sig i ro i den tredje alder. Derfor vil mit håb være: at hun fortsætter sit arbejde med køn og matematik ved at fortsætte og opdatere sin undersøgelse af strukturelt køn og magt i matematik i Norge.

Referencer

Brandell, G. (2008). Progress and stagnation of gender equity: Contradictory trends within mathematics research and education in Sweden. *ZDM – the International Journal on Mathematics Education, 40*, 659–672.

Brandell, G. (in press). Framgångsrika initiativ för fler kvinnor i matematiken – men mansdominansen kvarstår. In C. Rudälv (Red.), *Kvinnor och matematik 7, KM7, 14–16 juni 2009, Göteborg.* Umeå: Umeå universitet.

Hag, K. (2004). Kvinner i matematikk: Hvorfor så få? In A. M. Skarsbø (Red.), *Women in science: A conference report* (s. 19-28). Bergen: University of Bergen, Centre for Women's and Gender Research.

Hag, K.; Holden, I. & Marion P. van (Red.) (2000). *Handling bak ordene: artikler om jenter og matematikk*. Trondheim: Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet.

Henningsen, I. (2000). Køn og fag. I D. Skovgård, & P. Kaltoft (Red.), *Hvad er der sket med fisken? En antologi om samfundets naturrelation og naturvidenskabens krise* (s. 65–76). København: Multivers.

Sekretariat for kvinneforskning (1993). *Sånn, ja! Rapport fra en konferanse om matematikkdidaktikk og kvinner i matematiske fag. Kristiansand 8.–10. maj 1992.* Oslo: Norges forskningsråd, arbejdsnotat 2/93.

Statistisk sentralbyrå (2010). Dette er Kari og Ola: Kvinner og menn i Norge. Oslo: Statistisk sentralbyrå.

Walkerdine, V. (1998). *Counting girls out: Girls and mathematics*. London: Falmer Press.

Wedege, T. (2007). Gender perspectives on mathematics education: Intentions of research in Denmark and Norway. *ZDM – the International Journal on Mathematics Education, 39*(3), 251–260.

Gunnar Gjone: Matematikk på frimerker

Matteo Ricci

Matteo Ricci ble født i oktober 1552 i Macerata, Italia, i det området som den gang tilhørte Kirkestaten. Etter å ha fått den første opplæringen hjemme hos foreldrene ble undervisningen hans overtatt av jesuittene i 1561. Han reiste til Roma i 1568 for å studere juss og i 1571 ble han del av jesuitterordenen. Han fortsatte med studier i matematikk og astronomi under Christopher Clavius (1538–1612). Clavius var tysk astronom og jesuitt, som blant annet hjalp pave Gregor den 13. med å innføre det som etter hvert har blitt kalt den gregorianske kalenderen.

I 1577 la han ut på reise og etter korte opphold i Portugal og Goa (India) kom han til Macao på østkysten av Kina i 1582. På den tida var ikke europeiske prester velkomne i Kina fordi kirken ville omvende kineserne til katolisismen og forlangte at de måtte gå med vestlige klær, snakke portugisisk og oppgi sin egen kultur. Ricci begynte straks å sette seg inn i kinesisk kultur og språk. Han blir omtalt som en mann med utrolig god hukommelse, og på kort tid lærte han seg kinesisk, både muntlig og skriftlig. Melvin (2010) skriver at Ricci hadde så god hukommelse at han raskt kunne gå gjennom en liste på 500 kinesiske tegn, og så gjengi dem i omvendt rekkefølge. I begynnelsen gikk Ricci kledd som en buddhistisk munk, men etter en tid kledde han seg som en konfusiansk lærd. Riccis holdning til kinesisk kultur ga ham derfor anledning til å flytte til fastlandet sør i Kina der han tok det kinesiske navnet *Li Matou*.

Ricci flyttet til Shao-chou i 1589 hvor han begynte å undervise kineserne om de matematiske idéene som han hadde med seg fra Europa. Ifølge nettsiden MacTutor (www-history.mcs.st-and.ac.uk/) var dette første gang europeiske og kinesiske matematikere hadde utvekslet matematiske idéer, som var en viktig begivenhet i utviklingen av matematikk i Kina – både på godt og ondt.

I 1595 forsøkte Ricci å komme inn i Beijing, men ble avvist fordi byen ikke var åpen for utlendinger. Han flyttet isteden til Nanking i 1599, der han fortsatte sitt vitenskapelige arbeid i matematikk, astronomi og geografi. I 1601 fikk han derimot anledning til å bosette seg i Beijing og bodde der til sin død 11. mai 1610.

Det er flere forhold som kan trekkes fram av det matematiske engasjementet til Ricci. I 1607 hadde han – sammen med en av sine studenter, Xu Guangqi (1562–1633) – fullført oversettelsen til kinesisk av de seks første bøkene i Euklids *Elementer*. Oversettelsen bygget på Christopher Clavius' latinske utgave av Euklid. I følge Katz (2009) var dette en begivenhet som startet innføringen av vestlig matematikk i Kina,

Gunnar Gjone
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, UiO
gunnar.gjone@ils.uio.no

Figur 1

Figur 2

og som etter en tid førte til at den opprinnelige kinesiske matematikken ble redusert. Imidlertid, etter omlag 100 år, kom denne igjen i fokus (Liebrecht, 2005). Kontakten med vestlig matematikk tok seg opp igjen i slutten av 1800-tallet. I 1857 var for eksempel alle bøkene i Euklids E*lementer* oversatt til kinesisk (Scriba & Schreiber, 2001).

Et annet område der han utviklet nye instrumenter var innenfor de såkalte armillarsfærer som var knyttet til ptolemeisk astronomi. I sin konstruksjon hadde Ricci innført to nye sfærer (Melvin, 2010). Konstruksjonen er gjengitt på et frimerke fra Taiwan, som vist på Figur 1.

Ricci hadde også framstilt en rekke kart, skrevet litteratur på kinesisk, og antagelig malt flere bilder i kinesisk stil.

Macao ga i 2006 ut et frimerke med Matteo Ricci sammen med andre jesuitter. I 2010 ga også Vatikanet ut to frimerker for Matteo Ricci.

Etter tillatelse fra keiseren ble Ricci begravet i Beijing. Graven er i Zhalan gravlund i Beijing og er der fortsatt (Melvin, 2010).

Referanser

Katz, V. (2009) *A History of Mathematics An Introduction*. 3rd ed. Boston MA: Pearson Education/Addison-Wesley.

Liebbrecht, U. (2005) *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*. Mineola, NY: Dover Publications.

Melvin, S. (2010) Missionary in the Forbidden City. *International Herald Tribune*, 28.09.10 Dette er en omtale av Matteo Ricci i forbindelse med en utstilling i Macao Museum of Art høsten 2010.

Scriba, C. J., & Schreiber, P. (2001) *5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen.* Berlin, Heidelberg: Springer

Figur 3

Jostein Våge

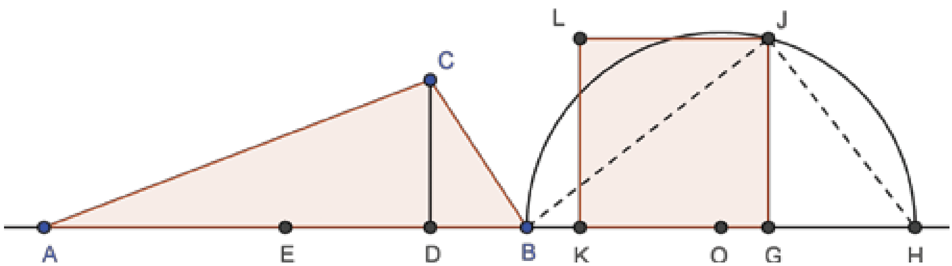
Omforming av arealer

Et av de store problemer fra antikken var problemet med sirkelens kvadratur, dvs. konstruksjon av et kvadrat med samme areal som en gitt sirkel. I dag vet vi at det er en umulig oppgave å utføre med passer og linjal, men det tok over 2000 år før en klarte å bevise dette matematisk. Det var Lindemann som i 1880 kom med det endelige beviset for at π er et transcendent tall, et tall som ikke er rot i noen polynomligning med rasjonale koeffisienter. Dette medfører at konstruksjon av et kvadrat med samme areal som en sirkel ikke er mulig.

Pytagoreerne var også opptatt av å kunne omforme en mangekant til en ny mangekant med samme areal. Dette finner vi dokumentert i Euklids bøker. Å kunne omforme en mangekant til et kvadrat med samme areal synes å ha vært spesielt viktig. Vi skal her først se på hvordan vi kan omforme en vilkårlig trekant til et kvadrat med like stort areal. Utførelsen er vist på figur 1 og baserer seg på en mellomproporsjonalkonstruksjon.

Jostein Våge
Program for lærerutdanning, NTNU
jostein.vage@plu.ntnu.no

Trekanten ABC er gitt. Vi nedfeller normalen fra C på AB og finner høyden CD i trekanten. Arealet til trekanten blir derfor $1/2 \cdot AB \cdot CD$. Vi finner midtpunktet E på siden AB og avsetter lengden $BG = BE$. Videre avsetter vi $GH = CD$. Siden BG er lik halve grunnlinjen i trekanten og GH er lik høyden, vil produktet $BG \cdot GH$ være trekantens areal. For å finne et kvadrat med det samme arealet trenger vi å bestemme et linjestykke med sidelengde s som oppfyller kravet $s^2 = BG \cdot GH$. Dette kan gjøres ved å anvende mellomproporsjonalsetningen som sier at høyden på hypotenusen i en rettvinklet trekant er mellom-

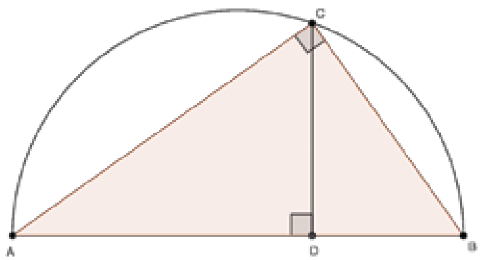


Figur 1

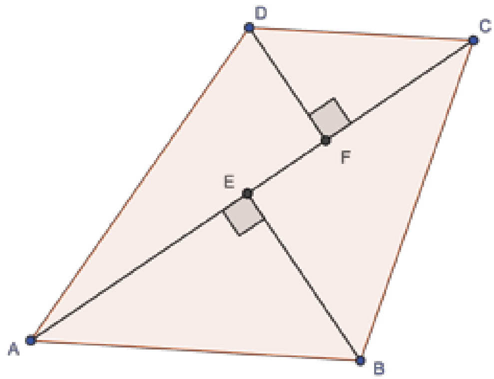
proporsjonal med de bitene den deler hypotenusen i. Vi skal om litt begrunne denne setningen. Videre vil vi bruke Thales' setning som sier at halvsirkelen på hypotenusen i en rettvinlet trekant er det geometriske sted for hjørnet med den rette vinkelen. Ved å trekke linjestykkene *BJ* og *HJ* får vi dannet en rettvinklet trekant *BHJ*. Hjørnet *J* er derfor skjæringspunktet mellom denne halvsirkelen og normalen på *BH* i *G*. Nå står det bare igjen å konstruere kvadratet med *GJ* som side. Det gir oss kvadratet *GKLJ*.

Til sist tar vi med begrunnelsen for mellomproporsjonalsetningen. I den rettvinklede trekanten *ABC* (figur 2), er $\angle A + \angle B = 90°$ og i den rettvinklede trekanten *CAD* er $\angle A + \angle ACD = 90°$. Det betyr at $\angle B = \angle ACD$, og følgelig er de to trekantene formlike. Med samme begrunnelse kan en vise at også trekantene *ABC* og *CDB* er formlike. Dermed må også trekant *CAD* være formlik med trekant *CDB*. Derfor har vi forholdet $CD/AD = DB/CD$, og det leder til mellomproporsjonalsetningen som er uttrykt ovenfor.

Siden i det kvadratet vi søker vil være mellomproporsjonalen mellom $BG = AB/2$ og *GH* som er lik høyden i trekanten. Denne mellomproporsjonalen konstruerer vi, og det er *GJ*. Nå står det bare igjen å fullføre kvadratet *GKLJ*. Arealet til dette kvadratet vil være lik arealet til trekanten *ABC*.

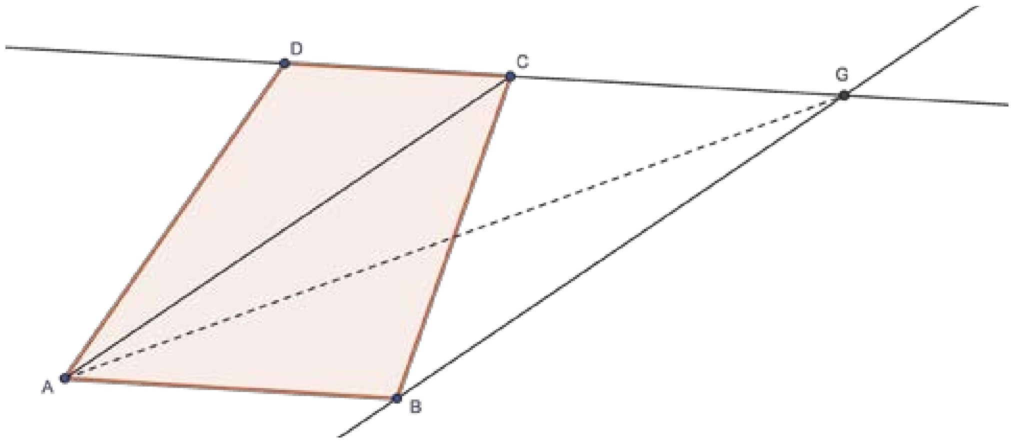


Figur 2



Figur 3

For å kunne omforme en vilkårlig firkant til et kvadrat med samme areal, kan vi bygge på metoden som er beskrevet for en trekant ovenfor. I firkanten *ABCD* (figur 3) trekker vi først diagonalen *AC*. Denne deler firkanten i to tre-



Figur 4

kanter med diagonalen som felles grunnlinje. Normalene fra *B* og *D* på diagonalen vil være høydene i de to trekantene. Nå kan vi lage oss en trekant med diagonalen som grunnlinje og summen av de to høydene som høyde i trekanten. Denne trekanten vil ha samme areal som den opprinnelige firkanten. Trekanten kan i sin tur omformes til et kvadrat ved den metoden vi beskrev tidligere ved bruk av en mellomproposjonalkonstruksjon.

