Korden

Hjertelig velkommen til det nye året.

Redaktøren og TANGENTENS redaksjon håper at 2000-års gaven, den nordiske boka *Matematikk og undervisning* har nådd frem til dere. Vi i redaksjonen er stolte av produktet. I dette samarbeidsprosjektet ble alle som satt i redaksjonen oppmerksom på de store felles trekkene i de forskjellige nordiske landenes undervisningskulturer også i matematikkfaget. Det hadde nok vært en mye større utfordring å skrive en liknende bok hvis Storbritannia, Frankrike, Tyskland og Norge skulle ha deltatt. Derfor faller også kommunikasjonen med andre nordiske lærere lettere, noe som også Islandskonferansen sommeren 2000 var et levende bevis på.

Vi er stolte over å kunne røpe at selve bokprosjektet var en Tangent-ide født i 1998. Vi går ut fra at dere nå har bra med god lesestoff og lar derfor dette nummeret av Tangenten komme ut med bare 48 sider.

Etter alle disse skulderklappene på våre egne og våre nordiske naboers skuldrer, nå noen ord om Tangenten 1 2001. Vi er så heldige at vi kan fortsette tradisjonen med elevartikler. Denne gangen er det to jenter fra Kristiansand som tar oss med i deres spennende matematikkverden ut i naturen. Slike bidrag vil vi gjerne ha mer av. Vi håper flere elever blir inspirert av slik lesning og at dere lærere kan ta slike artikler med i undervisningen. Elevers trang til skriving og til meddelelse i faget matematikk er et godt tegn på et rikt miljø og en inspirerende undervisning.

Vi har også tatt opp en gammel tradisjon som har vært forsømt i noen numre, nemlig konkrete aktiviteter til klasserommet. Ingvill Holden har samlet noen opplegg som lett kan brukes i klasserommet en dag du vil prøve ut noe annet. Vi håper at vi kan fortsette og utvikle denne tråden videre i det nye årtusen.

Neste nummer er planlagt som et temahefte om matematikk og spill. Redaksjonen har bedt Ingvill Holden om å være gjesteredaktør. Dette heftet håper vi å kunne bruke i en større rekrutteringskampanje.

Enda et nytt temahefte, men denne gangen om den lille kalkulatoren, venter oss i nummer 4 2001. Her ligger mye spennende stoff. Dessuten kan vi røpe at Tangenten har satt i gang et arbeid med å samle sammen alle Tangent-oppgaver fra tidenes morgen helt frem til år 2000 i et oppgavehefte. Denne samlingen vil snart komme på markedet som en perm med kopiorginaler. Oppgavene er oversiktlig inndelt etter trinn, emne og varighet.

Tangentredaksjonen ønsker en god start på det nye året.

Christoph Kirfel

Christina Dvergsnes og Amalie Sindland, 10. klasse

Fra Kirkegata til Baneheia

I Kristiansand går E18 nær opp til sentrum. Denne veien har etterhvert blitt ganske trafikkert, og etter mange års planlegging har nå endelig arbeidet med utvidelse av veien begynt. Men alt er ikke bare fryd og gammen.

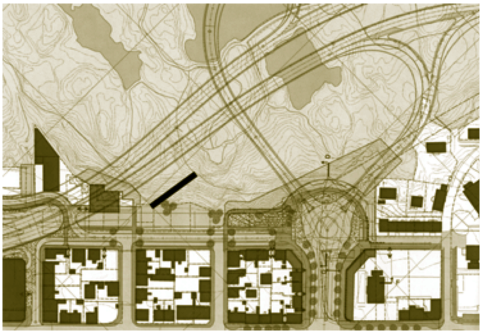
Den nye veien går for det meste i tunneler under Baneheia, og da oppstår det et problem: En av de viktigste turveiene fra byen og opp i Baneheia blir stengt.

Derfor har avisen Fædrelandsvennen oppfordret folk til å komme med forslag på hvordan en ny vei fra Kirkegata og opp i Baneheia kan bli seende ut, og det er det vi har laget et forslag på.

Vi har, i stedet for en helt vanlig, kjedelig sti opp i Baneheia, tenkt oss rulletrapp i ei tube!

Nøyaktige kart

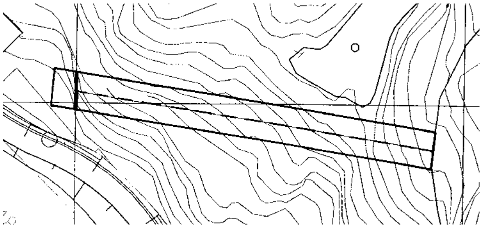
For at de planene vi la for veien opp til Baneheia skulle bli nøyaktige nok, var læreren vår borte og snakket med folk på veivesenet. Han fikk med seg noen forskjellige kart tilbake. Et av kartene viser hvordan Baneheia og E-18 ser ut nå – og hvordan de har tenkt at det hele skal ende opp. Det kartet som vi benyttet til arbeidet vårt, var i målestokk 1 : 500 og ekvidistansen var 1 meter.



Hvor lang blir tuben?

For å finne ut hvor lang tuben med rulletrapp skulle være, måtte vi bruke det vi har lært om Pytagoras' setning.

Ved å telle kotene på kartet visste vi hvor stor høyden (h) (fra veien til der tunnelen sluttet) var. Ved å måle på kartet fant vi også ut hvor langt «inn i Baneheia» tunnelen skulle gå (l).



Vi hadde altså en rettvinklet trekant hvor vi visste lengden på begge katetene, og da regnet vi ut lengden på hypotenusen (lengden på tuben) slik:

$$\text{Lengden på tuben} = \sqrt{h^2 + l^2}$$
$$= \sqrt{18^2 + 46{,}5^2} = 50 \text{ m}$$

Kan vi ha rulletrapp her?

For å finne ut hvor mange grader tuben skulle gå i, laget vi først ei snitt-tegning.

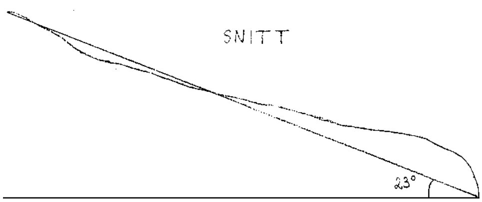
Det gjorde vi ved å legge et millimeterark inntil et kart over Baneheia i målestokk 1:250 hvor ekvidistansen var én meter. Hver kote ble tegnet som en strek på arket, og lengden på hver strek økte med 4 mm, siden vi på modellen hadde laget ei kote 4 mm høy.

Et firma som lager rulletrapper kunne opplyse at stigningen på ei rulletrapp kan være 35°.

Vi hadde bestemt oss for at vi ville legge tuben slik at vi slapp å bygge den veldig mye opp. Da ville vi heller sprenge den litt ned i terrenget så den ikke skulle stikke seg så veldig mye frem.

Men vi ble allikevel litt redde for at vi hadde planlagt rulletrappa litt for bratt.

Vi satte en rett strek på snitt-tegninga der vi hadde tenkt at tuben skulle gå. Etterpå målte vi stigningen med gradskive og fant ut at vinkelen på trappa heldigvis ikke ble større enn 23°.

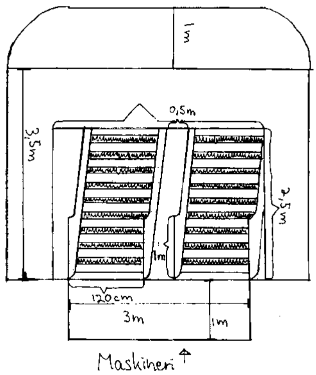


Slik skal tuba se ut!

Vi hadde snakket om hvordan tuba skulle se ut og fant ut at vi trengte noen tegninger for å se hvordan det vi hadde snakket om fungerte i praksis. På disse tegningene benyttet vi målestokk 1:50.

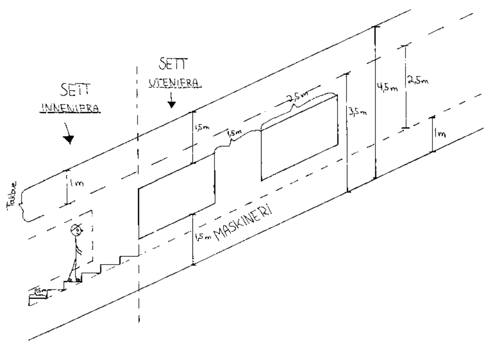
Inngangspartiet til rulletrappene er 3,5 meter høyt + et buet tak på 1 meter. Under inngangspartiet må maskinrommet graves ned. Dørene er elektriske skyvedører som åpner og lukker av seg selv når det er folk i nærheten. Døråpningen er 3,5 meter bred og 2,5 meter høy.

Vi hadde blitt enige om at når vi stod i trappa skulle det være minst 2 meter fra hodet og opp til taket. Det ble 3,5 m på det høyeste og 2,5 m på det laveste. Grunnen til det var at vi ville ha buet tak



der det skulle være en meter fra buens toppunkt til der buen begynte.

Så måtte vi ha vinduer slik at vi kunne se ut på den lange kjøreturen oppover. Vinduene skulle være store. Lengden skulle være 2,5 meter og høyden 1,5 meter. Disse skulle ligge i samme vinkel som tuba så vinduene og toppen av tuba ble parallelle. Altså var vinduene parallellogrammer. Det er ikke bare å plassere vinduene på tuba. Vi holdt nesten på å glemme at det skulle være mulig å se ut av dem. Men det gikk heldigvis bra med de beregningene vi hadde gjort.

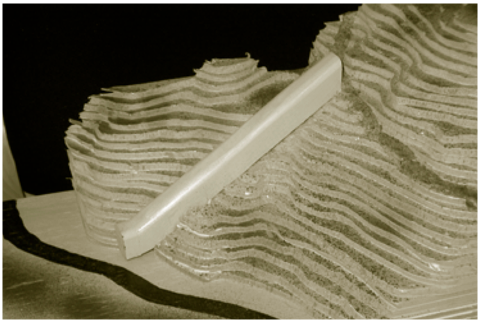


Under rulletrappa måtte vi ha plass til et maskinrom. Dette skulle sprenges eller graves ned i bakken under rulletrappa. Vi målte på ei rulletrapp i et kjøpesenter at dette var ca 1 meter høyt, så vi beregnet 1 meter på tegningene.

Vi hadde ingen anelse om hvor brede trinnene kunne være. Etter en ny telefon til rulletrappfabrikken fikk vi vite at trinnene kan være 60, 80 eller 100 cm brede. Vi valgte 80 cm, men vi regnet med 100 cm på grunn av at dette var uten gelendrene. Men vi trengte 2 rulletrapper, ei nedover også.

