Korden

Når jeg med dette nummeret av TANGENTEN overtar ansvaret som redaktør, vil jeg først takke Ole Einar Torkildsen for stor innsats gjennom 5 år. Han overtok etter Stieg Mellin-Olsen. Som fersk i redaksjonen kan det ikke ha vært en lett oppgave å overta ansvaret. Tidsskriftet har gjennomgått en positiv utvikling de siste årene. Nettet av skrivevillige forfattere har vokst. Abonnementstallene har steget og samarbeidet med LAMIS har vist seg som et heldig trekk for alle parter. En stor takk til Ole Einar!

Tingene ligger vel til rette når jeg nå overtar redaktørstolen. Jeg kommer inn i ordnete forhold, noe som jeg takker min forgjenger for. Likevel ser jeg det er mye å ta fatt på.

- TANGENTEN åpner med et elevinnlegg. Vi får et innblikk i hvordan nye evalueringsformer oppleves fra elevsiden. Mange skoler prøver ut nye eksamensformer, og det er viktig at positive erfaringer bringes videre til hele systemet.
- I dette nummeret ser vi på privatskoler i Norge som bl.a. utmerker seg gjennom et spesielt syn på matematikken. Steinerskolen og Montessoriskolen presenterer sine syn på faget. Vi kan se likhetstrekk med den offentlige skolen samtidig som der er forskjeller. Reformene på 80- og 90-tallet har muligens bidratt til å minke forskjellene.
- TANGENTEN går nye veier. Til neste nummer inviterer vi Signe Holm Knudtzon og Janne Fauskanger som gjesteredaktører. Temaet er «jenter og matematikk», et område der forskning og forsøksvirksomhet vokser. Det blir viktig å holde tritt med utviklingen på denne fronten og å kunne sammenholde nyvinninger med våre egne erfaringer fra klasserommene.
- Diskusjonen om nye læreres matematikkunskaper som har vært tydelig i avisene og som har funnet sine nedslag i TANGENTEN er fortsatt levende. Mye av den bunner i forskjellige tolkninger av «matematikkens vesen». Vi ser klart at utviklingen i samfunnet krever forandringer i skolen og dermed også i matematikkundervisning. Dette rokker ved matematikkens vesen slik mange ser det.

- Matematikkåret 2000 har synliggjort faget i nye sammenhenger. TANGENTEN har tatt initiativ til et nordisk samarbeidsprosjekt. Fellesutgivelsen om matematikkundervisning i Norden vil foreligge i oktober. Alle våre abonnenter vil få et eksemplar av boka som en liten 2000-årsgave.

Til slutt: Hvorfor vil noen drive et blad for matematikk i skolen? Kan ikke lærerne finne aktuelt stoff på internettet? Er der ikke uhorvelige mengder av tilbud om undervisningsopplegg, oppgaver, rapporter og kopieringoriginaler tilgjengelige gjennom internett, skolenett og diskusjonsgrupper? Hvorfor da et tidsskrift i tillegg?

Etter min mening henger vår eksistensberettigelse sammen med *kvalitet*. Som redaksjon forsøker vi å arbeide fram et blad som virker til bevisstgjøring og kvalitetsheving. Vi vil at TANGENTEN skal være noe annet enn det en kan få gjennom søk i en hvilken som helst søkemotor. Samtidig som vi håper på å inspirere leserne, vil vi kanskje spare dem for arbeid og frustrasjon som søk på nettet kan medføre. Det er klart for oss at TANGENTEN må bli enda mer aktuell og treffe våre lesere på hjemmebane.

Redaktørskifte

Illustratøren vår har på omslagssiden latt seg inspirere av sommerens fotballfester. Da landslaget ikke kom så langt som forventet, begynte Bjørg Tronshart å studere andre spennende sider ved fotballens struktur. Her er mye artig matematikk å hente.

Christoph Kirfel

Erling Rangnes

Klasseromsmodellen – munnleg eksamen for ein ungdomsskoleelev

Eg går i klasse 10 på ungdomsskulen der vi nyleg var oppe i munnleg eksamen. Eg kom opp i matte.

Vi begynte tidleg med førebuingane, med valg av type eksamen, eventuell eksamenspartnar osv. Sjølv valgte eg og ein kamerat å gå opp saman etter klasseromsmodellen, der vi skulle gå opp saman med tre andre grupper i faget vi ville få. Vi førebudde oss på samarbeid gjennom fleire oppgåver og prosjekt i skuletida.

Då det begynte å nærma seg fekk vi vite meir om måten å ha klasseromsmodellen. Vi fekk vita at vi hadde ei viss tid til å førebu oss om eit spesielt emne før vi vart spurde. Vi hadde og ein liten prøveeksamen for å sjå litt korleis det føregjekk.

Då eg og kameraten min fekk vite at vi hadde kome opp i matte, vart vi fortald om kva som var spesielt med det, deriblant at vi fekk utdelt eit emne og opplysninger for så å kunne lage og løyse eigne oppgåver. Dermed var det klart for øvinga. Vi fekk ein lesedag før sjølve eksamen, der eg og kameraten min øvde oss på å lage eigne oppgåver om reise. Vi fann ut omtrent kor mykje det kostar å bu på hotell og å ete på ei reise til ein tilfeldig plass.

På eksamensdagen fekk eg meg ei positiv overrasking. I staden for å få ei viss tid til å lage oppgåver, kom faglærar og eksaminator rundt frå gruppe til gruppe og stilte spørsmål og ba oss forklare kva vi hadde kome fram til, kva vi holdt på med osv. Eg meinte dette letta opp på presset og gjorde det letteare å konsentrere seg . Eg veit ikkje korleis det var for andre, men eg likte denne eksamensforma. Uansett, vi starta med å trekke ei oppgåve til kvar gruppe. Vi fekk overskrifta «EM i fotball» og informasjon om mål på fotballbana, lagoppsetting, bilettprisar til fotballkampane, valuta, flybilettprisar og hotellkostnader. Vi lagde først eit tankekart om kva oppgåver det var mogleg å lage. Kameraten min valgte å ta areala på fotballbana først medan eg fordreiv tida med å finne ut kor mykje det ville koste for ein familie på to vaksne og to barn å reise til Amsterdam, vera der i fem dagar og sjå to kampar. Deretter rekna eg alt, bortsett frå buss og flykostnader, om til gylden, og fekk dermed inn valuta og. Vi fekk dessutan fleire utfordringar frå sensor. Vi var innom tidsrekning og sannsynsrekning også. Oppgåvene var ikkje altfor vanskelege, det verka som vanskegraden vart tilpassa ut frå kva vi fekk til, og vi gjorde det vi kunne for å svare.

Det var få av oss som brukte klasseromsmodellen som fekk lågare karakter i matte munnleg eksamen enn det vi hadde i standpunkt. Fleire av oss, deriblant eg sjølv fekk ein karakter over standpunkt. Det kan kanskje ha noko med at stemninga var mykje lettare enn eg forventa. Eg fekk riktignok jernteppe eit par gonger, men kom alltid inn i nærleiken av riktig svar. Då vi var ferdige med alle oppgåvene, spurde sensor om kva karakter vi trudde vi fortende. Vi vart sende ut på gongen og tatt inn igjen ein etter ein for å få vite karakteren vår. Det verka som om dei fleste var fornøyde.

Lisbet Karlsen

Matematikk i et Montessori-miljø

Etter ca. 20 år i vanlig skole, på barnetrinn og ungdomstrinn, har jeg de siste tre årene arbeidet ved Jareteigen Montessori skole i Tønsberg. Jeg har lest mye om Montessoris prinsipper, og jeg har gode kolleger som er velvillige veiledere i det daglige arbeidet. Jeg har imidlertid ikke tatt noen etterutdanning i Montessori-metoden. Derfor er mye av det jeg skriver hentet fra vår fagplan, som er forfattet av Carla Foster. Hun har lang erfaring fra Montessori-skoler i USA og i Norge. Hun har jobbet ved Jareteigen i 6 år.

Montessori-metoden er basert på det medfødte eller iboende potensialet mennesker har for matematikk, identifisert som «det matematiske sinn», som består av evnen til kreativ tenkning og evnen til abstrakt tenkning. Dette potensialet må, i følge Montessori, utdannes og utvikles. Siden barnet har en medfødt evne til å lære og forstå matematikk, gir vi ikke alle regler, men hjelper barnet til å finne disse selv, gjennom arbeid med konkret materiell. Gjennom dette arbeidet vil barnet få et «matematisk redskap» til å forstå verden rundt seg.

En ikke-lineær metode

Montessori-metoden kan kalles ikke-lineær. Barnet gis muligheten til å lære utfra sine *sensitive perioder*. Dette vil si at læreren tilpasser sine presentasjoner og valg av stoff i forhold til hvilket nivå det enkelte barn er på. Gjennom observasjon fant Montessori ut at man kan undervise barn helt ned i 3–4 års alder i matematikk, dersom det blir gjort på barnets egne premisser. Dette har jeg sett fungere i vår barnehage på Jareteigen. Barna leker seg til matematikk, med konkret materiell som er tilpasset hver enkelts nivå.

For at eleven skal få et best mulig grunnlag for sin matematikkforståelse, gis presentasjoner i beslektede emner når det er naturlig at de kommer inn. Dette kan illustreres f. eks. ved emnet multiplikasjon, som kan sees som en spesiell form for addisjon. Når elevene i femårsalder har fått konseptet addisjon, kan de utmerket godt bli presentert konseptet multiplikasjon. Et annet eksempel er brøk i forhold til divisjon, faktorer osv.

Matematikk er et fag som forsterker den evnen til eksakthet og nøyaktighet som er typisk for et barns psyke. Derfor konstruerte Montessori tre stadier i undervisningen basert på dette:

1. Telling i desimalsystemet, først konkret med materiell, så abstrakt.
2. Læring av fakta, memorering, alle mulige kombinasjoner innenfor de fire regningsartene.
3. Reglene for vårt titallssystem, plassverdi/hierarki osv, først konkret med materiell, så abstrakt.

Geometri

Når det gjelder geometri, er dette et eget kapittel i Montessori-metoden. Geometri er et viktig fag som hjelper elevene til å skape seg et bilde av den verden de er en del av, og den matematiske verden de skal bli seg bevisst gjennom arbeidet i skolen. Vi er omgitt av geometriske former. Barnet er vant til geometriske former helt fra starten av sitt liv, og det vil derfor være naturlig å jobbe med dem fra tidlige alderstrinn.

Materiellet i geometri brukes også for å oppøve resonneringsevne og logikk. Elevene vil for eksempel kunne bevise for seg selv at en halvpart som ser ut som firkant er like stor som en halvpart som ser ut som en trekant, fordi dette materiellet er bygget opp av småbiter som kan flyttes på. Vi har et utmerket materiell som viser Pytagoras' setning. Ved å flytte på små biter, ser elevene tydelig sammenhengen. Geometrimateriellet hjelper også elevene til å se logikken i oppbyggingen av formler.

I barnehagen er arbeidet med geometri av en ubevisst art. Barna gjør oppdagelser og lagrer disse gjennom repetisjon av aktivitetene. Barna vil overføre det de har gjort med materiellet til sine omgivelser og søke å finne de samme relasjoner der. Montessori kaller dette indirekte forberedelser for barnet, forberedelser til den undervisning de siden vil få i skolen. Barna vil da gjenkjenne de geometriske emnene, faget er ikke helt nytt. I skolen vil undervisningen bli av mer vitenskapelig art. Arbeidet med geometri vil gi elevene en mer og mer detaljert kunnskap om emnene man tar for seg, ettersom undervisningen har form av et spiralprinsipp.

Bruk av visuelle og taktile sanser

Montessori-metoden er basert på bruk av konkret materiell. De bruker sine visuelle og taktile sanser. Metoden er basert på at elevene skal gjøre oppdagelser, finne regler og mønstre, men alt materiell blir introdusert av lærer før elevne kan gjøre bruk av det selv. Størst utvalg av materiell har småskolen. Her finnes flere typer materiell for hvert enkelt tema. Det gir variasjon, og det gir mulighet for å finne et materiell som passer for den enkelte. Mye av materiellet kan brukes på flere plan, slik at nye presentasjoner kan føre eleven videre med det samme, kjente materiellet.

Selvinstruerende materiell og individualisering

Materiellet er selvinstruerende og selvkontrollerende etter at eleven har fått den første innføringen. Det er f. eks. basert på fargekoder for å hjelpe barnet til å huske plasshierarkiet i desimalsystemet, samtidig som det gir gjenkjenning når nytt materiell blir presentert. Fargekodene blir presentert for barna allerede i barnehagen.

Gjennom bruk av forskjellig materiell oppnår elevene litt ulike tilnærmingsmåter til de ulike emnene de holder på med, men prinsippet i materiellet er likevel det samme. Materiellet hjelper barnet å nå abstraksjonsnivå, og når barnet har kommet dit, vil det forlate materiellet av seg selv. Dette vil selvsagt variere svært fra elev til elev, også innenfor de ulike emnene for den enkelte elev. Vi er innom mange emner, og etter hvert som forståelsen øker hos eleven, gir læreren. «mer kjøtt på beina» – større utfordringer for eleven.

I storskolen, der jeg jobber, vil de aller fleste elevene jobbe uten materiell etter hvert. Vi har likevel et utvalg av materiellet fra småskolen hos oss, slik at elevene kan gå tilbake til dette etter behov.

Læreren gir faglige presentasjoner til små grupper av elever, der bruken av materiellet blir presentert. Elevene deltar svært aktivt, og presentasjonene har ofte preg av en muntlig framstilling av matematiske emner, i tillegg til at elevene er medhjelpere med materiellet.

Elevene får fortløpende rettet de oppgavene de har jobbet med etter en presentasjon. Dersom vi ser at eleven mangler den innsikt han/hun trenger for å komme videre, gir vi heller en ny presentasjon, enn å fokusere på feilene.

I dette systemet passer det dårlig å følge en lærebok. Elevene jobber ofte med ulike temaer, utfra egne ønsker og behov. Ofte dukker det opp et behov for å lære noe spesielt for å komme videre med et tema.

I storskolen, særlig i 7. klasse, velger elevene i stor grad selv hvilke temaer de ønsker å jobbe med. På dette trinnet har de fleste blitt flinke til å selv studere utdrag fra fagplanen og se hva de trenger/mangler av kunnskap.

Selv om jeg mangler innsikt i bruken av alt materiellet, kan jeg i storskolen se resultatet av at elevene har fått arbeide med det i småskolen. Dessuten har jeg lært å bruke en del materiell. Det føles riktig og godt å få undervise barn i temaer de ber om å bli undervist i. Det blir stadig lettere å jobbe uten lærebok. Vi rekker mye mer, synes jeg! I de temaene der det ikke er naturlig å bruke konkret

(fortsetter side 11)

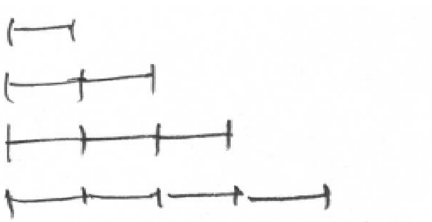
Erik Marstrander

Matematikk i steinerskolen

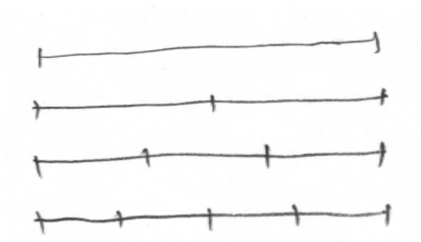
Allment om matematikk i steinerskolen

Fagplanen i matematikk på steinerskolen er intimt forbundet med det spirituelle menneskesynet som skolen prøver å arbeide ut ifra. Slik som alle andre fag på skolen er også matematikk et fag som søkes forstått som et pedagogisk virkemiddel i barnets utvikling. Det står ikke i motsetning til det rettslige krav barnets selv har til skolen om kunnskap og ferdigheter, men fører til en annen læreplan. Opparbeidelse av kunnskaper og regneferdigheter, enten det skjer ved aktivitet, selvforståelse eller memorering representerer pedagogiske virkemidler. Vi kan derfor vanskelig komme bort fra at faginnhold, innlæringsform, egen bearbeidelse og testing både enkeltvis og samlet representerer et syn på mennesket som blir formidlet til elevene sammen med stoffet. Det ville være vanskelig å forsvare at det finns en objektiv matematikkundervisning. Ikke så å forstå at matematikken er subjektiv eller underlagt personlige meninger, men måten man underviser på er ikke objektiv. All undervisning uttaler et menneskesyn og derved også et livssyn.

Allerede en så enkelt ting som å telle representerer i så måte et tankekors. Vi er alle vant til å telle 1, 2, 3, 4, … osv, og samtidig forestille oss at vi legger en til hver gang. Derfor er 4 større enn 3, 3 er større enn 2, 2 er større enn 1, som er den minste.



Man assosierer med det gjenstandsmessige, og tenker seg at menneskenes evne til å telle er et produkt av at de en gang i tiden satt å lekte seg med småstein eller bønner. Det ligger et materialistisk livssyn til grunn for slike assosiasjoner. Ser vi derimot på organismer, både i planteriket og i dyreriket, telles det på en helt annen måte. Sjøstjernen teller til 5 ved å dele seg i 5 deler, agurken teller til 3 ved å dele frukten i tre frøkamre og liljen teller til 6 ved å sette ut seks kronblader i blomsten. I naturen finner det ikke sted en kummulativ telling, men en divitiv, ikke en oppsamling, men en oppdeling.



Biologene arbeider i vår tid med å forstå det overordete formprinsipp som ligger til grunn for slike dannelser. Man kan bare registrere at sjøstjerneorganismen «vet» at den skal dele seg i 5 lenge før den har møtt verdenen. Selv oppdagelsen av det biologiske prinsipp, enten det dreier seg om gener, aminosyrer eller andre kjemiske forbindelser, vil ikke rokke ved at naturen faktisk deler seg på denne måten. I motsetning til en kvantitativ telling kunne man være fristet til å kalle dette en kvalitativ telling. Det ligger en kvalitet, dvs en egenart, i håndens fem fingre. I den kvalitative telling er derfor 1 det største tallet, mens 4 er mindre.

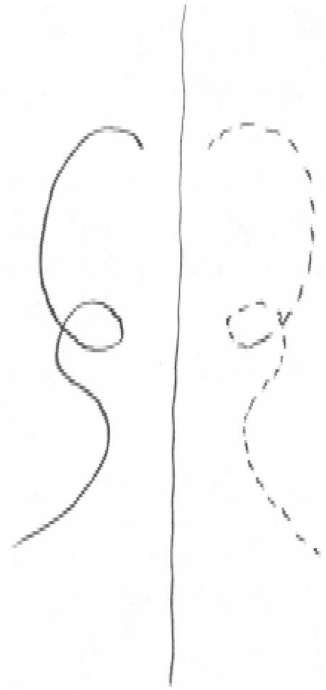
Den kvalitative opplevelse av verden ligger barnets bevissthet meget nær. Derfor introduseres tellingen også på den kvalitative måten, dvs oppdeling av enheten. Et tau blir delt i to, tre og fire, en sirkel blir delt i tre og fire som igjen gir en trekant og en firkant. Slik bygges den første tallforståelse opp rundt tallene som en kvalitet i seg selv, ikke resultat av en oppsamling. For barna synes dette å være helt uproblematisk, ja mer enn det: Det synes som en riktig fremstillingsform og et riktig innhold. Verden er meningsfull, også tallene! For oss voksne derimot rører slike tanker ved de mest dyptgående problemstillinger som europeisk kultur har forholdt seg til: Har gjenstandene i verden, enten det dreier seg om et dyr eller tallet 12 en egenart utover det fysiske materiale som er synlig? Det toppet seg i den store universaliastriden på 1200-tallet der nominalistene sto steilt mot realistene. Som kjent lever vi i en tid som er sterkt influert av nominalismen, dvs det syn at vårt språk ikke uttaler noe om tingenes realitet. De er snarere tilfeldige merkelapper som vi mennesker i tidens løp har satt på dem. I tråd med det kan man spørre, slik Kant gjorde, om selve tenkningen kan utsi noen sannhet om naturens gjenstander. Vi kjenner hans konklusjoner, noe som også har fått sine konsekvenser.

Disse merkesteinene i vår kulturhistorie peker på et problemkompleks som har fått et bestemt utfall og som er videreført med en indre konsekvens til vår tids syn på mennesket: En vellykket tilfeldighet.

I en skole er bevisstgjøringen av dette spørsmålet sentralt. Det å oppdra et menneske må henge sammen med ens tro og tillit til at det enkelte menneske kan utvikle seg selv, og metoden må understøtte disse tankene. Mennesket er verdens mål og mening kan man stille opp som en antitese. Steinerskolen er derfor ikke oppstått for å ta hånd om mistilpassede barn eller introdusere en kunstnerisk anlagt pedagogikk. Den er oppstått der mennesker vil arbeide med barn ut ifra et spirituelt menneskesyn. I vår sammenheng vil det si å stille seg inn i realistenes syn på språket: Det utsier en sannhet om tingenes realitet og at tenkningen kan erkjenne verdens kvaliteter. Det fører også til at barnets bevissthet er en realitet som det er riktig å ta på alvor og arbeide konkret ut ifra.