For mangekanter med flere hjørner enn fire, kan metoden for firkanten brukes flere ganger og vi kan i prinsippet redusere enhver mangekant til en trekant og dermed også til et kvadrat.

Vi skal til sist se på en annen metode som vi også gjør regning med var kjent av pytagoreerne. Det er en metode som suksessivt reduserer en n-kant til en $(n-1)$-kant. Igjen vil vi for enkelhets skyld se på en firkant, men det er ikke vanskelig å innse at den vil fungere for en hvilken som helst mangekant.

Den opprinnelige firkanten er firkanten *ABCD* (figur 4). Vi trekker diagonalen *AC* og konstruerer en parallell med denne diagonalen gjennom hjørnet *B*. Skjæringspunktet mellom den konstruerte parallellen og forlengelsen av linjestykket *DC* kaller vi *G*. De to trekantene *ABC* og *AGC* har begge samme grunnlinje *AC*. Siden *AC* og *BG* er parallelle, vil også høydene og dermed arealene i de to trekantene være like store. Derfor vil arealet til trekanten *ADG* være likt med arealet til den opprinnelige firkanten. Ved å bruke denne metoden kan vi redusere enhver n-kant til en $(n-1)$-kant. Ved suksessive anvendelser av metoden kan en hvilken som helst n-kant reduseres, slik at vi til slutt ender opp med en trekant med samme areal som den opprinnelige mangekanten.

(fortsatt fra side 8)

$\frac{2}{5}\cdot 4$, eller at tre firedeler av to femdeler (av én) er $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$.

Hvordan vi *regner ut* slike produkter, kan en for eksempel finne i Bjørnestad et al. (2006, s. 103–107).

Det magiske ordet blir altså ordet 'av'. I mange situasjoner vil oversettelsen av multiplikasjonstegnet med 'av' plutselig gi intuitiv mening til en oppgave som i starten kan være vanskelig å forstå. For eksempel faller oppgaver med prosent uten vanskelighet inn under en slik tolkning. 25 % av 600 kr må være $0{,}25 \cdot 600$ kr.

Med en slik tilrettelegging er alle tilfeller av multiplikasjon samlet under én idé, nemlig den at et produkt av to tall er å oppfatte som et «antall» – angitt av multiplikatoren – av noe – angitt ved multiplikanden. «Antall» er da gitt en utvidet betydning som vi etter min oppfatning implisitt bruker «hele tiden.»

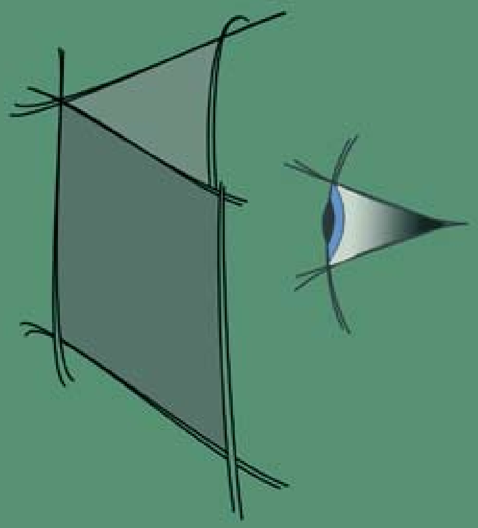
Referanser

Bjørnestad, Ø., Kongelf T.R. og Myklebust, T. (2006): *Alfa – Matematikk for allmennlærerutdanningen*. Fagbokforlaget, Bergen.

Grote, A. (1983): *Anzahl, Zahl und Menge*. Felix Meiner Verlag, Hamburg.

Das Deutsche Wörterbuch von Jacob und Wilhelm Grimm ... im Internet. Tilgjengelig fra germazope.uni-trier.de/Projects/DWB/. (Lastet ned 23.06.2006).

Bokomtale



Tor Espen Kristensen
GeoGebra 3.2 for videregående skole

Norsk GeoGebra-institutt
Matematikksenteret NTNU
7461 Trondheim
ISBN 978-82-997448-3-6
Pris 200,–

Denne boken gir en innføring i verktøyet GeoGebra med tanke på undervisning i videregående skole. Boken er skrevet først og fremst som kursmateriell til Norsk GeoGebra Institutt sine kurs i geogebra. Likevel tenker jeg at den egner seg godt som oppslagsverk for lærere i den videregående skolen. Boken er godt gjennomarbeidet og forfatteren er flink til å vise at verktøyet er aktuelt innenfor mange emner. Flere steder refereres det direkte til både generelle oppgaver og eksamensoppgaver i 1P, 2P, 1T, S1, S2 og R1, og boken tar opp hvordan disse kan løses i GeoGebra. Det refereres ikke til eksamensoppgaver i R2, men boken er likevel nyttig også her.

Boken kan leses kronologisk, men like nyttig er gjerne det fyldige stikkordregisteret bak. Trenger du hjelp kan du enkelt slå opp i stikkordregisteret slik at du finner ut hvordan du for eksempel kan tegne en funksjon, lage et histogram eller konstruere i geogebra. Ser vi for eksempel i stikkordregisteret etter ordet: «Histogram» blir du henvist til side 22 som viser deg kommandoene for å tegne histogram i geogebra. Dette løses ved hjelp av eksempler som er lettfattelig å forstå. Forfatteren er også flink til å sammenligne kommandoer som tilsynelatende gir samme resultat, men som kanskje er litt ulike i bruk. Under temaet Regresjon er der for eksempel en fin diskusjon hvor forfatteren sammenligner kommandoen RegLin[liste1] (lineær regresjon) med RegPoly[liste1,1] (polynom regresjon med polynom av orden 1).

For den litt mer viderekomne lærer beskrives det hvordan du kan lage egne verktøy i geogebra på samme måte som makroer i Excel, og interaktive nettsider for elevene slik at brukergrensesnittet blir enklere for dem. Man får også idéer til hvordan illustrere data bedre ved for eksempel å legge inn bilder og tekst i GeoGebra. Dette er gjerne ikke en bok man leser i ett fra perm til perm, men en nyttig oppslagsbok etter hvert som elevene skal arbeide med nye kompetansemål. Boken er i høyeste grad matnyttig og avsluttes med 13 tips og triks.

Jeg velger å gjengi et for å inspirere til kjøp;

Tips 5:

«Dersom du skal bruke en kommando, men ikke husker hva du skal skrive, så gir du bare kommandoen uten noen argumenter og trykker enter. Du vil da få opp en feilmelding. I denne får du se hvordan syntaksen for kommandoen er.»

Dersom funksjonen er x^2 og definisjonsmengden er $[-2, 2]$ blir kommandoen da

$$\text{Funksjon}[x^2, -2, 2]$$

Med denne boken blir det enda enklere å bruke GeoGebra, så lykke til!

Magni Hope Lossius
Akademiet videregående skole

Tom Lindstrøm

Holmboeprisen 2011 til Sigbjørn Hals

Norsk matematikkråd har tildelt Holmboeprisen 2011 til Sigbjørn Hals, Måløy vidaregåande skule. Hedersomtale går til Kari Haukås Lunde, Bryne skule.

I sin omtale av vinneren trekker Holmboekomitéen spesielt frem hans entusiasme og engasjement:

> «Sigbjørn Hals viser en enestående entusiasme for matematikkfaget, har et glødende engasjement for elevene og er en inspirator for kolleger og andre lærere. Hans innsats er mangfoldig, og han favner bredt i sine initiativ både i klassen, på lærerværelset og i det offentlige rom.
> For mange lærere vil Sigbjørn Hals først og fremst være kjent for oversettelse og tilrettelegging av det dynamiske geometriprogrammet GeoGebra, men de fleste har også truffet ham i rollene som foredragsholder, lærebokforfatter og kursorganisator. Først og fremst er Sigbjørn Hals likevel en glimrende lærer, en som kjenner sine elever, og som kan tilpasse undervisningsopplegget etter den enkeltes behov.»

Tom Lindstrøm
Leder i Norsk matematikkråd
t.l.lindstrom@ma.uio.no

Holmboekomitéen sier:

> «Hals ser sine elever – «Takk for at du såg meg» er et av hans foredrag – og han lager oppgaver som er tilpasset hver enkelt. Han supplerer læreboken med relevante opplegg som engasjerer og løfter alle elevene faglig. Hals er lydhør for elevene og er opptatt av å forstå hvordan de lærer.»

For mer om vinneren og den hedersomtalte, se holmboeprisen.no.

Sigbjørn Hals

«Ja takk, begge delar!»

I TV-serien *NUMB3ERS* blir det hevda at «Matte er meir enn formlar og likningar. Det er logikk. Det er fornuft. Det er å bruke hjernen til å løyse dei største mysteria vi kjenner.» Dette synet har òg vinnaren av Fields-medaljen 2010, Cédric Villani, som var gjest i TV-studio hos Fredrik Skavlan i oktober 2010. Villani sa der at den viktigaste eigenskapen til ein matematikar er å vere kreativ, nøyaktig og iherdig. Han understreka at det er heilt nødvendig med fantasi for å kunne finne skjulte strukturar og samanhengar mellom to tilsynelatande uavhengige matematiske fenomen. Vi kan stille spørsmål om kor stor del av elevane som vil knytte orda fantasi, kreativitet og brennande engasjement til sine eigne erfaringar med matematikkopplæringa. Det er ikkje utan grunn at professor Jo Boaler hevdar at matematikk er det faget der det er størst avstand mellom det forskarane veit fremmar læringa og det som faktisk skjer rundt om i klasseromma (Boaler, 2008, s. 15).

Skolinspektionen i Sverige har nyleg gjennomført eit omfattande forskingsprosjekt som viser at elevar i den vidaregåande skulen («gymnasieskolan») brukar store delar av tida på å rekne utan å forstå kva dei held på med.

> Om lärare, till exempel i tron att man underlättar för lågpresterande elever, fokuserar hantering av procedurer och mekanisk räkning och avstår från undervisning som tränar problemlösning, att se samband och utveckling av matematisk kreativitet, förenklar man möjligen för eleverna på kort sikt. Men läraren gör dem troligen en björntjänst: Det ger eleverna sämre möjligheter att utveckla centrala förmågor, vilket leder till att de lär sig utantill och det riskerar att ytterligare försvåra deras lärande på längre sikt (Skolinspektionen, 2010, s. 7–8).

Jo Boaler gjev uttrykk for tilsvarande erfaringar i boka «The Elephant in the Classroom»:

> When students try to memorize hundreds of methods, that students do in classes that use a passive approach, they find it extremely hard to use the methods in any new situation, often resulting in failure on exams, as well as in life (Boaler, 2009, s. 36).

Boaler sitt poeng er ikkje at ein skal unngå automatisering av basiskunnskapar, men at ein må

Sigbjørn Hals
Måløy vidaregåande skule
sigbjorn.hals@sfj.no

Sigbjørn Hals fikk Holmboeprisen for 2011.

legge større vekt på at elevane får oppdage overordna strukturar, slik at dei kan overføre kunnskap, erfaringar og teknikkar frå eitt område til andre.

Det blir lite flyt over bilkøyringa dersom ein må slå opp i brukarhandboka kvar gong ein skal skifte gir. Slik er det med matematikk òg. Ein kan ikkje resonnere med det som står i bokhylla eller i «elevboka». For å kunne jobbe effektivt, må ein ha ein del fakta og basiskunnskapar «i ryggmargen». Då er det nødvendig med pugging og mengdetrening, noko som òg blir understreka i rapporten «Matematikk i motvind» for TIMSS Advanced 2008 (Grønmo et al., 2010).

> Målet med å automatisere visse ferdigheter er blant annet å frigjøre kognitiv kapasitet som kan brukes til å løse mer avanserte matematiske problemer (ibid., s. 27).

Det er for eksempel ingen grunn til at elevar på 1T-kurset skal vere i tvil om kva som er forskjellen mellom sinus, cosinus og tangens. Då må dei jobbe så mykje med dette at det blir overført frå korttidsminnet til langtidsminnet (Costa-Mattioli, 2008). I følgje TIMMS Advanced-rapporten, blir det lagt lite vekt på både automatisering av basiskunnskapar og trening i problemløysing i den vidaregåande skulen i Noreg. Dette kan vere ein av grunnane til at mindre enn 1 % av dei norske 3MX-elevane i 2008 nådde opp til «avansert nivå», der elevane skal kunne resonnere seg fram til svar på meir komplekse matematiske problem.

I diskusjonar om matematikkopplæringa, har ein gjerne fått inntrykk av at det er ei motsetning mellom dei som vil vektlegge faktakunnskapar og dei som vil la elevane få tid til å jobbe med utforskande problemløysingsoppgåver. TIMSS Advanced rapporten viser at dette ikkje er tilfelle: Automatiserte basiskunnskapar er nødvendige for å kunne vere effektive problemløysarar, og det blir brukt lite tid på begge desse i den vidaregåande opplæringa.