Fra veggen bort til gelenderet beregnet vi 1 meter, og mellom rulletrappene beregnet vi en halv meter. Altså skulle tuba være 2 rulletrapper a 1 m + 2,5 m i mellomrom = 4,5 meter bred og 3,5 meter i høyde + maskinrom 1 meter = 4,5 meter høy på det høyeste. Men på grunn av at vi skulle grave rulletrappa ned skulle det aldri være mulig å se hele høyden på 4,5 meter.

Trappetrinnene skulle være 0,5 meter dype, 0,8 meter breie og 0,25 meter høye.



Men etter hvert som ideen begynte å ta form fant vi ut at vi trengte mer enn bare tegninger på kartet. Vi trengte en modell for å vise hvordan terrenget var og hvordan tuben ville ligge i terrenget. Læreren vår hjalp oss med hvordan vi skulle få til en modell. Det første vi gjorde var å ta kartet og forstørre det opp til 1:250. Ekvidistansen var fortsatt 1 meter.

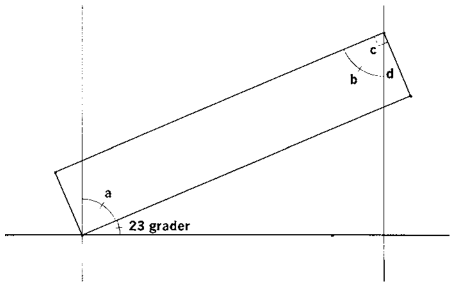
For å lage modellen måtte vi ha tak i noen plater som var 100 cm : 250 = 0,4 cm = 4 mm tykke. Platene måtte være 4 mm tykke fordi ekvidistansen på kartet er 1 m = 100 cm. Dette må vi dele på 250 fordi målestokken på kartet var 1:250.

Så var det å bygge modellen. Vi kopierte opp 29 ark, ett for hver kote. Deretter klippet vi arkene etter kotene slik at vi hadde 29 ark som var klipt forskjellig. Deretter la vi disse opp på platene og kuttet disse ut og stablet dem oppå hverandre. Nå hadde vi et utsnitt av Baneheia i hendene våre. Så måtte vi «ødelegge» modellen vår for å sette inn tuben med rulletrapp. Men først måtte vi lage den i riktig målestokk i forhold til fjellet. Rulletrappa var 50 meter lang. Dette delte vi på 250. 50 meter : 250 = 0,2 meter = 20 cm ble tuba på modellen. Dette gjorde vi fordi at 1 cm = 250 cm i virkeligheten.

Hvilken vinkel skal inngangspartiene til tuba kuttes i?

Siden ikke tuba ligger vannrett, blir ikke åpningene i begge sider vinkelrette. Derfor måtte vi finne ut hvilken vinkel vi måtte kutte endene i for å få dem loddrette. Se figur 6.

Vi visste at tuba skulle ligge i 23° og vi visste at taket på tuba gikk parallelt med bunnen. Vinkel *a* måtte da være 90° – 23° = 67°.



Hvis vi setter ei linje som går vinkelrett på bakken i andre enden også, blir tuben et parallellogram. I et parallellogram er alle motstående vinkler like store. Altså er $\angle b$ like stor som $\angle a$ (67°).

$\angle c$ er 90°; $\angle d$ = 90° – 67° = 23°.

Vi vet altså at vinkelen vi må kutte bort er 23°.

Valg

Det ble laget tre forskjellige modeller i klassen vår. Elevene i 8. og 9. klasse skulle stemme over hvilket forslag de syntes var best. Vi startet med en presentasjon av de tre forskjellige forslagene. Forslaget vårt skapte heftige diskusjoner blant elevene. De fleste syntes det var teit med ei rulletrapp opp i Baneheia. De fleste stemte for et forslag med en sti som var lagt slik at det ikke blir nødvendig å gjøre inngrep i naturen.

Så vi får bare spare på forslaget vårt. Om femti år kan du kanskje komme til Kristiansand og kjøre rulletrapp opp i Baneheia. Det hadde vært noe det!

Frode Olav Haara

Matematikk i prosjektarbeid – ikke bare et alibi

– et eksempel på faglig nyttig integrasjon av matematikk og språkfag i ungdomsskolen.

I artikkelen argumenteres det i polemisk form for at matematikk bør ha en mer framtredende rolle i tverrfaglige prosjektarbeid, og at en stor del av ansvaret for at dette skal skje hviler på matematikklærerne. Gjennom en matematikkdidaktisk synsvinkel rapporterer artikkelen så fra et gjennomført eksempel på hvordan man kan integrere matematikk og engelsk i et tverrfaglig prosjekt i ungdomsskolen. Konklusjonene fra prosjektarbeidet viser at elevene fikk utnyttet sin matematiske kompetanse, både innenfor problemløsning og kreativ utnyttelse av matematisk interessant informasjon.

Bruk av matematikk i tverrfaglige prosjekt

Det tverrfaglige prosjektet har i L-97 fått en betydelig posisjon. På ungdomstrinnet skal minst 20% av elevenes arbeidsuke brukes til prosjektarbeid, og en enda større del skal settes av lenger ned i grunnskolen (KUF, 1996). L-97 gir også signaler om at alle fag elevene har på skolen bør være representert i tverrfaglig prosjektarbeid på en slik måte at elevene har et faglig utbytte innenfor faget. Erfaringer og observasjoner fra skolen viser at dette ikke alltid er like lett å gjennomføre, og at bruken av enkelte fag i tverrfaglige prosjekter hvor de blir forventet benyttet, ikke oppfyller forventningene. Bruken er mer i form av et faglig alibi, enn av nytte. Matematikk er et slikt fag. Alt for ofte blir matematikk trukket inn i tverrfaglige prosjekter gjennom representasjon av for eksempel elementære statistiske betraktinger, eller mer eller mindre banale utregninger av typen «handleliste for innkjøp av varer til å lage indisk mat i forbindelse med India-prosjektet». Med all respekt for lærere som i beste mening, og med gode forsett går inn for å integrere matematikk med andre fag i tverrfaglig prosjektundervisning; eksemplene ovenfor kan ikke forsvares som matematisk representasjon i prosjekt. Når et fag inkluderes i et prosjekt, må målet være at man skal lære noe nytt innenfor eller om faget, det være seg fakta, ferdigheter eller nytte av fagene som inkluderes i prosjektet. Innenfor matematikk vil det for eksempel være naturlig å fokusere på pensumstoff, arbeidsmåter innenfor problemløsning eller å kunne isolere eller integrere matematisk stoff fra eller med annet stoff i større skala.

Økt vektlegging av matematikk i forbindelse med tverrfaglige prosjekt må nødvendigvis bli matematikklærernes ansvar. Man kan ikke forvente at elevene selv eller lærere som er ansvarlig for andre fag skal kunne se behovet for å fremme matematikkens posisjon i aktuelle prosjekter. I klartekst betyr dette at matematikklærerne må legge fram og selge ideer og opplegg som kan være matematisk interessante i prosjektform. For å få til dette kreves det planlegging og tilrettelegging fra matematikklærernes side. Man må være villig til å frigjøre timer til tverrfaglig prosjektarbeid fra matematikkfagets rammetimetall og prosjektarbeid vil måtte erstatte spesifikt arbeid med stoff fra læreverk. Slike faktorer vil kreve ressurser og høyere prioritering av noen deler av faget, noe som ikke nødvendigvis er lett eller gunstig i et fag som allerede har nokså få timer til disposisjon i forhold til ønsket måloppnåelse (KUF, 1996), og hvor manglende kunnskap innenfor en del av faget lett blir synlig og får både kortsiktige og langsiktige konsekvenser også for andre deler av faget (Ausubel, 1963: i Orton, 1992; Solvang, 1992; KUF, 1996).

Nå er det ikke slik at man utelukkende bør fokusere på målbart pensumstoff i forbindelse med tverrfaglige prosjekt, selv om slikt stoff kanskje gjør det lett å måle læringsutbyttet. Det er et spørsmål om prioritering fra den ansvarlige lærerens side. Minst like interessant kan det være å legge vekt på sider ved matematikk som læreverk og undervisning ikke alltid klarer å prioritere etter rammene fra læreplanen (Solvang, 1992; KUF, 1996). Dette gjelder særlig muligheten som prosjekt gir for arbeid med problemløsning (Polya, 1990; Bruner, 1960; Wickelgren, 1974; Burton, 1984), og isolering eller integrering av matematisk stoff fra eller med annet stoff i større skala (Se også Bruner, 1960).

Denne artikkelen omhandler et eksempel på hvordan det er mulig å inkludere disse faktorene i tverrfaglige prosjekt til både matematikken og de andre involverte fagenes beste.

Alice´s Adventures in Wonderland

Et individuelt tverrfaglig prosjekt gjennomført i en norsk 9.klasse våren 2000 ble knyttet til engelsk og matematikk. Forfatteren og matematikeren Charles L. Dodgson, bedre kjent som Lewis Carroll, gav i 1865 ut barneboka **Alice´s Adventures in Wonderland** (Alice i Eventyrland). I boka har Carroll enkelte steder benyttet seg av matematikk som litterært virkemiddel. Se bare på følgende eksempel (Guiliano, 1995: s.62):

> «And how many hours a day did you do lessons?» said Alice, in a hurry to change the subject. «Ten hours the first day,» said the Mock Turtle: «nine the next, and so on.» «What a curious plan!» exclaimed Alice. «That´s the reason they´re called lessons,» the Gryphon remarked: «because they lessen from day to day.» This was quite a new idea to Alice, and she thought it over a little before she made her next remark. «Then the eleventh day must have been a holiday?» «Of course it was», said the Mock Turtle.

I teksten kan vi da finne følgende matematikkoppgave:

> *Hvor mange timer hadde skilpadda og gryfonen i skoleuka?*
> Svar: (10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) timer = 55 timer

Dette er ingen komplisert oppgave, og den er heller ikke vanskelig å løse. Her er det også mulig å fokusere på utvidelser, for eksempel mot den generelle formen $n(n + 1)/2$.

Andre eksempler kan være mer kompliserte. Se på følgende eksempel, og forsøk gjerne å løse oppgaven (Guiliano, 1995: side 11–12):

> I´ll try if I know all the things I used to know. Let me see: four times five is twelve, and four times six is thirteen, and four times seven is - oh dear! I shall never get to twenty at that rate!

Oppgaven i teksten kan da for eksempel være: *Hvorfor kommer ikke Alice til 20?* Denne oppgaven kan fort bli vanskelig å løse. Den er her tatt med for å vise at kompleksiteten i det matematiske innholdet i **Alice´s Adventures in Wonderland** varierer sterkt, og derfor gir et tilbud til alle elever.

En sentral del av det tverrfaglige prosjektet (Det var flere andre deler, men ingen av dem har interesse her, da de kun var av språkfaglig interesse.) var følgende oppgave:

Give a review of mathematical content from ***Alice´s Adventures in Wonderland***. (Gi en oversikt over matematisk innhold i Alice i Eventyrland.)