De fire første skoleårene

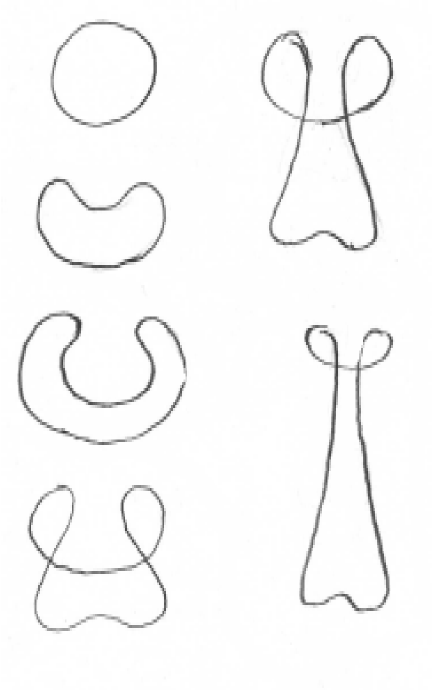
Nettopp barnets bevissthet blir i matematikkfaget en sentral faktor for forståelsen av læreplanen. Eller for å presisere: Ikke bare bevisstheten generelt, men bevissthetsutviklingen spesielt. I de 4–5 første skoleårene øves elevene i formtegning. Det er en form for linjegeometri, der linjene knyttes sammen til symmetriske former på mange forskjellige vis.



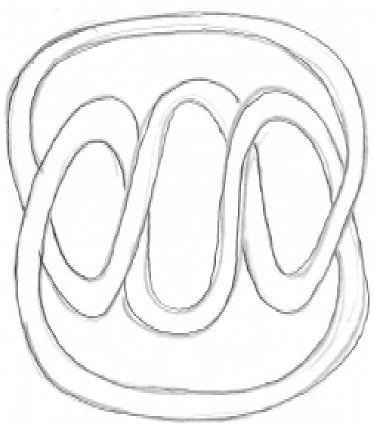
Figurene på denne og neste side viser noen eksempler. Vi ønsker å vekke bevissthet om aksesymmetri ved at barna føyer til den ene manglende halvdelen, fordi det er et hovedelement i organiseringen av deres egen kropp.

I enklere former som forvandles skisseres organiske formdannelser, og i flettinger utfordres det intellektuelle moment, både gjennom linjeføringen og hvordan de enkelte linjene går over og under hverandre.

Dette er geometri i det 1-dimensjonale rom. Først etter at barnets bevissthetutvikling har gjennomgått en eksternalisering i 9–10-års alderen blir barna introdusert til den 2-dimensjonale geometrien. Interessant nok kan man finne et tilsvarende



stadium i menneskets historie i megalittkulturen, da slike linjegeometriske mønstre var vanlig. Enkelte steder ble denne kulturen beholdt helt opp til siste tusenårsskiftet. Også tallfølger og den rytme man musikalsk kan anskueliggjøre dem med ligger inn under disse aldertrinnene. Likeledes er sammenfall av tallfølger i bestemte tall, noe som kan danne grunnlag for gangetabellene og fellesnevner, viktige øvingsområder. På barnetrinnet dreier det seg om å undervise i matematikk handlende eller gjørende. Barn forstår med kroppen det voksne erkjenner med tankene. Derfor klapper, hopper, klipper og tegner man ikke i undervisningen fordi barna synes det er morsomt. Man gjør det fordi barnets erkjennelse ennå er knyttet sammen med kroppens organiske prosesser. Og da blir det morsomt.



Midttrinnet

Når barna er mellom 9 og 10 år avløses denne bevissthetsformen av en begynnende erkjennelse av den ytre verdens forhold. Undervisningen fokuserer på de vanlige måleenhetene for lengde, vekt og rommål. Først finner barna frem til egne måleenheter, for eksempel tomme, favn, fot og kopp. Så introduseres standardenhetene meter, kg og liter. I 5.klasse introduseres barna så til brøken, urbildet på at enheten er brutt i stykker. Ved enkle øvelser arbeides det i begynnelsen bare med stambrøkene, slik som ½, ⅓, ¼, ⅙, ⅛, 1⁄12. Også i denne sammenheng er det interessant å legge merke til at egypterne arbeidet på en lignende måte. For barna blir den kulturhistoriske delen til en introduksjon, vel og merke ikke presentert som historisk passé, men som en realitet. Mange bruker anskuelige historier med kongeriker som blir oppdelt i 12, en del til hver sønn, sammensluttet til større og mindre brøkdeler osv. Videre anskueliggjøres brøkdeler på en rekke forskjellige måter. Man arbeider fra hel til del, fra del til hel igjen og så det vanskeligste aspektet av brøken: Forholdet. Det som imidlertid er en avgjørende del av undervisningen er lærerens tilstedeværelse. Hun står frem for klassen uten lærebok, legger frem stoffet på sin måte og forholder seg direkte til barna. Gjennom aktivitet, også lærerens, blir tankene vekket. Brøkregningen gjennomarbeides så i 5. og 6. klasse, slik at så å si alt er behandlet.

Eksternaliseringen av bevisstheten i 9–10-årsalderen blir naturlig videreført i undervisningen gjennom desimaltall, som et stivnet brøksystem, til prosentregning og renteregning. Som et sluttprodukt, men også som en port inn i ungdomstiden dannes evnen til den abstrakte tanke i 12–13-årsalderen. Bevisstheten har trukket seg så langt tilbake fra verdens kvaliteter at mennesket kan oppfatte sin egen tenkning. Vi kan se på et par eksempler hvordan innføringen gjøres.

Setter man opp en addisjon av fire like tall, f. eks:

$3 + 3 + 3 + 3 =$

kan man omdanne dette til et gangestykke:

$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3$

Uansett hvilket tall man velger, så gjentar det seg:

$17 + 17 + 17 + 17 = 4 \cdot 17$
$6{,}1 + 6{,}1 + 6{,}1 + 6{,}1 = 4 \cdot 6{,}1$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2}$
$31{,}68 + 31{,}68 + 31{,}68 + 31{,}68 = 4 \cdot 31{,}68$

Tar man et eller annet tall a fire ganger, kan man skrive dette som et gangestykke: $4 \cdot a$ eller 4a.

$a + a + a + a = 4 \cdot a = 4a$

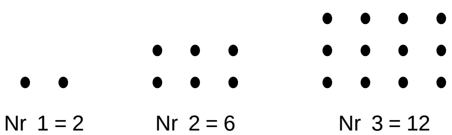
I samtale med klassen vil dette ikke være noe som læreren presser frem, snarere noe elevene oppdager selv. I subtraksjon kan man sette opp den enkle sannheten: Tar man et tall og trekker fra det samme, får man null.

$14 - 14 = 0$
$2{,}1 - 2{,}1 = 0$
$156 - 156 = 0$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$
$a - a = 0$

Kjente regneregler, slik som brøkregler, kan også bearbeides på lignende måte.

Andre øvelser retter seg mot naturlige tall. Hvordan uttrykker man algebraisk et naturlig tall? Jo, med bokstaven n. Velg et naturlig tall i tankene. Regn så ut hva n + 1 blir?, og hva blir 2n? Hva blir n – 2?

Har man arbeidet med de greske figurtallene på et tidligere klassetrinn, kan man i 7.–8. klasse nå spørre seg hva slags tall kvadrattallene, rektangeltallene og trekanttallene danner? Rektangelfigurene er:



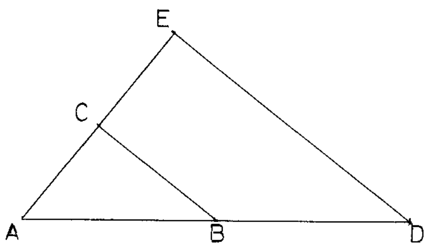
Vi ser at hvis n = 1, blir antallet 2, for n = 2 blir antallet 6 og for n = 3 blir antallet 12. Høyden er alltid en mindre enn lengden. På et så tidlig stadium kan man komme frem at tallene kan skrives: $n \cdot (n + 1)$.

Hva som her er tatt med som en kortfattet eksempel må selvfølgelig forstås som et arbeid i form av en dialog over lengre tid.

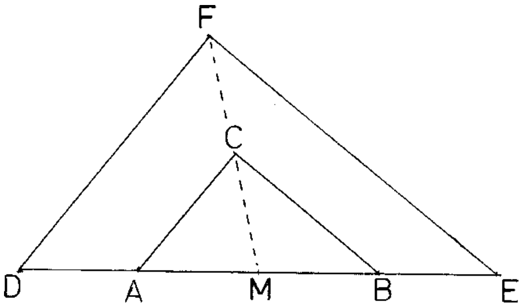
Ungdomstrinnet

På ungdomstrinnet har også geometrien en stor plass. Her tas det sikte på å utvikle dømmekraften, dvs å integrere den abstrakte tenkningens tendens til rigiditet inn i et sammenhengende tankemessig hele. Til det egner geometrien seg meget godt. Med utgangspunkt i symmetri og sirkelkonstruksjoner utvikles nå grunnlaget for den greske geometrien. Den imøtekommer den strenge forstandskarakteren i tenkningen, samtidig som man får utviklet en bevegelighet i forestillinger og begreper ved at problemstillinger kan ses og løses på flere forskjellige måter. Her er trekant- og firkantkonstruksjoner kjente elementer, likeledes Pythagoras' flatesetning. Mindre kjent er nok de linjere transformasjoner og linjegeometrien. Både aksesymmetri og forflytning gjennomgås; her skal jeg trekke frem punktsymmetrien, eller forstørring og forminsking som den også ofte kalles.

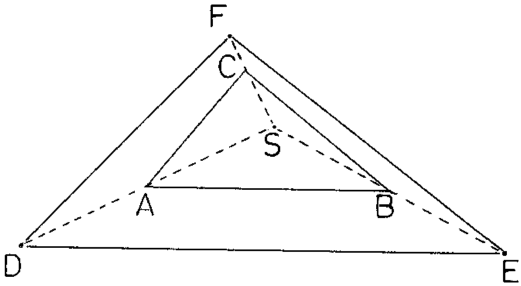
På spørsmål om hvordan man kan gjøre trekanten ABC dobbelt så stor (ikke dobling av arealet), finner man fort frem til å forlenge to av sidene til dobbel lengde. Det kan man gjøre med alle tre valg av sider.



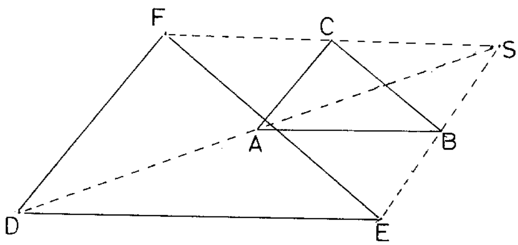
Etter å ha bevist at side DE er parallell til BC og at den også må være dobbelt så lang som BC, kan man spørre om ikke det er mulig å forstørre ABC, slik at den nye siden stikker ut like mye på begge sider av AB.



Her oppdager vi at punktene F, C og midtpunktet M på AB ligger på en linje. Er det sikkert, og er DF dobbelt så lang som AC? Mange variasjoner av denne konstruksjonen kan gjøres. Vi oppdager at det hele tiden er ett punkt som ligger stille mens de andre punktene forstørres opp. Kan nå dette punktet ligge midt inne i trekanten? Kan vi plassere S vilkårlig inne i trekanten?

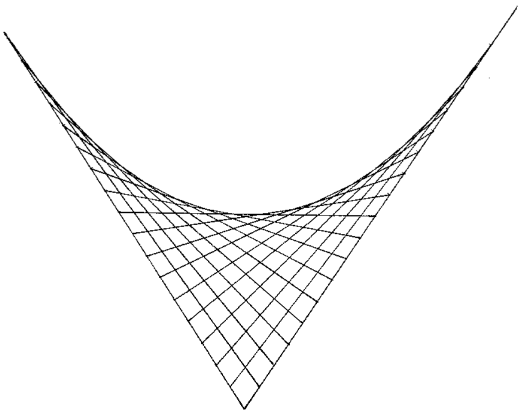


Ja, kan man plassere det faste punktet til og med utenfor trekant ABC? Når vi så fordobler ABC til DEF, får vi frem en slik konstruksjon:

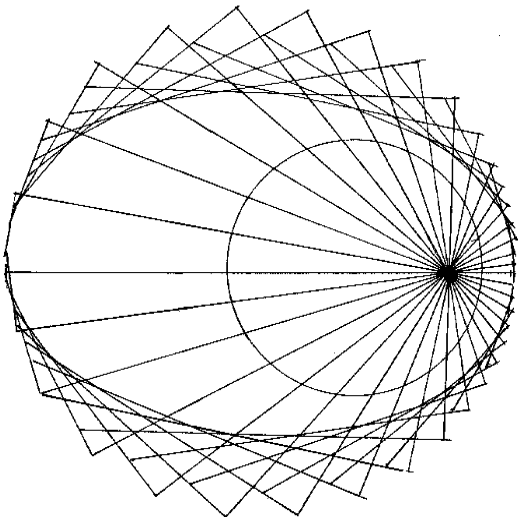


Nå kan man gå videre til punktsymmetri og sentralperspektivet. Viktig i vår sammenheng er at elevene har grepet det avgjørende med det faste punktet S selv. De har hatt opplevelsen av at de selv har oppdaget det.

I de første regnetimene i barneskolen ble barna introdusert til den rette og krumme linje som motpoler. I ungdomstiden utvikles nå følelsen for flateforvandlinger, som egentlig hele den greske geometrien dreier seg om. Hvordan kan man danne flater?



Enten kan man la en flate vokse fra et sentrum utover eller kan man la formen dannes av en begrensning utenfra. Enten fylles formen ut av punkter innenfra eller begrenses den av linjer utenfra. En første øvelse er vist ovenfor og en mer avansert form nedenfor.



Slike øvelser danner sammen med de linjere transformasjonene grunnlaget for den projektive geometrien i 2. og 3. vg. som jeg skal komme tilbake til i et senere nummer av Tangenten.

På ungdomstrinnet introduseres og øves også potens og rot, negative tall og parenteser samt likninger og volumregning. Også på disse områdene prøver vi å arbeide slik at elevene oppdager realitetene selv. Men det er også oppgaveløsning og regulær trening i faglig selvstendighet som på mange måter ligner den offentlige skoles undervisning. I det hele tatt likner matematikkundervisningen på dette trinnet både i form og innhold på mange måter den offentlige skoles læreplan. Det er ikke tilfeldig. På dette stadium i menneskets bevissthetsutvikling dreier det seg om å vekke forstandskreftene til aktivitet, ikke bare reproduserende, men skapende aktivitet. Her har lærere i offentlig skole og steinerskolen sammenfallende opplevelse av barnets bevissthet og pedagogiske mål for undervisningen. Dette gjelder kanskje ikke så sterkt for 10.klasse. Her vurderer steinerskolen at barnets bevisstutvikling gjør et nytt sprang, nå inn i det mer idemessige. Undervisningen dreier seg derfor også mer i den retning. Vi ser på tallsystemene, både historisk fra assyrisk, egyptisk og romersk tid og konstruerer gjerne våre egne femtallsystemer osv. Spesielt interessant er det å få frem at brøkenes desimalekvivalens er et uttrykk for tallsystemet, ikke for tallet selv. 1/7 er jo lik 0,142857… i 10-tallsystemet, mens det i 7-tallsystemet er lik 1/10 = 0,1. Det er forskjell på begrepet 7 og tallet 7. I et større perspektiv prøver vi å arbeide frem forskjellen mellom begrep og forestilling. Dette møtte barna allerede da brøken ble introdusert. En og samme verdi kan som kjent uttrykkes med en rekke forskjellige brøker. I 10. klasse arbeides det slik at dette skal bli bevisst. I historie arbeides det med ideer og samfunnsdannelse, kunsthistorie og biografier. I matematikken introduseres enkel permutasjon, kombinatorikk og sannsynlighetsregning ut fra det samme pedagogiske mål. På den måten prøver vi også i matematikken å møte den idealitet som kommer frem hos mange unge på dette klassetrinnet. Terningkasting er alltid meget populært. Enkelte klasser kan drive det til serier med 3000 kast for å få frem de store talls lov. Men da går det også med en dobbelttime. Sammen med proporsjonalitet i geometrien prøver man å differensiere begrepene. Stoffet i 10.klasse er derfor lagt opp meget utfordrende tankemessig.

Artikkelen blir fortsatt i et senere nummer av *Tangenten*.

(fortsatt fra side 5)

materiell i storskolen, kan vi som regel bruke verden rundt oss. Vi lager ofte oppgaver sammen, elever og lærere, oppgaver elevene jobber videre med etter en presentasjon.

Det er ikke foretatt noen forskning på hvordan elevene klarer seg i vanlig ungdomsskole etter årene på Jareteigen Montessori skole. De få elevene jeg har snakket med sier de klarer seg svært bra. Jeg ser i hvert fall mange elever med tro på at de mestrer faget matematikk.

Hans-Jørgen Brucker

Bruk av kalkulator

I følge L97 skal kalkulatoren brukes mer og tidligere i skolen enn før. Det var stor motstand mot kalkulatoren da den opprinnelig ble innført i skolen. Tydelig kom dette til uttrykk da den ble obligatorisk på ungdomstrinnet. Mange var redd for at elevene ikke skulle lære å regne selv. Kritikken har vært vesentlig mindre ved innføringen av L97, enda kalkulatoren nå skal brukes fra småskoletrinnet og at eksamen i 10. klasse skal foregå med bruk av kalkulator i hele oppgavesettet.

Hva brukes kalkulatoren til i klasserommene? Jeg har spurt lærere på kurs og mange svarer at de bruker kalkulator der det er et kalkulatorsymbol i læreboka. I en travel hverdag kan det hende at det stopper der. Noen lærebøker er imidlertid kreative i sitt oppgavevalg og har stor variasjon i tilfanget av oppgaver.

Uavhengig av læreverkenes presentasjon vil jeg nedenfor presentere noen eksempler som kan løses ved kalkulator og som kan gi økt tallinnsikt og samtidig være interessante å holde på med.

Eksempel 1

I L97 for 5. klasse under *Tall* står det: «elevene skal … undersøke lommeregnerens muligheter og begrensninger.»

Regneprioritet er et av områdene som gir tydelige begrensninger for kalkulatoren. I studentgrupper har utregning av uttrykket: $2 + 3 \times 5$ gitt forskjellig svar alt etter hvilken kalkulator de har. Hvordan kalkulatoren regner og dermed hvilken strategi man må bruke for at kalkulatoren skal gi det svaret man ønsker er innfallsvinkler til å undersøke muligheter og begrensninger. Interessant må det derfor være å la elever lage oppgaver til hverandre for deretter å regne dem ut ved hjelp av kalkulatoren. En måte å rette dette mot matematikk i dagliglivet på er å sette dette i en praktisk sammenheng ved å la elevene lage regnefortellinger til stykkene sine.

Eksempel 2

Undersøkelser av tall.

På mange klassetrinn kan eksemplene under være en utfordring for undersøkelse av tall. På høyere trinn kan oppgavene utvides til mer formelle begrunnelser for svarene.

Bruk sifferne 1, 2, 3 og 4 og løs oppgavene under. Alle sifferne skal brukes en gang i hvert stykke. Gjør svarene så store som mulig:

$$\square\,\square + \square\,\square = 55$$
$$\square\,\square + \square\,\square = 64$$
$$\square\,\square - \square\,\square = 11$$
$$\square\,\square \times \square\,\square = 448$$

Bruk de samme sifferne som over, men gjør

$$\square\,\square + \square\,\square$$
$$\square\,\square - \square\,\square$$
$$\square\,\square \times \square\,\square$$
$$\square\,\square : \square\,\square$$

svarene så små som mulig. Tilsvarende kan gjøres med 6 bokser isteden for 4.

Eksempel 3

Kjeder.

Start med et tall mindre enn 40. Multipliser enerne med 4 og legg til tierne. Gjenta dette flere ganger.

Eks: Velger 32. Ganger 2 med 4 og legger til 3, får da $2 \times 4 + 3 = 8 + 3 = 11$.

Gjentar dette og får:

$1 \times 4 + 1 = 5$, deretter $5 \times 4 + 0 = 20$, deretter $0 \times 4 + 2 = 2$, deretter $2 \times 4 + 0 = 8$, deretter $8 \times 4 + 0 = 32$, deretter $2 \times 4 + 3 = 11$ osv.

Ser at tallene gjentas, prøv f. eks. å starte med 4. Hva skjer da?

Prøv andre tall under 40.

Eksempel 4

Ødelagt kalkulator.

Hvis kalkulatoren din er ødelagt, slik at du ikke kan bruke gangetegnet, hvordan ville du da regne ut 57×63?

Hva hvis tasten for 5-tallet var ødelagt?

Eksempel 5

Flere kjeder.

Velg et tall. Hvis tallet er et partall, så halver det. Hvis det er et oddetall, så gang det med 3 og legg til 1. Gjenta dette mange ganger. Prøv med nye tall. Hva får du?

Eksempel 6

Fire på rad. Spill for to.