Snorre A. Ostad (2008) understrekar kor viktig det er at faktakunnskapane er knytte saman i ein logisk struktur (nettverk), og at dei er kopla til eit rikt utval av løysingsstrategiar. Elevane må òg få opplæring i slike fleksible strategiar, som er nødvendige for at elevane skal sleppe å måtte ty til ineffektive og tidkrevjande «backup-strategiar» (som å alltid utføre multiplikasjon som teljing og gjenteken addisjon).

Uttrykket «Ole Brumm-politikk» blir feilaktig brukt om manglande evne til å prioritere bort det eine av to gode som det ikkje er praktisk mulig å få samtidig. Dette er urettferdig overfor Ole Brumm, som fint klarte å prioritere bort det som ikkje var bra og nyttig for han.

> Brumm likte alltid noe godt ved ellevetiden om formiddagen, og han ble svært glad da han så Sprett dekket på bordet med tallerkener og krus. Og da Sprett spurte: «Vil du ha honning eller boksemelk til brødet?» ble Brumm så glad at han svarte: «Begge deler». Men for at han ikke skulle virke grådig tilføyde han: «Tusen takk. Men det er ikke så farlig med brødet.» (Milne, 1999).

Automatisering av basiskunnskapar og trening i problemløysingsstrategiar er «mjølk og honning», som vi gjerne kan ha meir av i matematikkopplæringa, men kva er så «brødet» som vi med fordel kan redusere mengda av?

I den svenske rapporten gjev elevar uttrykk for at det blir for mykje rutine, og for få utfordringar. Det er grunn til å tru at dette òg gjeld for norske elevar.

> Många elever är understimulerade och tycker att matematik är tråkigt … Flera elever framför till Skolinspektionen att det är för slappt och för enkelt, «detta kunde vi redan». Granskningen visar exempel på undervisning som kan beskrivas som «fördummande». Många elever får problem att förstå och använda matematik både nu och i framtiden (Skolinspektionen, 2010, s. 8).

Denne rapporten viser at vi med fordel kan redusere på aktivitetar som er for lette og «fordummande» og økter med oppgåveløysing der elevane sit og utfører rekneoperasjonar dei eigentleg ikkje skjønner. Dette er «brødmaten» vi kan kutte ned på.

Lærarar erfarer ofte at elevane er meir engasjerte og kreative når dei jobbar med «grublisar»/problemløysingsoppgåver, der dei ikkje finn svaret direkte ved å bruke ein formel eller standardalgoritme. Det finst svært mange bøker med passande problemløysingsoppgåver. Ein kan t.d. søkje på www.amazon.com etter «problem solving» eller namn som Martin Gardner, Ian Stewart, David Acheson, og ikkje minst George Pólya. John Hattie (2009) dokumenterer at dei heuristiske problemløysings-strategiane som Pólya (1945) gjorde greie for i boka «How to solve it» har ein sterk positiv effekt for læringsutbyttet i matematikk.

> The teacher characteristic with the most positive effect on students' performance was specialist training in heuristic methods ($D = 0{,}71$) (Hattie, 2009, s. 210).

Vi må altså angripe problemet med manglande matematikkforståing og lite matematikkglede frå to sider samtidig. Vi treng både å jobbe med automatisering av basiskunnskapar og trening i matematisk problemløysing. Sjå figuren nedst på sida.

For å bli effektive problemløysarar må elevane ha solide kunnskapar om dei matematiske byggesteinane og algoritmane, men innlæring av basiskunnskapar treng ikkje å vere «tråkigt». Det har vore skrivne mange gode artiklar i Tangenten med tips til gode aktivitetar og opplegg som kan brukast i matematikkopplæringa. I tillegg til desse, vil eg her nemne tre (av mange) kjelder, der eg sjølv har funne nyttige tips og idéar:

A. Nettstaden www.skoleipraksis.no med filmar som viser konkrete undervisningsopplegg inndelt etter småtrinnet, ungdomstrinnet og vidaregåande skule.
B. Heftet: «Undersøkende matematikk – Undervisning i videregående skole» av Anne Mari Jensen og Kjersti Wæge (2010). Heftet inneheld både detaljar for aktivitetane, kopieringsoriginalar og ein DVD med filmar som viser gjennomføringa av aktivitetane i praksis i klasserommet. Desse filmane finn ein òg på nettsida i punkt A. Nokre av opplegga passar både for ungdomstrinnet og vidaregåande skule.
C. På www.getsmart.no har Skage Hansen presentert ulike matematiske kortstokkar som kan vere godt eigna om ein ønskjer å gjere automatiseringa av basiskunnskapane meir interessant og effektiv. Elevar på barnetrinnet (og på høgare alderstrinn) som ikkje veit samanhengen mellom brøk, desimaltal

Automatisering av basiskunnskapar

Innlæring og problematisering av matematiske ord og uttrykk. →

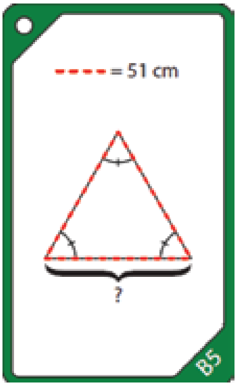
Automatisering av sentrale formlar, fakta og algoritmar i eit strukturert tankenettverk. →

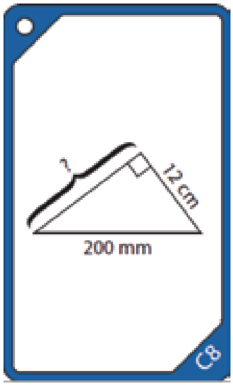
Problemet: Manglande kunnskapar i, og nytte og glede av matematikk hos mange elevar.

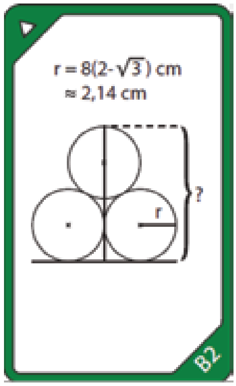
Læring av matematisk tenking og problemløysing

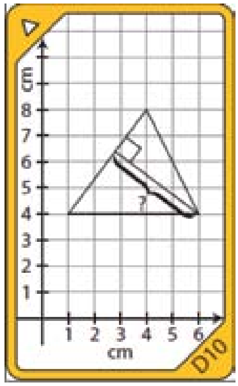
← Læring av og øving i heuristiske strategiar for problemløysing.

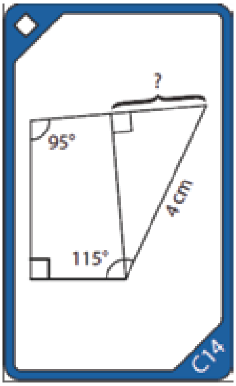
← Trening i å sjå fleire steg framover og å tenkje kreativt.

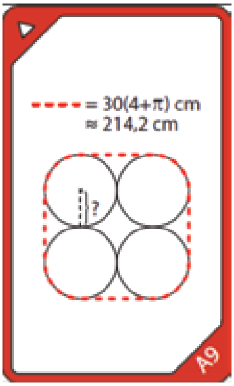


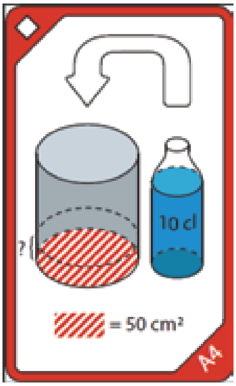


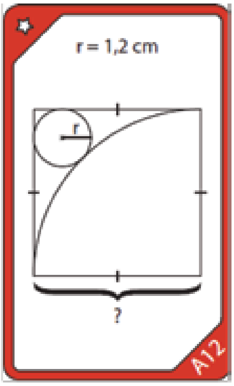












og prosent, kan t.d. trene på dette gjennom spel som «Krig» eller «Vri åttar» med den gule kortstokken som er eigna til dette. På ungdomstrinnet og vidaregåande skule kan ein engasjere elevane i spel og konkurransar som gjer at dei blir svært flinke til å rekne om mellom ulike einingar av tid, masse, lengde og volum. Ein finn pdf-filer og Powerpoint-presentasjonar som forklarar korleis ein kan gjennomføre dette på www.getsmart.no/no/downloads.

Ein aktivitet som eg har erfart har ført til ekstra stort engasjement, aha-opplevingar og godt læringsutbytte, er problemløysingskorta i geometri. Desse er godt eigna for å lære elevane å tenkje fleire steg framover, og å vere kreative. Korta er inndelte i fire ulike vanskegrader, og det er derfor lett å få til differensierte opplegg. Her ser du nokre eksempel på kort med ulik vanskegrad. Ein kan for eksempel gå fram slik:

– Kjøp inn nok kortstokkar til heile klassen, plukk ut like sett av t.d. åtte kort med ulik vanskegrad til kvar gruppe. (Eg har laminert ark med nokre ferdige sett av kort. Då blir det enklare og raskare å dele ut og samle inn igjen oppgåvene.)
– Del elevane inn i heterogene grupper med 2–4 i kvar gruppe.
– Del ut eit sett med kort til kvar gruppe. Det er om å gjere å samarbeide, og å bli først ferdig med å løyse oppgåvene. Gruppa må syte for at alle deltakarane forstår korleis oppgåvene kan løysast, og at alle kan forklare dette til andre.
– Dersom ei gruppe blir raskt ferdige med oppgåvene, kan læraren be elevane der finne andre måtar å løyse dei same oppgåvene på, og/eller ha eit utfordrande kort i bakhand. Læraren vel kort ut frå kva han/ho trur elevane kan klare. Etter kvart som elevane får meir erfaring med slike pro-

blem, vil ein kunne auke vanskegraden.

Det finst svært mange måtar ein kan skape engasjement og effektiv læring hos elevane. Nokre vil sikkert innvende at ein ikkje har tid til slike aktivitetar dersom ein skal «nå gjennom pensumet». Då er det verdt å minne om korleis John Hattie oppsummerer forskinga om kva som fremmar læring: «Effective teaching is not the drilling and trilling to the less than willing.» (Hattie, 2009 s. 25). Ut frå resultata i den svenske rapporten, som viser at elevane no brukar store delar av tida til å rekne utan å forstå kva dei held på med, vil eg konkludere med at det er tvingande naudsynt å gjennomføre endringar som kan føre til at fleire elevar kan oppleve matematikk som både spennande og nyttig. Vi har ikkje tid til å la vere.

Referanser

Boaler, J. (2008). *What's math got to do with it? Helping children learn to love their least favorite subject – and why it is important for America.* London: Penguin Books.

Boaler, J. (2009). *The Elephant in the Classroom.* Helping Children Learn & Love Maths. London: Souvenir Press.

Costa-Mattioli, M. (2008). Switching Memories ON and OFF. *Science,* 7. november 2008: Vol. 322 no. 5903 s. 874–875.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Pedersen, I. (2010). *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole.* Oslo: Unipub. Lest 26.08.11 på: www.timss.no/rapporter 2008/Matematikk i motvind.pdf

Hattie, J. (2009). *Visible learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* New York: Routledge.

Jensen, A. og Wæge, K. (2010). *Undersøkende matematikk – Undervisning i videregående skole. Kommunikasjon – motivasjon – forståelse.* Trondheim: Matematikksenteret.

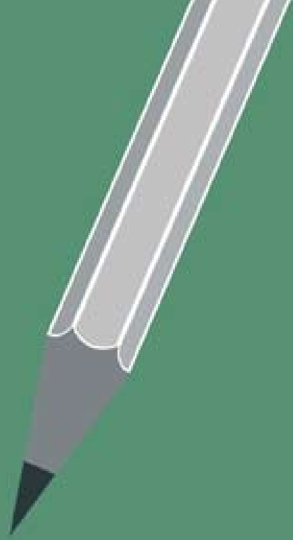
Milne, A. A. (1999). *Ole Brumm*, med tegninger av E.H. Shepard ; [ny komplettert revidert oversettelse ved Tor Åge Bringsværd og Marianne Koch Knudsen]. Oslo: Gyldendal.

Ostad, S. (2008). *Strategier, strategiobservasjon og strategiopplæring – Med fokus på elever med matematikkvansker.* Trondheim: Læreboka Forlag.

Pólya, G. (1945). *How to solve it. A new aspect of mathematical method.* (2. utg). London: Penguin.

Skolinspektionen (2010). *Undervisningen i matematik i gymnasieskolan.* Skolinspektionens rapport 2010:13. Lest 26.08.11 på: www.skolinspektionen.se/sv/Kvalitetsgranskning/Rapporter/

Leserinnlegg



Tallkamerater og tallkjærester – I matematikken er vi alle venner …

Frode Olav Haara

Debattredaktør Hilde Sandvik hadde i mars i år en kommentarartikkel i Bergens Tidende om vanskeligheter med å være forelder som skal støtte opp om den/de håpefulles hjemmearbeid i matematikk (Sandvik, 2011). Kommentarartikkelen utløste en ny debatt vedrørende matematikklæreverk for grunnskolen. Det hete temaet denne gangen var at (noen) læreverk benytter relativt ferske, etablerte begreper i sin presentasjon av lærestoffet, eller introduserer helt nye begreper for å presentere lærestoff. I to avisartikler som fulgte opp Sandviks blottlegging av egne frustrasjoner som forelder (Aamo Holte, 2011; Aamo Holte & Eikefjord, 2011) ble det intervjuet en lærer som poengterte at noen begreper som brukes i læreverk ikke er egnet til å avdekke de matematiske sidene ved det involverte lærestoffet. Det konkrete eksemplet som ble trukket fram var «vennetall,» eller begrepet *Tallvenner*. Reaksjonene på bruken av dette begrepet illustrerer godt hvordan det forsøkes å humanisere matematikkfaget i skolen, og hvordan mangel på kommunikasjon mellom lærer og foreldre kan påvirke elevens holdninger til matematikkfaget gjennom oppfølgingen fra hjemmet.