Intensjonen med denne oppgaven var å legge opp til et utforskingsarbeid hvor matematikk var det sentrale. Elevene fikk i oppgave å trekke ut, og på engelsk notere ned matematikkstoff de fant i teksten. Det ble fokusert på at i et slikt utforskingsarbeid er det ikke noen fasit på hva, og hvor mye matematisk stoff den enkelte vil kunne finne. Når elevene fant stoff i teksten, som de mente kunne ha tilknytning til matematikk, måtte de derfor stille seg selv to spørsmål:

– Kan det jeg har funnet kalles matematikk?
– Er dette matematisk stoff som jeg ønsker å ha med i min prosjektoppgave?

Hvis svaret ble ja på disse to spørsmålene, burde elevene ta det aktuelle stoffet med i oppgavene sine. Da hadde de følgende retningslinjer for presentasjonen av stoffet:

1. Begynn på en ny A4-side, og skriv ned hvilket nummer i rekken av matematiske eksempler det aktuelle eksempelet er, og på hvilken side du har funnet det.
2. Skriv ned nøyaktig det du har funnet, slik at det er lett å se hva du har plukket ut (Sitat).
3. Skriv så hva du synes er matematisk i utdraget. (Er det for eksempel noe med pluss, minus, ganging eller deling? Kanskje har det noe med geometri å gjøre? Kanskje det er sannsynlighetsregning? Eller kanskje det er noe helt annet...)
4. Hva kan det du har funnet brukes til?
   – Er det rett og slett en oppgave du kan prøve å løse? I så fall: PRØV! (Og får du det ikke til, så la forsøket ditt bli stående i oppgaven du leverer.)
   – Kan du kanskje lage en oppgave av det du har funnet? I så fall: Prøv, og løs så oppgaven du har laget.

Elevene hadde 9 uker på hele prosjektet, noe som hovedsakelig var nødvendig fordi alle skulle få tid til å lese hele boka. Videre hadde elevene, sett i forhold til alder og erfaring, brukbar trening i oppgaveskriving (se Hovdhaugen, 1992; Mellin-Olsen, 1993; Ernest, 1994 for aktuelle idealutforminger av oppgavebesvarelser). Prosjektproduktene oppfylte derfor strukturelle krav til utforming.

I besvarelsene fungerte de filologiske delene av prosjektet naturlig som bakgrunnsstoff for matematikkdelen, slik at arbeidet med det matematiske innholdet ubevisst framsto som den sentrale del i prosjektarbeidet. Engelskfaget ble derfor ikke dominerende, til tross for at kildematerialet var på engelsk, filologiske oppgaver var inkludert og besvarelsen ble skrevet på engelsk.

Hvorfor kommer ikke Alice til 20?

En gjennomgang av elevenes innleverte besvarelser viser først og fremst at dette var en matematikkfaglig prosjektoppgave som gav muligheter for alle. Det ble levert besvarelser som hadde tatt med kun ett eller to matematiske eksempler fra teksten, og det ble levert besvarelser med opptil atten matematiske eksempler. Videre var det markant forskjell på hvor mye arbeid som ble lagt ned i de innleverte eksemplene fra teksten. Der hvor enkelte hadde arbeidet nøye med et eksempel, lett etter mønstre og utvidelser, hadde andre kun gjort det aller nødvendigste. Det vil si skrevet ned det matematiske fra teksten, og kommentert det de hadde funnet. En type eksempel som gikk igjen i sistnevnte sammenheng var omregning fra eldre engelsk målestørrelse (tomme, fot, mile, etc.) til dagens metriske målesystem.

Videre var det eksempler på hvordan enkelte oppgaver gav mulighet for forskjellige tolkninger. For eksempel ble det i den første eksempeloppgaven ovenfor, som handlet om en noe spesiell timeplan, i tillegg til den tolkning som her er foreslått, levert inn eksempler hvor statistiske beregninger (her: middelverdi) og leting etter mønster/tallpar var satt i sentrum. Elevenes eksempelsamlinger bød også på diverse matematiske eksempler med fokus på geometriske, aritmetiske og økonomiske beregninger.

De matematisk sett mest spennende besvarelsene knyttet seg likevel til det allerede nevnte problemet Alice får, når hun prøver å regne opp 4-gangen (Guiliano, 1995: s.11-12):

> I“ll try if I know all the things I used to know. Let me see: four times five is twelve, and four times six is thirteen, and four times seven is - oh dear! I shall never get to twenty at that rate!

De fleste elever hadde inkludert dette matematiske eksempelet i sin besvarelse, men kun kommentert at Alice regner galt. Et par av dem hadde likevel i tillegg stilt seg spørsmålet: *Hvorfor kommer ikke Alice til 20?* Dette er et spørsmål som ikke er lett å besvare. Den ene eleven slo fast at det ikke er mulig å multiplisere sammen to hele tall og få 13, hvilket i seg selv er et interessant og observant argument, og mente videre at dette var forklaring god nok. Den andre eleven kom i sitt resonnement så langt i sin leting etter et mønster at hun kunne slå fast at etter Alices mønster måtte $4·13=20$, og det var umulig. Her er det tydelig å se viljen og ønsket om å argumentere for at det er umulig å komme til 20. Det som først og fremst stanser elevene her, er deres manglende kunnskap om tallsystemer, og anvendelse av andre tallsystemer.

For å kunne gi et svar på hvorfor Alice ikke kan komme til 20, må man ha et visst kjennskap til tallsystemer og regning med andre tallsystemer enn titallssystemet. De oppgitte opplysninger $4·5=12$ og $4·6=13$ sier ingenting om hvilke(t) tallsystem som er i bruk, og man må derfor se på både det spesielle tilfellet hvor Alice bruker ett spesielt tallsystem, og det generelle tilfellet hvor tallsystemet forandres fra utregning til utregning. I det spesielle tilfellet begrenser de oppgitte opplysningene de aktuelle tallsystem til å være fra og med 7-tallsystemet og til og med 12-tallsystemet (12-tallsystemet fordi mønsteret som Alice bruker gir oss $4·3=10$). Ved regning med 4-gangen i de 6 aktuelle tallsystemene, finner vi at ingen av systemene oppfyller kriteriene som sier at $4·5=12$ og $4·6=13$. Altså er det umulig for Alice å nå 20 på denne måten.

I det generelle tilfellet har vi at

$4·5 = 12$	(i 18-tallsystemet)
$4·6 = 13$	(i 21-tallsystemet)
$4·7 = 14$	(i 24-tallsystemet)
osv.	
$4·12 = 19$	(i 39-tallsystemet)
$4·13 = 1A$	(i 42-tallsystemet; A er symbolet for sifferet «10» i dette tallsystemet)

Etter dette må vi stadig vekk finne opp nye siffertegn for å kunne skrive Alices tall. Altså er mønsteret i 4-gangen slik den ser ut i Alice sin oppramsing, slik at hun må øke tallsystemet hun bruker med 3 for hver utregning. Dersom man følger mønsteret ser man at det er umulig å få 20 som svar. Å komme fram til slike konklusjoner er likevel mye forlangt av 14–15 år gamle elever. Av matematiske eksempler i teksten sto likevel dette i en særklasse som det mest avanserte, og er derfor ikke representativt for de matematiske utfordringene i teksten.

Konklusjon

De matematiske eksemplene fra **Alice´s Adventures in Wonderland** gir mange muligheter til å tenke og arbeide matematisk. I teksten er det matematiske opplysninger som åpner for å lage matematikkoppgaver og foreta beregninger innenfor så vidt forskjellige felt som både geometri, statistikk, tallteori og metrikk. Kun fantasien setter grensene i så måte. Matematisk sett er dette læringsrikt for elevene, ettersom de får muligheten til å anvende sin matematiske kompetanse til å skape, og ikke bare til å løse oppgaver. Slikt arbeid kan også være verdifullt diagnostisk sett, da de gir elevene muligheter til å provosere fram misoppfatninger og diagnostiske konflikter (Bell, 1993).

Videre er det mulig å finne enkelte matematikkoppgaver direkte i teksten. I forbindelse med slike tilfeldige og uorganiserte matematiske utfordringer arbeider elevene problemløsende (Polya, 1990; Wickelgren, 1974; Burton, 1984). Enkelte oppgaver i teksten er, som tidligere kommentert, nesten uløselige for elevene på dette alderstrinnet, mens andre nesten ikke for noen av elevene kan kalles et problem. Dette gir samtlige elever store muligheter for å trekke veksler på de matematikkunnskapene de besitter. Analyse, løsning og eventuell utvidelse eller bevisførsel blir derfor en viktig del av et slikt prosjekt.

Alice´s Adventures in Wonderland er en tekst som gir mange muligheter knyttet til matematikk. I en avsluttende evaluering av et tverrfaglig prosjekt hvor denne teksten ble benyttet som kilde til

(fortsettes side 21)

Liv Marit Hermansen og Jostein Holck

Vi var på Island, «skal vi holde det for oss selv?»

En del av denne overskriften brukte vi som tittel på foredraget som gav fult hus og følgende overskrift i en lokalavis i Volda:

«Heller matte enn fest»

Vi er to studenter som har sett at det finnes et stort potensiale i matematikken, dersom den blir tilrettelagt for barn og studenter på en engasjerende måte. Vi utdanner oss til et yrke hvor vi ønsker å få vårt engasjement og faglig kompetanse til å smitte over på barna.

Vi har begge hatt obligatorisk matematikk i lærerutdanningen, om enn noe forskjellig med tanke på antall vekttal og innhold. Vi sitter blant annet igjen med et engasjement og en glød til å delta på arenaer hvor matematikken inngår. Gløden har vi altså, men er det ikke å overdrive å bruke en kostbar ferie-og-sommerjobb-tid på å delta på en konferanse om matematikkundervisning?

Jo – spennende var det. For her kom vi som helt ferske i gamet i kontakt med førskolelærere, forskere, lærere for grunnskole og videregående skole, lærebokforfattere, lærerutdannere, studenter og … Ikke nok med at de hadde mange felles interesser og representerte alle disse yrkene, de representerte også seks nasjoner. Så her var det store muligheter til å utveksle tanker og erfaringer på tvers av mer eller mindre synlige grenser. Og siden deltakerne kom fra hele Norden var der få språkbarrierer.

Jo – det var også et lærerikt program. Det var lagt opp til en fin veksling mellom plenumforelesninger, praktiske verksteder og presentasjoner/forskningsrapporter. Og det var primært fra verkstedene vi hentet ideene som vi presenterte i foredraget som vi holdt for studentene i Volda 16. november. Vi kunne blant annet fortelle noe om hvordan man kan gjøre matematikken synlig i papirbrettingskunsten (origami), i fliseleggingskunsten (tesselering), i barns kunst- og byggverk i naturen, og ikke minst i den levende naturen som vi lever i.