Trykk 5 og gangetegn på kalkulatoren. Trykk deretter inn et annet tall og så på likhetstegnet. Hvis svaret du nå får står i tabellen under, setter du et kryss på det tallet. Den første til å få 4 på rad har vunnet.

5	85	0	40	90	20
10	30	98	110	45	60
55	80	105	5	20	75
65	50	120	25	35	115
60	15	70	55	10	20
25	60	15	35	70	100

Eksempel 7

Partall.

Trykk 2 + 2 =. Beholdt svaret og trykk + 2 = gjentatte ganger. Fargelegg tallene som kommer på kalkulatoren i rutene under.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

Oppgaven kan brukes for større tabell og som mønstre for gangetabellen.

Eksempel 8

Andre undersøkende oppgaver:

a) Ta et tosifret tall, f. eks. 31. Bytt om sifrene, dvs. 13. Finn differensen mellom tallene, dvs. $31 – 13 = 18$. Prøv med andre tall. Hvilket mønster finner du? Forklar resultatet.

b) Skriv ned tre tall etter hverandre, f. eks. 3, 4 og 5. Ganger sammen det største og det minste tallet og gang det midterste tallet med seg selv. Finn differansen mellom svarene du fikk. Prøv igjen med andre tall som følger etter hverandre. Hvilket mønster finner du? Forklar resultatet.

c) i) Skriv ned tre tall etter hverandre, f. eks 5, 6 og 7. Legg sammen tallene. Er summen delelig med 3? Gjelder dette hver gang vi tar tre tall etter hverandre? Forklar resultatet.
ii) Prøv det samme med 4 tall etter hverandre. Forklar resultatet.
iii) Prøv det samme med 5 tall etter hverandre. Forklar resultatet.

d) Regn ut:
$15873 \times 7 =$
$15873 \times 14 =$
$15873 \times 54 =$
$15873 \times 45 =$
$15873 \times 28 =$
$15873 \times 63 =$
Hvilket mønster finner du? Forklar resultatet.

Gunvor Sønnesyn

Ti delt på atten; korleis blir det, og kvifor blir det slik?

Ein god kollega på ein annan kant av landet ringjer av og til for å drøfta ulike spørsmål ho har fått frå elevane sine – elevar som kjem til henne fordi dei har vanskar av eitt eller anna slag. For ikkje lenge sidan var problemstillinga slik: «Når vi deler 81 på 3, då skriv vi 81 : 3 =, og så skriv vi 2 på tiarplassen i svaret. Men kvifor skriv vi det talet først? Og korleis veit vi at det er tiarplassen?»

Kva ligg bak slike spørsmål? Korleis vi kan hjelpa elevane å finna svar?

Det kan liggja nær å sukka over matematikkundervisning som består i å læra borna algoritmer dei ikkje forstår. Kanskje hadde eleven vår forstått betre om han hadde fått høve til å utforska og finna svar utan å bruka ein fast oppsett måte å gjera det på. I vårt tilfelle var spørsmålet gitt for å få vita kvifor vi kan gjera det akkurat slik, og då er det *det* eleven vår vil ha svar på.

Konkret materiell

Det vert ofte lettare for elevane å forstå om dei får bruka konkret materiale. For å få tak i kva som eigentleg skjer når 81 skal delast på tre er det for mange born avgjerande over lenger tid å ha gjort erfaringar med å gruppera antal. Det er også avgjerande å ha begrep om einarar og tiarar, einarplass og tiarplass – generalisert på grunnlag av mange erfaringar med ulike slag einarar og tiarar. Det er lett å ty til pengar, det er noko born oftast kjenner frå dagleglivet. Skal dei kunna generalisera – oppdaga kva alle einarar er like i og kva alle tiarar er like i, må dei ha arbeidd med einarar og tiarar av mange slag. Då kan dei generalisera; einarar er det vi tel ein om gongen, og tiarar det vi tel ti om gongen. Alt det er mogeleg å telja ein om gongen kan brukast som eksempel på einarar, og alt vi kan telja ti om gongen kan brukast som tiarar.

Korleis veit vi kva som er tiarplassen?

Borna vil fort erfara at skal vi dela likt, er det lurt å starta med den største eininga. I vårt tilfelle er det tiarane. Har vi åtte tiarar som skal delast på tre, så vert det to heile tiarar til kvar. Det skriv vi der vi har bestemt oss for å skriva svaret, så slepp vi å hugsa det mens vi arbeider vidare. Vi skriv kor mange tiarar det vart til kvar. Då avgjer vi med det samme kva som er tiarplassen. Den plassen der vi skriv antal tiarar vert tiarplassen, og så er i neste omgang einarplassen gitt ut frå det. Har tre fått to tiarar kvar, så har vi brukt seks, og har to att. Det kan vi skriva i eit rekneskap slik det er vanleg, eller på ein annan måte dersom det synest lettare.

To tiarar og ein einar som vi hadde frå før, det kan vi tenkja som 21 einarar. Vi kan gjera det synleg med å veksla kvar tiar i ti einarar. Då vert det ikkje så vanskeleg å dela einarane i tre grupper. Kanskje kan eleven vår – lat oss kalla han Per – gangetabellen så godt at han veit at det vert sju til kvar. Viss ikkje må han dela ut og telja.

2-talet står alt på tiarplassen i svaret, då må antal einarar stå på einarplassen, ein plass lenger til høgre. Dette siste er kanskje ikkje så lett – det forutset at Per har begrep om sifferet sin plass i talet som symbol for antal einarar, tiarar, hundrarar osv.

I Tangenten 2/ 99 har Jostein Våge ein artikkel om å forstå og å forklara. Han syner til Skemp og Mellin-Olsen og skil mellom instrumentell og relasjonell forståing. Slike eg ser det har «vår elev» instrumentell forståing – han veit korleis han skal utføra rekneoperasjonen 10:18. Han ber om hjelp til å få ei relasjonell forståing – å forstå kvifor den gitte operasjonen fungerer, slik Våge definerer uttrykket. Eigentleg ber han om meir – han vil forstå sjølve operasjonen.

Våge har truleg rett når han hevdar at det duger ikkje berre å forklara og tru at då har eleven forstått.

Etter mitt syn er orda likevel viktige i å «dela» forståing – men då ord som verkeleg gir meining både for den som forklarar og for den som skal forstå. Det vil sei at vi må ha kompetanse til å sjå kva forutsetningar som er nødvendige for at forklaringa vår skal føra til relasjonell forståing.

Det er ikkje nok at lærarar eller studentar får enkelte «aha»-opplevingar på vårt nivå. Vi må også kunna leggja til rette for at elevane våre får alle dei «aha»-opplevingar som er nødvendige for å forstå.

Går det an med 10:18?

Per hadde fleire spørsmål, han. Det neste var slik: «Korleis blir det når vi skal dela 10 på 18?» Vanleg prosedyre for ei slik utrekning er om lag slik:

«10 delt på 18, det går ikkje. Det blir null, og null nede, og ti igjen, og så må vi setja til ein null

```
10 : 18 = 0,555
 0
100
 90
 100
  90
  100
   90
   10
```

slik at vi får 100:18, og skriva komma i svaret i svaret, og så bli det 5. 5 × 18 er 90, og då har vi brukt 90 av dei hundre, og har ti igjen. Så set vi ein ny null bakerst …», og det heile gjentek seg. Men kvar kjem alle nullane frå? Og kvifor skriv vi 0,.. i svaret?

Per vil forstå matematikkspråket

Igjen kunne vi setja Per til å utforska – ta 10 bollar og dela det mest mogeleg likt på 18. Det ville han truleg klara. Men det spørs om han var nøgd med det. Per ville ha hjelp til å forstå matematikkspråket sitt uttrykk for dette – og ikkje minst – han ville vita kvar alle nullane kjem frå. Skal Per bli nøgd, må vi finna ut korleis vi kan gjera dette begripeleg for han.

Kva for einingar har Per bakgrunn for å arbeida med?

Det blir viktig å finna ut kva slag einingar eleven vår har forutsetningar for å arbeida med. Arbeider vi med einarar, så er *det heile* vi skal dela 10, og vi får ikkje «ein einar til kvar» når det skal delast på 18. Vel vi å arbeida med tideler, så er *det heile* vi skal dela 100 tideler, og då vert det både ein og fleire tideler på kvar.

Vi har fleire måtar å skriva 100 tideler med tal. Vi kan til dømes skriva 100/10 eller 10,0. Kanskje har vi ikkje vore heilt bevisst på det siste alle gongene vi har sett til ein null bak komma - at det eigentleg symboliserer at vi har delt kvar einar i ti like store deler. I tilfellet over hadde vi ti einarar. Vi deler kvar einar i ti like store deler, og har 100 tideler. Vi har like mykje som før, men vi har gitt det ei anna nemning – vi arbeider med ei anna eining. Vi kan skriva 10 = 10,0; men leggja oss på minnet at då betyr 10,0 100 tideler. Kanskje vert det lettare å rekna med desimaltal når vi gir elevane våre eit grunnlag for å forstå dette?

Vi må vita kva Per veit …

Lat oss seia at Per har begrep om heil og del av heil, han har begrep om tideler og hundredeler. Han forstår ein hundredel som ein av delene når ein heil er delt opp i hundre like store deler og tidel som ein del når den heile er delt i ti like store deler.

Det har han lært ut frå mangfaldig erfaring med heile einingar som er delt i hundre like store deler og ti like store deler. Han har og begrep om at sifferet sin plass i talet symboliserer antal tusenar, hundrarar, tiarar og einarar på venstre side av komma, og tideler, hundredeler og tusendeler på høgre side av komma. Vidare har han leseferdigheit for desimaltal, og kan lesa 10,000 som ti komma null null null eller ti tusen tusendeler. Dette gjev eit grunnlag for meistring som kan læra Per at han får til matematikk, at matematikk er spennande og moro. Det gjev haldningar både til faget og til seg sjølv som ein som *kan*.

Vi vel kva eining vi vil rekna med

Då kan vi velja å skriva 10,000; og rekna med tusendeler. Vi har reknestykket 10,000:18, og les: «ti tusen tusendeler delt på atten». Vi får ingen heil einar til kvar, og skriv 0, i svaret. Vi har då hundre tideler å dela på atten. Det gir fem tideler til kvar, og skriv 5 på tidelplassen i svaret. Vi har brukt opp 90 av dei hundre tidelene, og har ti att. Vi gjer det om (vekslar, eller eigentleg deler kvar tidel i ti like store deler) til hundredeler – og har hundre hundredeler å dela på atten. Det blir fem hundredeler til kvar, og vi skriv 5 på hundredelsplassen i svaret. Vi brukar samme prosedyre – deler kvar hundredel vi ikkje har brukt i ti like store deler, og har hundre tusendeler å dela på 18. Slik kunne vi fortsetja og dela kvar tusendel i ti til titusendeler, i neste omgang titusendelene i ti til hundretusendeler osv. Då har vi eit fint utgangspunkt for å undra oss. Kor mange deler er det eigentleg mogeleg å dela ein heil i? Kor nøyaktig svar treng vi?

Kan vi sjå ein tusendel?

Med ein kvadratmeter millimeterpapir som det heile vi skal dela, i dette tilfellet 10; kan vi sjå einaren som 10 kvadratdesimeter (ein tidel av kvadratmeteren). Tidelen vert då ein kvadratdesimeter, hundredelen ti kvadratcentimeter og tusendelen ein kvadratcentimeter. Reknar vi då med tusendeler gir svaret oss antal kvadratcentimeter. Ville vi ha det meir nøyaktig kunne vi dela i titusendeler eller hundretusendeler, og finna kor mange «tikvadratmillimeter» eller kvadratmillimeter det vart på kvar av dei 18.

Gje rom for undring

Tilbake til spørsmålet kor mange deler det er mogeleg å dela ein heil i. Vi veit at det er ikkje noko svar på det. Lat oss ta med slike spørsmål og – og undra oss saman med borna. Dette er også ein del av matematikken – det er ikkje slik at vi alltid har eit eksakt svar – at det alltid er ei løysing på eit matematisk problem. Vi kan velja kor langt vi vil gå - kor mange desimalar det gjev meining i å ta med. Det vil seia at vi vel kor mange gonger det gjev meining å dela det vi har att i ti like store deler. Vi kan ikkje med berre auga vårt sjå skilnad på 0,55 mm og 0,555 mm, men vi kan sjå at 0,55 m og 0,555 m ikkje er det samme. Vi ser det endå betre om vi snakkar om skilnaden på 0,55 km og 0,555 km.

Lat oss læra av elevar som spør!

Det er godt at vi har born som spør – slik at vi blir tvinga til å tenkja gjennom korleis det eigentleg er – og kvifor vi gjer ting slik vi gjer. Særleg i matematikken har vi som lærarar alt for lett for å gjennomføra ein prosedyre fordi vi har lært at det skal vera slik, og ikkje ut frå ei forståing av kvifor vi gjer det på denne måten – og kva alle tala og teikna vi skriv undervegs eigentleg står for.

Lat oss læra av elevane som spør – og saman med dei gå inn i utfordringa det er å finna svar og forstå.

Referansar

Mellin-Olsen, *Eleven, matematikken og samfunnet*, NKI-forlaget 1984

Skemp, Richard R. *Mathematics teaching*, The Association of Teachers of Mathematics 1976

Gunnar Gjone: Matematikk på frimerker

Uendelige mengder

Mot slutten av 1800-tallet foregikk det en interessant utvikling av tallbegrepet, spesielt i matematikkmiljøene i Tyskland. Flere matematikere arbeidet med å legge et grunnlag for ulike typer av tall. En av de mest bemerkelsesverdige utviklingene var definisjonen av «uendelige tall». Før vi går nærmere inn på denne utviklingen skal vi imidlertid nevne noe om uendelighetsbegrepet.

Vi vil skille mellom de to typene: *potensiell uendelig* og *faktisk* eller *aktuell uendelig*.

En prosess sies å være potensiell uendelig hvis den kan fortsettes uten noen gang å stoppe. Et eksempel er prosessen å dele et tall med 2, eller for eksempel å telle utover i tallrekka. Faktisk uendelig refererer til en uendelig mengde av elementer betraktet som en helhet (en «ting»). Eksempler på dette er mengden av de naturlige tallene og mengden av de reelle tallene.

Dette skillet er også interessant didaktisk. Det har blitt vist at 11 og 12 år gamle barn kan akseptere ideen om det potensielt uendelige, mens det faktisk uendelige er et mye vanskeligere begrep å bli fortrolig med.

Vi finner eksempler langt tilbake i historien på potensielt uendlige prosesser (for eksempel Zenos paradoks med Achilles og skilpadda). Det som imidlertid har vært et vanskelig begrep å akseptere, også for mange matematikere, er faktisk uendelig. Dette vil for mange være et ikke intuitivt begrep som leder til (tilsynelatende) paradokser. Aristoteles (384–322 f. Kr.) ville ikke at uendelige mengder skulle være en del av filosofi og matematikk, siden han mente at det ville lede til paradokser og selvmotsigelser. Vi kan regne med at Aristoteles kjente til Zenos paradoks.

Kirken hadde også lenge innvendinger mot at en aksepterte faktisk uendelige mengder. Thomas Aquinas mente at å akseptere en faktisk uendelighet ville være en direkte utfordring mot Gud, som var enestående og («faktisk») uendelig. Faktisk uendelig ble ikke generelt akseptert før mot slutten av 1800-tallet – og det skjedde heller ikke da uten heftige diskusjoner i matematikkmiljøene.

Det var framfor alt en mann som vi kan si hadde mesteparten av æren for dette – Georg Cantor (1845–1918). Imidlertid hadde ideen om faktisk uendelig blitt tatt opp av enkelte matematikere opp gjennom historien, og da ofte knyttet til paradokser.

Galileo Galilei (1564–1642) så på forholdet mellom naturlige tall og kvadrattallene. Han så på avbildningen mellom dem:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 1 & 4 & 9 & 16 & \dots \end{array}$$

og argumenterte ut fra denne avbildningen at det var like mange kvadrattall som naturlige tall. Imidlertid er det klart «flere» naturlige tall enn kvadrattall. Han konkluderte at de vanlige begrepene «større», «mindre» osv. ikke hadde mening når en tok for seg uendelige mengder.

Diskusjon om det uendelige ble også tatt opp av Bernard Bolzano (1781–1848).

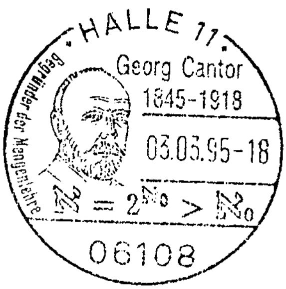
Det skulle imidlertid gå noen år før saken igjen ble tatt opp på en systematisk måte av Georg Cantor.

Georg Cantor ble født 3. mars i 1845 i St. Petersburg. Faren var en framgangsrik kjøpmann. I 1856 reiste familien til Tyskland. Fra 1862 til 1867 studerte Cantor matematikk i Zürich, Göttingen og Berlin. I Berlin var han student til Weierstrass. Fra 1872 hadde han stilling ved universitetet i Halle og ble i 1879 professor samme sted.

Cantors grunnleggende arbeider i mengdelære var i perioden fra 1875 til 1884.

Fra 1884 led han under tunge depresjoner og hadde flere frivillige opphold på klinikker. Cantors mengdelære var tidlig omstridt. Han hadde støttespillere – som Richard Dedekind – men også sterke motstandere som Leopold Kronecker i Berlin.

Georg Cantor har såvidt vites ikke kommet på frimerke, men han finnes gjengitt på et spesialstempel fra Tyskland 150 år etter at han ble født (3. mars 1995).



På dette stemplet finner vi også den noe merkelige likheten:

$$\aleph = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$$

For å forstå hva dette betyr vil vi se litt på tallmengder. La oss starte med endelige mengder.

{1, 2} er en mengde med to elementer: 1 og 2
{1, 2, 3} er en mengde med tre elementer: 1, 2 og 3

Mengden {1, 2, 3, 4, 5, …} er mengden av alle naturlige tall, et eksempel på en faktisk uendelig mengde. Å «telle opp» disse er derimot en potensielt uendelig prosess (vi blir aldri ferdige). Vi vil nå videre ta for oss mengden {1, 2} og se på mengden av alle delmengder som denne har:

{1, 2} har delmengdene ∅ (den tomme mengde), {1}, {2} og {1, 2} (mengden selv)

Ser vi på mengden {1, 2, 3} finner vi delmengdene ∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} og {1, 2, 3}.

Det skulle ikke være så vanskelig å se ut fra disse eksemplene at enhver mengde med to elementer har fire delmengder og at enhver mengde med tre elementer har 8 delmengder. Hvor mange delmengder har så en mengde med fire elementer? – med fem, med *n*?

Ved å generalisere fra eksemplene finner vi at en mengde med n elementer har 2^n delmengder. Antallet elementer i en mengde kaller vi *kardinaliteten* til mengden. Mengden av antall delmengder til en mengde kaller vi *potensmengden* til mengden – en betegnelse som passer med skrivemåten 2^n.

Når vi utvider til å studere uendelige tallmengder, får vi endel paradokser som påpekt ovenfor. Hvis vi betrakter mengden av naturlige tall som en (faktisk) uendelig mengde har den altså den egenskapen at den kan bringes i en-entydig korrespondanse med en delmengde av seg selv

Galileo Galilei er kanskje mest kjent som astronom og fysiker. Han var imidlertid professor i geometri og astronomi, først i Pisa og siden i Padua. Fra 1610 var han hoffmatematiker i Firenze. Det må bemerkes at det var uklare grenser mellom mekanikk, astronomi og matematikk på den tiden Galilei levde, og mange arbeidet innenfor flere felter. Vitenskapen var ikke så spesialisert. Han hadde forøvrig stor innflytelse på matematikere i samtida, for eksempel på Bonaventura Cavalieri (1598–1647) som var elev av Galilei.

(paradokset til Galilei). Det som var et sentralt problem ved utvidelse av tallbegrepet til å omfatte uendelige tall var å generalisere enkelte egenskaper som vi har for endelige tall (mengder) til også å gjelde for (faktisk) uendelige mengder. For å sammenlikne mengder bruker vi ideen til Galilei med avbildninger.

Cantor innførte avbildninger for å avgjøre når to mengder er «like», eller har samme kardinalitet, når vi bruker betegnelsen fra endelige tallmengder som vi innførte ovenfor. Tallmengder som har samme kardinalitet som de naturlige tall kaller vi *tellbare*. Det finnes da en en-entydig (1–1) avbildning mellom slike mengder og de naturlige tallene. Vi kan nå umiddelbart presentere noen tellbare mengder:

- de jamne tallene: 2, 4, 6, 8, …
- de odde tallene: 1, 3, 5, 7, …
- kvadrattallene: 1, 4, 9, 16, ..

Cantor innførte symbolet $\aleph_0$ for kardinaliteten til mengden av naturlige tall. $\aleph$ (alef) er den første bokstaven i det hebraiske alfabetet. Alle mengdene ovenfor har kardinalitet $\aleph_0$, som er felles for alle tellbare mengder. Indeksen er «0» fordi Cantor betraktet dette som den «første» uendeligheten (i en serie av mange). Cantor innførte på denne måten en rekke nye uendelige «tall»: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, $\aleph_4$, … .Disse såkalte *kardinaltallene* kan vi betrakte som en utvidelse av de naturlige tallene. Vi kan også se på de naturlige tallene som kardinaltall – tallet **3** som antallet elementer i en mengde med tre elementer.