Begrepet tallvenner sin faktiske betydning og opplevde betydning

Tallvenner er et begrep som har utviklet seg fra introduksjonen av tiervenner ($1 + 9 = 10$, $2 + 8 = 10$, osv.), via femmervenner ($1 + 4 = 5$, osv.) til å bli et begrep som kan brukes for ethvert tall. Nå opereres det for eksempel med *Tallvenner 7* ($1 + 6$, $2 + 5$, $3 + 4$, $4 + 3$, $5 + 2$, $6 + 1$). I dette begrepet ligger det en viss automatiseringsmulighet knyttet til summering av små tall, men helst ligger det likevel her en synliggjøring og presisering av addisjonens kommutative egenskap og to talls komplementære egenskap, noe som også blir poengtert i de to ovenfor nevnte oppfølgingsartiklene.

Tallvenner er et begrep som nå brukes i flere læreverk (for eksempel *Abakus* og *Tusen Millioner*), i den hensikt at elevene skal assosiere summeringen av to ensifrede tall med et nytt tall. Matematikk, og her skolematematikk, skal ikke være et stillestående fag hvor alt er best ved å fortsette med å bli presentert slik det tidligere har blitt presentert. Det er derimot ikke bra at barna møter omskrivinger, dvs. *nye begreper* (av for dem etablerte begreper) gjennom det som mest kan oppfattes som en mer folkelig eller koselig framstilling av tallvennbegrepet, og i alle fall ikke kan oppfattes som omskrivinger som skal støtte opp om det faglige innholdet som skal læres. En slik overivrig innføring av nye begreper fører skolematematikken inn på ville veier. Dette kan vi for eksempel møte i læreverket Abakus, der tallvenner først blir til *Tallkamerater* (Hvilken mer presis innholdsbetydning gir kamerat enn venn, annet enn at begge indikerer at «her er det noen man vil være sammen med?»). Et stykke lenger ut i det samme læreverket blir sannelig begrepet *Tallkjærester* også introdusert, uten at innholdet i begrepet er endret i forhold til tallvenn- og tallkameratbegrepene. Illustrasjonene som støtter opp om navneintroduksjonen viser to tall som knapt ser annet enn hverandre …

Foreldrene kjenner ikke automatisk nye begreper

Elevene som går på skolen og lærer matematikk møter hele tiden det som er nye begreper for dem. Det kan være begreper som de ikke nødvendigvis møter innenfor så mange andre fag, som for eksempel rektangel, radius, multiplikasjon eller tallvenner. Dette er en naturlig del av å lære nytt stoff innenfor et fag, og derfor skaper nok ikke et begrep som tallvenner så stor frustrasjon for dem. Derimot er det en større utfordring for foreldrene. Begrepet tallvenner ble nok lite brukt mens mange av dagens foreldre til barn i skolepliktig alder selv gikk på skolen og skaffet seg de referansene til skolematematikk som de tar med seg til dagens oppbakking omkring hjemmearbeid i matematikk. Møtet med et begrep man ikke kjenner, og som ikke har annen direkte betydning enn at det er ulike par av tall som gir en viss sum, har neppe åpenlys legitimitet hos en gruppe som verken kjenner begrepet fra sin egen skoletid eller fra dagliglivet. Når det så i tillegg brukes varianter av det samme begrepet (en framstillingsmåte som i seg selv var tilnærmet utenkelig i læreverk for noen tiår siden), uten at denne begrepsbruksendringen har annen legitimitet enn det man kan oppleve som et forsøk på å humanisere tilnærmingen til noen matematiske sammenhenger, skaper det frustrasjon. Man spør seg selv om hva som er vitsen med dette her, og hva det er som skal læres gjennom dette? Mangel på kommunikasjon mellom læreverk og foreldre, og mellom lærer og foreldre, blir grunnlaget for denne frustrasjonen, og gir vekstvilkår for negative holdninger til matematikkfaget. Slike holdninger skal ikke elevene oppleve.

Fare for trivialisering

Begrepet tallvenner, som ble introdusert for å styrke forståelsen for uavhengigheten av rekkefølgen av tall som skal adderes, har blitt endret til hovedsakelig å handle om at eleven skal assosiere summen av to tall med at de to tallene har et ønske om å være sammen. Hvor er vi på vei i skolematematikken med en slik form for humanisering av tallkombinasjoner? Elevene har kanskje behov for å sette egne ord på sammenhenger. Derimot trenger de ikke å få presentert tre ulike begreper som skal omhandle det samme, og hvor utviklingen i begrepsbruken i dette tilfellet blir stadig klammere, både i humanistisk forstand og i overføringsverdi til faglig forståelse og forsvarlighet. Elevene har bruk for muligheten for positiv oppfølging av hjemmearbeid fra foreldre som ikke føler seg satt på sidelinja både faglig og informativt av at (for dem) nye begreper introduseres, uten forklaring i læreverk som er knappe i tekstbruken eller fra læreren til hjemmet.

Innføring av nye begreper for å få fram tidligere underforståtte betydninger, eller for å unngå misoppfatninger, skal vi selvsagt hilse velkommen i skolematematikken. Vi skal samtidig ha i mente at matematikkfaget alt har en etablert og funksjonell begrepsbruk. Derfor skal vi være forsiktige med å innføre nye (faglige) begreper i skolematematikken om ikke endringen har en tydelig fagdidaktisk relevans. Modernisering for å gjøre skolefaget matematikk mer praktisk forståelig (les: Humanisering av skolematematikken) er ikke nødvendigvis forenlig med dette. Det kan til og med virke mot sin hensikt, ved at matematikkfaget kan bli oppfattet til å sette større pris på eksemplets verdi enn det faktisk gjør. Eksemplets største posisjon oppnås ved falsifisering av et forsøk på generalisering, og det er ikke først og fremst den funksjonen et eksempel skal ha i skolematematikken. Slik sett kan denne formen for modernisering (les: humanisering) fungere som en trivialisering av et fag hvis faglige egenart er basert på sin streben mot det generelle.

Referanser

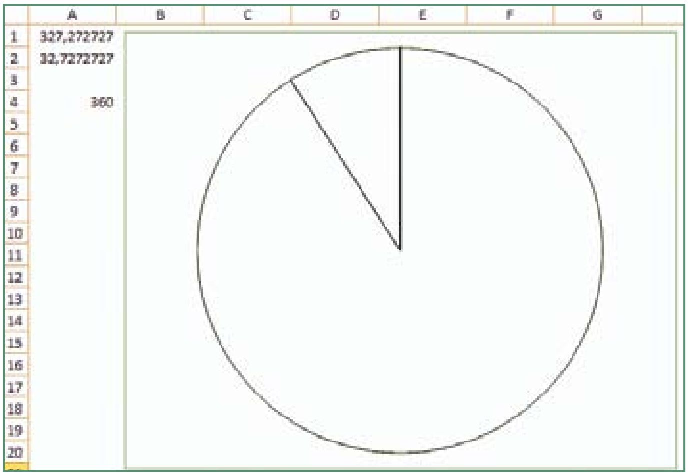
Aamo Holte, M. (2011). Sliter med barnas lekser. *Aftenposten*, 15.03.2011. Lest 26.08.11 på www.aftenposten.no/nyheter/iriks/skole/article4061879.ece

Aamo Holte, M., & Eikefjord, E. (2011). Lærer sliter med datterens lekser. *Bergens Tidende*, 15.03.2011, 6–7.

Sandvik, H. (2011). Mamma som skuletapar. *Bergens Tidende*, 12.03.2011. Lest 26.08.11 på www.bt.no/meninger/kommentar/sandvik/Mamma-som-skuletapar-1757887.html

Eyvind Riis

To mønster basert på sjukanter og ellevekanter



Hvordan en flate kan dekkes med regulære polygoner er velkjent; lesere av Tangenten kjenner dessuten islamske kunstneres mønster basert på geometriske figurer (Tangenten 2/2011 og 4/2010). Men i alle disse fine mønstrene kan man få inntrykk av at *sjukanten* og *ellevekanten* har blitt neglisjert av geometriinteresserte kunstnere og matematikere. Jeg fikk lyst til å lage flatedekkende mønster basert på regulære sjukanter og ellevekanter. Rotasjonssymmetriske mønster ser ut til å være lettest å få til. Dette har sikkert vært gjort før, men her er mine forslag.

Jeg synes det er spesielt viktig å få *ellevekanten* fram i rampelyset. For hva gjør du med borddekkingen dersom du har tolv gjester ved bordet og den ene plutselig forsvinner? Eller hva om du har invitert ti gjester og det møter opp en ekstra som du ikke vil avvise?

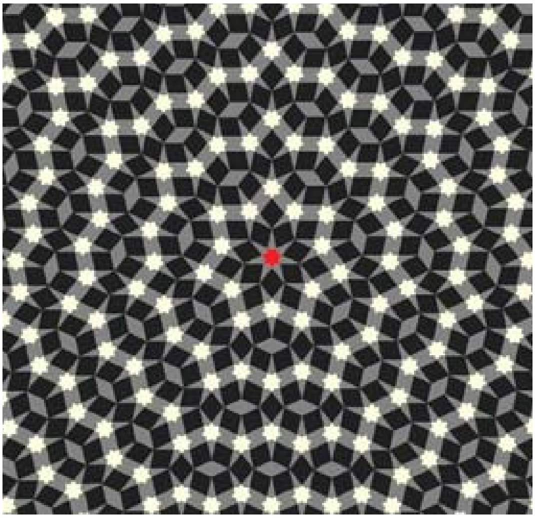
Eyvind Riis
Sjøvegan videregående skole
eyvrii@yahoo.com

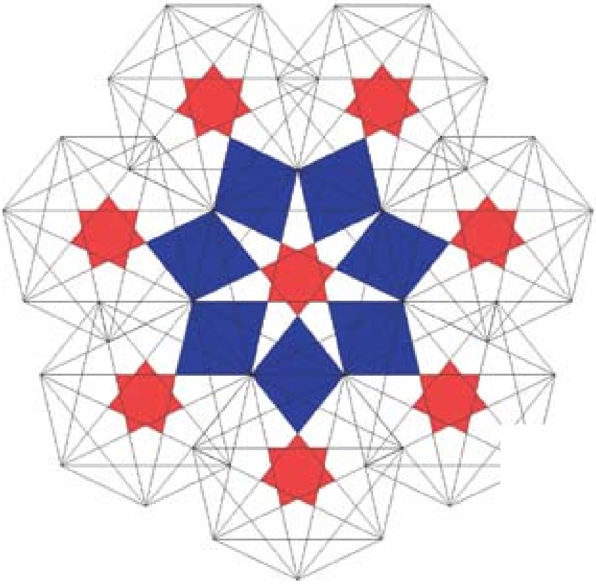
Etter Tangenten 2/2011 med tema om mønster, fikk redaksjonen flere gode mønsteridéer. Dette er ett av inspillene. Det danner grunnlaget for omslaget.

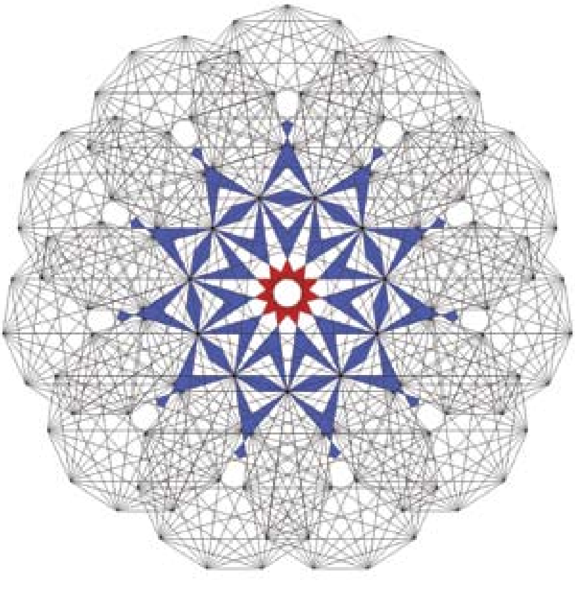
Figuren over viser hvordan man kan dele en sirkel i elleve i Excel på en enkel måte: Sett verdiene 360/11 og $10 \cdot 360/11$ i to ruter (A1 og A2), og tegn et kakediagram for disse verdiene. Denne vinkelen kan du nå kopiere til et tegneprogram, for eksempel Paint (som følger med Windows). Andre tegneprogram kan i tillegg rotere linjer og andre figurer det antall grader som man måtte ønske, og dermed enkelt erstatte den tradisjonelle gradskiven.

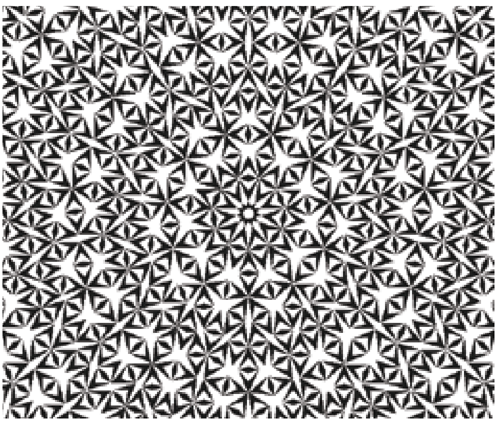
Med utgangspunkt i polygoner som man har tegnet selv eller lagd ferdig i for eksempel GeoGebra, kan mønstrene med litt øvelse og tålmodighet lages i et hvilket som helst bildebehandlingsprogram. Du trenger ikke kjøpe dyre program; det finnes mange gode alternativ. Markedsføring av gratisprogrammer gir sjelden utslag på utskriften fra lønnskontoen, men ikke desto mindre kan mønstrene bli tiltalende; figurene under viser hvordan jeg lagde de modulene som mønstrene mine er sammensatt av.