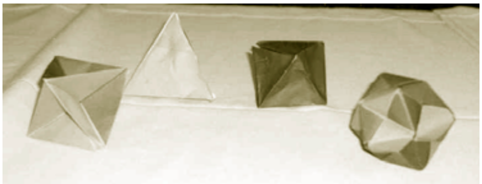
På Island stod tverrfagligheten sentralt i mange verksteder. Og når man gjennom slike verksteder blir inspirert, får man lyst til å prøve aktivitetene sammen med barna ved første anledning.

En av oss, som nå er utvekslingsstudent og i praksis i Danmark, ble dessverre ikke satt opp med timer hvor det skal undervises i matematikk. Men det er jo ikke så farlig når man har et fag som heter billedkunst på timeplanen i en 2. klasse. Med litt godt forarbeid lot det seg fint gjøre *å bli med* elevene inn i en forholdsvis avansert origami etter å ha brukt papirflyet og «spåen» som døråpner.

Og dersom man er litt forsiktig kan man få barna til å føle at kunsten og matematikken utfyller hverandre i et godt samspill.

Jo – det var selvfølgelig også mye moro. Vi skiftet ofte perspektiv. På det ene verkstedet kunne vi være langt inne i den kreative og lekende elevrollen, mens vi på det neste verkstedet kunne føle at vi var inne i en elev som ikke mestret utfordringene. Men mye foregikk også på det mer velkjendte lærernivået, der vi deltok aktivt i faglige og didaktiske diskusjoner.

Det var vel noe for enhver smak. Om det var bevisst eller ei vet vi ikke, men vi tror at de fleste dørene til våre sju intelligenser, som Howard



Gardners teori beskriver, ble åpnet i løpet av konferansen. (Gardner 1983: «Frames of mind – the theory of multiple intelligences») Vi deltok blant annet på Kurt Klunglands verksted «På god fot med tallene». Gjennom arbeid med tallenes »personlighet» og tallmønstre blomstret kreativiteten, og vi levde oss langt inn i en verden av lek, sang, dans, drama og tekstskriving …

Jo – noen ble man bedre kjent med enn andre. Gjennom verkstedene og presentasjonene fikk man tatt del i erfaringer fra mange spennende personer. Vi vil spesielt trekke frem Børge Rasmussen (84 år) som en stor inspirator. Han holdt et meget inspirerende verksted hvor han viste oss noen av de sammenhengene som han har sett mellom den fantastiske naturen og den spennende matematikken. Han hadde også et godt valgspråk som vi håpet at vi skulle få lære mer om:

«*Gennem leg kan du lære*
alt det skønne – alt det svære»

Men vi fikk dessverre ikke besøkt denne gode gamle dansken her i Danmark, for han sovnet stille inn ca. to måneder etter konferansen på Island. Vi har imidlertid fått mye godt ut av to bøker som han har skrevet, «Tårsneglens hemmelighed» og «Den guddommelige brøk».

Jo – man leker også i barnehagen. Vel, det er vel kanskje en selvfølge for mange. Men det var flere av de erfarne konferansedeltakerne som hadde problemer med å forstå at lærere som utdanner seg for å arbeide i barnehagen hadde bruk for, og interesse for, matematikk. De ble vel kanskje overrasket, men det går jo an å bli *positivt* overrasket. For vi følte at mye av det som ble presentert på Island var meget relevant – også for oss.

Jo – selvfølgelig må man modifisere og tilrettelegge tips og ideer som man fikk. For, som profesjonell lærer, skal man ikke bare kjøre i gang med en ny aktivitet bare for aktivitetens skyld – selv om den er plukket opp på en nordisk konferanse for matematikkundervisning. Så lett skal det ikke være!

Men at det er behov for en idèbank og en arena for erfaringsutveksling er det vel liten tvil om, når man ser på interessen for både konferansen og for det nevnte foredraget som vi holdt i Volda. Det bør ikke gå upåaktet hen at 80 «sultne» studenter prioriterte frivillig et matematikkforedrag (holdt av to amatører) klokken seks om kvelden, for å få med seg noen tips og ideer ut i læreryrket.

Jo – en del av det presenterte på Island var kjent. Vi som for kort tid siden gjorde oss ferdig med matematikkdelen i utdannelsen, en utdannelse som er basert på det siste nye innen fagdidaktikken og har gitt oss innsyn i mange skoler i praksisstudiet, har mer eller mindre internalisert deler av innholdet i studiet. Tanker og ideer som man kanskje ikke hadde før man startet på utdannelsen er blitt gjort til våre. Og det var virkelig tilfredsstillende å føle at vi var på «hjemmebane» i de fleste sammenhenger. Selv om det var en forsker eller en danske som hadde ordet, hadde vi mange gode bekreftelser med oss i sekken når konferansen var slutt …

I tillegg var gnisten virkelig tent. Og dersom vi klarer å holde den varm til vi kommer ut i læreryrket, tror vi at mye er gjort for at vi kan bli to gode lærere, og trives i yrket.

Reinert A. Rinvold

Negative tall og algebra

Hva kan det komme av at det ofte er så vanskelig å lære å regne med negative tall? Folk i Østen, Kina og India, regnet med negative tall for mer enn tusen år siden uten at det skapte problemer! Grunnen kan være at kineserne tenkte på negative tall som gjeld og kalte dem røde tall i motsetning til svarte tall. Hvis Per har 80 kr i kontanter og 100 kroner i gjeld og alle kontantene brukes som avdrag, så kreves det ikke mye abstraksjonsevne for å innse at han gjenstår med 20 kr i gjeld. Negative tall har imidlertid hatt vanskelig for å bli akseptert i Vesten. Navnet «negative tall» gir oss også et hint om det. I den greske tradisjonen hadde alle størrelser en geometrisk tolkning. Hos grekerne er størrelser tenkt på som linjestykker, arealer og volumer. Lengder kan jo ikke være negative! Dessuten utviklet grekerne geometrisk bevisføring. Den greske tradisjonen kom via araberne til å prege europeisk matematikk.

Addisjon og subtraksjon av negative tall er greit, men utallige lærere har erfart at $(-1)\cdot(-1) = 1$ er vanskelig å forklare. Noen har forsøkt å konstruere situasjoner fra dagliglivet som skal illustrere at «minus ganger minus er pluss». Forklaringene blir imidlertid ofte kunstige. Problemet er at de gode dagligdagse modellene vi har for negative tall er «additive». Formue/gjeld, temperatur og høyde over/under havet forklarer addisjon og subtraksjon av negative tall. Vi kan også snakke om at Ole har 5 ganger så stor gjeld som Dole, men formue/gjeld modellen gir ikke noe mening til multiplikasjon av negative tall. Temperaturmodellen med Celsiusgrader understøtter ikke en gang multiplikasjon med positive tall! Hva skal vi så gjøre om vi innser at forklaringer fra dagliglivet er fåfengt å finne? La oss før vi vurderer noen alternativer, ta en historisk reise. Denne reisen vil vise at multiplikasjon av negative tall egentlig er en del av algebraen og funksjonslæren.

Historikk

Opphavet til algebraisk tankegang blir vanligvis tilkjent araberen al-Kwarizmi. Han utga en bok (ca. 825 e.Kr.) som i latinsk oversettelse heter «Liber algebrae et almuccabala». Al-Kwarizmi gir systematiske oppskrifter (algoritmer) til å løse lineære og kvadratiske ligninger. De to sentrale teknikkene var å trekke sammen og å flytte over på andre siden. Oppskriftene blir beskrevet med ord uten å nevne geometri. Babylonerne hadde allerede ca. 400 år f.Kr. algoritmer til å løse andregradsligninger basert på geometrisk tankegang. Arven fra babylonerne og grekerne kan sees ved at Al-Kwarizmi supplerer alle oppskriftene sine med geometriske bevis for å vise at metodene er korrekte. Geometrisk bevisføring er datidens eneste aksepterte form for begrunnelse.

Araberne kjente i likhet med sine læremestere babylonerne og grekerne ikke til negative tall. Også inderne hentet inspirasjon fra babylonerne, men inderne videreførte de babylonske metodene blant annet ved å innføre negative tall. Allerede

Brahmagupta (598–665 e.Kr.) tillot negative størrelser og den mer kjente Bhaskara (1114 –1185) visste at ligningen $x^2 = 9$ hadde to løsninger, en positiv og en negativ. Italieneren Fibonacci skrev i 1202 boka *Liber abaci*, som ga en innføring i det indiske tallsystemet. Han hadde lært seg dette på reiser i araberlandene. Det er derfor ikke så rart at han ikke nevner negative tall. Etter hvert dukker imidlertid de negative tallene gradvis opp i Europa. En ukjent forfatter på slutten av 1300-tallet argumenterte for at «minus ganger minus er pluss» ved å sammenligne kvadratet av 3 og ¾ med kvadratet av 4 minus ¼, se [Katz, side 316]. Franskmannen Nicolas Chuquet var en av pionerene og ga i 1484 ut en bok i algebra hvor han bruker både null og negative tall som eksponenter i potenser. Han tillater til dels negative tall som løsning av ligninger. I andre tilfeller avviser han negative løsninger som «umulige» og han tillater aldri null som en løsning! Det var knyttet mye mystikk både til null og til negative tall.

Girolamo Cardano (1501–1576) ga i 1545 ut sitt berømte verk *Ars Magna*. Her finnes generelle metoder for løsning av tredje- og fjerdegradsligninger. Den symbolske algebraen vi bruker i dag var imidlertid ennå ikke oppfunnet. Det meste ble uttrykt i ord. Et eksempel er: «Finn et tall slik at kvadratet av tallet er lik 9». Bare enkelte forkortelser som *p* for pluss finnes hos Cardano. Han godtok negative tall som løsninger av ligninger, men han kalte dem for «falske løsninger». Cardano regnet også med det vi kaller komplekse tall.

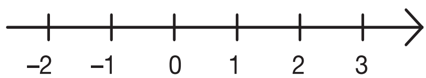
Han skrev 5 p : R·m : 15 for $5+\sqrt{-15}$. Oppdagelsen til Cardano var at det gikk an å regne med disse «tallene» og komme fram til løsninger som var vanlige tall. Det skulle imidlertid gå enda 250 år før de komplekse tall ble akseptert som fullverdige tall. Betegnelsen «imaginære» eller innbilte tall for kvadratrøtter av negative tall, illustrerer at man ikke mente at de var meningsfulle størrelser i seg selv.