Før vi går videre med bakgrunnen til uttrykket på stemplet, trenger vi en definisjon av potenser for uendelige mengder. Kan vi finne en rimelig utvidelse av hva M^N skal bety når M og N er uendelige kardinaltall? Den definisjonen som en fant egnet var å definere M^N som kardinaliteten av alle funksjoner fra N til M. La oss spesielt betrakte situasjonen der M er en mengde med to elementer. I denne sammenhengen er det vanlig å bruke $M = \{0, 1\}$.

Funksjonen f definert fra $\{a, b, c\} \to \{0, 1\}$ vil være gitt ved alle tripler som består av 0-er og 1-ere. For eksempel kan vi liste opp funksjonens verdier på følgende måte: ▸

Bernard Bolzano hadde studert en rekke ulike emner, teologi, filosfi og matematikk, ved universitetet i Praha. I 1805 ble han ansatt som professor i religionsvitenskap. Han besluttet å arbeide som prest selv om hadde hadde fått tilbud om en stilling i matematikk. Han fikk imidlertid problemer som prest ved at han uttrykte kjetterske meninger. I 1819 ble han tvunget til å trekke seg tilbake fra prestegjerningen. Allerede som prest hadde han arbeidet med matematikk, og hadde publisert betydningsfulle arbeider. Etter at han hadde trukket seg tilbake levde han hos venner, tilbaketrukket på landsbygda. Han fikk da tid til å arbeide med matematikk. Hans interesser gikk i retning av matematikkens grunnlag, og spesielt var han opptatt av filosofien rundt uendelighetsbegrepet. Han så på en-entydige (1–1) avbildninger som et middel til å studere egenskaper ved uendelige mengder. Et slikt eksempel er avbildningen mellom de naturllige tallene og kvadratttallene som Galilei hadde sett på. Bolzano arbeidet for en stor del aleine, og de ideene som han presenterte ble stort sett ikke tatt opp av tidens matematikere.

Denne minneplaten over Bernard Bolzano finnes i Celetná ulice i Praha i nærheten av Karls universitetet.

a→0, b→0, c→0 0, 0, 0
a→1, b→0, c→0 1, 0, 0
a→0, b→1, c→0 0, 1, 0
a→0, b→0, c→1 0, 0, 1
a→1, b→1, c→0 1, 1, 0

osv. fram til

a→1, b→1, c→1 1, 1, 1

(Overbevis deg om at det blir 8 elementer når vi regner med alle muligheter).

Kardinaliteten til mengden {0, 1} er **2,** og kardinaliteten til mengden {*a*, *b*, *c*} er **3**. Vi får da at kardinaliteten til $\mathbf{2^3}$ dermed blir **8** (som vi også har i vanlige tallregning). Dette er da et eksempel på at definisjonen gjelder for endelige kardinaltall. (Undersøk noen flere eksempler).

Vi har nå gitt $2^{\aleph_0}$ en mening, nemlig kardinaliteten til alle funksjoner fra de naturlige tall til **2** (= {0, 1}). Det store spørsmålet som nå reiser seg er om denne mengden er tellbar eller mer generelt hvilken $\aleph$ den er.

La oss se på hvordan verdiene til denne funksjonen (dvs. $2^{\aleph_0}$) er. Vi kan betrakte disse som uendelige (tellbare) følger av 0 eller1 (ethvert naturlig tall avbildes på 0 eller 1)

For eksempel, kan vi liste noen slike verdier:

1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, … (1)
0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, … (2)
0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, … (3)
0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, … (4)

og så videre.

Et av de mest kjente bevisene om uendelige mengder er at denne mengden ikke er tellbar (kan ikke bringes i en 1–1 avbildning med de naturlige tall). Beviset kan skissemessig gis slik:

Anta at vi hadde en nummerering av elementene av denne mengden (som antydet ved tallene som er gitt i parentes). Vi vil da påstå at en slik nummerering ikke kan omfatte alle slike elementer. Lag nemlig et element som er forskjellig fra første element på første plass, fra andre element på andre plass, fra tredje element på tredje plass osv.

(Som et eksempel ville vi fått ut fra opplistingen ovenfor: 0, 0, 1, 0, …) Dette elementet vil være forskjellig fra ethvert element i opplistingen.

Resultatet kan skrives: $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ (som står på stemplet).

Beviset kan generaliseres videre til å vise at potensmengden (mengden av alle delmengder til en vilkårlig mengde) har ekte større kardinalitet enn mengden selv. Det kan også vises at mengden ovenfor har lik kardinalitet som mengden av alle reelle tall. Denne kardinaliteten kan vi betegne med **c**. Altså $2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$ (**c** for continuum eller kontinuum på norsk).

Vi kan nå komme til likheten på stemplet: $2^{\aleph_0} = \aleph$. Kardinaliteten til de reelle tallene er altså større enn kardinaliteten til de naturlige tallene.

Vi definerer $\aleph_1$ som det kardinaltallet som følger etter $\aleph_0$. Hva er nå forholdet mellom $2^{\aleph_0}$ og $\aleph_1$? En naturlig(?) hypotese er at $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Denne påstanden fikk navnet *kontinuum-hypotesen*, og Cantor forsøkte forgjeves å bevise denne.

En mulig kandidat til et kardinaltall mellom $\aleph_0$ og $\aleph_1$ kunne være kardinaliteten til de rasjonale tallene (brøkene). Cantor beviste imidlertid at de rasjonale tallene er tellbare. Dette er også et meget elegant bevis. I oppstillingen nedenfor har vi vist hvordan en kan telle opp de rasjonale tallene:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \longrightarrow & \frac{3}{1} & & \frac{4}{1} & \longrightarrow & \frac{5}{1} & & \frac{6}{1} & \longrightarrow & \frac{7}{1} \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & & \frac{6}{2} & & \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & & & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & & & & & \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & & & & & & & \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{6} & & \ldots \text{ osv.} & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

(fortsettes side 23)

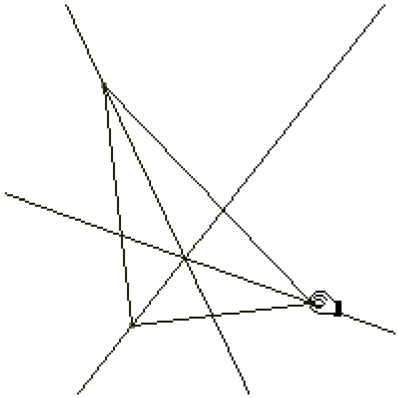
Anne Berit Fuglestad

Internettressurser: Dynamisk geometri

For mange emner i matematikk gir datamaskiner nye muligheter. Dynamisk geometri kan gi nye innfallsvinkler til å oppdage og eksperimentere med geometriske sammenhenger. Slik kan elevene få en bedre tilnærming til begrepene vi kjenner fra plangeometri med passer og linjal, og bygge opp forståelse for sammenhenger. På Internett fins det flere programmer for dynamisk geometri, demonstrasjoner av hvordan de virker, undervisningsopplegg og informasjon om aktuelle prosjekter.

Hva er *dynamisk geometri*? Vi kan for eksempel tegne en trekant og konstruere halveringslinjene for vinklene i trekanten. Så kan vi ta tak og dra i et hjørne og se hva som skjer med halveringslinjene og skjæringspunktet mellom dem. Programmet har med de vanligste konstruksjonene som halveringslinje, midtnormal, nedfelle normal, parallelle linjer, tegne sirkler. Slike enkle anvendelser passer i grunnskolen, men programmet gir også store muligheter på høyere nivå, med muligheter for bruk av makroer, å tegne kjeglesnitt og geometriske steder. På Skolenettets fagsider i matematikk ligger flere undervisningsopplegg som bruker dynamisk geometri, http://skolenettet.nls.no/dok/sn/fag/matm_gr/fag.matematikk.gr.html.

På Cabri-sidene http://www.cabri.net/index-e.html finner vi både programmet Cabri og flere informasjoner om hva det dreier seg om. Under *Products* på dette nettstedet finner vi demo-utgaven, som kan lastes ned gratis for å prøve programmet, på http://www-cabri.imag.fr/produits/cabripc-e.html. Vi kan ikke lagre eller kopiere tegninger og ikke ta utskrift i denne versjonen, men det er likevel gode muligheter for å gjøre seg kjent med programmet. Videre under *About* og valget *Examples* finner vi noen animasjoner som viser flere muligheter i Cabri på adressen http://www-cabri.imag.fr/a-propos/exemples-e.html. Programmet fins for flere språk og er nylig oversatt til norsk, både bokmål og nynorsk. Norsk utgave av håndboka kan kjøpes fra Høgskolen i Agder, se informasjoner under http://www.hia.no/realfag/.



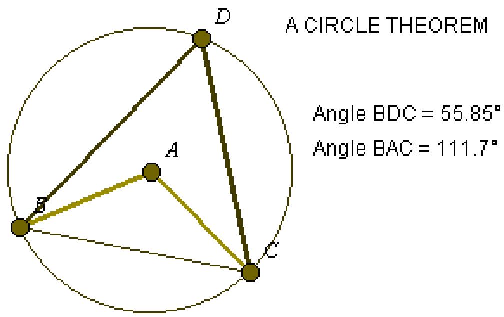
Figur 1
Trekant med vinkel – halveringslinjer – vi kan dra

Programmet The Geometers Sketchpad er kanskje den mest kjente konkurrenten til Cabri. Vi finner informasjoner på nettstedet http://www.keypress.com/sketchpad/index.html. Også her er det muligheter for å hente en demoversjon av programmet. Nettstedet gir også lenker til andre prosjekter som bruker Sketchpad (*Online resources*) og gir Prosjektideer for bruk i undervisningen.

Et annet program for dynamisk geometri er Euklid DynaGeo på adressen http://www.mechling.de. I tillegg til de vanlige konstruksjonene er det her også muligheter for å sette av linjestykke med en bestemt lengde, eller vinkel med et bestemt gradtall. Dette programmet er *shareware*. Det kan lastes ned og prøves ut i 8 uker, men ikke brukes i skolen. Det forutsetter at en betaler lisens dersom programmet skal brukes videre, enten som enbruker eller skolelisens. Alle informasjoner om dette fins på nettstedet.

DrGeo er også et program for interaktiv geometri, laget for DOS og for GNU/Linux. Det har en del av de samme mulighetene som de andre, men virker mer begrenset og tungvint i bruk. Fordelen er at det er fullstendig gratis. Det kan hentes fra http://www.drgeo.seul.org/index.html.

Cinderella er et noe nyere program i kategorien dynamisk geometri http://www.cinderella.de/. Det kan brukes for å undervise euklidsk geometri og ikke-euklidske geometrier, som projektiv og hyperbolsk geometri. Cinderella er skrevet i Java og kan også bruke som forfatterverktøy for å lage interaktive konstruksjoner for websider. En demoutgave av Cinderella, fullt funksjonell, men som går bare 15 minutter om gangen, er tilgjengelig på http://www.cinderella.de/demo/download.html.



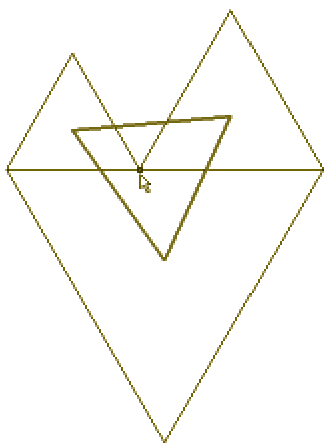
Figur 2 Interaktiv Cinderella-figur – dra i punktene

Det fins flere interaktive geometri konstruksjoner laget med Cinderella på Internett. På Maths Net med adresse http://www.anglia.co.uk/education/mathsnet/dynamic/cindy/index.html finner vi for eksempel illustrasjoner av ulike figurer der vi kan dra i punkter eller linjer.

Det er også mulig å lage interaktive applikasjoner som kan legges på Internett ved hjelp av Cabri eller Geometers Sketchpad med passende tillegg. Eksemplene som vises på Cabri-sidene http://www-cabri.imag.fr/a-propos/exemples-e.html er ikke interaktive animasjoner. De består av flere bilder som følger etter hverandre for å vise konstruksjoner som på en film. Med interaktive konstruksjoner er det mulig selv å ta tak i punkter eller linjer og prøve hvordan konstruksjonen virker. Programmeringsspråket Java med de spesielle mulighetene for å lage Java-applets - applikasjoner som kan kjøre på Internett - ligger bak denne muligheten.

The Cabri Java Project på sidene http://www-cabri.imag.fr/cabrijava/ viser hvordan vi kan koble Cabri-figurer laget med Cabri II, sammen med en Java applet slik at figurene kan vises dynamisk på Internett. I tillegg til Cabri programmet trenger vi fila CabriJava.jar som kan hentes fra disse sidene, og vi trenger mulighet for å lage et HTML dokument. Vi finner flere eksempler på interaktive konstruksjoner laget på denne måten på Cabri Java Project sidene.

For konstruksjoner laget i Geometers Sketchpad kan interaktive sider lages med JavaSketchpad. Dette er omtalt på http://forum.swarthmore.edu/workshops/sum98/java.gsp.explain.html.



Figur 3 Fra NRICH – dra i punktet.
Er trekanten likesidet?

MathsNet har en samling interaktive figurer, laget med de aktuelle programmene. Det finnes et godt utvalg slike på

http://www.anglia.co.uk/education/mathsnet/dynamic/. Maths Net har også flere aktuelle lenker til andre kilder med undervisningsressurser for dynamisk geometri, se for eksempel lenke til The Math Forum http://forum.swarthmore.edu/dynamic/classroom.html og til NRICH-The Geometry Problem bank http://www.nrich.maths.org.uk/mathsf/journalf/rb_interact_geom.html.

The Math Forum har egen diskusjon angående dynamisk geometri: http://forum.swarthmore.edu/epigone/geometry-software-dynamic/. Her er det muligheter for å diskutere og stille spørsmål til andre som arbeider med dynamisk geometri.

Her finner vi for eksempel lenke til en artikkel med litt historisk tilbakeblikk og en sammenligning mellom tre av de aktuelle programmene med omtale av styrke og svakheter: http://www.math.uic.edu/~burgiel/Cinderella/review.pdf. Et annet innlegg gir en anbefaling av Wingeom fra Peanut Software, http://math.exeter.edu/rparris/. Dette er fri programvare, men siden det tar utgangspunkt i koordinatgeometri er det nokså annerledes enn de andre programmene som er omtalt her.

Programmer for dynamisk geometri har muligheter som bør kunne gi ny inspirasjon og forståelse for geometrien, både i grunnskolen og på høyere nivå. Ut fra de omtalte programmene og lenkene skulle det være mulig å komme i gang. Det fins sikkert mange flere gode kilder til undervisningsopplegg og oppgaver i dette emnet og tips om andre lenker mottas med takk til e-post Anne.B.Fuglestad@hia.no.

Denne artikkelen (med alle lenker!) kan også finnes på http://www.caspar.no/Tangenten.

Litteratur

Breiteig, T. & Fuglestad, A.B. (2000) *Data i matematikken.* (2 utg./2.opl.) Oslo: Aschehoug.

Fuglestad, A.B. (1999) Læring med datamaskiner i konstruktivistisk perspektiv. *Tangenten,* 2(10), 27–33.

(fortsatt fra side 20)

Historien om kontinuum-hypotesen er ikke avsluttet. For å komme videre må vi gå til mengdelærens aksiomer. Den amerikanske matematikeren Paul Cohen viste i 1963 at hvis «den vanlige» aksiomatiseringen av mengdelæren ikke har motsigelser (er konsistent), så vil den også være konsistent hvis vi legger til negasjonen av kontinuumshypotesen. Det vil si at å innføre uendeligheter mellom kardinaliteten til de naturlige tallene og til de reelle tallene ikke vil føre til motsigelser – hvis det ikke var noen allerede.

Det grunnlaget som ble lagt for matematikken gjennom mengdelæren har vist seg levedyktig og er i dag stort sett akseptert av de fleste matematikere.

Oppgaver

Sammenlikning av uendelige tallmengder ved hjelp av en-entydige avbildninger er et fascinerende område.

Mange oppgaver kan gå på å lage avbildninger, for eksempel:

1. Vis at det er «like mange» heltall som naturlige tall.
2. Vis at det er «like mange» positive reelle tall som det er reelle tall. (Hint: Bruk for eksempel eksponensialfunksjonen).
3. Vis at det er «like mange» reelle tall mellom 0 og 1 som det er reelle tall.

Litteratur

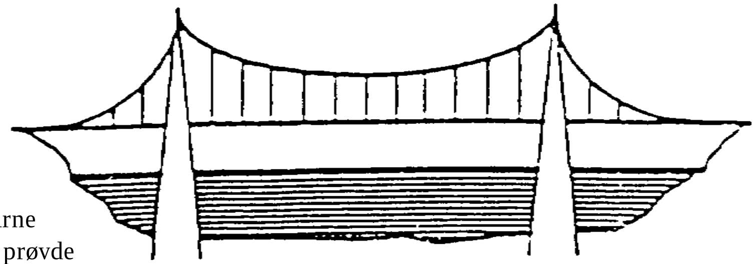
De fleste matematikkhistoriske verk vil ha med avsnitt om mengdlærens utvikling. Her vil vi spesielt trekke fram:

Picutti, E. m.fl. (2000) *Stora matematiker från Fibonacci til Wiles.* Lund: Studentlitteratur.

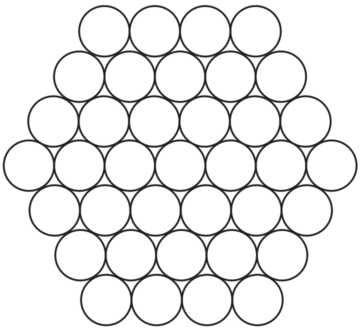
Det finnes også en biografier om Cantor, for eksempel:

Purkert, W. & Ilgauds, H.J. (1985) *Georg Cantor.* Leipzig: B.G. Teubner.

Hvordan finne formelen?



Følgende oppgave stammer fra en Shell-undersøkelse (Alan Bell, The University of Nottingham, publisert i Journal of Mathematical Behavior nr. 14 s. 41–73 (1995)). Per Arne Birkeland (Høgskolen i Agder) prøvde oppgaven ut som en gruppeoppgave i ungdomsskolen. Hensikten var bl.a. å se hvordan elevene arbeider med en åpen oppgave der algebra kan være et nyttig hjelpemiddel. Prøv gjerne oppgaven på dine elever. I neste nummer av Tangenten presenterer han noen av elevenes løsninger.



Hengebrokabler

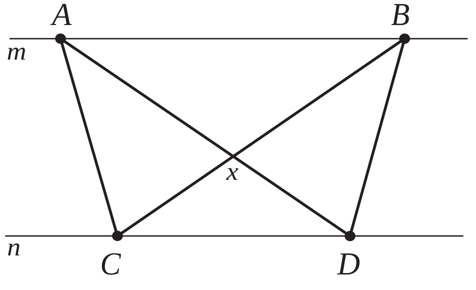
Når man lager kabler til en hengebro, kan mange strenger bli presset sammen til en sekskantet form. Tegningen over illustrerer en slik kabel av «størrelse 4» som er satt sammen av 37 strenger.

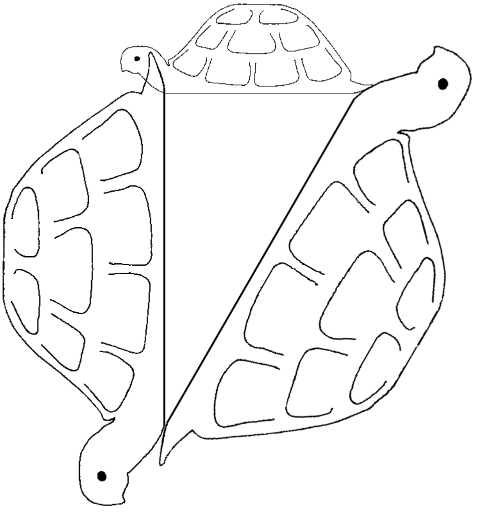
- Hvor mange strenger trenger man for å lage en kabel av størrelse 5?
- Hvor mange strenger trenger man for å lage en kabel av størrelse 6?
- Hvor mange strenger trenger man for å lage en kabel av størrelse 10?

Kan du med ord forklare hvordan du finner ut hvor mange strenger du trenger i en kabel?
Hvor mange strenger trenger man for å lage en kabel av «størrelse *n*» der *n* er et hvilket som helst tall?