Etter at grunnfiguren er laget, kan du kopiere opp …









Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Realfagbygget A4, NTNU
7491 Trondheim
Telefon: +47 73 55 11 42
Faks: +47 73 55 11 40
merete.lysberg@matematikksenteret.no

Se den flyr!

Gerd Bones

Etter innføring av LK06 er teknologi og design en integrert del av matematikkfaget.

Teknologi og design dreier seg som kjent om å planlegge, utvikle og fremstille produkter til glede og nytte i hverdagen. I teknologi og design er matematikk sett på som et verktøyfag som kan bidra til å synliggjøre den praktiske siden ved matematikkfaget.

Matematikksenteret har samarbeidet med studenter fra NTNU og Vitensenteret om å utvikle heftet «Se den flyr» (se www.forskning.no/artikler/2007/april/1177575905.11, lest 26.08.11). I heftet fins eksempler på flere tverrfaglige opplegg med fokus på matematikk, teknologi og design. Elever og lærere ved flere skoler på både barne- og ungdomstrinn har deltatt i utprøving av aktiviteter og idéer. Takk til alle som har bidratt!

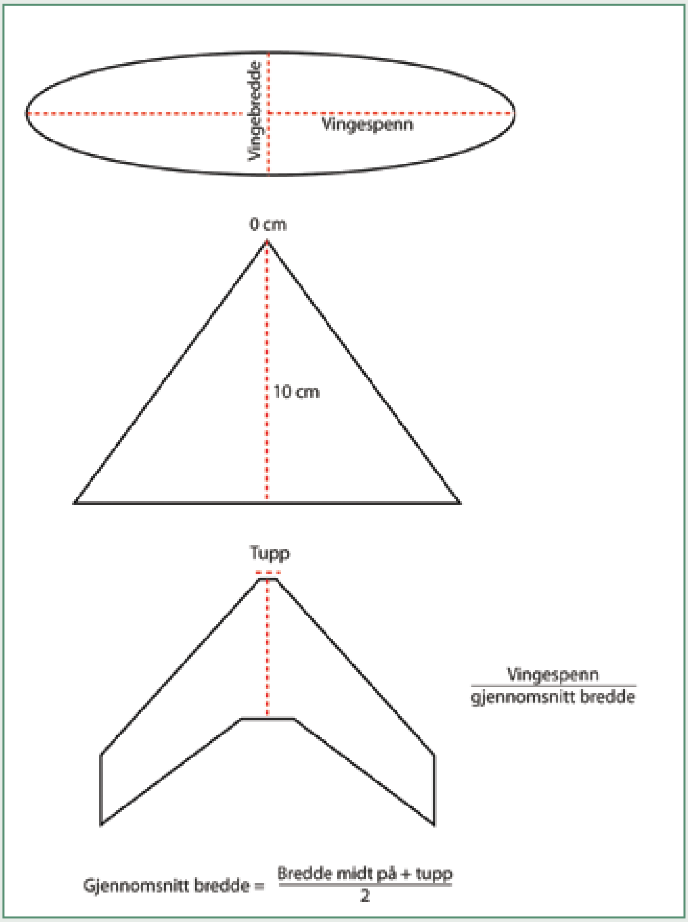
Aktivitetene i heftet er knyttet til flyvingedesign, fallskjermer, x-zylo og luftraketter.

Oppgavene er koblet mot kompetansemål i matematikk fra LK06 for 4.–10.trinn. Idéene kan enkelt tilpasses slik at de også samsvarer med kompetansemål for andre trinn.

Flyvingedesign

Hva betyr vingeareal, vingespenn og design for flyets fart og glideevne?

Elevene blir gjennom aktivitetene oppfordret til å utforske, eksperimentere og stille hypoteser, samtidig som de må gjøre beregninger, systematisere og strukturere resultater. De må tenke nytt og følge sine idéer for å lage et produkt som fungerer etter hensikten.



beregne vingeareal, vingespenn, vingebredde midt på vingen, vingebredde på tuppen av vingen, gjennomsnittsbredde, og forholdet mellom vingespenn og gjennomsnittsbredde. Deretter får de stille hypoteser om hvilken form de tror fungerer best, før de får prøve ut hypotesene ved å skyte ut flyene fra en felles utskytingsrampe.

Det er ikke mulig å trekke bombastiske slutninger ut fra disse aktivitetene. Det er heller ikke hensikten. Målet er å stimulere elevene til å være nytenkende, nyskapende og nysgjerrige. De må også erfare at det ikke nytter å prøve ut alt på en gang og hvor små marginer det er som skiller mellom fiasko og suksess. For eksempel kan noe så enkelt som å endre vekta på tuppen av flykroppen, gjøre store utslag. Det innebærer at elevene får en forståelse for at de må være tålmodige og ikke gi opp for tidlig. Hvis det skal være mulig å trekke noen konklusjoner, må vi ikke endre på for mange variabler på en gang.

Om fly-vinger

Da brødrene Wilbur og Orville Wright skulle lage det første motordrevne flyet, måtte de gjøre hundrevis av forsøk for å finne den perfekte vingeprofilen. Dette prinsippet gjelder i alle situasjoner der noe nytt skal lages. Veien er lang og forsøkene mange. Det er ofte kort avstand mellom fiasko og suksess.

Et fly er konstruert utrolig presist. Vingenes størrelse og form, halen, vekten og motorens plassering. Alt må være riktig tilpasset, dersom det skal fungere optimalt.

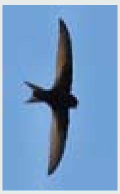
Mange usynlige krefter påvirker flyet i alle retninger. En «puff», en «dytt», et «rykk» – det er en konstant kamp om kreftene.

I heftet fins oppgaver hvor elevene må gjøre beregninger av fire ulike flyvinger som skal fungere med en og samme flykropp. De må

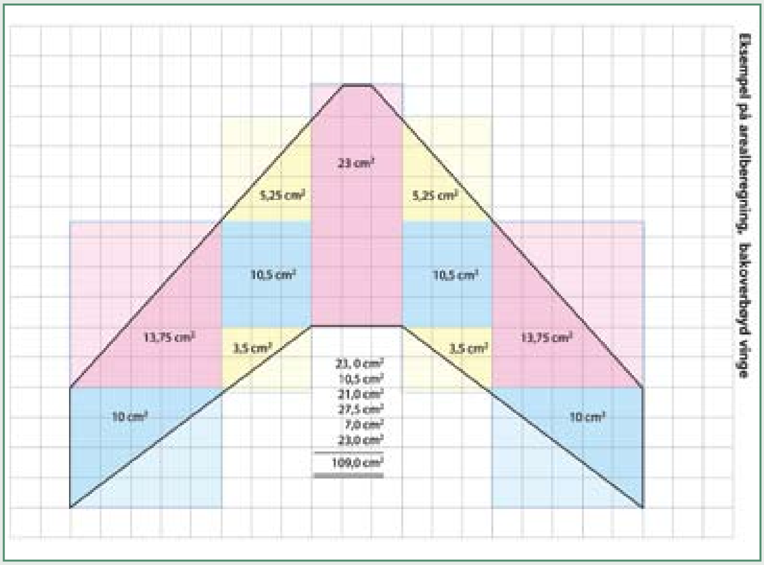
Tårnsvalen som modell for moderne fly og utvikling i fremtida

Etter utprøvingen får elevene designe sin egen flyvinge.

Fakta om tårnsvalen er et eksempel på hvordan naturen som inspirasjonskilde kan gi forskere som jobber med fly og design nyttige innspill når de skal utvikle fly for framtida. Dette kan også inspirere elevene til å tenke nytt når de etter hvert skal designe sin egen flyvinge.



Tårnsvalen er en fantastisk fugl med suverene flyve-egenskaper. Den endrer formen på vingene ut fra situasjon. Hvis tårn-



svalen skal glidefly lange strekninger, brer den vingene maksimalt for å bedre løftet. Hvis den derimot skal fly raskt og gjøre skarpe svinger, stryker den vingene bakover som på et jagerfly. Den kan faktisk fly mens den sover! I løpet av et liv kan tårnsvalen fly opptil fire og en halv million kilometer, tilsvarende hundre ganger jorda rundt.

Gjennom studien av natur og fugler, finner forskerne fantastiske løsninger og idéer. Gjennom studiet av tårnsvalen, kan forskerne få kunnskap som de bruker til å bygge fremtidas fly med vinger som forandrer form, såkalte morfende vinger.

I dag er det mulig å lage morfende vinger, fordi nye hypermoderne materialer kan bøyes ved elektrisk spenning. Dette kan gi flyene glatte, bøyelige vinger som styres av en datamaskin og som raskt tilpasser seg omgivelsene.

Miljøtiltak

Elevene får innsikt i hvordan forskere og produktutviklere bruker denne kunnskapen til å tenke på gode løsninger som ivaretar miljøet. Fordelene med glatte vinger er mange. Fordi materialene er sterkere og det ikke benyttes hengsler, kan vingene bli tynnere og lettere. I tillegg kan såkalte smarte fly med avanserte datamaskiner tilpasse vingene til den optimale innstillingen. Dette vil gi store besparelser i drivstoff. Den nye typen vinger vil også kunne justeres langt raskere og mer nøyaktig. Dette kan bety at flyene klarer å utjevne turbulensen på en langt bedre måte. Det blir da slutt på ubehagelige flyturer.

Fallskjermhopping

Rundskjerm eller firkantskjerm – hvilken form bør en fallskjerm ha?

Formen til en fallskjerm har stor betydning for funksjonen. Fallskjermers funksjon handler om stabilitet, nedsynk, retningsstabilitet og fallhastighet. Som forarbeid er det derfor lagt opp til noen innledende aktiviteter med fokus på former og figurer. Det er laget oppgavekort til elevene. De består av en undredel og en faktadel om ulike former, både to- og tredimensjonale.

Når elevene skal bestemme hvordan deres fallskjerm skal være, er det nødvendig å vite noe om formen i forhold til funksjonen og velge ut fra dette. Elevene får derfor kjennskap til hvordan ulike typer fallskjermer fungerer. Lærer får tips til mange gode spørsmål som kan være nyttige å stille.

– Hvis en lager hull i fallskjermens topp og

sider, hva vil det ha å si for fallhastighet, stabilitet, retningsstabilitet og skjermåpning?
- Vil to små fallskjermer falle bedre enn en stor?
- Hvor lange bør linene være?
- Hvor stor last kan fallskjermen ha?

Om fallskjermer

Før i tiden brukte fallskjermhopperne bare rundskjermer. De var veldig enkle, men det var ikke noen styring på dem. Dagens sportsskjermer kalles firkantskjermer eller vingeskjermer. De fungerer på samme måte som en flyvinge og produserer løft. Hvordan en firkantskjerm oppfører seg i lufta, avhenger av flere faktorer: Størrelsen på skjermen, formen på skjermen sett både ovenifra (rektangulær eller elliptisk) og fra siden(høyden på skjermen), lengden på linene, hvilket materiale selve skjermen er laget av og vekta på hopperen. Alt dette og mer til, påvirker yteevnen til skjermen.

Rundskjermer

Rundskjermer fungerer kun som en luftmotstandsinnretting. De har form som ei halvkule. Linene er festet i ytterkant av fallskjermduken. Noen har hull i toppen og noen har toppen litt trukket ned. Det gir hver sin effekt på stabilitet og fallhastighet.

Firkantskjermer

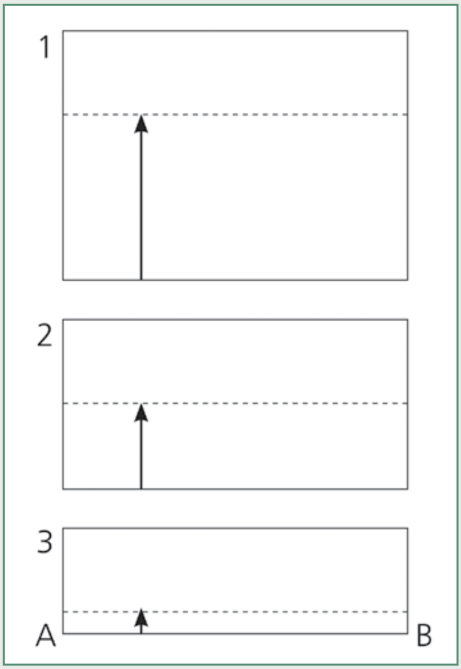
Firkantskjermer fungerer på en litt annen måte enn rundskjermer. På grunn av skjermens fasong, konstruert som en flyvinge, holdes personen oppe ved hjelp av et aerodynamisk løft. Under åpningen blåses cellene (som regel 7 eller 9) i fallskjermen opp, og skjermen får sin korrekte form.

Disse skjermene er lett manøvrerbare og har også en hastighet fremover på opp til 20 m/s. Glidetallet ligger rundt 1/3. Skjermen glir da tre meter fremover for hver meter den synker.

Elevene får anledning til å komme med egne idéer som de tester ut. Underveis får de bruk for å kunne anvende all den matematikken de trenger for å løse oppgavene. Det kan også innebære et behov for å lære mer matematikk.

Hvordan kan du forandre på formen til en x-zylo for at den skal gå lengre og mer stabilt?