I dag tenker vi at det finnes *en* generell andregradsligning $Ax^2 + Bx + C = 0$. Det er imidlertid fordi vi har de negative tallene. I motsatt fall ville ligningene $2x^2 + 4x = 3$ og $3x^2 + 5 = 2x$ være to forskjellige typer av andregradsligninger. Al-Kharizmi opererte med seks ulike typer av andregradsligninger. Eksempler er «kvadrater lik røtter» ($ax^2 = bx$) og «tall lik et kvadrat» ($ax^2 = c$). Cardano har på samme måte en rekke ulike tilfeller når han presenterer tredje- og fjerdegradsligninger. De negative tallene reduserer alle disse tilfellene til en type ligning av hver grad. En grunn til at Cardano ikke så det, kan være at parametre, A, B og C i den generelle ligningen, ennå ikke var oppfunnet. Dette skjedde først med Francois Vietè (1540–1603). Før Vietè var alle metoder for ligningsløsning knyttet til ligninger med tall som koeffisienter. Bruken av den abstrakte algebraiske kalkylen lar oss regne ut en formel som uttrykker løsningen av alle tenkbare andregradsligninger.

Multiplikasjon av negative tall bør ses som en del av en abstrakt algebraisk kalkyle snarere enn som abstraksjon av dagligdagse fenomener.

Algebraiske teknikker for løsning av ligninger er helt avhengige av negative tall. De gjør det mulig å samle alle ukjente på den ene siden av likhetstegnet og til å faktorisere algebraiske uttrykk. Ikke minst muliggjør de negative tallene en strømlinjeformet algebraisk teori istedenfor en rekke plundrete spesialtilfeller. Fullføringen av denne utviklingen var de komplekse tallene. Først ved hjelp av dem kunne matematikere som Abel, Gauss og Galois lage sine elegante teorier om ligningsløsning.

I dag forbinder vi negative tall med en tallinje med 0 i midten, negative tall til venstre og positive tall til høyre.



Positive tall er piler mot høyre, og negative tall er piler mot venstre. Vi multipliserer en pil med en høyrepil ved å multiplisere de to pilenes lengder og beholde den førstnevnte pilas retning. Det samme skjer ved multiplikasjon med en venstrepil, men da skal også retningen snus. Ut fra dette er det klart at om retningen snus to ganger, så er vi tilbake til utgangspunktet. Descartes (1596–1650) startet med grafiske fremstillinger av funksjoner, men hans grafer har bare en kvadrant. Newton (1643–1727) hadde derimot grafiske fremstillinger av funksjoner slik vi har det, men han var ikke først ute med dette. John Wallis (1616–1703) tolker tall som punkter på en linje og bruker '+' og '–' for å indikere retning, [Daland, side 15]. En bedre forståelse kom med den geometriske tolkningen av komplekse tall. Nordmannen Caspar Wessel (1745–1818) var en av de første som greide dette, men påvirket ikke sin samtid i særlig grad, kanskje fordi han skrev på dansk. Wessel var landmåler og var opptatt av trigonometriske spørsmål. Det kan være grunnen til at han lyktes med å finne fram en metode for å multiplisere vektorer i planet. Denne multiplikasjonen svarer til multiplikasjon av komplekse tall og gjorde dermed disse til akseptable tall. Den vanligste geometriske tolkningen av multiplikasjon av negative tall, kan sees som et spesialtilfelle av multiplikasjon av komplekse tall.

Metodikk

Historisk ble både de negative tallene og de komplekse tallene brukt til beregninger før gode geometriske tolkninger av disse tallene dukket opp. Det er også verd å merke seg at selv om matematikere regnet med disse «tallene», så ble de knapt godtatt som svar på regnestykker eller løsning av ligninger. Den israelske matematikkdidaktikeren Anna Sfard har en teori for matematisk abstraksjon som tar opp denne forskjellen, se [Sfard]. Sfard kaller de negative tallene «objekter» når de blir sett på som meningsfulle størrelser som kan stå på egne bein. Først da kan de regnes som tall på linje med de positive hele tallene. Denne objektdannelsen skjedde ifølge Sfard dels ved at matematikerne ble vant til negative tall, men først og fremst etter at det kom anvendelser og gode geometriske tolkninger av dem. Teorien til Sfard kan, sammen med den historiske innsikten, gi oss ideer for hvordan vi bør undervise negative tall. Elevene kan få regne med negative tall før de har en dyp innsikt i hva disse tallene egentlig er. Derimot er det viktig at regningen med disse tallene inngår i en meningsfull aktivitet. Historien gir oss et hint om at det kan være klokt å la svarene på regneoppgavene være positive tall den første tiden elevene regner med negative tall.

Negative tall er en sentral del av algebraen. Derfor er det en fordel at elevene oppnår en viss fortrolighet med disse tallene før de begynner med algebra. Men hvordan skal vi gjøre det? Vi har allerede oppgitt håpet om å forklare multiplikasjon av negative tall med situasjoner fra dagliglivet. Det vanligste alternativet er å innføre multiplikasjon av negative tall ved å utlede hva multiplikasjon av to negative tall må bli dersom de vanlige reglene for tallregning skal gjelde. Matematikk for alle, 8a, [Brode], begrunner dette ved å regne ut

$$(-3)\cdot((-2)+2)$$

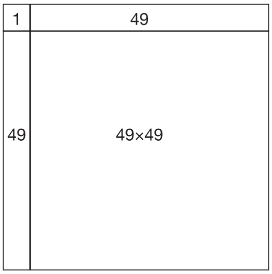
på to forskjellige måter:

1. Den ene måten gir $(-3)\cdot 0 = 0$
2. Den andre måten gir $(-3)\cdot(-2) + (-3)\cdot 2$
3. Hvis den distributive lov skal gjelde, må altså $(-3)\cdot(-2) + (-6) = 0$.
4. Siden 6 er det tallet som lagt til (-6) gir 0, må altså $(-3)\cdot(-2) = 6$.

Denne metoden har ulemper. Eleven er kanskje ikke er motivert for å finne ut hvordan man kan multiplisere negative tall. I den nevnte læreboka følges introduksjonen opp av rene regnestykker med negative tall uten anvendelse. Eleven får altså heller ingen belønning for strevet! Argumentasjonen er abstrakt. Vet elevene hva den distributive lov er? Elevene kan nok lære dette uten å kjenne variabelbegrepet, men da må læreren ha fokusert sterkt på å bevisstgjøre og navnesette denne loven. Selv om elevene vet hva loven innebærer, så kan det likevel være problematisk å anvende den på et nytt og ukjent område.

En annen ulempe er vanskeligheten med hypotetisk tankegang. Eleven kan komme til å tro at vi har bevist at $(-3)\cdot(-2) = 6$. Det har vi ikke, for det kunne også tenkes at forsøket på å multiplisere negative tall ville gi absurde resultater. Et eksempel som illustrerer problemet er å forsøke å definere 0^0. For alle positive tall t er $t^0 = 1$. Det skulle tilsi at $0^0 = 1$. Imidlertid er $0^t = 0$ for alle positive tall t, og det skulle tilsi at $0^0 = 0$.

En annen mulighet som blir valgt er å innføre regelen $(-1)\cdot(-1) = 1$ uten noen annen begrunnelse enn å si at slik er dette definert. Med den rette psykologiske tilnærming kan det hende at dette er bedre enn metoden basert på hypotetisk tankegang. I tråd med Anna Sfards teori finnes det imidlertid en annen tilnærmingsmåte. Sfard hevder at dannelsen av begrepet negativt tall har sin bakgrunn i arbeid med subtraksjon av *positive hele tall*. For eksempel er 10 – (12 – 5) = 10 – 7 = 3. Vi skal trekke fra 5 mindre enn 12. Ved å trekke fra 12 får vi en «gjeld» på 2. Trekker vi fra 5 mindre, må vi få 5 mer, og dermed svaret 3.



Negative tall kan også naturlig komme inn i forbindelse med multiplikasjon. Hvis vi skal regne ut 49^2 eller 49·49, så er dette ikke så langt unna 50·50. Hvilken feil har vi gjort ved å erstatte 49·49 med 50·50? Jo, trekker vi fra 50, får vi 49·50. Deretter må vi trekke fra 49 for å få 49·49. Imidlertid kunne vi like godt trekke fra 50 en gang til, og så legge til 1. Dvs. at 49·49 = 50·50 – 2·50 + 1. Når elevene er modne for det, kan vi i analogi med den anonyme forfatteren fra slutten av 1300-tallet, konkludere med at (–1)·(–1) = 1. Det kan vi gjøre ved sammenligne utregningen av 49·49 med utregningen av (50 + (–1))·(50 + (–1)) etter de regnereglene vi er vandt med. [Katz, side 232], mener faktisk at al-Kwarizmi kjente reglene for fortegn til tross for at han ikke opererte med negative tall!

Begrunnelsen av (–1)·(–1) = 1 ved hjelp av kvadratsetningene krever også hypotetisk tankegang for å bli forstått fullt ut. Fordelen er imidlertid at den kan bygge på elevenes erfaringer og dermed ikke blir så kunstig.

Tradisjonelt har det vært fokusert mye i skolen på innøving av standardalgoritmer. Siden vi i dag har kalkulatorer, vil et godt alternativ være å satse mer på tallforståelse gjennom hoderegning og fleksible regnestrategier. Som en del av dette kunne elevene også nærme seg de negative tallene. Kunne det ikke vært flott om elevene regnet ut 9 ganger 9 ved å bruke det vi kaller andre kvadratsetning? Setningen kan formuleres med ord og bilder og krever derfor ikke forståelse av symbolsk algebra. Det betyr ikke at tabellkunnskaper er av det onde, men at huller i slike kunnskaper ikke er katastrofale. Konkrete erfaringer i tallregning med uformell bruk av distributiv lov og kvadratsetninger vil trolig være bedre anvendt tid enn drilling av standardalgoritmer.

Matematikkundervisningen må ses som en helhet, ikke bare når det gjelder tverrfaglighet, men også når det gjelder undervisning på ulike trinn. Negative tall er en del av algebraen, men må forberedes før algebra innføres. Vi kan kanskje si: «Enhver matematikklærer en algebralærer!»

Referanser

[Struik] *A source book in mathematics 1200–1800*, edited by D. J. Struik. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1969. Oversettelse og kommentarer finnes her av deler av orginalverkene til al-Kwarizmi, Chuquet og Cardano.

[Cardano] *Ars Magna or the rules of algebra*. (Translated by T.R. Witmer). Dower 1993.

[Katz] *A history of Mathematics, an introduction*. HarperCollins College Publishers, 1998.

[Sfard] On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in Mathematics* 22: 1–36, 1991.

[Brode] Brode, Gjerdrum, Jahr: *Matematikk for alle, 8a*, Skolebokforlaget 1988.

[Daland] Daland, Espen: *Negative tall – en historisk tilnærming til dagens undervisning.* Prosjektoppgave HiA, Våren 2000.

Oppgaven til Espen Daland er en utmerket introduksjon til de negative talls historie og til elevers forståelse og begrepsutvikling av negative tall. Dalands oppgave inneholder mange referanser til forskning på området. Artikkelen min ble skrevet uten kjennskap til hva han hadde gjort, men en setning derfra om John Wallis og tallinja ble satt inn etter at jeg ble kjent med oppgaven til Daland.