Arealer av trekanter

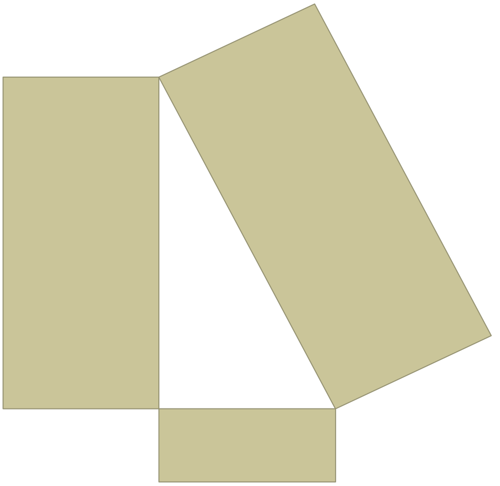
På hver av de to parallelle linjene *m* og *n* velger vi to punkter, *A* og *B* på *m* og *C* og *D* på *n*. Vi trekker nå forbindelseslinjene *AC*, *AD*, *BC* og *BD* som på tegningen. Forbindelseslinjene *AD* og *BC* møtes i punktet *x*. Vis at trekantene *AxC* og *BxD* har samme areal. Her kan det være lurt å prøve seg fram med ulike eksempler og kanskje har dere geometriprogrammet «Cabri» som kan være til hjelp?





Pythagoras setning?

Vi vet at når vi lager kvadrater over katetene og hypotenusen i en rettvinklet trekant, vil summen av arealene til kvadratene over katetene være lik arealet til kvadratet over hypotenusen. Hvordan er det med arealene til tre formlike figurer som er tegnet over katetene og hypotenusen i en rettvinklet trekant? Her er noen eksempler.



Matematikkundersøkelsen 1999 og allmennlærerutdanningen

Resultatene fra Norsk Matematikkråds undersøkelse blant nye studenter 1999 foreligger nå. De er etter min mening godt egnet til diskusjon om hva som bør gjøres for å bedre nye studenters kunnskaper og regneferdigheter i matematikk. Undersøkelsen viser hvordan det står til med nye studenters ferdigheter innefor helt grunnleggende og sentrale områder av grunnskolematematikken, og for de nye lærerstudentenes vedkommende viser undersøkelsen dramatiske brister i tallregning og praktisk regning. For disse studentenes vedkommende hadde 52.4 % av R94-studentene det laveste kursnivå med matematikk med modul 2A fra videregående skole. Det vil i praksis si at de stort sett ikke hadde særlig mer enn grunnskolematematikken med seg i «bagasjen». Bare 6.9 % hadde 3MX. Blant lærerstudenter med modul 2A var det 78.4 % som bare hadde 20 eller færre rette svar av 43. Ved lærerutdanningen er det fra 1998 obligatorisk med 10 vekttall matematikk. Det fagspesifikke innholdet i dette kurset går ikke mye ut over den videregående skoles grunnkurs med modul 2B.

All erfaring viser at grunnmurens kvalitet er avgjørende for sluttresultatet. Og den grunnmuren jeg sikter til bygges i grunnskolen. Det må derfor være av den aller største betydning at byggmesterne kan sitt fag. Fra videregående skole vet vi at lærere med hovedfag oppnådde de beste resultatene blant elevene. En lærer med hovedfag er glad i sitt fag. Den gleden smitter over på elevene. En inspirator må selv være inspirert. Det er ikke mindre viktig å inspirere barn og unge mellom 6 og 16 år enn elever i den videregående skole.

Det er snakk om en sirkel her: arbeidet med å rekruttere til realfagene starter i barneskolen, men dersom arbeiderne enten mangler eller har mangelfulle kunnskaper, vil sirkelen bli «ond» og konsekvensene for rekrutteringen langvarig negative. Derfor bør en ved lærerutdanningen satses på den undervisning som fremmer positiv matematikklæring. Den store internasjonale TIMSS-undersøkelsen blant 13-åringer viser helt klart hvilken undervisning det er. I tillegg må studentene lære om matematikkvansker. Men morgendagens lærere må ikke selv ha vansker med å løse grunnskolens eksamen i matematikk! Det må bli krav om matematikkbakgrunn ut over grunnkurset i den videregående skole for de som skal begynne på lærerutdanningen. Det kan ikke være en menneskerett å kunne bli lærer. Matematikk er skolens nest største fag. Det bør gjenspeile seg i både opptakskrav og utdanning.

Tangenten stilte spørsmålet om hva undersøkelsen ønsket å evaluere: regneferdigheter eller matematikkunnskaper. Regneferdigheter er i hvert fall en del av matematikkunnskapene, og en viktig sådan. Ja, de er etter hva min erfaring tilsier avgjørende for å kunne trenge dypere inn i faget. Rammeplanen for 10-vekttallskurset i lærerutdanningen er organisert etter områdene

(i) kunnskaper i matematikk,
(ii) didaktikk,
(iii) matematikk som skapende og resonnerende virksomhet,
(iv) matematikk som redskap og metode og
(v) matematikk i kultur og samfunn.

Planen poengterer at kunnskaper i matematikk skal være utgangspunkt for de andre områdene. Hva er da i følge rammeplanen, kunnskaper i matematikk? Jo, det er nettopp de fagspesifikke delene som tallbegrepet, aritmetikk, geometri, algebra, likninger, osv. Og det var det undersøkelsen forsøkte å kartlegge: matematikkunnskaper. «God kunnskap i matematikk er en forutsetning for å kunne arbeide med matematikk slik det er beskrevet i de øvrige målområdene» (sitat fra rammeplanen). Det finnes ikke noe *enten* regneferdighet *eller* matematikkunnskap. Det finnes bare matematikkunnskap.

Eystein Raude
Høgskolelektor
Høgskolen i Vestfold

Om Matematikk og Kunnskap – Forståelse – Ferdigheter

I fjor i august gjennomførte Norsk Matematikkråd (NMR) nok en gang sin matematikkundersøkelse for nye studenter ved universitet og høgskoler. I den forbindelse kom Tangenten (4/99) på redaksjonell plass med angrep på blant annet evalueringsaspektet ved undersøkelsen og redaktøren stilte spørsmål ved hva den var ment å skulle undersøke – *matematikkunnskaper* eller *regneferdigheter*.

Jeg oppfatter det slik at Tangentens daværende redaktør skiller mellom matematikkunnskaper og -ferdigheter. Drill- og standardprosedyrer kaller han «rituell matematikk» (en politisk korrekt ytring?), og han karakteriserer oppgavene i undersøkelsen som regneoppgaver eller rituelle oppgaver. Det er vel ikke mulig å oppfatte redaktøren dit hen at regneferdigheter er noe negativt *i og for seg*?

Hvordan er det med forholdet mellom kunnskap, forståelse og ferdigheter i matematikk?

Ifølge boka *Mesterlære, Læring som sosial praksis* (ad Notam Gyldendal, 1999), kan *kunnskap* blant annet være *proposisjonell, situert* og *skolastisk*. For matematikkens vedkommende er det ikke ønskelig at kunnskapen skal være situert, dvs. innvevd i lokale sammenhenger og noe som ikke automatisk kan overføres fra en sammenheng til en annen. Dette synet er da heller ikke nytt i skolen, og regning for regningens egen skyld har vel heller aldri vært meningen, noe som allerede kommer til uttrykk i *Normalplan for landsfolkeskolen*,1922, og som for så vidt er blitt videreført i L97.

Kunnskap er nær knyttet til *forståelse*: forståelse av et tegns mening, av formålet med en handling og forståelse av meningen med en sosial institusjon. Forståelse er altså innsikt i *meningen* med noe.

Ludwig Wittgenstein sa mot slutten av sitt liv: «Å forstå er å kunne». Han kritiserer den oppfatning at en persons praktiske beherskelse av et uttrykks korrekte anvendelse bare er et ytre tegn på selve forståelsen av uttrykket, som for sitt vedkommende er noe indre og privat. Det er i kraft av forståelsen at språkbrukeren, i vårt tilfelle eleven, mestrer uttrykkets bruk og derfor kan avgjøre om anvendelsen ved en bestemt anledning er korrekt eller ikke. Forståelsen som en indre tilstand eller annet løser ikke problemet etter W.`s mening.

Derfor konkluderer W. med at forståelse rett og slett er beherskelse av uttrykkets, i vårt tilfelle matematikkens, korrekte anvendelse.

Mitt utgangspunkt var redaktørens skille mellom kunnskaper i matematikk og regneferdigheter, at regneferdigheter eller rituell matematikk nå blir ansett som mindre viktig. Etter mitt syn er det nettopp av den største betydning å beherske «rituell matematikk», å kunne ta del i det relevante utsnittet av den språklige praksis. Det er ved graden av å beherske av det matematiske språket at graden av forståelse viser seg. Hvordan vet vi om en elev forstår prosentbegrepet dersom eleven ikke kan gjøre beregninger? Eller: hvilken nytte har det å kunne uttale at «prosent betyr per hundre» dersom denne «kunnskapen» ikke kan anvendes? Og til anvendelsen hører å beherske aritmetikk, bestemte regneregler. Beherskelse av uttrykkets korrekte anvendelse er en nødvendighet for å kunne ta del i *språklige spill*.

Eystein Raude
Høgskolelektor
Høgskolen i Vestfold
Redaksjonen har forkortet innlegget.

Tanker rundt et tusenårsskifte fortsatt

Når vi står en stjerneklar kveld og ser opp på de utallige stjerner er det svært naturlig å spørre: finnes det intelligent liv på en planet rundt noen av disse?

Vi kan snu på problemstillingen og vurdere muligheten noen der ute har til oppdage at det er såkalt intelligent liv her på jorda. Mange definerer intelligent liv som evnen til å kommunisere med radio/tv-signaler, og vi har her på jorden et nett av lyttestasjoner som søker etter budskap fra stjernene.

I følge en slik definisjon har vi vært «intelligente» i snaut 100 år.

For å få en ide om vår rolle i universet tenker vi modeller i forskjellige målestokker, ideen har jeg fått av Rolf Stabell på Astrofysisk institutt ved Universitetet i Oslo, kanskje Norges største ekspert i kosmologi.

Modell 1: Solsystemet i målestokken
1 : 10 000 000 000 eller 1 : 10^{10}.

I denne målestokken blir sola ei kule med diameter ca 14 cm, jorda er et korn med diameter ca 1 mm i avstand 15 m fra sola og den ytterste planeten går i bane i avstand ca 600 m fra sola. Tilnærmet kan vi si at solsystemet okkuperer ca 1 km^2 og av dette opptar jorda ca 1 mm^2.

I denne målestokken vil vi finne vår nærmeste stjerne i avstand 4000 km (Alfa Centauri) og den nærmeste som vi kan se fra Norge; Sirius i avstand ca 8000 km. Denne avstanden er egentlig 8 lysår.

Vi skifter til ny målestokk i det vi legger på 6 nuller:

Modell 2: Vår galakse i målestokken
1 : 10 000 000 000 000 000 eller 1 : 10^{16}

I denne målestokken svarer 1 meter til 1 lysår. Nå blir avstanden til vår nærmeste stjerne 4 meter, Sirius har vi 8 meter unna og hele vår galakse som er en spiralgalakse med diameter 100 km og som består av ca 200 milliarder stjerner roterer langsom rundt. Solsystemet vil oppta ca 1 mm^2 i en avstand ca 30 km fra galaksens sentrum og bruker ca 200 millioner år på en runde.

Vi skifter målestokk enda en gang og også nå legger vi på 6 nuller.

Modell 3: Galakser i målestokk
1 : 10 000 000 000 000 000 000 000 eller 1 : 10^{22}

I denne målestokken har vår galakse Melkeveisystemet en diameter på ca 10 cm, vår nabogalakse Andromeda som vi kan se med det blotte øye er ca 2,3 meter vekk. Vi vet nå at det er flere enn 100 milliarder galakser som hver kanskje har hundretalls milliarder stjerner og hvor de fjerneste vil være ca 20 km unna.

Tilsvarende kan vi kan også lage en modell for jordas alder:

La oss tenke oss at jorda ble til ved år 1000 og at vi nyttårsaften år 1999 ser til bake på jordas historie. Målestokken blir 1000 år : 4 500 000 000 år, altså 1 : 4 500 000.

I denne målestokken svarer altså ett år i vår målestokk til 4,5 millioner år i virkeligheten. En måned vil svare til 400 000 år, ei uke ca 100 000, og en dag ca 12 000 år. En time svarer til ca 500 år og ett minutt til ca 8 år.

Geologisk og historisk tidsregning i denne målestokken kan da se slik ut:

Urtiden varer da fram til ca 1885
ca 1780 kom de første primitive algene (urdyr).

Oldtid
Kambrium fra 1885–1905
Ordovicium fra 1905–1920
Silur fra 1920–1926
Devon fra 1926–1937
Karbon fra 1937–1948
Perm fra 1948–1955

Middeltid
Trias fra 1955–1963
Jura fra 1963–1971
Kritt fra 1971–1986, dinosaurene dør ut ca 1985

Nåtid
Tertiær fra 1986–1999
Kvartær siste året
Menneskene blir til i løpet av 1999.
Vi har sikre spor etter homo sapiens fra juni/juli
Historisk tid. Vår historie handler i denne målestokken om den siste dagen Vi har funnet spor etter bosetting kl 02^{00}. De egyptiske og kinesiske dynastier ca 15^{00}. Kristus levde ca 20^{00}. Vikingene sto på som verst ca kl 22^{00} og det siste århundre svarer til fra kl 23^{48} til midnatt.

For å finne oss må vi først lette etter solsystemet som utgjør ei flate på ca 1 mm^2 i en galakse på ca 100 km^2. Deretter vil jorda utgjøre på ny en flate på ca 1 mm^2 i et solsystem på 1 km^2. I tillegg må vi treffe på mennesker som har en form for kultur. De må treffe en dag i løpet av tusen år. For å treffe vår sivilisasjon er det snakk om minutter.

Skulle såkalt intelligens finne oss ville de også sikkert finne ut at vår sivilisasjon bruker mest økonomi og energi på våpen og nest mest på narkotika og andre rusmidler, at vi lar en del av befolkningen sulte og lide mens de rike kaster og brenner mat.

Bjørn Bjørneng

Bokomtaler

Anthony Furness og Ilkka Isaksson:
Euklides, matematikerns dröm. (CD-rom)
Ekelunds Förlag AB, S 16902 Solna, Sverige

Vel anvendte penger
På Matematikkbiennalen i Göteborg i januar fikk vi demonstrert en CD-rom som het *Euklides, matematikerns dröm*. Jeg kjøpte den til tross for at teksten kun var på svensk.

Foruten rettledningen er CD-en todelt: en biblioteksdel og en verkstedsdel. Biblioteksdelen er betryggende for voksne mennesker som mistrives med å prøve seg frem i for stor grad. Verksteddelen er perfekt for dem som taster i vei på pc-en uten skrupler.

Her fins lekre fotografier foruten animasjoner, tekst og tegninger. Her fins også rikelig med muligheter til selv å prøve seg frem og teste ut både det ene og det andre.

Teksten bakpå eska lyder: *Euklides er ett multimediaprogram der matematikk og bilde forenes. Barn, ungdom og voksne kan skape en personlig matematikk gjennom å aktivt undersøke koblinger mellom tall, geometri og geometriske former i omgivelsene. Programmet fremhever matematikk som en estetisk opplevelse med interessante koblinger til andre kunnskapsområder. Det passer både for den som har problemer med tradisjonell matematikk og for den som vil ha større utfordringer.*

Denne CD-en kan benyttes av barn fra 5–6 år og oppover. Jeg har nettopp fått den, men hittil har jeg dessverre ikke hatt tid til å sitte stort mer enn en time og leke meg.

Primtall, symmetrier, tallbilder, gangetabellen, romgeometri, pytagoras setning og pascals trekant er noen stikkord. Formingslæreren med sans for mønster vil kunne finne nye ideer her. Elever som er lei av terping, vil kunne møte matematikken på et annet vis. Flinke elever som kjeder seg i timene, vil få muligheten til nye oppdagelser.

Pris til private er 390 SEK, pris til skoler er 2900 SEK. For meg var fire hundre norske kroner levert hjem i postkassa vel anvendte penger.

Passer både til MAC og PC, men sjekk at du ikke har for gammel maskin før du handler.

Anne Fyhn

Nils Kr. Rossing: *Den matematiske krydderhylle – Smakstilsetning for matematikkundervisningen i skolen*
Vitensenteret, 325 s.

Undring, gylne øyeblikk, om å skifte ståsted, den gode historie, skjønnheten, kreativiteten og skaperevnen og lek – dette er noen av punktene forfatteren setter opp som viktige deler av læringsperspektivet. Punktene er også hovedoverskriftene i boka. Under disse overskriftene er det en ufattelig mengde spennende matematisk stoff hentet fra geometri, topologi, tallære, funksjoner osv. Vinklingene er spennende, ofte med fortellerstoff knyttet til forsøk en kan gjøre. Det er lett å bli fascinert av historien og på den måten bli nysgjerrig på forsøkene. Et eksempel er studenten som lekte seg med papirstrimler og oppdaget at han kunne brette heksagoner og mens han fingret med modellen oppdaget han at han kunne folde den ut som en blomst og danne nytt heksagon med ny overflate. Modellen er enkel og kan uten problem brukes til eksperimentering i barneskolen, for eksempel når en arbeider med mangekanter og vinkler.

Boka er ikke beregnet på et spesielt trinn i skolen. Den er ikke laget som en lærebok som skal dekke en fagplan. Som mangeårig lærer i barneskolen så jeg mange forsøk som kunne brukes der, fra småskolen og oppover. Som høyskolelærer med undervisning på førskole- og allmennlærerutdanning oppdaget jeg en hel del forsøk som jeg fikk lyst til å jobbe med sammen med studenter. Men boka er ikke begrenset til grunnskole eller lærerutdanning, her er nok av utfordringer for flinke elever på videregående skole også, som å bruke avanserte lommeregnere til å lage knutematte-mønster og arbeid med fraktaler og rekker. Dessuten inneholder boka mange utforskningsoppgaver og lek med tall som voksne og barn kan glede og undre seg over sammen. For ungdomsskolen må boka være et funn dersom en ønsker en mer kreativ og eksperimenterende undervisning, det gjelder emner som symmetri, tesselering, romfigurer, Fibonacci-tallene og Pascals trekant blant annet.

Flere temaer gir muligheter for tverrfaglig samarbeid, som med naturfag, historie, forming og KRL-faget. Det er skrevet om «fenomener» innen mystikk og tall, såkalt numerologi som jeg fant interessante forklaringer på her. Dessuten er det tatt med forklaringer på opprinnelsene til ulike paradis som barn leker med, hvordan lage kretiske labyrinter og etnomatematikk fra ulike land.

I det hele tatt er dette en spennende bok å bla i, jeg har lært ting som jeg ikke har tenkt over før, for eksempel at kumlokk alltid er runde slik at lokket ikke skal kunne ramle ned i kummen og at det finnes en annen form, Reuleaux´ triangel som er slik at lokket likevel ikke kan ramle nedi kummen fordi bredden er konstant. Her er det også beskrevet hvordan denne spesielle formen utnyttes i praktiske sammenhenger.

Boka er billig, kun 100 kr per stykk. Det betyr at hver skole bør ta seg råd til å ha noen eksemplarer på lærerbiblioteket. Til den bruken forfatteren anbefaler den til, som en smakstilsetning i matematikkundervisningen, vil jeg tro denne boken kan bli til stor glede for både lærere og elever. Boka kan fungere som en idebank. Bakerst er det mange litteraturhenvisninger og gode internettadresser som kan være kjekke å gjøre seg bruk av i undervisningen.

Pris og kvalitet er alltid en avveining. Jeg personlig synes boka ville ha fortjent en noe mer profesjonell utgivelse. Det gjelder layout, farger, korrektur, kanskje også litt mer vurdering av hva som skal være med hvor. Eksempelvis er lek tatt med som et hovedmoment, uten at det er behandlet slik emnet fortjener. Det ville kanskje være bedre å kutte ut dette kapittelet og heller la det lekende og undrende mennesket boltre seg med de spennende temaene som blir tatt opp i boka? Det betyr noe at en bok ser innbydende ut, at illustrasjonene er tydelige og at en fort ser hvilken tekst en illustrasjon hører sammen med. Men med den økonomien som er i skolen, vil jeg likevel tro det er mange som setter pris på en slik utgivelse som blir produsert så rimelig at skolen har råd til å kjøpe den.

Herved anbefalt!

Toril Eskeland Rangnes

Georges Ifrah: *All verdens tall. Tallenes kulturhistorie*.
Norsk utgave: Pax forlag 1997. To bind, 1200 s.

Hvor kommer tallene fra?

Forfatteren George Ifrah opplevde at noen trosskyldige spørsmål fra nysgjerrige elever kom til å forandre livet hans. «Lærer, hvor kommer egentlig tallene fra? – Hvem oppfant null?» Ute av stand til å svare stammet han fram svært nølende: «æh, de stammer fra … tidenes morgen.» Elevene ble likevel ivrige og stilte enda flere spørsmål. En elev hadde strevd med å multiplisere romertall og lurte på hvordan romerne gjorde dette. Ifrah fant ikke de svarene han søkte i leksikon og oppslagsbøker. Han ga seg ikke så lett og etter hvert ble interessen så stor at han oppga undervisningen og reiste verden rundt for å undersøke tellingens historie. Resultatet av undersøkelsene hans er samlet i to tykke bøker om tallenes kulturhistorie.