En x-zylo er et kasteredskap, en slags variant av et papirfly. Oppgaven starter med en oppskrift på hvordan en x-zylo kan lages. Begreper som sylinder, diameter og omkrets får et innhold. Deretter oppfordres elevene til å eksperimentere med de ulike parametrene. Hvordan kan formen til en x-zylo forandres for at den skal gå lengre og mer stabilt?



– Hvilken diameter egner seg best?
– Brette på langs eller på tvers av arket?
– Hvilken tykkelse på papiret egner seg best?
– Hvilken lengde/høyde på sylinderen egner seg best?

Avslutt med en konkurranse hvor elevene selv får bestemme kriteriene som skal gjelde. Det kan for eksempel være
– Lengste kast
– Dårligste kast (fiaskoprisen)
– Best treffsikkerhet
– Lagspill: x-zylogolf

Inspirasjon til noen av idéene i heftet er hentet, tilpasset og omarbeidet fra NASA's nettsider (www.nasa.gov/missions/research/twist_wing.html, lest 26.08.11) og tidsskriftet «Mathematics – Teaching in the Middle School», NCTM.

Heftet kan kjøpes ferdig trykket eller lastes ned fra nettsiden matematikksenteret.no.

Jeg kan bli hva jeg vil!

Realise–ditt utdanningsvalg! arrangerer fire regionale spredningskonferanser om rekruttering til realfag, med et spesielt fokus på jenter.

Hva legger moderne ungdommer vekt på når de skal velge utdanning? Hvordan kan vi rekruttere flere jenter til fag som tradisjonelt flest gutter velger? Har jenter større glede av å lære i grupper enn gutter? Hvilke rekrutteringstiltak fungerer best?

På papiret har norske gutter og jenter like muligheter når de skal velge utdanning. Likevel gjør de kjønnstradisjonelle valg. Disse valgmønstrene legger premisser for videre arbeid med rekruttering av jenter til realfagene.

Konferansen byr på et spennende program som i løpet av dagen vil gi innblikk i nyere forskning på området, gi konkrete eksempler på gode rekrutteringstiltak og forslag til undervisningsopplegg og arbeidsmetoder til bruk i klasserommet.

Sted og dato: 27.09.11 Tromsø,
28.09.11 Trondheim, 08.11.11 Oslo,
09.11.11 Bergen

Konferansen er gratis og åpen for alle. For mer informasjon og påmelding, se: www.naturfagsenteret.no/realise-konferanse

Programmet kommer på neste side.

	Program	
09.00	Registrering og kaffe	
09.30	Velkommen	Anders Isnes, Naturfagsenteret Jon Walstad, Matematikksenteret
	Hvorfor er likestilling viktig i 2011?	Marit Fagerheim, UiT Svandis Benediktsdottir, NTNU Anne Marit Skarsbø, UiB
	… men hva vil jeg? Resultater fra forskning på jenters valg og bortvalg av realfag	Ellen K. Henriksen, Fysisk institutt, UiO Maria Vetleseter Bøe, Naturfagsenteret Fredrik Jensen, Naturfagsenteret
	ENT3R-jenter og ALFA-hunner	Hanne Mari Sæther og Lovise K. Landsem, Renatesenteret
11.30	Lunsj	
12.15	Selvfølelse og personlighet i kjønnsrollen	Francois Elsafadi
	Jenter og teknologi på Sørlandet	Fred Skagestad, NHO Agder med flere
	Jenter som teller/Hva skal jeg med realfag? Hva er det egentlig?	Ellen Hillesøy/Frøydis Bådshaug, Dønski vgs/Lynn S. Toftegaard, Laksevåg vgs
14.00	Pause	
14.15	Spennvidde og muligheter for alle i teknologi og design	Anne-Gunn Svorkmo, NSMO/ Liv Dalin, Senter for kunst og kultur
	Økt engasjement gjennom utforskende arbeidsmåter	Sissel Mathiesen, Skolelaboratoriet/ Stein Dankert Kolstø, UiB
	ReaLise- ditt utdanningsvalg!	Fazilat Ullah, Naturfagsenteret Astrid Bondø, Matematikksenteret
15.50	Kommentar til dagen	Anders Isnes, Naturfagsenteret Jon Walstad, Matematikksenteret
16.00	Slutt	

Overgangsprosjektet Ny GIV

Jens Arne Meistad

Bakgrunn

Det er i dag for mange elever på ungdomstrinnet med for lav motivasjon og for svake faglige prestasjoner. Det er stor sannsynlighet for at disse elvene vil ha behov for særskilt organisert støtte og oppfølging knyttet til grunnleggende skrive-, lese- og regneopplæring for å lykkes i videregående opplæring.

Kunnskapsdepartementet inviterte høsten 2010 alle fylkeskommuner og Oslo kommune til å delta i et treårig prosjekt: Gjennomføring i videregående opplæring (Ny GIV), der kommuner og fylkeskommuner etablerer et samarbeid for å bedre denne elevgruppens muligheter til å gjennomføre videregående opplæring.

Ny GIV består av tre delprosjekter. Overgangsprosjektet er ett av disse.

Målgruppen for dette delprosjektet er elever som av ulike grunner er lite motivert for opplæring, har høyt fravær og har svake grunnleggende ferdigheter i skriving, lesing og regning.

I 2010–2011 har 205 grunnskoler med ungdomstrinn og 99 videregående skoler deltatt, fordelt på 51 kommuner, og alle fylker i landet er med.

Dette skoleåret skal prosjektet trappes opp med ca. 700 skoler totalt, og målet er at i 2013 skal alle skoler være med i samarbeidet. Det dreier seg om i underkant av 1300 skoler.

Intensivopplæring for elever på 10. trinn

Dette tiltaket startet ved årsskiftet 2010/2011, og det ble gitt til de 10 % av elevene som hadde svakest karakter til 1. termin i hver av de kommunene som deltok i prosjektet våren 2011.

Disse elevene fikk tilbud om å bli med på intensivopplæring, og totalt 2300 elever har deltatt på intensivopplæringen våren 2011. Kommunene har stått relativt fritt til hvordan de har organisert tilbudet. Det kan se ut som om mange har satt sammen ei egen gruppe med prosjektelever som har hatt et eget fysisk tilholdssted. Dette har ikke nødvendigvis vært innenfor skolens vegger. Vi ser at lærerne/skolene har vært oppfinnsomme når det gjelder fysisk plassering.

Men uansett plassering har målet vært det samme for alle: Å styrke elevenes grunnleggende ferdigheter i lesing, skriving og regning.

Skolering av lærere

For å gjennomføre denne intensivopplæringen har departementet laget et opplegg for skolering av lærere. Skoleringen har gått til en matematikklærer og en norsklærer ved hver skole som har deltatt i prosjektet. Dette har omfattet både lærere på ungdomstrinnet og videregående skole. Det har vært et mål at skolene og lærerne som mottar elevene etter grunnskolen, skulle få den samme skoleringen. Dermed ville de få bedre forutsetninger for å ta over elevene neste skoleår, samt at de lærerne som ikke fikk elever til egen skole kunne være ressurspersoner for de andre.

Skal prosjektet lykkes, er man avhengig av en spredingseffekt til hele skolen og ikke bare til noen motiverte og dedikerte enkeltlærere og ei bestemt elevgruppe. I tillegg til at lærere som har deltatt på kurs skal ha ansvar for denne elevgruppa på egen skole, har også målet vært at de skal være ressurspersoner for hele skolen i arbeidet med å heve prestasjonene.

Organiseringen av skoleringen

Matematikksenteret har hatt faglig ansvar for skoleringen av matematikklærerne med fokus på regning som en grunnleggende ferdighet. Lese- og skrivesenteret har hatt ansvar for norsklærerne.

Skoleringen har vært organisert som samlinger på 3 + 2 dager og i en kombinasjon av felles tema for alle lærere og fagstoff for hver enkelt lærergruppe.

Sentrale emner for fellessekvensene har vært:

- Læringsmiljø og klasseledelse
- Vurdering for læring
- Motivasjon i klasserommet

Valg av pedagogikk

Hvilket påfyll trenger så de lærerne som skal jobbe med svakt presterende elever en kort periode, og hva makter vi å gi lærerne i løpet av en fem dagers «intensivperiode»? Vi har benyttet «eksemplarisk opplæring»: vi har jobbet med lærerne slik vi ønsker de skal jobbe med elevene.

I den første samlinga la vi vekt på tallforståelse. De to siste dagene jobbet vi med forholdstall og innledende oppgaver til algebra. Disse emnene valgte vi ut fra at de inngår i regning som grunnleggende ferdighet i mange fag i ungdomsskolen. En fellesnevner for all metodikk har vært at målet er å skape forståelse og ikke bare en mekanisk innlæring av begrep og formler. De bærende idéer har ellers vært:

- Det er viktig at all opplæring tar utgangspunkt i det nivået eleven(e) befinner seg på.
- Benytte åpne oppgaver som gir muligheter til drøfting, utforskning og som utfordrer evnen til å se sammenhenger.
- Vektlegge forholdet mellom elevenes egen utforskning og lærerens forklaring og oppsummering (respons på elevsvar/ stille spørsmål av høyere orden).
- Hvordan få til samarbeid og kommunikasjon mellom elever?
- Bruk av konkretiseringsmateriell for å vise sammenhenger og som støtte til begrepsutvikling.
- Bruk av kartleggingsverktøy for å avdekke svake (eller manglende) emnekunnskaper.
- Vektlegging av begreper (forståelse, matematisk språk, få misoppfatninger fram i dagen).

Gjennom denne arbeidsformen fikk lærerne mange eksempler på undervisningsopplegg som kunne benyttes i elevgruppa, men hovedpoenget vårt har hele tiden vært å sette fokus på måten å jobbe på. I skoleringen gjennomgikk vi kartleggingsverktøyet «Alle Teller» som avdekker elevenes svake og sterke sider.

Oppsummering

Evaluering av lærerskoleringen tyder på at lærerne har vært fornøyde, og det blir spennende å se om de har tatt med seg tankene ut i egen praksis. Overgangsprosjektet skal følges av et forskningsprosjekt som blant annet skal se på om det har skjedd forandringer i klasserommet som et resultat av skoleringen.

Det blir spennende å følge prosjektet framover. Uformelle historier fra elever, lærere og prosjektledere tyder på at noe har skjedd, så får vi håpe at det kommer både elever i Ny GIV-prosjektet og alle de andre til gode.

Målet er det samme for alle: En følelse av å mestre skolehverdagen.

Novemberkonferansen 2011

Trondheim, onsdag 30.11 og torsdag 1.12

Hold av disse to dagene og få med deg verdifulle innspill til en bedre matematikkundervisning.
Tema for årets konferanse er

Variert matematikkundervisning

Påmeldingsskjema legges ut på matematikksenteret.no i løpet av september.

Christoph Kirfel

Eksperimentering med matematikk

Her kan den interesserte matematikeren møte eleven som har lav selvtillit i faget, til gjensidig faglig utbytte. Her er stoff for alle; samtidig er det ikke nødvendig at leserne skal forstå alt. Matematikk blir spennende, en ser nye sammenhenger og stiller nye spørsmål. Samtidig som boka er en *matematikkfaglig* bok, er den også ei bok om *metode* Den konkretiserer en undervisningsmetode der eksperimentet står sentralt. Boka er aktuell både i videregående skole og lærerutdanningen.

www.caspar.no

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
v/Randi Håpnes
NTNU, Realfagbygget, A4
7491 Trondheim

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det overordnede målet for Landslaget for matematikk i skolen er å heve kvaliteten på matematikkundervisningen i grunnskolen, den videregående skole og på universitet/høyskole.

Landslaget skal stimulere til kontakt og samarbeid mellom lærere på ulike utdanningsnivåer og mellom lærere og andre som er opptatt av matematikk.

Styret for LAMIS

Fra førskole/barnehage
Else H. Devold, Oslo
Fra barnetrinnet
Dordi Askildsen, Stavanger
Fra ungdomstrinnet
Tommy Nordby, Skien
Fra videregående skole
Ann-Mari Jensen, Meløy,
Sidsel Ødegård, Stavanger (leder)
Fra høgskole/universitet
Anders Sanne, Trondheim
Varamedlemmer
Grete Tofteberg, Våler i Østfold,
Øyvind Bjørkås, Bodø

Medlemskontingent

Skole/institusjon	760,–
Enkeltmedlem	380,–
Husstandsmedlem	150,–
Studenter	150,–

Studenter får gratis medlemskap første året. Tangenten inngår i kontingenten. (Gjelder ikke husstandsmedlemmer.)

Organisasjonssekretær

Gro Berg, org.sek@lamis.no
41562324 / 72521715

Lederen har ordet

Anders Sanne

Sidsel Ødegård har ledet LAMIS de siste fire årene, og jeg vil starte med å takke henne for det arbeidet hun har lagt ned til beste for organisasjonen vår. Takk, Sidsel!

LAMIS har altså fått ny leder. Jeg bor i Trondheim, og jobber på Program for lærerutdanning ved NTNU. Der underviser jeg i matematikkdidaktikk på praktisk-pedagogisk utdanning. Dessuten er en del av stillingen min knyttet til Norsk GeoGebra-institutt. Jeg har vært medlem i LAMIS i snart ti år, og har deltatt på en rekke sommerkurs og lokallagsseminar. De siste tre årene har jeg sittet i sentralstyret hvor jeg har hatt verv som nestleder og kasserer. Jeg gleder meg til å ta fatt på oppgavene sammen med gamle og nye styremedlemmer!