Gunnar Nordberg

Matematikk og filosofi

en mulighet til glede, kreativitet, lek med tanker og argumenter

Dette er tittelen på et kurs som høyskolen i Oslo inviterte til sist høst. Initiativet kom fra Ida Heiberg Solem, Hans Jørgen Braathe, og Beate Børresen. Interessen for kurset var så stor at det måtte deles i to samlinger med omtrent 40 lærere hver gang. Kurset vil derfor bli fulgt opp ved at deltakerne kalles inn til en ny samling i 2001 samt at og det går ut tilbud om tilsvarende kurs høsten 2001.

Ida Heiberg Solem forteller at hun hadde blitt interessert i emnet for flere år siden da hun underviste i matematikk på Forsøksgymnaset i Oslo. Hun var da på søking etter en arbeidsform som stimulerte elevene til aktiv tenkning. Beate Børresen, ansatt i KRL - seksjonen, hadde arbeidet mye med filosofi og barn, blant annet gitt ut en bok om emnet. De har sammen med seksjonsleder på matematikk, Hans Jørgen Braathe, utviklet et nærmere samarbeid som i dag er kommet over startfasen.

I dag såg eg

I dag såg eg
tvo månar,
ein ny
og ein gamal.
Eg har stor tru på nymånen
Men det blir vel den gamle.

Den svenske filosofen og pedagogen Bo Malmhester, startet opp med dette diktet av Olav H. Hauge. Dermed var våre tankeprosesser i gang. Kurset var meget variert lagt opp. En kombinasjon av forelesninger med undrende spørsmål til deltakerne. Tid til refleksjon og ikke minst tid til å skrive ned sine tanker og assosiasjoner i sin egen loggbok. Videre var det flere praktiske gruppeøvelser. Gruppene har senere sendt inn sine loggbøker med kommentarer til gruppeoppgavene.

Det viktigste redskapet på kurset var den enkeltes loggbok. Vi ble umiddelbart utfordret til å notere ned

– Hva skal vi med dette kurset?
– Hva vil jeg med kurset?

Av flere forslag til svar kan nevnes:

– «Jeg syns det er spennende med filosofi i matematikken»
– «Jeg vil lære å undres over matematikk»

Ida Heiberg Solem kom i sitt foredrag med mange eksempler på barns tenkemåte. Tittelen var «Undring, argumentasjon og lekende tenkning – og matematikk?». Hun viste til flere eksempler på barns konkrete og logiske tenkemåter som noen ganger fører til de merkeligste konklusjoner for oss som voksne. For eksempel Håvard som sier: «Mamma, det er løve i hagen» Han hadde trukket en naturlig konklusjon ut fra at han hadde fått beskrevet en løve som en stor katt. Videre utsagn som «Nå er det jul». «Hvorfor det?» «Jo, det er snø ute». På spørsmål uken i forveien om det ikke ble jul snart hadde gutten fått til svar: «Først må snøen komme». Vi ser at han ut fra det trekker en logisk konklusjon. Vi finner mange eksempler fra matematikken på utsagn av typen hvis A så B, men at det motsatte nødvendigvis ikke gjelder. Altså at det da ikke er slik at hvis B så A.

Hun viste til hvor nødvendig det er å snakke om begrepene vi bruker i matematikken. «Kan vi tegne en trekant? Hva med en enkant eller en tokant?». Ida fokuserer på at det er viktig at læreren stiller spørsmål som egner seg til undring, og viser til at elevene i alle aldersgrupper liker å undre seg. Dette blir spesielt viktig fordi som hun sier «lærebøkene innbyr ikke til undring».

Kan man si det samme om læreplanen? Hvis vi leser planens generelle del, samt ser på fellesmålene til matematikkplanen for grunnskolen kan vi vel ikke si at det er selve planen som står i veien for undringen. Jeg minner om at et av målene er: «*Opplæringen har som mål at elevene stimuleres til å bruke sin fantasi, sine ressurser og sine kunnskaper til å finne løsningsmetoder og -alternativer gjennom undersøkende og problemløsende aktivitet og bevisste valg av verktøy og redskaper*»

Bo Malmhester understreket hvor viktig teksten er også i matematikk. Eleven må både snakke og skrive. Når vi selv ble utfordret til å skrive Hvor skal vi?, fikk vi svar av typen

– «Jeg ønsker en kursendring i min egen undervisning».
– «Vi må ha mer praktiske oppgaver, det er en misforståelse med stille matematikktimer»
– «Vi må bruke elevenes spontane undring og feste deres språk til de matematiske begrepene».

Etter lunsj ble alle deltakerne plassert i en stor ring med filosofen i midten. Vi ble bedt om å skrive ned de spørsmålene vi satt inne med. Flere av problemstillingene ble notert på tavla slik at hele gruppa var delaktig i å avgjøre hva vi burde gå nærmere inn på. Noen av våre problemstillinger var:

– Er matte sannheter som ikke kan forandre seg?
– Kan sannhet være uforanderlig?
– Når er noe sant?
– Hva er matte?
– Hater noen elever matte?
– Hva er vanskelig?

Den siste, og for mange deltakere, den mest aktive delen av kurset var gruppearbeidet som fulgte etter at vi hadde drøftet disse mer overordnede problemstillingene. Kursdeltakerne var på forhånd delt inn i grupper ut fra at de skulle ha mulighet til å fortsette samarbeidet utover selve kursdagen. I denne delen av kurset fikk vi arbeide med noen konkrete oppgaver, eller leker som vi i ettertid skulle reflektere over. I referatet fra gruppene ser vi hvordan slike oppgaver kan brukes til blant annet innlæring av matematiske begreper.

Som en oppfølging av kurset skulle høyskolen arbeide for å lage en hjemmeside for filosofi og matte hvor det blant annet skal legges ut forslag til leker, øvelser og fortellinger. Denne siden er allerede opprettet. De som ønsker flere og mere utførlig kommentarer, referater og ideer til oppgaver kan gå inn på http://www.lu.hio.no/krl/filosofi

Per E. Manne

Arkimedes under hammeren

Denne artikkelen er en omarbeidet versjon av en kronikk som ble trykket i Bergens Tidende den 24. januar 1999.

Budene begynte på 500 000 dollar, og steg raskt. Den greske konsulen i New York bød aktivt, og flere konkurrenter falt fra etter hvert. Men da 2 millioner dollar ble nådd hadde han ikke autorisasjon til å by høyere. Han forsøkte å nå det greske utenriksdepartementet på mobiltelefon, men auksjonarius avbrøt ham og sa «Vi må fortsette, vi har mer å selge». En kort pause, og tilslaget gikk til en anonym privatperson, representert i salen ved en engelsk antikvariateier.

Vi er vant til at kunst selges for svimlende summer, men på Christie's auksjon 29. oktober 1998 i New York var det en håndskrevet bok fra middelalderen som fikk all oppmerksomhet. Ikke noe prakteksemplar med vakre illustrasjoner, men en liten bok, bare 19 cm høy og 15 cm bred, 348 sider med omfattende skader fra både fukt og ild. Med provisjon og skatt måtte kjøperen ut med mer enn tilsvarende 16 millioner norske kroner. Hva for en bok kan påkalle slike priser?

Historien begynte for drøyt 2200 år siden, da den hellenistiske kultur dominerte området fra det sørlige Italia gjennom Alexandria i Egypt over til Babylon i dagens Irak. Innen vitenskapene gjorde man i denne perioden store fremskritt. Aristarkos fremsatte det heliosentriske verdensbildet, Eratostenes beregnet jordens omkrets, og Euklid skrev den mest innflytelsesrike matematiske lærebok gjennom tidene. Her finner vi også Arkimedes, en av tidenes største matematikere. Den boken som ble solgt i New York inneholder de eldste bevarte avskrifter av hans arbeider, og den ga mye ny informasjon om hans metoder da den sensasjonelt dukket opp og forsvant igjen på begynnelsen av 1900-tallet.

Arkimedes levde og virket i den greske byen Syrakus på Sicilia. Her var han mest kjent for sine mekaniske oppfinnelser, deriblant vektstenger og taljer som var langt overlegne datidens. Vi har herfra hans berømte ord «Gi meg et fast punkt, og jeg skal flytte verden». Allment kjent er også historien om at han skal ha løpt naken hjem fra byens bad. Han var bedt om å finne ut hvorvidt kongens gullsmed hadde lurt kongen ved å erstatte noe gull med sølv i en krone gullsmeden hadde laget. Da Arkimedes la seg i badekaret rant noe av vannet ut over kanten, og dette ga ham inspirasjonen til hans oppdriftslov. Han skjønte at han dermed kunne avsløre den uærlige gullsmeden uten å ødelegge kronen, og ble da så opphisset at han løp hjem mens han ropte «Heureka, heureka (jeg har funnet det)».

Arkimedes konstruerte krigsmaskiner som hjalp byen til å holde ut i flere måneder da den ble angrepet av romerne i 212 f.Kr. De romerske soldatene fryktet særlig hans dødelige katapulter, som var effektive både på korte og lange avstander. Vi har også veldokumenterte beretninger om vektstenger som kunne løfte fientlige skip opp fra vannet og kaste dem ned igjen. Mindre trolig er det imidlertid at Arkimedes brukte konkave speil til å sette ild på skip på avstand, selv om det er teknisk mulig. På tross av heroisk motstand falt byen til slutt, og soldatene satte i gang med plyndring. Det fortelles at en soldat kom over Arkimedes der han betraktet noen geometriske figurer han hadde tegnet i sanden. «Tråkk ikke på mine sirkler,» skal den 75 år gamle Arkimedes ha formant soldaten, hvorpå soldaten hogg ned og drepte den gamle mannen.

Selv satte Arkimedes sine matematiske resultater høyt over sine praktiske oppfinnelser. Noen av disse hører til dagens skolematematikk, deriblant formlene $V = 4/3\pi r^3$ for volum og $O = 4\pi r^2$ for overflate av en kule med radius r. Vi har også hans estimat $3\ 10/71 < \pi < 3\ 1/7$, som gir oss den ofte brukte tilnærmingen $\pi \approx 22/7$. Arkimedes samlet og katalogiserte ikke den kjente kunnskapen, slik Euklid hadde gjort, men løste stadig nye problemer. Mange av disse var areal- og volumberegninger, og innenfor dette området ble han ikke forbigått før den analytiske geometrien ble utviklet på 1600-tallet.