Tallene og tellingen oppstod ikke plutselig, men er et resultat av tusener av års utvikling. Men, spør Ifrah, begynte det i Asia eller Europa, eller kanskje i Afrika? Hadde utviklingen av tellingen startet på Cro-Magnon menneskenes tid for 30000 år siden, eller var den enda eldre? Kan dyr oppfatte tall, eller er dette forbeholdt mennesker? Ifrah gir en levende og personlig preget fremstilling av de svarene han fant på disse spørsmålene. Det er altså ikke en tørr fremstilling av fakta, men likevel holder boka faglig mål. Bøkene gir en grundig og bred oversikt over tallenes utvikling fra den spede begynnelse med rissing av streker i et bein til dagens datamaskiner. Et poeng er menneskenes bruk av ulike telleredskaper, både konkrete og abstrakte. Direkte uten noen form for telling eller gruppering kan vi bare oppfatte og skille fra hverandre antall opp til fire! Ifrah gir derfor inngående beskrivelse av ulike tellemetoder og telleredskaper. Dessuten behandles de mentale metodene for telling som for eksempel gruppering og ikke minst posisjonssystemer.

Ved å studere tallordene i ulike språk kan man få et innblikk i tidligere tiders tallsystemer. Danskene spesielle tellemåte viser en arv etter et tjuetallsystem og baklengs telling. Når de sier halvtres, mener de et halvt snes mindre enn tre snes, dvs. 10 mindre enn 60, altså 50! Dette er lettere å forstå hvis vi sammenligner med tidsuttrykk som «halv fem». I folkelig språk sier vi fortsatt at vi klokka halv fem er halvveis inne i den femte timen. Tilsvarende kan vi si at når vi har talt til 50, er vi halvveis inne i tellingen av det tredje sneset. *Tallenes kulturhistorie* inneholder mye som er av interesse for de språkinteresserte. Kjennskap til tallord på flere språk kan også gjøre det mulig å huske hva gamle uttrykk som dusin betyr. På fransk er 'douze' ordet for tolv. Ordet to er på fransk 'deux', på italiensk 'due' og latin 'duo'! Tallet ti er 'decem' på latin,'dix' på fransk og 'zehn' på tysk. Det ser ut til at franskmennene har arvet første del av det latinske ordet, mens tyskerne har beholdt siste del. Ordet 'douze' på fransk har beholdt siste delen av det latinske ordet for ti til tross for at de bruker den første delen i ordet for ti!

Studiet eller vitenskapen om hvordan ord har blitt som de er kalles etymologi. Dette er en del av språkvitenskapen eller lingvistikken. Noen begreper går igjen i nesten alle språk og etymologien til ordene for disse begrepene er derfor spesielt interessante i lingvistikken. Mest kjent er hvor like ordene for 'mamma' og 'pappa' er på ulike språk. Ordene for tall spiller en tilsvarende rolle. «Tallenes kulturhistorie» har oversikter over tallordene på en rekke språk. En annen sammenheng mellom tall og språk er den alfabetiske tellingen i gresk og hebraisk. Bokstavene i alfabetet har en fast rekkefølge og egner seg derfor som telleord. Alfa, beta og gamma svarer slik til en, to og tre. Et spørsmål som tas opp i bøkene er om den alfabetiske tellingen opprinnelig er gresk eller hebraisk. Selve skriftspråkets opprinnelse er også knyttet til tallenes historie. Et kapittel tar opp skriftlig regnskapsførsel i Mesopotamia. Trolig er skriftlig regnskapsførsel opprinnelsen til skriftspråket. Kapitlet fokuserer imidlertid først og fremst på hvordan tallnotasjon utvikler seg gjennom bruken av regnskaper.

Tallenes kulturhistorie er et omfattende verk og egner seg for de fleste best som et oppslagsverk. Det er imidlertid ikke noe leksikon. Kapitlene er sammenhengende fremstillinger. En rekke temaer tas opp. Fokuset er tallene, men de settes hele tiden inn i en språklig og kulturell sammenheng. Andre bind tar spranget helt fram til vår tid og har en grundig drøfting av datamaskiner og maskinregning. Til og med den menneskelige intelligens er viet et kapittel. Bøkenes er opprinnelig skrevet på fransk og beregnet på franske forhold. Noen ganger skinner det klart gjennom i oversettelsen. Det er imidlertid bare noen få ganger en leser vil tenke over dette. Den norske oversettelsen har et godt språk som gjør bøkene tiltalende å lese. Vel bekomme!

Reinert A. Rinvold

Harald Totland

Tidevann

I naturen er det mange eksempler på svingninger som er både lette å registrere og mer eller mindre regelmessige, men det finnes få slike fenomener der variasjonen i tillegg er vedvarende i århundrer. De to åpenbart mest betydningsfulle slike fenomenene er for det første solas daglige gang på himmelen og for det andre den årlige variasjonen knyttet til solas gang. Andre eksempler er variasjonen i månefasene, samt månens og stjernenes gang på nattehimmelen. Alle disse fenomenene hører i sin helhet hjemme i himmelsmekanikken og beskrives av forholdsvis enkle geometriske bilder. *Tidevannet* er ytterligere et eksempel, men i motsetning til de foregående finner dette fenomenet sted her nede på jorda, og det er ikke opplagt at det skulle være noen årsakssammenheng mellom variasjonen i vannstanden ved kysten på den ene side og himmellegemene på den andre.

Isaac Newton (1642–1727)[1] var den første som ga en fysisk forklaring av tidevannet, og det på grunnlag av fysiske lover som han selv var opphavsmann til, nemlig de generelle bevegelseslovene og gravitasjonsloven. Han viste at det faktisk er astronomiske forhold som ligger til grunn for tidevannet, og at derfor også dette fenomenet er forbundet med himmelsmekanikken. Det er imidlertid mer komplisert å forklare enn de ovennevnte fenomenene, både når det gjelder den tilgrunnliggende dynamikken, og ikke minst når det gjelder beregningen av de direkte utslagene forskjellige steder på jorda (altså problemer fra fagområdet oseanografi, se f. eks. referanse [1]). Hensikten med denne artikkelen er å formidle en rent kvalitativ forståelse av fenomenet, og dette krever ingen spesielle forkunnskaper.

Årsakene til at tidevann oppstår og arter seg som det gjør, kan sammenfattes i tre hovedgrunner. Et første hint får man ved å se på hyppigheten av flo (høyvann) og fjære (lavvann).

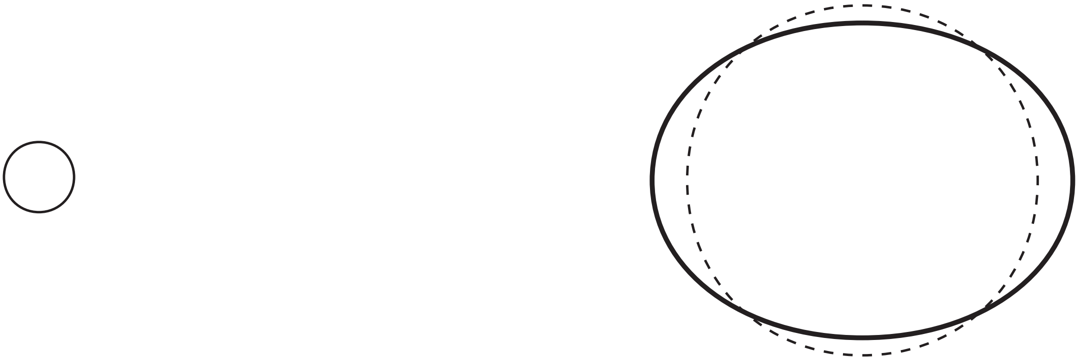
Hvor ofte er det flo?

Flo og fjære opptrer begge omtrent to ganger i døgnet, og følger altså tilnærmelsesvis den daglige rytmen til jorda. Denne kjensgjerningen tyder allerede på at tidevannsfenomenet har noe å gjøre med følgende faktum.

Grunn 1: Jorda har en daglig rotasjon om sin egen akse.

Det viser seg imidlertid at flo og fjære inntreffer på et litt senere klokkeslett for hver gang (og for hver dag). Det betyr at tidsrommet mellom to ganger med flo eller to ganger med fjære ikke er akkurat 12 timer, men litt mer, i gjennomsnitt 12 timer og 25 minutter. Det dobbelte av dette tidsrommet, 24 timer og 50 minutter, kalles et månedøgn. Dette er tiden som går ifra månen står i en viss posisjon, for eksempel i sør, og til neste gang den står i sør. Det er altså tydelig at også månens månedlige kretsløp rundt jorda på en eller annen måte spiller en viktig rolle for tidevannet.

Grunnen til at et månedøgn er litt lengre enn et vanlig døgn, er at månens omløpsretning er den samme som jordas rotasjonsretning. For hvert døgn som går, beveger månen seg et lite stykke videre i banen rundt jorda, og jorda må rotere 50 minutter ekstra før vi får innhentet den.



Figur 1 Skjematisk framstilling av deformasjonen av havoverflaten til jorda (t.h.) i sammenheng med retningen til månen (t.v.). (Deformasjonen er sterkt overdrevet.)

Hvorfor blir det flo?

Vannmassene i havene er ikke helt jevnt fordelt som på en kuleoverflate, men *buler litt ut i to hovedretninger i verdensrommet*: i retning månen, samt i motsatt retning (omtrent som en amerikansk fotball, se figur 1). Siden jorda roterer, vil ethvert sted på kysten omtrent to ganger i døgnet passere områder hvor vannmassene blir løftet litt opp (dvs. ut i verdensrommet), og det blir flo (med fjære på tidspunkter midt imellom). Og siden de to hovedretningene følger månens kretsløp, blir det flo to ganger i *måne*døgnet. Den lille deformasjonen av havoveflaten arter seg altså som en global havbølge som har en bølgetopp på hver side av jordkloden, og som forplanter seg langs jordoverflaten i takt med månedøgnet.

Nå gjenstår det altså bare å finne ut hvorfor havmassene blir deformert på denne måten. Dette har å gjøre med krefter som påvirker jorda og blir forklart i de neste to avsnittene.

Kreftene som virker på jorda

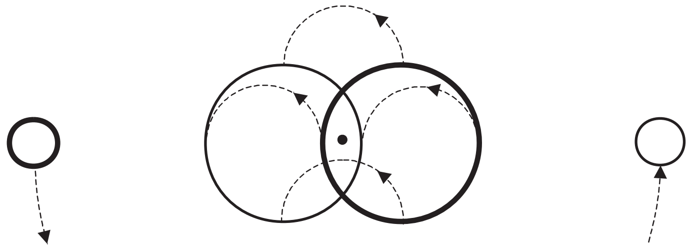
Som vi har sett, er det en sammenheng mellom deformasjonen og månens bevegelse. For å forklare denne sammenhengen, er det imidlertid ikke tilstrekkelig presist å si at månen går i bane rundt jorda.

Grunn 2: Månen og jorda går i (månedlig) bane rundt sitt felles massesenter.

Hadde jorda og månen hatt samme masse (vært like «tunge»), ville massesenteret (tyngdepunktet) ha ligget midt imellom dem, og de ville hatt like store baner. Men siden jorda har omtrent 80 ganger så stor masse som månen, ligger massesenteret forholdsvis nær jordas eget massesenter, faktisk inne i selve jordkloden (omtrent 4700 km fra sentrum). I tillegg til egenrotasjonen har jorda altså et månedlig kretsløp langs en sirkelbane med radius lik 3/4 av jordradien (se figur 2). Denne forholdsvis beskjedne sirkelbevegelsen er, som vi snart skal se, en essensiell årsak til tidevannet, og den har dermed en overraskende stor betydning for mye av livet på jorda.

Det felles massesenteret til månen og jorda går på sin side i årlig bane rundt sola, men dette ser vi bort ifra inntil videre. Dessuten gjør vi en forenkling til. Siden det i denne omgang bare er selve deformasjonseffekten som skal forklares, ser vi i dette og neste avsnitt bort ifra jordas egenrotasjon. Vi forestiller oss altså at jorda har en fast orientering i forhold til stjernehimmelen.

Det er to ulike krefter som spiller en rolle i forbindelse med deformasjonen av havmassene, og som henger sammen med jordas månedlige sirkelbevegelse (grunn nr. 2): tyngdekraften (gravitasjonen) og sentrifugalkraften. Sistnevnte er en kraft som alle har erfaring med, for eksempel fra bilkjøring i krappe svinger. Sentrifugalkraften er da kraften som trekker utover i svingen. Snurrer man en slegge rundt i ring, må man holde hardt igjen mot sentrifugalkraften, som trekker loddet utover – i retning bort fra sirkelbevegelsens sentrum. På samme måte fører jordas månedlige sirkelbevegelse også til en viss sentrifugalkraft. Det som



Figur 2 Systemet jord og måne ved to tidspunkter med omtrent to ukers mellomrom, sett ovenfra i forhold til planet de beveger seg i. Massesenteret, angitt ved punktet midt på figuren, er tenkt å være i ro. Sirklene med tykk strek viser posisjonene ved første tidspunkt, sirklene med tynn strek viser situasjonen to uker senere. De fire stiplede linjene i midten beskriver halvsirkler som gjennomløpes av forskjellige steder på jorda i løpet av dette tidsrommet (når man ser bort ifra jordas egenrotasjon).

nå er av betydning, er at denne sentrifugalkraften *på et gitt tidspunkt* er den *samme* overalt på jorda, både i styrke og retning. Dette kommer av at alle punkter på jorda gjennomløper like store sirkelbaner i løpet av en måned, som vist i figur 2; den eneste forskjellen mellom banene er at de er forskjøvet i forhold til hverandre.

Som kjent er det tyngdekraften som er den sentrale vekselvirkningen i himmelsmekanikken. I sine baner rundt hverandre (rundt massesenteret) holdes månen på plass av jordas tyngdekraft og jorda av månens tyngdekraft – på samme måte som solas tyngdekraft holder jorda og de andre planetene på plass i sine baner rundt sola. Den tredje og avgjørende årsaken til tidevannet er at tyngdekraften, i motsetning til sentrifugalkraften, ikke er den samme overalt på jorda.

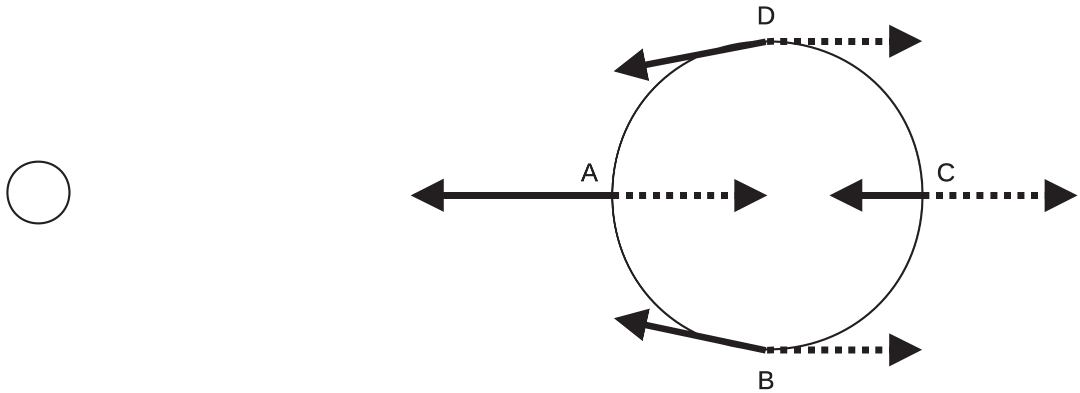
Grunn 3: Tyngdekraften er ikke konstant, men varierer – både i styrke og retning – fra sted til sted. Formelen for tyngdekraften er gitt i Newtons berømte gravitasjonslov. I denne sammenhengen holder det å slå fast to ting vedrørende tyngdekraften rundt ei kule med jevnt fordelt masse (jorda og månen er tilnærmelsesvis slike kuler). For det første er tyngdekraften rettet mot kulas sentrum, og for det andre avtar styrken med avstanden fra sentrum.

Forklaring av deformasjonen

Nå skal vi se på hvordan disse kreftene faktisk fører til en deformasjon av den globale havoverflaten. Figur 3 er en skjematisk framstilling av jorda og månen på et bestemt tidspunkt. De fire pilene som er rettet mot månen, viser månens tiltrekningskraft (tyngdekraft) på de fire stedene merket A, B, C og D på jorda. Sentrifugalkraften som stammer fra jordas månedlige omløp, er representert ved pilene som er rettet mot høyre på figuren, altså utover i sirkelbevegelsen.[2] Som nevnt er månens tiltrekningskraft, i motsetning til sentrifugalkraften, ikke den samme overalt på jorda. Dette er vist ved de varierende retningene og lengdene til pilene (vektorene). Det er mulig å vise at i jordas sentrum har tiltrekningskraften samme styrke som sentrifugalkraften og motsatt retning, så der opphever de to kreftene hverandre. Alle andre steder blir det imidlertid tilovers en nettokraft. Denne nettokraften, som kalles tidevannskraft, er vist i figur 4 for forskjellige områder på jordoverflaten.

Vi ser først på områdene rundt A og C, hvor tiltrekningskraften og sentrifugalkraften er parallelle og motsatt rettede. I områder nærmest månen (A) er tiltrekningskraften større enn sentrifugalkraften (se figur 3), slik at det er en nettokraft i retning månen (figur 4). På den siden som er lengst borte fra månen (C), er forholdene motsatt. Annerledes er det i områder som B og D. Her har tiltrekningskraften og sentrifugalkraften omtrent samme styrke, men de er ikke parallelle. Tiltrekningskraften er rettet litt innover, så nettokraften her har retning omtrent *mot* jordas sentrum.

I områder som A, B, C og D er nettokraften



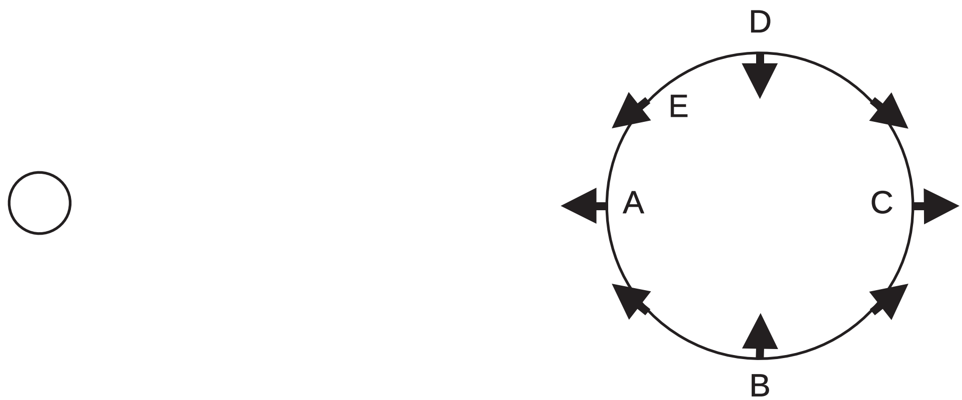
Figur 3 Tiltrekningskraft (tyngdekraft) fra månen (t.v.), angitt ved heltrukne piler, og sentrifugalkraft, angitt ved stiplede piler, forskjellige steder på jorda (t.h.). Bildet beskriver perspektiver både ovenfra og fra siden i forhold til baneplanet.

altså parallell med jordas egen tyngdekraft. La oss nå se på områder som ligger imellom to slike områder, for eksempel området E (figur 4). Her blir nettokraften en mellomting mellom den i D og den i A, og den ligger derfor delvis *på langs* av havoverflaten (den har med andre ord en tangentiell komponent) og trekker vannet mot A. Som figur 4 viser, blir det tilsvarende i de øvrige tre områdene hvor det er tegnet inn piler. Resultatet av alle disse nettokreftene – tidevannskreftene – er at vannet strømmer mot de to områdene rundt ytterpunktene A og C.[3]

I virkeligheten er situasjonen mer komplisert enn det som er blitt beskrevet her. Det skyldes blant annet kontinentene og havdypene.

Forskjeller fra sted til sted

De tidspunktene da man er nærmest månen, er når den står i sør. Det som er blitt sagt så langt, skulle kanskje tyde på at det alltid er flo på slike tidspunkter, men dette er ikke tilfelle. Grunnen til det er at kontinentene hindrer vannmassene i havene å bevege seg fritt, noe som fører til en forsinkelse i ankomsten av tidevannet. Denne forsinkelsen, som varierer fra sted til sted og er meget komplisert å beregne, kalles havnetiden. I tillegg finnes det påfallende store lokale variasjoner i tidevannsforskjellen. Enkelte steder er forskjellen mellom flo og fjære nærmere 20 meter, mens den knapt er merkbar andre steder. Dette er blant annet avhen-



Figur 4 Tidevannskraft (nettokraft gitt som summen av tiltrekningskraft og sentrifugalkraft i figur 3) forskjellige steder på jorda, sett ovenfra eller fra siden i forhold til baneplanet.

gig av kystlinjas form og havbunnens dybder. I noen bukter vil vannet, når det strømmer inn og ut, kunne skylle fram og tilbake som en bølge (på samme måte som man kan få vannet til å skylle fram og tilbake i badekaret). Hvis den karakteristiske perioden for denne bølgen er i nærheten av 12 1/2 time, får bølgen ekstra stort utslag som følge av resonans. Figur 1 beskriver altså egentlig en forenklet situasjon, hvor man forestiller seg at jordoverflaten er fullstendig dekket av hav. Den maksimale forskjellen i vannstanden ville i et slikt tilfelle være bare omtrent en halv meter.