Vi som var på sommerkurset i Bodø, fikk være med på et velorganisert kurs med et godt faglig og sosialt program. Det ligger svært mye frivillig arbeid bak et slikt vellykket arrangement, og sommerkurskomitéen i Bodø hadde gjort en veldig god jobb. Takk til komitéen, verkstedsholdere, foredragsholdere og kursdeltakere! Sommerkurset er LAMIS-årets høydepunkt, og vi kan allerede begynne å glede oss til sommerkurset i Bergen 9.–12. august 2012.

På årsmøtet i Bodø ble vedtektenes §8 om lokallag endret. Det ble bestemt at LAMIS' lokallag skal være selvstendige juridiske enheter med egne organisasjonsnumre i Enhetsregisteret, men lokallagene er selvsagt fortsatt bundet av landslagets formålsparagraf, prinsipprogram og arbeidsprogram. Endringen innebærer at LAMIS får en organisasjonsstruktur mer lik den mange andre ideelle organisasjoner har. Lokallagene vil få litt ekstraarbeid i forbindelse med registreringen i Brønnøysund, men jeg tror den nye strukturen på sikt vil forenkle en del ting både for lokallagsstyrene og for sentralleddet i organisasjonen vår. Særlig forventer vi at regnskap og revisjon vil bli enklere, og at det blir lettere for lokallagene å administrere sine egne bankkonti. Det enkelte LAMIS-medlem vil forhåpentlig ikke merke noe særlig til vedtektsendringen.

LAMIS har hatt egne nettsider helt siden organisasjonen ble stiftet i 1997. Hjemmesidene til LAMIS produseres og vedlikeholdes av et stort antall frivillige rundt om i lokallagene, og disse har ved flere anledninger etterspurt en publiseringsløsning som er lettere å lære og enklere i bruk. Før sommeren inngikk vi et samarbeid med Moava – Norges mest brukte hjemmesideløsning for skole og barnehage. De nye hjemmesidene til LAMIS vil bli lansert i løpet av september på www.lamis.no.

Etter- og videreutdanning for lærere

Strategien «Kompetanse for kvalitet 2009–2012» er myndighetenes varige satsing på videreutdanning for lærere. Målet er å styrke den faglige og pedagogiske kompetansen hos lærere i grunnskolen og videregående opplæring. Vi går nå inn i det siste studieåret i inneværende strategiperiode, og i matematikk har lærere som underviser på ungdomstrinnet blitt prioritert. Svært mange lærere har fått tilbud om videreutdanning, men

(fortsettes side 63)

Det nye styret i LAMIS 2011–2012

Anders Sanne: Universitetslektor ved program for lærerutdanning, NTNU. Prosjektleder for NGI, Norsk GeoGebra-institutt siden starten i 2008. Medlem av LAMIS i mange år.

Har sittet i sentralstyret i 3 år, hatt verv både som nestleder og kasserer.

Har jobbet som lærer på Brundalen videregående skole i Trondheim. Jobbet mye med etter- og videreutdanning av lærere. Erfaring med organisasjonsarbeid.

Åge Ryghseter: Rektor på Krokstad skole, en barneskole med ca. 540 elever og 70 ansatte.

Har sendt ansatte på sommerkurs fra 2003, antallet har variert fra 3 til 8 lærere. Er leder av Nedre Buskerud lokallag (2 år) og var med å starte det.

Har sittet i Nedre Eiker kommunestyre i 32 år, formannskapet i 18 år og leder av hovedutvalget for Sentraladm. og Tekniske Tjenester i 8 år. Styremedlem i Sparebanken Øst i 12 år (Norges 9. største sparebank).

Anne-Mari Jensen: Lektor ved Meløy Videregående skole. Sittet i sentralstyret i LAMIS i 5 år.

Ressursperson for NSMO. Skrevet ressurshefte sammen med Kjersti Wæge, med tittelen «Undersøkende matematikkundervisning i videregående skole.»

Marianne Maugesten: Førstelektor ved Høgskolen i Østfold. Lærer i grunnskolen i 17 år. Kursholder for lærere i grunnskolen gjennom mange år.

Medlem i LAMIS siden oppstarten 1997. Sittet i lokallagsstyret i Østfold fra oppstarten i 1998 til 2010. Medarrangør LAMIS sommerkurs i 2010 i Sandefjord. Verkstedholder.

Lærebokforfatter sammen med Svein Torkildsen på *Sirkel*, for ungdomstrinnet. Forfatter, sammen med Audun R. Olafsen, av *Matematikkdidaktikk i klasserommet*.

Grete Tofteberg: Rektor ved Kirkebygden skole i Våler kommune.

Har vært medlem av LAMIS siden oppstarten i 1997. Medarrangør LAMIS sommerkurs i 2010 i Sandefjord. Verkstedholder. Har, som en av to, vært på alle sommerkursene til LAMIS.

Ressursperson for NSMO.

Fikk Holmboe-prisen i 2006.

Trine S. Forfang: Leder for LAMIS Vestfold i to år. Medarrangør LAMIS sommerkurs i 2010 i Sandefjord.

Ferdig allmennlærer fra Høgskolen i Vestfold i 2008, med spesiell vekt på matematikk. Undervist i barneskolens småskoletrinn i 2,5 år.

Våren 2011 har hun vært ansatt ved Høgskolen i Vestfold, der hun har undervist både på allmennfag, på GLU 1–7 og på førskolelærerutdanning.

Else Havnevik Devold: utdannet førskolelærer med hovedfag i barnehagepedagogikk og videreutdanning i småskolepedagogikk, i matematikk og i leseopplæring. Hun arbeider til daglig som lærer i Osloskolen. I 2007 var hun prosjektleder for «Matte på Tvers» – et prosjekt om matematikk i overgang fra barnehage til skole. Hun er forfatter av bøkene *Fem, seks det kommer en heks – om praktisk matematikk i barnehagen*, *En, to støvel og sko – matematikk for de minste* og *Fem til åtte: Matematikk i overgang fra barnehage til skole*.

Tommy Nordby: har vært medlem av LAMIS siden 2005. Av utdanning har han befalsskole, 3-årig faglærer i Naturfag med matematikk, Høgskolen i Telemark, Årsenhet Informatikk, Høgskolen i Telemark. Har videreutdanning i blant annet matematikk, biologi, praktisk veiledning og coaching.

Tommy er blitt en erfaren kursholder etter å ha holdt mange kurs rundt omkring i landet for Matematikksenteret, Skien kommune og Norsk GeoGebra Institutt. Han har holdt kurs i de fleste emner i læreplan. Han har arbeidserfaring fra undervisning, IKT-rådgiver og pedagogisk veileder. Tommy er også ressursperson på Matematikksenteret.

(fortsettatt fra side 63)

alt for mange skoleeiere har ikke fulgt opp med sin del av finansieringen. Dermed har lærere som ønsker å ta videreutdanning i matematikk ikke fått ta del i det tilbudet strategien legger opp til, samtidig som studieplasser har stått tomme.

Skolene har stort behov for videreutdanning i matematikk for lærere også etter 2012. I den videre satsningen forventer LAMIS at ordningen blir utvidet slik at også lærere på barnetrinnet og i videregående skole får tilbud om relevant og god videreutdanning i matematikk. Lærernes mulighet til å ta del i ordningen må dessuten gjøres mindre avhengig av den enkelte skoleeiers økonomi.

Lamis sommerkurs Bodø, 2011

Lena Hågensen

9.–12. august var satt av til årets happening: Lamis sommerkurs. Lokallaget fra Bodø har jobbet godt med arrangementet, og vi var i alt ca. 100 personer – lærere for alle trinn, fra barnehage til høgskole og universitet.

Noen har deltatt år etter år, så det er mye gjensynsglede, men det er også mange nye bekjentskaper som blir etablert.

Det var en høytidlig åpning med en humoristisk vri. Atle Solberg dirigent Kringkastningsorkesteret. Vi fikk høre vakker fiolinmusikk fra Bach, komitéen ønsket velkommen – og så var vi i gang! Årets tema var «Matematikk i ulike rom». Programmet vekslet i år som i fjor mellom plenumsforedrag og verksteder, alle med matematikk i ulike rom som overordnet tema.

Først ut var Tom Lindstrøm som er professor ved Matematisk institutt ved Universitetet i Oslo. Han åpnet med foredrag om «Hva er egentlig dimensjoner?» Han snakket om hvordan vi definerer dimensjon, frihetsgrader og Sierpinski-teppet.

I verkstedene fikk vi mange praktiske idéer til hvordan vi kan legge til rette for variert arbeidssituasjoner for elevene; tilpassete rom, hotellrom, sløydrom …

I plenumsforedragene ble det presentert resultater fra forskning, masteroppgave og hva matematikk egentlig er:

Therese Hagfors: medlem i styret i LAMIS i 2 år, ressursperson for matematikksenteret i 5 år, og har holdt kurs fra barnehage til videregående. Hun har jobbet som lærer i 20 år og hovedsakelig på barnetrinnet. Hun snakket om hva matematikk egentlig er, og hvordan skal man undervise i matematikk for å få engasjerte og nysgjerrige elever. Hun viste oss eksempler på hva hun gjør i sin undervisning.

Ole Enge: førsteamanuensis ved HIST, Avdeling for lærer- og tolkeutdanning. Hans foredrag var på universitetet i Nordland og hadde tittelen «Utforskende

matematikk – utforskende undervisning – modeller som støtter tanken». Han viste til hva forskningen viser om utviklingen av matematisk kompetanse. Vi fikk se eksempler fra ulike land og trinn.

Mona Røsseland: medforfatter til læreverket Multi. Tidligere leder for LAMIS, og har arbeidet i flere år for Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen. Våren 2011 leverte hun en masteroppgave ved Høgskolen i Bergen i Undervisningsvitenskap med vekt på matematikk. I oppgaven har hun sett på hvilke faktorer som spiller inn når elever både mister interessen for matematikk og presterer dårligere oppover i skolesystemet. Tittelen hennes var «Jeg gidder ikke bry meg mer». Hun fortalte om hvilke funn hun har gjort i sin forskning på hva det er som gjør at elever som både er glad og flinke i matematikk på barnetrinnet, får problemer med faget på ungdomstrinnet.

Pål Pedersen: rektor på universitetet i Nordland ønsket velkommen på universitetet, hvor han gav oss et innblikk i utdanning og utviklingen i Nordland fylke.

Vi bodde godt, hadde hyggelige måltider sammen med god mat og drikke. Vi hadde sang og musikk. En dag hadde vi utflukt til Saltstraumen, været var ikke helt på vår side, så tilbake i «teltet» fikk vi servert nydelig fiskesuppe.

Det ble også tid til møter med representanter for lokallagene i Lamis og sentralstyret. Og det ble avholdt årsmøte i Lamis med påfølgende festmiddag. Festmiddagen var en flott seanse med mange kulturelle innslag: Nordlandspols, tale om innpust, klappelek, og allmennkunnskap om gitaren.

Jeg reiste fra Bodø med en god følelse og med mange inntrykk som nå skal bearbeides. Jeg hadde truffet mange gamle kjente og blitt litt kjent med flere nye. Og jeg syns jeg fikk mye faglig i løpet av kurset. Dagene var fylt av hyggelige opplevelser og masse latter. Jeg var heldig som fikk være med! Nå er det bare ett år til neste gang vi samles til sommerkurs, denne gangen i Bergen fra 9. til 12. august. Temaet skal være «Matematikk i aksjon». Jeg vil vente spent på å se hvordan programmet blir, gleder meg allerede til dagen på Vil Vite, og ønsker komitéen i Bergen lykke til!

Styrets årsberetning 2010–2011

Styret har bestått av

Fra barnehage: Esle H. Devold, Oslo.
Fra grunnskolens barnetrinn: Dordi Askildsen, Rogaland.
Fra grunnskolens ungdomstrinn: Tommy Nordby, Telemark.
Fra videregående skole: Sidsel Ødegård, Rogaland (leder), Anne-Mari Jensen, Nordland.
Fra høyskole/universitet: Anders Sanne, Sør Trøndelag.
Varamedlem: Grete Tofteberg, Østfold, Øyvind Bjørkås, Bodø.

Valgkomité

Lisbet Karlsen, Vestfold, Kristian Ranestad, Oslo, Susanne Stengrundet. Vara: Ronny Birkeland, Øvre Romeriket.

Medlemmer råd/utvalg

Norsk matematikkråd: Anne Mari Jensen og Anja Glad von Zernichow.
Abelfondets barne- og ungdomsutvalg: Else Devold og Gro Berg

Styremøter

Styret har vært samlet til 4 møter:

September 2010 (strategisamling), november 2010, februar 2011 og april 2011.

Nettmøter forøvrig, slik at møtehyppigheten har vært ca. en gang per måned.

Medlemstallet

Per 01.06.11 (01.06.10) hadde LAMIS totalt 3559 (3582) medlemmer, derav
1552 (1840) enkeltmedlemmer, 1799 (1576) skolemedlemmer, 198 (156) studentmedlemmer og 10 (13) husstandsmedlemmer.

Det er mange medlemmer som ikke har oppgitt hvilket skoleslag de tilhører (1760 av 3559 mangler påføring av skoleslag). Av 1549 skoler/institusjonsmedlemmer har vi

21 barnehager
94 1–10-skoler
510 barneskoler
141 ungdomsskoler
38 videregående skoler
3 universitet/høgskoler
resten er «umarkert».

Av 1795 personmedlemmer har vi

2 fra barnehager
70 fra 1–10 skoler
450 fra barneskoler
178 fra ungdomsskoler
70 fra videregående skoler
36 fra universitet/høgskoler
resten er «umarkert».