Arkimedes beskrev sine oppdagelser i brev til venner og kolleger. Flere av disse var i Alexandria, datidens metropol med over en halv million innbyggere. Byen hadde et unikt bibliotek, skapt med det mål for øye å samle all verdens kunnskap. Skip som la til havnen fikk sine bøker beslaglagt. Disse ble kopiert, originalene ble beholdt, og skipene fikk tilbake kopiene. Brevene fra Arkimedes havnet helt sikkert også i biblioteket, og her ble de bevart i flere hundre år. Men etter år 215 gikk det raskt nedover med biblioteket. Offentlige bevilgninger uteble, og byen ble delvis ødelagt flere ganger i kriger og interne opprør. Flere av de mest verdifulle skriftene har likevel blitt bevart gjennom tidene. Lærde menn og kvinner har skrevet av dem, oversatt dem til arabisk og latin, og tatt dem med seg til andre steder. På denne måten har ni av Arkimedes' brev blitt bevart, mens omtrent like mange er gått tapt og bare er kjent av omtale.

På 900-tallet begynte man igjen å bli interessert i matematiske emner i Europa, og det er på denne tiden den avskriften av Arkimedes' verker som nå har vært for salg i New York ble laget. Dette arbeidet kan likevel ikke ha gjort stort inntrykk på sin samtid, for da en annen munk så manuskriptet en gang på 1200-tallet, vurderte han innholdet som verdiløst. Men han kastet det ikke på bålet, til det var materialet alt for dyrbart. Tekstene var skrevet på pergament, som ble laget av skinn fra sau eller kalv, og i sin hånd holdt munken materialer fra mer enn 40 sauer. Heldigvis kunne det brukes om igjen, og munken sprettet opp boken og vasket vekk blekket. Det aller meste gikk vekk, og munken kunne legge arkene på tvers og skrive fromme bønner over den gamle teksten. På denne måten fikk munken laget en bønnebok i tilnærmet A5-format i stedet for orginalets A4-format. En bok som har blitt til på denne måten kalles en palimpsest etter et gresk ord som betyr å skrive over, og på slutten av middelalderen var dette vanlig praksis.

Bønneboken tilhørte den gresk-ortodokse patriarken av Jerusalem som hadde sitt tilholdssted i Konstantinopel (omdøpt til Istanbul i 1930). Etterhvert gjorde tyrkerne sitt inntog i området, og i 1453 tok de Konstantinopel. Grekerne har likevel forsatt sitt nærvær i denne byen helt frem til våre dager. På 1800-tallet var mange vesteuropeere på jakt etter kulturskatter, og i fattige land over hele verden var man ikke bevisst over hvilke verdier man satt på. En gjennomgang av biblioteket frembrakte bønneboken. Kanskje noen ville være interessert i den underliggende teksten? I en katalog publisert i 1899 ble boken beskrevet som en matematisk palimpsest, og noen korte utdrag fra den underliggende teksten ble gjengitt.

Den danske filologen Johan Ludvig Heiberg ble gjort oppmerksom på disse utdragene og gjenkjente dem fra Arkimedes' skrifter. Sommeren 1906 reiste han til Konstantinopel og rekonstruerte der etter beste evne den underliggende teksten, som besto av fem brev. Bare det faktum at denne kilden var flere hundre år eldre enn noen annen kjent kopi fra Arkimedes gjorde funnet bemerkelsesverdig. Men den store nyheten var *Metoden for mekaniske satser*, et brev som var formodet tapt, der Arkimedes skriver til sin venn Eratostenes og gjør rede for hvordan han hadde funnet frem til flere av sine resultater. Funnet av dette brevet var en enorm sensasjon, da man her fikk et innblikk i Arkimedes' arbeidsmetoder. Disse er nemlig ikke synlige fra de andre bevarte manuskriptene, der han nøyer seg med å gi elegante bevis uten å forklare hvordan han har funnet dem. Man hadde lenge mistenkt Arkimedes for å ha en metode med felles-trekk med differensial- og integralregningen, innført av Newton og Leibniz på slutten av 1600-tallet, og her fikk man denne mistanken bekreftet. Arkimedes beskriver hvordan han så på et tredimensjonalt legeme som bygget opp av uendelig tynne skiver. Gjennom å prøve seg frem med andre kjente legemer og å balansere dem mot hverandre på en tenkt vektstang kunne han finne hva den riktige volumformelen måtte være. Men dette resonnementet betraktet Arkimedes som utilstrekkelig da de uendelig små størrelsene ikke kunne rettferdiggjøres, og han gikk derfor videre med å finne de samme volumformlene ved et mer klassisk bevis.

Heiberg publiserte sin oversettelse, og originalen forsvant ut av allmennhetens øye. Etter første verdenskrig ble Tyrkia rammet av borgerkrig og krig med Hellas, inntil republikken ble opprettet i 1923. Over en million grekere ble tvangsflyttet til Hellas i utveksling med tyrkere derfra, og patriarkens boksamling ble i denne perioden overført til Aten. Noen bøker kom ikke med, deriblant palimpsesten med Arkimedes' skrifter. Den etterlot seg ingen spor, heller ikke ser den ut til å ha blitt etterlyst før den helt uventet dukket opp for to år siden, til salgs på auksjon hos Christie's i New York. Selgeren, en fransk privatperson, var anonym.

I Hellas har man i lengre tid vært opptatt av hvordan landets antikke kulturskatter gjennom tidene har havnet i utlandet. Nå engasjerte greske myndigheter seg raskt på vegne av patriarken av Jerusalem og hevdet at manuskriptet i sin tid må ha blitt solgt av uærlige munker for egen fortjeneste. Den rettmessige eier var derfor fremdeles patriarken, og manuskriptet burde tilbakeføres til denne. En domstol i New York avgjorde så sent som dagen før salget at dette ikke var tilstrekkelig bevist. Som beskrevet innledningsvis gikk salget sin gang, og manuskriptet ble solgt til en anonym privatperson.

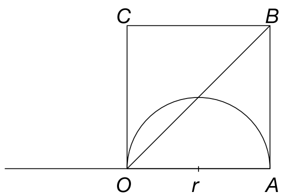
Etter salget har boken vært på utstilling i Baltimore og Chicago, og nå har konserverings-eksperter ved the Walters Art Museum i Baltimore startet å arbeide med den. Boken skal tas fra hverandre, angrepene av muggsopp må stoppes og de skjøre arkene må behandles slik at de ikke brekker. Hvert ark skal fotograferes og analyseres for å få frem mest mulig av den underliggende teksten. Historikere og skrifteksperter skal prøve å finne ut hvor boken ble skrevet og hvor den har vært. Man har til og med planlagt kjemiske analyser av blekket for ikke å gå glipp av noen spor. Arbeidet kommer å ta flere år.

Hva kan funnet av palimpsesten gi oss av ny kunnskap? Med moderne hjelpemidler som ultrafiolett belysning og digital billedbehandling er det mulig å få frem mer av den underliggende teksten, og på den måten fylle igjen luker som Heiberg måtte la stå åpne. Det er også klart at Heiberg har hatt vansker med å reprodusere figurene i teksten, og i flere tilfeller vært nødt til å lage egne figurer i stedet. Med tiden får vi derfor kanskje et bedre innblikk i arbeidsmetodene til en av tidenes største matematikere.

Tillegg

$$V_{kule} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Utledningen av denne formelen er tatt direkte fra *Metoden for mekaniske satser*, bortsett fra at notasjonen er modernisert. Vi går ut fra at vi kan beregne volum av både sylinder og kjegle, og vi søker volum av en kule med radius r.



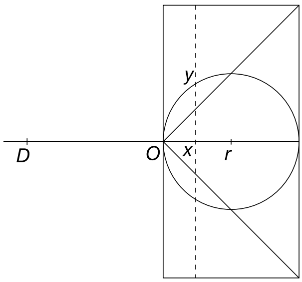
Halvsirkelen på figuren har radius r, slik at OA har lengde $2r$. Firkanten $OABC$ er et kvadrat med side $2r$, og trekanten ΔOAB blir dermed likebeint. Vi roterer firkanten $OABC$ om x-aksen og får en sylinder med volum

$$V_{sylinder} = \pi \cdot (2r)^2 \cdot 2r = 8\pi r^3$$

På samme måte roterer vi ΔOAB om x-aksen og får en kjegle med volum

$$V_{kjegle} = 1/3 \cdot \pi \cdot (2r)^2 \cdot 2r = 8/3 \cdot \pi r^3$$

og vi roterer halvsirkelen om x-aksen og får en kule med radius r.



Nå ser vi på arealene av tverrsnittene ved x av de tre omdreiingslegemene. Sylinderen er lettest å finne ut av, her blir ethvert tverrsnitt en sirkel med radius $2r$, og arealet blir dermed

$$T_{sylinder} = \pi \cdot (2r)^2 = 4\pi r^2$$

Tverrsnittet av kjeglen blir en sirkel med radius x, og arealet blir

$$T_{kjegle} = \pi x^2$$

Tverrsnittet av kulen blir en sirkel med radius y, der x og y er forbundet med hverandre gjennom sirkelligningen $(x - r)^2 + y^2 = r^2$. Vi har dermed $y^2 = r^2 - (x - r)^2 = 2rx - x^2$, og arealet av tverrsnittet av kulen blir

$$T_{kule} = \pi \cdot y^2 = \pi(2rx - x^2).$$

Legg merke til at tverrsnittene av kjegle og kule til sammen har areal

$$T_{kjegle} + T_{kule} = 2\pi rx.$$

Vi prøver nå å plassere de tre tverrsnittene slik at de balanserer en vektstang med balansepunkt i O. Vektstangloven sier at kraft · arm må være like stor på begge sider av O, og kraften er her proporsjonal med arealet. Nå er

$$2r(T_{kjegle} + T_{kule}) = 4\pi r^2 x = x \cdot T_{sylinder}.$$

og det følger at sylindertverrsnittet ved x vil balansere de to andre tverrsnittene hvis vi flytter dem til punktet D, der OD har lengde $2r$. Nå gjør vi dette for alle x mellom 0 og $2r$, og vi får da som resultat at sylinderen der den er vil balansere en kule og en kjegle som er plassert med tyngdepunkt i D. Siden sylinderen har sitt tyngdepunkt i avstand r fra O så gir vektstangloven brukt nok en gang at

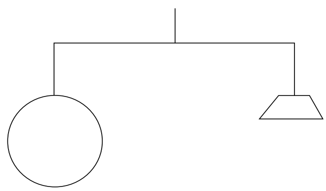
$$2r(V_{kjegle} + V_{kule}) = r \cdot V_{sylinder}.$$

Vi løser nå med hensyn på V_{kule} og finner til slutt den kjente volumformelen

$$\begin{aligned} V_{kule} &= 1/2\, V_{sylinder} - V_{kjegle} \\ &= 1/2 \cdot 8\pi r^3 - 8/3\pi r^3 = 4/3\pi r^3. \end{aligned}$$

Vår kilde for fortellingen om Arkimedes i badekaret er romeren Vitruvius, som levde ca. 250 år etter Arkimedes. Vitruvius forteller også hvordan Arkimedes avslørte gullsmeden: Han tok et stykke rent gull som veide like mye som kronen og senket det ned i et kar som var fylt med vann helt opp til randen. Deretter tok han opp gullet og senket ned kronen i stedet. Hvis gullsmeden hadde erstattet noe gull med sølv så ville kronen få større volum, og vannet ville renne over kanten når kronen ble senket ned.