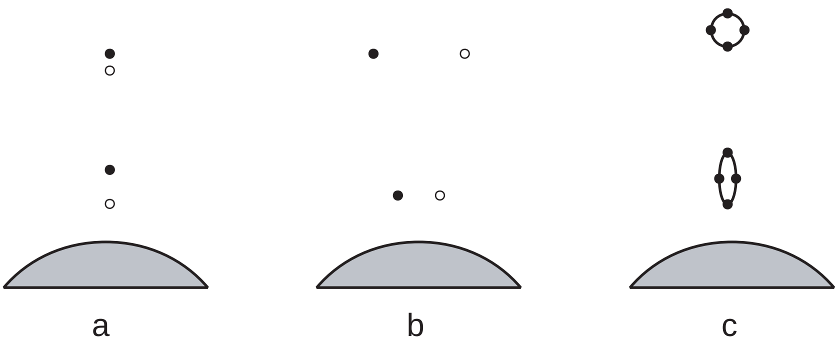
Solas rolle

Så langt har vi sett bort ifra solas virkning. Det er imidlertid klart at grunn nr. 2 ovenfor (jordas kretsløp rundt massesenteret med månen) gjelder på samme måte for sola som for månen, bortsett fra at omløpstiden er et år istedenfor omtrent en måned. Siden sola har mye større masse enn jorda, er det felles massesenteret i dette tilfellet praktisk talt sammenfallende med solas massesenter. Også grunn nr. 1 og 3 – jordas daglige rotasjon samt tyngdekraftens variasjon – gjelder som før. Dette betyr at også sola forårsaker en tidevannseffekt på jorda. Spørsmålet er hvor stor denne effekten er i forhold til den effekten som forårsakes av månen. Til tross for at avstanden til sola er mye lengre enn avstanden til månen, sørger solas enorme masse for at den har større tiltrekningskraft på jorda enn det månen har. Vi har imidlertid sett at det som er avgjørende, er hvor mye tiltrekningskraften *varierer* mellom forskjellige steder på jordoverflaten. På grunn av den store avstanden til sola er denne variasjonen mindre enn variasjonen i månens tiltrekningskraft, og det viser seg at tidevannseffekten fra sola er knapt halvparten så stor som månens. Solas virkning er mest merkbar når jorda, månen og sola ligger på en linje. Dette skjer omtrent to ganger i måneden, nemlig ved fullmåne og nymåne. Da blir det *spring*, med ekstra store tidevannsforskjeller (springflo og springfjære). Tidevannsforskjellene er minst ved *nipp*, når retningene til sola og månen danner rette vinkler.

Tidevannskrefter

En liten kommentar til slutt. Vi har sett at tidevannskraften et gitt sted på jordoverflaten blir dannet av summen av månens (og solas) tyngdekraft og sentrifugalkraften, eller alternativt av forskjellen mellom månens (og solas) tyngdekraft på stedet og tyngdekraften i jordas sentrum. Generelt vil ethvert objekt med en viss utstrekning bli påvirket av deformasjonskrefter som er forårsaket av tyngdefeltets inhomogenitet (dvs. av at tyngdekraften ikke er konstant, men varierer fra sted til sted). Disse deformasjonskreftene betegnes i fysikken også som tidevannskrefter.

Et enkelt eksempel er gitt ved at man tenker seg et lodd som holdes rett over et annet lodd i tyngdefeltet til for eksempel månen, og at de slippes samtidig. Hvis de får starte høyt nok, vil de etterhvert få stadig større avstand, for tyngdekraften er hele tiden størst på det nederste loddet (se figur 5 a).



Figur 5 Effekten av tidevannskreftene i et inhomogent tyngdefelt: (a) To lodd som faller fra forskjellig høyde får økende avstand, (b) To lodd som faller fra samme høyde får minkende avstand, (c) En fallende elastisk ring med fire lodd blir deformert.

Blir de derimot sluppet ved siden av hverandre i samme høyde, vil de nærme seg hverandre, siden tyngdekraften da har samme styrke, men ikke samme retning (figur 5 b). Hvis man nå tenker seg fire lodd som i utgangspunktet er fysisk forbundet med en elastisk ring, er det lett å se at ringen etter hvert blir strukket i loddrett retning og sammenpresset i vannrett retning (figur 5 c).

Dette lille eksempelet kan knyttes direkte til tidevannsfenomenet. Når jorda kretser rundt massesenteret med månen, eller rundt sola, er dette faktisk ingenting annet enn en kontinuerlig fallbevegelse, men da i tillegg med en fartskomponent på tvers av fallretningen. Deformasjonen av ringen med loddene har med andre ord nøyaktig samme opphav som den lille deformasjonen av jordas havoverflate, som altså fører til tidevann.

Et par utregninger

Til nå har vi unngått formler, men noen tall har vært nevnt når det gjaldt lengden av et månedøgn og avstanden mellom jordas sentrum og det felles massesenteret med månen. La oss nå se på hvordan man kan komme fram til disse tallene.

(1) Soldøgn og månedøgn. Et døgn, d = 24 h, kalles også et soldøgn fordi det er den tiden det tar for jorda å gjøre en omdreining sett i forhold til sola. Siden jorda også beveger seg langs en bane rundt sola, er et soldøgn ikke helt likt et stjernedøgn (jordas rotasjonstid i forhold til stjernehimmelen). Månedøgnet er en tredje type. Lengden av et månedøgn, D, kan regnes ut når man vet at tiden det tar mellom hver gang månen krysser forbindelseslinjen mellom jorda og sola, er $T = 29{,}5d$. I løpet av denne tiden roterer jorda T/d ganger i forhold til sola, men bare T/D ganger i forhold til månen. Siden månen i løpet av dette tidsrommet har gått rundt jorda én gang i jordas rotasjonsretning, må antallet T/D være én mindre enn T/d, altså

$$T/D = T/d - 1,$$

som gir den enkle sammenhengen

$$1/d - 1/D = 1/T.$$

(Tilsvarende sammenheng er det bl.a. mellom et stjernedøgn, et soldøgn og et år.) Dermed finner man månedøgnet:

$$D = \frac{1}{1/d - 1/T} = \frac{1}{1/d - 1/29{,}5d} = \frac{29{,}5}{28{,}5}d$$
$$= 1{,}035 \cdot 24\ \text{h} = 24{,}84\ \text{h} = 24\ \text{h}\ 50\ \text{min}.$$

(2) Massesenterets plassering. Avstanden mellom jordas og månens sentre er a = 384 000 km, og jordas masse M er 81 ganger så stor som månens masse m, altså $M = 81m$. Avstanden x fra jordas sentrum til massesenteret kan regnes ut ved hjelp av vektstangprinsippet: Siden avstanden fra månens sentrum til massesenteret er $a - x$, får man ligningen

$$m(a - x) = Mx \quad \Rightarrow \quad ma = (M + m)x,$$

som gir avstanden til massesenteret, dvs. radien i jordas sirkelbevegelse:

$$x = \frac{ma}{M+m} = \frac{ma}{81m+m} = \frac{a}{82}$$
$$= \frac{384\,000\ \text{km}}{82} = 4700\ \text{km},$$

altså omtrent 3/4 av jordradien, som er på 6400 km.

Utregning (1) kan gjøres på flere forskjellig måter, og disse kan med fordel akkompagneres av passende geometriske figurer. Resultatet av utregning (2) kan man konkretisere ved for eksempel å forbinde to vekter i masseforhold 1 : 9 med en lett stang eller et tau, og så merke av massesenteret en tidels taulengde fra (sentrum i) den tyngste vekten. Da skal det være mulig å få dette modellsystemet til å rotere på isen på en slik måte at massesenteret ligger i ro.

Vi har i disse to eksemplene å gjøre med matematikken innen tidevann som astronomisk fenomen, med en viss vekt på geometri og vektorregning. På den annen side er det også matematikk i selve det synlige resultatet av fenomenet, altså de daglige og månedlige svingningene i vannstanden. Disse kan danne utgangspunkt for undervisning innen sammenhengene mellom tabell, graf og situasjon generelt og innen sinus- og cosinus-funksjoner spesielt (se referanse [2]). Tidevannstabeller finnes ferdigtrykt, men det er også mulig å få dem regnet ut og vist med tilhørende grafer (se referanse [3]). Alle som bor ved kysten (og særlig nordover i landet, hvor forskjellene er tydeligst) har dessuten muligheten av å lage tidevannstabeller selv ut ifra egne målinger. Ved å måle vannstanden mange ganger i løpet av en dag, ser man variasjonen i takt med månedøgnet, mens man ved å måle høyeste vannstand gjennom en måned kan få fram de månedlige variasjonen mellom springflo og nippflo.

Når man står i fjæra, er det pussig å tenke på at det her holder til dyr og planter med en «dagsrytme» tilsvarende et halvt månedøgn. For disse organismene har altså månen i en viss forstand en viktigere direkte effekt enn sola.

Noter

1 Newtons fødselsår er 1642 etter den julianske kalender (som fortsatt var i bruk i England da), 1643 etter den gregorianske.

2 Strengt tatt representerer pilene kraftfelt, altså kraft pr. masseenhet.

3 Det er selvsagt mulig å gi en beskrivelse som ikke innebærer bruk av såkalte fiktivkrefter slik som sentrifugalkraften, men dette blir betraktelig mer komplisert. For det første forutsetter det bruk av Newtons andre lov, $\Sigma \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, for det andre kjennskap til begrepet sentripetalakselerasjon (som skal inn på høyre side av ligningen), og for det tredje at man tar med de indre kreftene på jorda (jordas tyngdekraft og normalkraft) på venstre side av ligningen.

Referanser

[1] Mellor, G. L. (1996), *Introduction to Physical Oceanography* (Springer, New York).

[2] Torkildsen, S. H. (1995), Det svinger i Bodø! En matematisk modell. *Tangenten* **6**, nr. 4, 23-29.

[3] Internett – se for eksempel:
http://tbone.biol.sc.edu/tide/sitesel.html eller
http://www.math.uio.no/tidepred/ eller
http://www.dnmi.no/varsel/index.html

ICME 10 · 2004

Kvart 4. år vert det halde ICME – *International Congress on Mathematical Education*. I år var den i Japan, i 2004 skal den vere i København; dei nordiske landa samarbeider om arrangementet.

Vi kjem til å høyre meir om dette i åra framover; dei som er interessert kan følgje med på heimesidene

www.icme-10.dk

Bjørn Smestad

Uhemmet regresjon – det er fali det

Modellbegrepet er sentralt i matematikken. Det dreier seg om hvordan man ut fra noen opplysninger om virkeligheten kan lage et matematisk bilde av denne virkeligheten, og deretter analysere dette bildet for å finne mer informasjon om virkeligheten. Modeller brukes blant annet som grunnlag for svært mange politiske beslutninger, men også i de fleste andre sammenhenger.

Matematisk modellering er et kraftig redskap, og kraftige redskaper er det bestandig fare for å misbruke. Man kan putte inn mer eller mindre sikker informasjon, lage seg en modell, og få ut informasjon som kan nyte godt av matematikkens autoritet. Slik bruk av matematikken egner seg godt for å manipulere en godtroende opinion.

Nettopp derfor er det viktig at elevene får et bevisst forhold til modeller, og ser at konklusjonene som kommer ut aldri er sikrere enn de antakelser vi legger til grunn når vi lager modellen. Problemstillingen nedenfor er en av mange som egner seg godt fra en slik synsvinkel. Den er lett forståelig, og kan forhåpentligvis berede grunnen for å ta opp mer kompliserte (og politiske?) modeller senere.[1]

Problemstilling

Jeg er litt høyere enn faren min; jeg er 178 cm høy, mens min far er 176 cm høy. Dette har irritert ham ikke så rent lite, men her om dagen kom han triumferende med et nytt innspill: – *Da jeg var rekrutt* (*i 1950*) *var jeg høyere enn gjennomsnittet, mens du var lavere enn gjennomsnittet* (*i 1990*). Selv om jeg synes at dette argumentet ikke var noe videre lå utfordringen i luften: Stemmer dette? Et søk på nettet (www.ssb.no) frembrakte følgende tabell:

Norske rekrutters gjennomsnittshøyde:

År	Høyde
1900	170,0
1930	172,8
1960	177,1
1990	179,7

Oppgave

Hva blir konklusjonen: Stemmer farens påstand eller stemmer den ikke?

En tilleggsutfordring: Si noe om hvorfor høyden har økt så voldsomt.

Hva er det rimelig å anta at gjennomsnittshøyden til rekruttene vil være i 2010?

Hva med gjennomsnittshøyden i 1800? Eller i 1030?

Fra litteraturen

Et analogt problem er omtalt og løst i *Tre små venner* av Kjell Aukrust:

Vi kommer inn i historien i det Solan Gundersen forsøker å åpne et syltetøyglass, og Ludvig kommer med et forslag:

- Hadde man enda hatt disse jomsvikingene, de som bet i skjoldkantene. De hadde vel bitt lokket fint av, store og utvokste karer som de var!

- Hva var det denne Ludvig'n satt og babla om?

Gundersen var irritert:

- Store og kraftige vikinger? Sludder og våsprat fra ende til annen. Vikingene var noen oppskrytte små puslinger!

Ludvig så mistenksom på Solan: Hvor hadde sagbruksarbeideren disse opplysningene fra?

Solan Gundersen hadde det fra sjølveste forskningssjefen i Statistisk Sentralbyrå. Ekspertene regna seg tel sånt. Dagens norske soldat vokste nemlig 0.8 millimeter om året. I dag var gjennomsnittshøyden 179 centimeter. Det var bare å regne seg attende i tia med null komma åtte, tel slaget på Stiklestad – Da skulle'n Ludvig få sjå svart på kvitt å mye det vart att tå'n Olav den Hellige, Gaukatore, Afrafaste og'n Hårek fra Tjøtta! – Nei, her nytta det itte å telle på fingra! Men Solan Gundersen kunne fortelle det han:

Døm var ikke høyere enn ei tomflaske

- Dessa oppskrytte råskinna som barka sammen i slaget på Stiklestad var itte høyere enn 29 centimeter!

Ja Ludvig kunne bare måpe. På Stiklestad ville han verken ha sett snurten av bondehæren eller kara hass Olav den Hellige. Døm var rett og slett *borte* neri graset.

- Det eneste Ludvig ville sett og hørt, var kamprop og ei skur av knappnåler som pilsvermer over grastorva. Så kom itte og fortell en sagbruksarbeider at vikingene kunne skru lokket av et syltetøyglass fra Nora fabrikker!

Målløs over slike statistiske kjensgjerninger satte Ludvig seg ende ned …

Dagen etter holdt han seg til opptråkkete stier. Gjennom høgt gras ville han ikke ta seg fram:

Rote seg bort i etterdønningene fra slaget på Stiklestad, det var *fali* det!

(Kjell Aukrust: *Tre små venner*, Helge Erichsens Forlag 1979)

Didaktiske kommentarer

Det elevene gjør i denne oppgaven, er å lage en matematisk modell, tenke over forutsetningene i den og trekke ut opplysninger av den. I tillegg skapes en kognitiv konflikt hvis de faktisk regner ut at vikingene på Stiklestad var ekstremt lave. Denne kognitive konflikten kan føre til at elevene tenker mer over forutsetningene de har gjort, og kanskje kommer de fram til at konklusjoner ikke kan trekkes ukritisk – dersom vi skal forutsette at endringen i høyde har vært lik langt tilbake i tid, må vi være rimelig sikre på at forholdene (eller endringene i forholdene) har vært tilsvarende i hele tidsperioden.

Et annet moment er at man her benytter seg av humorens kraft. Hvorvidt bruk av humor bidrar til læring er høyst omstridt, men de fleste forskerne mener at bruk av humor i det minste bidrar til et hyggeligere og mindre skremmende læringsmiljø. (Dette forutsetter naturligvis at humoren ikke er av uthengende art). En del forskere mener at humoren må være nært knyttet til temaet om den skal ha noen læringseffekt, mens mer løsrevet humor kan virke avsporende. Humorforskning kan derfor sies å støtte bruk av humor som i dette eksemplet.

Før jeg begynte å skrive denne artikkelen, har det aldri falt meg inn at regnestykket til Solan (eller forskningssjefen i Statistisk Sentralbyrå?) kan være feil. Men jeg vil anta at elevene (og andre) vil få andre svar enn 29 centimeter … Dette er kanskje en hint om effekten av å bruke «autoriteter» i undervisningen, både på godt og vondt …

Takk til Kjell Aukrust for tillatelse til å bruke utdraget fra *Tre små venner*.

Note

[1] Se Mogens Niss: «Matematiske modeller, almendannelse og demokrati» fra *Matematikundervisning og Demokrati*, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter 1990.

Landslaget for matematikk i skolen

Adresse:
Landslaget for matematikk i skolen
Boks 2919, Landås
N-5825 Bergen
E-post: lamis@hib.no
Postgiro: 0819 2039356 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Det overordnede målet for Landslaget for matematikk i skolen er å heve kvaliteten på matematikkundervisningen i grunnskolen, den videregående skole og på universitet/høyskole.
Landslaget skal stimulere til kontakt og samarbeid mellom lærere på ulike utdanningsnivåer og mellom lærere og andre som er opptatt av matematikk.

Styret består av:
Fra grunnskolens barnetrinn:
Henrik Kirkegaard, Ålesund
Turid Nørving, Moss
Fra grunnskolens ungdomstrinn:
Johannes Hjelland, Bømlo
Svein H. Torkildsen, Kristiansand (styreleder)
Fra videregående skole:
Anne Karin Wallace, Trondheim.
Bente Solbakken, Mo i Rana
Fra høyskole/universitet:
Kristian Ranestad, Oslo
Veslemøy Johnsen, Kristiansand (nestleder)

Medlemsavgift for 2000

Skole/institusjon	500,–
Enkeltmedlem	275,–
Husstandsmedlem	125,–
Studenter	200,–

Tangenten inngår i kontingenten (Gjelder ikke husstandsmedlemmer)

«Jeg hadde aldri trodd det skulle bli så mye ut av det på denne korte tiden.» Uttalelsen stammer fra en av de som var med da LAMIS ble etablert i Nordfjordeid i august 1997, og den falt i etterkant av det andre sommerkurset vårt, august 1999. Personlig synes jeg det har vært både inspirerende og moro å erfare den varme mottakelse LAMIS har fått i mange kretser, fra departement til ingeniørorganisasjoner og industri. Men det viktigste vil alltid være interessen for LAMIS hos praktiserende lærere. Også der er det mye positivt å erfare.
I mine to år som styreleder har jeg fått mange henvendelser fra de fleste deler av vårt vidstrakte land. Det fins så menn engasjerte lærere med interesse for matematikkundervisning. Men mange føler seg ensomme og savner et nettverk. Vi må nok bare innse at vår særegne geografi og bosetting gjør det vanskelig for mange med personlig kontakt i et lokalt nettverk. Selv i mer tett befolkede områder kan det være vanskelig å få i gang aktivitet gjennom lokallag. Det ser ut til å være et arbeid som må gå over tid. Vi har heldigvis medlemmer rundt om i landet som ikke gir seg i første motbakke.
Dess viktigere vil nok sommerkursene bli. Etter mitt skjønn har vi selv arrangert to svært gode sommerkurs der foredrag og verksteder har holdt høy kvalitet. I år var vi i Island på nordisk matematikklærerkonferanse. Omkring 70 av 130 deltakere var norske, og langt de fleste av dem er medlemmer av LAMIS. Til neste år vil vi igjen arrangere eget sommerkurs. Søknad om støtte er sendt, og vi får håpe at Statens Lærerkurs igjen åpner pengesekken slik at riktig mange kan samles i Kristiansand tidlig i august. Det hadde vært festlig å passere 100 deltakere. Blir været som det er mens jeg nå sitter her og skriver, kan vi nok en gang få