Lokallag

LAMIS har nå 20 lokallag. Fire lokallag (Innherred, Kristiansund og Frei, Midtre Gudbrandsdalen og Sør-Varanger) ble vedtatt lagt ned i år på grunn av manglende aktivitet de siste to år. Lokallagene ble lagt ned i samråd med de lokale ressurspersonene. I ettertid har vi fått signaler om at de vil starte opp igjen i Sør-Varanger. Det har som vanlig vært varierende aktivitet rundt om i lokallagene, noen lokallag har meget høy aktivitet, mens noen sliter med oppmøte.

Lokallagene er fremdeles satsingsområde for styret. I januar arrangerte vi den femte lokallagssamlingen, denne gangen på Best Western, Gardermoen. Alle lokallagene ble invitert til å delta med to styremedlemmer. Faglig innspill fikk vi fra Lill Sørensen med foredraget: «Sammenheng mellom lærers kompetanse og elevenes læring» og Bjørn Aarrestad med foredraget «Fra kompetansemål til prøve». Vi hadde også besøk fra Fokus Bank, der de informerte om produkter og samarbeidet så langt. Tilbakemeldinger etter samlingen er positive og det uttrykkes at dette er både nyttig og nødvendig for å opprettholde engasjementet i lokallagene.

Verving av nye medlemmer er alltid i fokus på lokallagskveldene. Alle lokallag skal ha våre tidsskrifter og Tangenten tilgjengelig til framvisning på lokallagskvelder. Nye medlemmer får en velkomstpakke av tidskrifter.

Satsing mot barnehage-personell

«Fem til åtte», nytt hefte i skriftserien rettet mot barnehage er utgitt. Dette inngår som en del av velkomstpakken til nye medlemmer fra barnehagen. Aktiviteter rettet mot barnehage gjennom lokallag og sommerkurs.

Satsing mot videregående skole

Aktiviteten rettet mot videregående skole har også i år vært på et lokalt plan gjennom lokallagskvelder og sommerkurs. Nytt undervisningsopplegg innenfor økonomi (VG1P) er lansert.

Skolenes matematikkdag

Skolenes matematikkdag ble drøftet på lokallagssamlingen og det er bred enighet der om at den fremdeles er viktig for LAMIS. Matematikkheftet ble denne gangen laget av Sunmøre lokallag ved: Bente Emma Austnes, Henrik Kirkegaard, Elin Opsal, Elisabeth Rønnestad, Sissel Saltkjel, Odd Helge Tonheim og Tone Topphol.

Dette er fremdeles et populært innslag på lokallagskveldene.

Follo lokallag er snart ferdig med heftet for 2012.

Organisasjonssekretær

Sekretæren har arbeidet med oppgaver knyttet til:

Lokallag. Besøk i etablerte lokallag og arrangert lokallagssamling. Ansvarlig for utsending av infoskriv til lokallagene.

Publikasjoner. Redaktør for sommerkursrapporten. Bistod komitéen som lagde heftet til Skolenes Matematikkdag 2011 og 2012.

Tangenten. Ansvar for LAMIS-sidene sammen med styrelederen.

Kontakt med medlemmer og svar på diverse spørsmål til LAMIS.

Styremøter. Deltar på styremøter og følger opp saker som vedtas i styret.

Fokus Bank. Samarbeid om utvikling av undervisningsopplegg.

Deltatt på anledninger der det er naturlig, som Ny Giv-samlinger og Holmboe-/Abelprisutdeling.

Websidene

Websiden prøver vi stadig å forbedre. En arbeidsgruppe er nedsatt for å se på alternativ til nåværende hjemmeside. Samtlige lokallag drifter egne nettsider, med varierende aktivitet. Nytt alternativ lanseres på sommerkurs 2011.

Skriftserie

Ingen nye hefter i skriftserien denne perioden. Salget har hatt en kraftig økning, mye på grunn av salg av «Et ess i ermet» til de nasjonale Ny Giv-samlingene.

Samarbeidspartnere

Lamis samarbeider med Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen. Sekretæren vår, Randi Håpnes, er ansatt ved NSMO og har kontor på senteret.

Tangenten er en viktig samarbeidspartner. Lamis disponerer de 12 siste sidene i hvert nummer. Gjennom Tangenten har vi prøvd å vise LAMIS sin allsidighet, både med innspill fra styret og med innslag fra aktiviteten i lokallagene.

Abelkomitéen er en viktig samarbeidspartner for LAMIS. Abelprisens barne- og ungdomsutvalg har opprettet et tett samarbeid med LAMIS, for å arbeide mot samme mål om å bidra til å styrke interessen for matematikk og realfag blant barn og unge. Abelfondet støtter også LAMIS direkte gjennom midler til blant annet sommerkurset og Matematikkdagheftet.

Vitensentrene i hele landet og LAMIS fortsetter samarbeidet for å dele erfaringer og gode undervisningsopplegg med hverandre. Vår representant er Else Devold.

Samarbeid med den svenske matematikkforeningen SMaL er noe sparsomt. Det er ønskelig med nordisk samarbeid. SMaL er invitert til sommerkurs i Bodø.

LAMIS har fortsatt samarbeidet med Fokus Bank og inngått en avtale for to nye år. De eksisterende undervisningsoppleggene vil vi fortsette å markedsføre. Det er nå under utarbeidelse et nytt undervisningsopplegg, «Dream on», for de mellom 15–18 år. LAMIS vil der være med både i utarbeiding og markedsføringen.

Det er igangsatt samarbeid med NHO. Fire representanter fra LAMIS var i møte med NHO sentralt og NHO Vestfold. NHO er sponsor for sommerkurset i Bodø og deltar med to representanter. Det er kommet signaler om mulighet for et framtidig samarbeid.

Høringer

LAMIS er høringsinstans og har uttalt seg i forhold til «Høring om forslag til endringer i opplæringsloven og privatskoleloven».

Kontakt med myndighetene med siktemål å øke etterutdanningen i matematikk for lærere

Dette har vært en punkt i handlingsplanen, men er et forsømt område. Dette punktet føres derfor videre i forslaget for handlingsplan for kommende år.

Sommerkurs

Sommerkurset 2010 ble arrangert i Sandefjord. Tittelen var «Matematikk – nå snakker vi». Ca. 120 deltagere deltok.

Sommerkurs 2011 arrangeres i Bodø med tittelen «Matematikk i alle rom».

(fortsatt fra side 71)

Styrets forslag: Grant Thornton Trondheim.

Saken går ut pga. tidligere vedtak i sak 10.

Sak 15/11: Valg til valgkomité

Styrets forslag: Lisbet Karlsen, velges for to år

Valgkomitéens øvrige medlemmer er ikke på valg i år: Kristian Ranestad, Susanne Stengrundet, og vara: Ronny Birkeland.

Vedtak: Lisbet Karlsen er valgt.

Årsmøte 2011

Torsdag 11. august 2011

Tilstede: 41 stemmeberettigede medlemmer

Sak 1/11: Godkjenning av innkalling

Vedtak: Innkallingen godkjennes.

Sak 2/11: Godkjenning av sakliste

Vedtak: Sakslista godkjennes.

Sak 3/11: Valg av møteleder og ordstyrer

Styrets forslag: Møteleder Mona Rørseland, ordstyrer Tommy Nordby.

Vedtak: Begge forslag godkjennes.

Sak 4/11: Valg av referenter, protokollunderskrivere og tellekorps

Styrets forslag: Referenter Gert Hana og Anne Mari Jensen, Protokollunderskriver Hugo Christensen, Tellekorps Else H. Devold, Dordi Askildsen, Anne Grete Aven.

Da Gert Hana hadde meldt sykdomsforfall, foreslo styret Gro Berg som referent i hans sted.

Vedtak: Alle forslag godkjennes.

Sak 5/11 Forretningsorden og valgreglement

Forretningsorden og valgreglement er vedlagt innkallingen.

Vedtak: Forretningsorden og valgreglement godkjennes.

Sak 6/11: Styrets årsberetning

Årsberetningen er vedlagt innkallingen.

Presenteres av Sidsel Ødegård.

Vedtak: Årsberetning godkjennes med følgende tilføyelse under Samarbeidspartnere:

Det er igangsatt samarbeid med NHO. Fire representanter fra Lamis var i møte med NHO sentralt og NHO Vestfold. NHO er sponsor for sommerkurset i Bodø og deltar med to representanter. Det er kommet signaler om mulighet for et framtidig samarbeid.

Sak 7/11: Regnskap for 2010

Regnskapet er vedlagt innkallingen.

Presenteres av Anders Sanne.

Regnskapet er revidert og godkjent av revisor.

Kasserer arbeider med en del endringer i regnskapssystemet:

Lamis har ett organisasjonsnummer og er derfor én organisasjon. For å få et fullstendig regnskap må lokallagene ha sitt eget organisasjonsnummer og eget regnskap. Sommerkurset og matematikkdagheftet må inn i Lamis' regnskap som prosjekt-regnskap.

Regnskap for Sommerkurs 2010 og matematikkdagheftet 2010 ble presentert.

Vedtak: Regnskapet godkjennes og styret meddeles ansvarsfrihet.

Sak 8/11: Budsjett for 2012

Styrets budsjettforslag ligger ved sakspapirene.

Presenteres av Anders Sanne.

Vedtak: Årsmøtet gir sin støtte til rammebudsjettet, styret har ansvar for å følge dette.

Sak 9/11: Vedtektsendringer

Forslag fra styret ligger ved sakspapirene.

Presenteres av Anders Sanne

Årsmøtet vedtok vedtektene med følgende endringer:

§1 andre avsnitt: Landslaget er registrert som interesseorganisasjon i Frivillighetsregisteret ved Brønnøysundregistrene.

§4: To kulepunkt føyes til i lista:

– Årsmøtet vedtar rammebudsjett
– Fastsetting av styrehonorar.

§8: 1. avsnitt, 2. setning endres til: Lokallagene er selvstendige juridiske enheter med egne organisasjonsnummer i Enhetsregisteret, men de er bundet av landslagets formålsparagraf, prinsipprogram og arbeidsprogram.

Følgende kulepunkt strykes:

Bankkonto med nettilgang tildeles av Lamis sentralt.

Endring i kulepunkt:

For å opprettholde et lokallag må lokallagsstyret sende årsrapport og regnskap for lokallaget til sentralstyret en gang per år.

§ 10: Første setning endres til: Styrelederen har anvisningsmyndighet for landslagets midler etter rammebudsjett.

§ 10: Andre avsnitt endres til: Styret engasjerer offentlig godkjent revisor.

§ 13: En ny paragraf føyes til: Disse vedtektene er fastsatt av årsmøte 11. august 2011, og gjort gjeldende med virkning fra samme dato.

Sak 10/11: Arbeidsprogram (Handlingsplan) for 2011/2012

Sidsel Ødegård legger fram prioriterte områder.

Styrets forslag til handlingsplan ligger ved sakspapirene.

I vedtektene omtales handlingsplan som arbeidsprogram. Fra nå av omtales handlingsplan som arbeidsprogram.

Retting av skrivefeil: Lamis har 20 lokallag, ikke 204 som det står i arbeidsprogrammet.

Vedtak: Arbeidsprogrammet for 2011-2012 slik det er lagt fram for årsmøtet, godkjennes.

Sak 11/11: Medlemsavgift

Legges fram av møteleder.

Styret foreslår at medlemsavgiften for skoler/institusjoner økes slik at den svarer til to enkeltmedlemsskap. Før øvrige medlemskategorier foreslår styret uendret medlemsavgift:

– 380 kr for enkeltmedlem m/Tangenten
– 150 kr for husstandsmedlemmer
– 150 kr for studenter m/Tangenten
– 760 kr for skoler/institusjoner m/Tangenten

Vedtak: Forslaget godkjennes.

Sak 12/11: Styrehonorar

Kasserer la fram forslag til vedtak:

Samlet styrehonorar for 2012 settes til 150 000 kr inkl. arbeidsgiveravgift.

Sentralstyret avgjør selv hvordan honoraret fordeles. Det skal utarbeides en avtale med hvert enkelt styremedlem angående godtgjøring og utbetaling.

Vedtak: Forslaget godkjennes.

Sak 13/11: Valg av styre- og varamedlemmer

Valgkomitéens forslag:

Styre: Anders Sanne – leder

Åge Rygsæther – ny

Anne-Mari Jensen – gjenvalg

Marianne Maugesten – velges for et år

Else Devold og Tommy Nordby er ikke på valg.

Vararepresentanter:

Grete Tofteberg – 1. vara, gjenvalg

Trine Forfang – 2. vara, ny.

Vedtak: De foreslåtte representantene er valgt.

Sak 14/11: Valg av godkjent revisor

(fortsettes side 70)

Matematikk i første klasse

Jeg fikk en 50-lapp av min mor.
Hun syntes jeg var blitt så flink og så stor.
Jeg er begynt i første klasse
og derfor var en 50-lapp akkurat passe.

Jeg møtte Stian på vei til skolen,
han hadde to 20-kronestykker, som blinket i solen.
Jeg tenkte at 2 er jo mer enn 1,
så jeg byttet med ham, jeg var ikke sen.

Litt senere traff jeg Gudmund fra Stranda
og han hadde tre blanke 10-kronestykker i handa.
Jeg spurte ham: «Vil du bytte med meg?
Kom igjen min venn, vær ikke så treg.»

«Herre min hatt! Kan du se hvor det rykker.»
Snart hadde jeg byttet til fire nye 5-kronestykker.
Jeg byttet igjen og innen dagen var omme,
lå det fem fine 1-kronestykker i min lomme.

Da mor sa godnatt, var jeg stolt som en pave.
Tenk at jeg hadde fått en slik sjelden gave:
Jeg hadde byttet en enkel lapp til fem «penger».
Kan du forstå at min mor nå med hodet henger?

Henrik Kirkegaard