denne deilige kombinasjonen av ferie og fag!
Et annet tiltak vi med god grunn kan ha store forventninger til er «matematikkleirskolen» i Nordfjord. På LAMIS-sidene i dette nummer av Tangenten har vi en omtale av det pilotprosjektet vi har arbeidet med en tid. Mye har skjedd siden ideen ble kastet fram på et møte i interimstyret for et par år siden, og det er deilig å se konkrete resultater. Dette er så avgjort et tiltak å satse på i fortsettelsen. Målet får være at flest mulig elever – og lærere – får erfaring med å «gjøre og snakke» matematikk, ikke bare løse oppgaver fra læreboka. Kan vi bidra til å dreie arbeidet med matematikk mer i den retningen og elevene i tillegg får med seg andre hyggelige minner og erfaringer fra leirskolen, burde dette kunne bli en positiv opplevelse for mange. Her får vi bygge videre på den kompetanse og erfaring som LAMIS-medlemmer er i ferd med å opparbeide seg.
Samarbeidet med Fellesrådet for kunstfagene i skolen (FKS) har også gitt synlige resultater. Konferansen i mars var vellykket og hadde hele 411 deltakere. Også dette var et tiltak som ga deltakerne inspirasjon til å sette matematikken inn i en sammenheng som kan gi arbeidet med faget en ny dimensjon. Omtalen av konferansen i dette nummer av Tangenten viser at LAMIS-medlemmer satte sitt preg på det som skjedde og at tilbakemeldingene er gode. Vi holder fortsatt kontakt med FKS, og i slutten av juni var vi sammen med dem i et møte i departementet for en liten oppsummering av konferansen og mulig spredning av ideer til tverrfaglige opplegg. Med den omorganisering av departementet som nå foregår, vil organisasjoner som vår stå overfor nye problem. Det vil ligge mindre penger i departementet til å støtte tiltak som f eks konferansen «Riv ned gjerdene». Mye av pengene til utviklingsarbeid legges ut til utdanningsdirektørene og vil bli fordelt gjennom dem. Under møtet lovte departementet å gi oss mulighet for å presentere oss og arbeidet vårt på en av de samlingene departementet jevnlig har for samtlige utdanningsdirektører. Det er en mulighet vi bør prøve å få noe ut av.
Matematikkrommet på Hovinhøgda skole er i god gjenge. Også her er målet å inspirere til varierte aktiviteter i matematikkundervisningen. Det godt utstyrte rommet er nå på plass og åpnes i slutten av september. Neste fase i arbeidet blir å få erfaring med bruk av utstyret og spredning av erfaringene. Et eget matematikkrom er neppe den beste løsningen for alle skoler. Det er bruken av utstyret som kan bidra til økt matematkkforståelse hos elevene, og organiseringen av utstyret og undervisningen blir det selvsagt en oppgave for den enkelte skole å finne en løsning på. Uansett burde det være inspirasjon og ideer å hente i det som nå er under oppbygging på Hovindhøgda skole. Bare det å ha ei omfattende utstyrsliste med henvisning til leverandør vil være til hjelp for mange. Flere lister er tilgjengelige på LAMIS’ hjemmeside på internett.
Det synet på matematikkundervisning som ligger bak alle disse tre initiativene er også bygd inn i KappAbel-konkurransen for niendeklasser. Spesielt gledelig er det at det tunge fagmiljøet ved NTNU så sterkt signaliserer at denne type aktiviteter er viktige i

grunnskolens matematikk-opplæring. De samme signaler kommer fra matematisk institutt ved UiO gjennom tilbudet til skolene om å få besøk av en matematiker som holder timer med elevene. Utbudet og variasjonen i temaer er riktig spennende.
Som de aller fleste grunnskolelærere underviser jeg i andre fag enn matematikk. I sommer har jeg blant annet vært på en europeisk konferanse for naturfagundervisning i York, England. Jeg har også hatt en viss kontakt med Prosessindustriens Landsforening (PIL) som organiserte den norske deltakelsen på denne konferansen. Det er interessant å se på det samarbeidet mellom undervisning og industri som er under utvikling i flere land i Europa. Her hjemme har jo LAMIS også hatt kontakt med ingeniørforeningene NIF og NITO, og PIL er sammen med flere bedrifter en av sponsorene til matematikkrommet som også ble presentert i York. Mange er opptatt av å «blåse liv» i realfagene, og alle synes det er vanskelig å nå fram på tross av at de bruker store ressurser på arbeidet. Mye materiell og invitasjon til flere konkurranser sendes skolene uten å nå fram til de som kan gjøre noe med det. Kanskje det hadde vært bedre å samle kreftene, samordne tiltakene og la alt gå som én forsendelse til skolene?
Jeg har denne gangen tillatt meg å bruke litt plass på en liten oppsummering og noen refleksjoner nå som jeg holder på å avslutte min periode som styreleder. Det har vært en krevende, men i høyeste grad interessant periode. Håpet mitt er at den aktiviteten som er i gang får fortsette, og at nye hoder bringer fram nye ideer til tiltak. Med dette takker jeg for meg og ønsker det nye styret lykke til i arbeidet.

Svein H. Torkildsen

http://www.lamis.no

LAMIS har allerede vært på nett ei stund. Internettsiden vår har betydd en stor avlastning for oss som stadig har fått henvendelser fra lærere som gjerne vil ha informasjon om LAMIS. Nå kan vi henvise interesserte til siden vår, og en god del nye medlemmer har meldt seg via skjemaet på internettsiden.
Grete Tofteberg har stått for arbeidet og bygd opp siden vår på sitt eget hjemmeområde. Når du får dette nummeret av Tangenten burde alt være klart på vårt eget domene, og energien kan brukes på å videreutvikle siden. Vedtektene og annen fast informasjon har sin selvsagte plass på siden som også er forsynt med linker til andre interessante adresser.
Informasjon om landslagets aktiviteter samt artikler og bilder fra kurs og konferanser kan forhåpentlig gi et bilde av hvordan vi arbeider og hva vi prioriterer.
Lokallag legger også ut informasjon om møter på internettsiden.
En matematikkoppgave som skiftes ut i alle fall nesten hver måned har vi også fått plass til. Har du forslag til en liten oppgave er det bare å sende den inn. Og har du forslag til forbedringer av siden, er selvsagt også de velkomne.

Riv ned gjerdene!

Svein H. Torkildsen

Forestill deg drøyt 400 godt voksne mennesker som sitter og stirrer mot taket i Folkets hus i Oslo. Hver og en har omhyggelig knyttet knute på en papirstrimmel og fått erfare at det dannes en regulær femkant. Ved hjelp av taklyset som skinner gjennom papiret trer nå en femarmet stjerne fram i den regulære femkanten. En stille mumling går gjennom salen. På scenen står den lune og rolige Geir Botten som har regien på forsamlingens aktivitet.

Og spør om han fikk oss med inn i grenselandet mellom matematikk og kunst. Gjennom fine eksempler fra naturen og den menneskeskapte hverdagen fikk han øynene opp hos noen hver. Her var det snakk om bier og blomster – og fotballer. Selv Pentagon ble avlagt en liten visitt. Og hver og en av de mange konferansedeltakerne fikk også lage ei flott lita eske av en sirkulær papirbit. Det ble en avkortet trekantet pyramide av det – med lokk!

At Geir tok prisen blant bidragsyterne på konferansen «Riv ned gjerdene» får stå som min personlige vurdering. Men det kommer tydelig fram av de 239 evalueringsskjemaene som ble levert inn etter konferansen i mars at mange var enige med meg. Det var ellers varierende kvalitet over bidragene, og som rimelig er var det ikke full samstemmighet mellom deltakerne om hvem som var interessante. Annet er vel heller ikke å vente når forsamlingen er en blanding av kunstnere, matematikere, kunstlærere, matematikklærere og allmennlærere. I en så sammensatt forsamling vil naturligvis også det utbyttet hver enkelt får ha sammenheng med egen kompetanse eller mangel på sådan – som en av deltakerne så treffende formulerte seg på evalueringsskjemaet.

Velformulert var i høyeste grad også professor Trond Berg Eriksen i sitt foredrag *Ars sine scientia nihil*. Mange var interessert i å få en utskrift av nettopp det foredraget. Fellesrådet for kunstfagene i skolen – som hadde hovedansvaret for arrangementet – ser seg ikke i stand til å få ut en konferanserapport. Men det er meningen å legge foredragene ut på Skolenettet. Da kan vi også få helheten i Svein Sjøbergs foredrag om «Realistens kalde kroppsspråk» som dessverre ble sterkt amputert på grunn av tidssprekken i programmet. Mange følte med foredragsholderen som ble tvunget til å improvisere.

Flere av konferansedeltakerne peker på at tidsprogrammet var noe strengt med lange økter og korte pauser. Det ble lite tid til å dyrke gamle og stifte nye bekjentskaper, og det opplever mange som viktig på en konferanse av denne type. Ved en seinere anledning er nok dette en innvending det bør legges stor vekt på imøtekomme. De uformelle samtalene mellom engasjerte deltakere er ofte en like stor inspirasjon som de mer formelle innleggene.

Av de 239 som leverte evalueringsskjema var langt de fleste kvinner (177) og majoriteten over 35 år (193). 113 arbeidet i grunnskolen, 87 i videregående skole og 36 på høyskole/ universitet. Resten arbeidet i administrasjon, annen offentlig eller privat virksomhet. 105 hadde matematikkfaglig og 109 kunstfaglig bakgrunn. Det var 70 allmennlærere og 30 med annen bakgrunn. Flere av deltakerne har altså mer enn ett bein å stå på. Det må være et kompliment til de som har stått for konferansen at 115 i denne bredt sammensatte forsamlingen ga en 5'er for helheten i konferansen. 31 ga en 6'er – meget godt.

Hva mer hadde deltakerne på hjertet etter konferansen? Jeg siterer et utvalg av de mange positive uttalelsene:

- Etter R-94 er dette det første kurset jeg får være med på som tar for seg disse viktige delene av læreplanen. Vi trenger slike innspill for å få et eieforhold til deler av læreplanen. Vi lærere kan være en «treg masse». Vi trenger bare ordentlig input for å komme i gang.
- Flott og inspirerende!
- Dette må gjentas. Dette gir energi!
- Gjenta dette, helst årlig, men til en lavere pris.
- Det beste seminar jeg har vært med på!
- jeg føler jeg har fått en gavepakke fra skolen for å dra hit.
- Viktig konferanse i en forvirrende tid – mye nytt/ulike tolkinger av planer osv.
- Jeg skulle ønske hele kollegiet mitt hadde vært her.
- Gir håp om at skolen beveger seg i riktig retning.

Men skepsisen ligger også under hos enkelte:

- Jeg var noen ganger urolig for en mulig faglig overflatiskhet. Det er ikke nok å si «sirkel» og «kvadrat», så er det automatisk matematikk.
- Jeg ser en liten fare: Matematikklæreren kan gjerne la kjedsomheten komme inn i vårt fag ved å forklare for mye, ta vekk spenningen. Han må også være interessert i form og innlevelse – på samme måte som formgiveren må ha respekt for tallenes betydning – og skjønnhet!
- Seminaret var preget av for lite kunnskap i kunst og håndverk. Ta med fagfolk i seinere prosjekt. Spre kunnskap!

Noen peker på andre problem det er verd å merke seg:

- Dette har jeg venta på! Men

de fleste er ikke DER – redde for mer bunden tid til planlegging/merarbeid.
· Jeg måtte betale over halvparten selv, og ingen flere fikk delta.

Og så har vi da en som riktig slår til: «Gjerdene er revet. Nå kommer ulven og tar alle sauene.» Nettopp denne kommentaren kan minne oss om at kombinasjonen av fag ikke er uproblematisk. Men det hadde vært interessant med en nærmere begrunnelse fra denne konferansedeltakeren. Det kan bli en interessant debatt av det i Tangenten. Jeg synes LAMIS har all grunn til å være tilfreds med konferansen og samarbeidet med Fellesrådet for kunstfagene i skolen (FKS). De LAMIS-medlemmene som var i ilden under konferansen, har alle kommet godt ut av konferansedeltakernes evaluering. En ekstra honnør fortjener Gunnar Nordberg og Ida Heiberg Solem som har representert LAMIS i forberedelsene og gjennomføringen av konferansen. De vil også fortsatt holde kontakt med FKS.

Videre utvikling av LAMIS

Gerd Nilsen

Sist skoleår ble medlemmene i **LAMIS** bedt om å mene noe om den videre utvikling av «Landslaget for matematikk i skolen».
Her følger en kortfattet oppsummering av undersøkelsen. Tallene bygger på svar fra **166** medlemmer.
I Tangenten har LAMIS noen sider hvor de gir informasjon bl.a. om styrets arbeid med mer.

Spørsmål 1 gikk på hvordan man er fornøyd med den informasjonen som blir gitt på de nevnte sidene i Tangenten og her svarer **75 %** på at de er godt fornøyd og resten at de er mellomfornøyd.

Spørsmål 2 lød som følger: «Hva slags stoff for øvrig setter du mest pris på i Tangenten».
Her måtte man gjerne sette flere kryss.
Av 5 nevnte områder var det 2–3 som pekte seg klart ut som det medlemmene verdsatte høyest:
78 % vil gjerne ha artikler som beskriver arbeid i klasserommet
70 % setter stor pris på faglige artikler om matematiske temaer
60 % vil gjerne ha oppgavesider
31 % liker at det debatteres matematikk i bladet
30 % setter pris på bokomtaler
Flere nevner under kommentarene til dette spørsmålet at de liker variasjonen i bladet og derfor krysser av på det meste.
Andre igjen sier at dette med tips om differensierings-muligheter er noe man bør få mer av, hvis mulig. «Gleder meg til neste nummer av Tangenten» sies også av flere.

Spørsmål 3 «Synes du etablering av lokallag bør være en prioritert oppgave?
35 % svarer ja
23 % svarer nei
42 % svarer vet ikke
Kommentarene som går igjen her er at dette er sterkt avhengig av ildsjeler som kan risikere å brenne ut.
Det bør kanskje begrenses til større steder hvor konsentrasjonen av matematikklærere er relativt høy.
Noen kommenterer at en møteplass for matematikklærere hadde vært fint å ha.

Spørsmål 4: «Hva slags aktiviteter synes du et lokallag skal prioritere?»
Av de som svarte her mente 63 % at lokallaget skulle ha kurs for alle interesserte og ikke bare medlemmene.
Like mange mente at det skulle arrangeres medlemsmøter med matematikkaktiviteter
34 % krysset av for at debattmøter hadde vært interessant.
PS! For den våkne matematiker nevnes bare at man her kunne krysse av ved flere alternativer.

Spørsmål 5 gikk på om medlemmene synes at arbeidet om å utarbeide et lite oppgavehefte burde være en prioritert oppgave der styret også ber om innspill fra medlemmene. Dette oppgaveheftet er da tenkt å kunne brukes på flere nivå.
Her svarer 82 % at de synes dette er en god ide
3 % svarer nei
15 % vet ikke
Kommentarer her gikk på; flott ide, håper mange kommer med oppgaveforslag, kanskje et forlag burde ta på seg jobben, hva om LAMIS og SUE kunne samarbeidet her, et godt supplement som vil være å ta L-97 på alvor.

Inntrykk fra Island

Marianne Thorrud Vike

Jeg har aldri vært på matematikkonferanse før, men var en av de heldige som fikk støtte fra LAMIS til å være med på denne konferansen. Forventningene om både faglig utbytte og natur- og kulturopplevelser fra Island ble oppfylt.
Arrangørene hadde tenkt på begge deler fra begynnelse til slutt. Jeg sitter igjen med mange opplevelser fra Island, mye matnyttig faglig påfyll og mer kunnskap om hva de andre nordiske landene foretar seg på matematikkfronten.
Konferansen ble holdt i en liten by, Borgarnes, med historisk sus fra sagatiden.

Foto: Kurt Klungland

Faglig del

Her var det lagt opp til en variasjon med foredrag, diskusjoner og verksteder. Jeg for min del hadde mest utbytte av verkstedene jeg valgte å være med på. Programmet var lagt opp slik at vi hadde muligheter til å velge. Det var flott, men jeg fikk ikke med meg alt jeg hadde lyst til. Variasjonen av temaer som ble tatt opp på de ulike verkstedene var stor. De faglig ansvarlige for dette programmet hadde vært flinke til å treffe temaer, og jeg fikk stort utbytte av å delta på verksteder om for eksempel algebra og sannsynlighet og statistikk. Det ga meg mye å reflektere over i forhold til L 97 og mye som jeg kan bruke rett inn i undervisningen min. Det er slik vi fotfolket (jeg er matematikklærer på ungdomsskolen) liker å ha det når vi er på «kurs». Jeg fikk også bekreftelse på at andre har prøvd ut og kommet til samme konklusjon som meg: Det er viktig med utforsking og andre type oppgaver i tillegg til tradisjonelle matematikkoppgaver vi kjenner fra før for å få med oss flere av elevene. Kanskje de også vil synes at matematikk er GØY.
Det var også fokusert på organiseringsformer, hvordan komme bort fra lærerrollen og gå inn i veilederrollen? Her fikk jeg mange ideer og tips under konferansen.
Det var også god tid til diskusjoner både innenfor programmerte poster og utenom disse.

Kulturell del

Den kulturelle biten var også

nøye gjennomtenkt, og disse inntrykkene vil sitte for bestandig. Jeg som alltid har drømt om å reise til Island fikk med meg mange av severdighetene landet er kjent for. Noen fikk til og med oppleve jordskjelv. Jeg kom en dag for sent til denne opplevelsen. Men åpningsseremonien på Þingvellir fikk jeg med meg, en flott start på det hele. Andre opplevelser var å få besøke hjemstedet til Snorri Sturlason. Her fikk vi en fyldig innformasjon om dette stedets historie av presten og hans fru som nok var svært så glade i og stolte av stedet sitt. Varme kilder ble besøkt og vi fikk også smake vann med CO_2 rett fra kilden. Jeg og mange andre benyttet også anledningen til å ta med oss noen biter av Island. Det ble plukket lava i stor stil på en av våre utflukter som et bevis på at vi hadde vært der. Sankthansdagen bød på mange opplevelser som skjerpet flere av sansene våre. Det å smake på råtten hai var en av dem, en selsom rett som ble servert på en gård ut mot Breiðarfjörður. Den vil bli husket, men jeg er ikke sikker på om den opplevelsen blir gjentatt. På samme sted fikk vi også besøke den lille gårdens kirke. Bonden som eide kirken var omviser. Mange gamle gjenstander ble vist fram mens eieren fortalte historien om dem. Samme kveld fikk vi en flott naturopplevelse med båt på Breiðarfjörður. Vi fikk se havørn, lundefugl og mange slags blomster som vokste på øyene i fjorden. Senere på kvelden var det et fantastisk måltid med alt som havet kan by på. Det mest spesielle var det å få smake på lundefugl. Denne sankthansdagen vil bli et godt minne for livet. Til og med solen var med oss under hele oppholdet. Islendingene var like overrasket som oss over så mye fint vær.
Festmiddagen den siste kvelden ble slik det sto i programmet, underholdning fra deltagere, fra den lokale folkedansgruppen og dans og moro til langt på natt.
Det jeg sitter igjen med fra denne konferansen er rikt utvalg av ideer til min egen matematikkundervisning og bedre grunnlag til å forbedre denne. Det var utrolig morsomt å få være med i et nordisk matematikkmiljø. Det ga meg også enorm lyst til å engasjere meg mer for dette faget. Det blir nok ikke siste gang dere ser meg.

Hilsen en heldig lærer som fikk være med på dette.


Foto: Kurt Klungland

Med 7. klasse til Nordfjordeid

Turid Nørving

7. klasse på Kirkebygden skole i Våler, Østfold var heldige og skulle få prøve et leirskoleopphold ved Sophus Lie-senteret/Fjordane folkehøgskole. 20 spente elever, to foreldre og klassens lærer dro med buss fra skolen mandag 4. juni om morgenen. En lang busstur ventet. Denne gikk mye bedre enn noen kunne tro på forhånd. En behagelig buss, en grei sjåfør, tre videofilmer og bra vær bidro til dette. Framme i Nordfjordeid ventet en god middag, alle var fornøyd med både mat og rom.
Neste dag, tirsdag, begynte «alvoret», selve leirskolen. Klassen ble delt i grupper, den ene gruppa arbeidet med planetene i vårt solsystem, de lagde også et fint solur. Den andre gruppa jobba med hemmelige koder/kryptogrammer. Etter lunch gikk turen til Bjørkevika der det blir bygd vikingskip. Her fikk alle ut å ro. Fem par årer i hvert skip, det var ikke helt lett. Bading ble det også tid til før vi skulle hjem igjen til middag. På kvelden var det samling ved sjøen, bading, leirbål og allsang. Alle syntes de hadde hatt en fin dag.
Onsdag var det dragebygging, Pytagoras og kalkulatorlek som sto på planen. Etter lunch kunne elevene ri. Her hadde vi en avtale med hestesenteret. De som ikke skulle ri kunne velge fotball, dragebygging eller modellflybygging. De fleste guttene valgte fotball. Middagen i dag var grilling ute i atriet. Her var vi sammen med ti engelske elever som også bodde på skolen denne uka.
Ulike gruppeoppgaver ute, en liten samling inne, bra med fritid før leggetid og oppholdet vårt var snart over.
Hjemover gikk turen over Valdresflya, snø og nydelig vær. Alle elevene var godt fornøyd med turen og ganske trøtte og slitne på skolen fredag.
Til slutt noen betraktninger fra klassens lærer. I forkant av leirskolen hadde elevene arbeidet med et prosjekt om Sophus Lie. De hadde også hatt besøk på skolen av Kristian Ranestad og Geir Ellingsrud fra Universitetet i Oslo.
Turen Våler–Nordfjordeid er lang, ca 10–11 timers busstur, men den gikk veldig bra. Fjordane folkehøgskole er fint egnet til et slikt opphold, men vi burde kanskje hatt noen regler om hvor og når elevene kunne forlate skolen. Kanskje 7. klasse på våren ikke er den helt «rette» klassen. Mange elever ser seg ferdig med skolen, og er mer interessert i skoletur enn i leirskole. Men - det var ingen av elevene som ville vært foruten denne turen. Til turen fikk vi pengestøtte fra Odd Fellow Fondet, Moss, Norske Sivilingeniørers Forening og NITO Østfold. Vi fikk fire filmer pluss framkalling av Moss Dagblad. Tusen takk til dem alle. En stor takk også til Henrik Kierkegaard, Bjørn Bjørneng og Kristian Ranestad som alle var flotte lærere for oss.