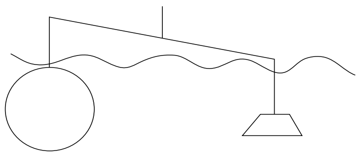
Denne beskrivelsen Vitruvius gir er ganske sikkert ikke riktig. La oss se hvorfor. Vi går ut fra at kronen veide nøyaktig 1 kg, og at det var nødvendig med et rundt kar med radius 10 cm for å få plass til kronen. (Disse tallene er noenlunde i samsvar med arkeologiske funn.) En kubikkcentimeter gull veier 19.3 gram, og 1000 gram rent gull har derfor volum 1000/19.3 = 51.8 cm^3. Karet har overflate $\pi \cdot 10^2 = 314\ cm^2$, og vannet vil derfor stige med 51.8/314 = 0.165 cm. La oss nå si at gullsmeden erstattet så mye som 30 % av gullet med sølv. Hver kubikkcentimeter sølv veier 10.6 gram, og kronen ville da ha volum 700/19.3 + 300/10.6 = 64.6 cm^3. Den ville dermed få vannet til å stige med 64.6/314 = 0.206 cm. Høydeforskjellen ville



Kronen og gull-loddet veier like mye

med andre ord være under en halv millimeter, og dette ville i praksis ikke være mulig å observere nøyaktig.

En bedre metode er å henge kronen og tilsvarende mengde rent gull på hver side av en balansevekt, og så å senke begge sidene ned i vann. Kronen med sølvinnhold har større volum, den vil derfor fortrenge mer vann, og etter Arkimedes' oppdriftslov vil den da bli lettere enn gullet. Vi har gjort alle nødvendige beregninger allerede, og kan se hvor stor forskjellen vil bli. Gullet fortrenger 51.8 cm^3 vann, og dette veier 51.8 gram. Vekten til gullet under vann blir dermed 1000 – 51.8 = 948.2 gram. Kronen med 30 % sølv fortrenger 64.6 cm^3 vann og får dermed vekt under vann 1000 – 64.6 = 935.4 gram. Forskjellen er med andre ord over 12 gram, og dette kan lett observeres med en vanlig balansevekt.



Kronen fortrenger mer vann enn gull-loddet

Referanser

De som vil vite mer om palimpsesten og se bilder av den kan bruke internettadressen http://www.thewalters.org/exhibitsarchwag.html

Man kan også lese mer om Arkimedes på følgende sted, der regnestykket med gull-kronen er tatt fra.
http://www.mcs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/contents.html

(fra side 8)

utforskende matematikkarbeid i 9. klasse, må det likevel sies at elevene kanskje var noe uerfarne og hadde noe begrenset kompetanse i forhold til å utnytte tekstens matematiske potensialet fullt ut. På den annen side kan man spørre om en slik utnyttelse er et mål i seg selv. De aktuelle 9. klasseelevene leverte mange gode og godt gjennomarbeidede besvarelser, og flere av dem viste kapasitet innenfor problemløsning og kildegransking.

Basert på erfaringene fra ett enkeltstående prosjekt, må det kunne sies å ha vært en faglig vellykket integrering, sett fra både et matematisk og et engelskspråklig synspunkt. Interessant ville det likevel være å se hvilke matematiske resultater det ville komme ut av et slikt prosjekt på høyere trinn, for eksempel i 10. klasse eller ved allmennfaglig studieretning i videregående skole.

Referanser

Bell, A. (1993). Some Experiments in Diagnostic Teaching. *Educational Studies in Mathematics, 24, 115–137.*

Bruner, J.S. (1960). On Learning Mathematics. *The Mathematics Teacher, 53, 610–619.*

Burton, L. (1984). *Thinking Things Through. Problem Solving in Mathematics.* Basil Blackwell.

Ernest, P. (1994). *An Introduction to Research Methodology and Paradigms.* Exeter: School of Education, University of Exeter.

Guiliano, E. (1995). *Lewis Carroll – The Complete Illustrated Works.* 2. utgave. London: Leopard Books, Random House.

Hovdhaugen, E. (1992). *Å planlegge et prosjekt og å skrive en avhandling: Noen ideer til doktorander, hovedfagsstudenter og veiledere.* Oslo: Universitetsforlaget.

KUF (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen.* Oslo: Nasjonalt Læremiddelsenter.

Mellin-Olsen, S. (1993). Semesteroppgaver, hovedfag, dr.grad. Hvordan sikre nødvendig kvalitet? *Tangenten 4, 3/4, 6–15.*

Orton, A. (1992). *Learning Mathematics. Issues, Theory and Classroom Practice.* Second Edition. London: Cassell.

Polya, G. (1990). *How To Solve It.* 5th edition. London: Penguin Books.

Solvang, R. (1992). *Matematikkdidaktikk*. Oslo: NKI – Forlaget.

Wickelgren, W. (1974). *How To Solve Problems. Elements of a Theory of Problems and Problem solving.* San Francisco: W. H. Freeman and Co.

Annonse for Aschehoug

AKTIVITET

Tverrsummer danner mønster

Tverrsummen til et tall er det tallet du får når du finner summen av sifrene til tallet. Hvis summen har mer enn ett sifer, finner du summen av dem igjen, helt til du ender opp med en tverrsum med ett sifer.

Eksempel:
23 har tverrsum 2 + 3 = 5
98 har tverrsum 9 + 8 = 17 som igjen gir 1 + 7 = 8

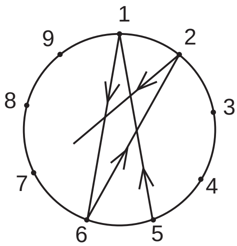
Finn tverrsummen til alle svarene i gangetabellen fra 1-gangen til 10-gangen. Vi har fylt ut 5. rad. Fyll ut resten.

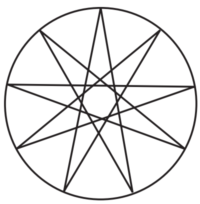
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5	5 5	10 1	15 6	20 2	25 7	30 3	35 8	40 4	45 9	50 5
6										
7										
8										
9										
10										

Finner dere noe system?

Nå skal vi lage mønster i sirkler som viser tverrsummen til de ulike gangene.

For 5-gangen ser det slik ut:
Lag mønster for alle gangene. Fargelegg dem!
Fortell om det dere ser.





Ingvill Holden, NTNU har tilrettelagt disse aktivitetene for Tangenten.

AKTIVITET

BUSSLEIKEN

Fint å leike ute, men kan også gjøres i klasserommet. Hvis det gjøres i klasserommet, kan du bruke tavle eller flippover til å holde rede på antall passasjerer i bussen (se kopioriginal).

Faglige mål: addisjon og subtraksjon av små tall. Samtaler rundt «for få» og negative tall.

Utstyr: Terning, «spinner» med + og –, stort ark eller tavle til å holde «regnskap» over passasjerene på bussen.

Organisering: Seks barn på hver bussholdeplass, som enten er inne i klasserommet eller ute.

En elev velges til bussjåfør. Seks elever er passasjerer på bussen når turen begynner. Passasjerene er på bussen når de holder hverandre på skuldrene i lang rekke. Bussen stopper på hver holdeplass. Læreren kaster terningen og snurrer spinneren. Tallet på terningen sier hvor mange som skal på eller av. Spinneren sier om de skal på (+) eller av (–). La elevene si hva som skjer. Spør hvor mange som er igjen på bussen. Hvis de må telle, så la dem gjøre det.
Fyll ut på det store arket hver gang bussen stopper på en holdeplass. Be en elev om å skrive opp, hvis de ikke er for små. I begynnelsen av første klasse kan du skrive streker i stedet for tall.

Eksempel:
Første holdeplass gir –4. Andre holdeplass gir +2. Da ser det slik ut på arket:

Passasjerer i bussen	Inn + / Ut –	Hvor mange er det på bussen nå?
6	–4	2
2	+2	4

Hvis det blir –6 neste gang, kan du få i gang en diskusjon på hva de skal gjøre. Hvor mange mangler i bussen for at 6 skal kunne gå av?

Hvis du får +5 og det bare er en elev på holdeplassen, hva gjør vi da? Hvor mange mangler? Kan vi hente dem på neste holdeplass?

Når leken skal avsluttes, kjører bussen til endestasjonen og alle må gå av. Skriv det også inn i tabellen.
Etterpå får ungene i oppgave å tegne bussturen og lage regnestykker. Avhengig av klassetrinn, kan de bruke streker eller tall til å forklare. Det er heller ingenting i veien for at de kan tegne barn og streke over, men det tar jo litt lenger tid.
Dette kan også gjøres som hjemmelekse. Samle det inn og se hvor mye de ulike elevene har fått med seg. Slike tegninger er gull verdt for å gi deg tilbakemelding.

Ingvill Holden, NTNU har tilrettelagt disse aktivitetene for Tangenten.

Bussleiken er blant annet inspirert fra *The Mathematics Teacher* som gis ut av NCTM i England.

AKTIVITET

Passasjerer i bussen	Inn +	Ut –	Vis hvordan du finner hvor mange som er i bussen nå

Ingvill Holden, NTNU har tilrettelagt disse aktivitetene for Tangenten.

Bussleiken er blant annet inspirert fra *The Mathematics Teacher* som gis ut av NCTM i England.

Oppgaver

Oppgave 1

Du sitter 3/8 inne på ei jernbanebro og fisker. Plutselig hører du at toget kommer og du løper alt du kan den korteste veien av brua, altså mot toget. Du er heldig og når det akkurat.

Neste dag sitter du og fisker på samme stedet. Når du nå hører at toget kommer, løper du alt du kan den andre veien over brua. Jammen når du det akkurat denne gangen også. Hvor mange ganger raskere kjører toget enn det du greier å løpe?

Oppgave 2

Du kjører til jobb i 30 km/t. Hvor fort må du kjøre hjem igjen for at gjennomsnittsfarten på turen skal være 60 km/t ?

Oppgave 3

Familien Andersen og familien Hansen skal på bilferie til Trondheim i sommer. Familien Andersen bor i Bergen og familien Hansen bor 330 km rett øst for Bergen. De bestemmer seg for å kjøre mot hverandre til de møtes, for så å kjøre sammen nordover.

Familien Andersen starter å kjøre fra Bergen klokka 09.00 og kjører med konstant fart på 50 km/t. Familien Hansen starter å kjøre samtidig, men de kjører med konstant fart på 70 km/t. Når vil de møtes og hvor langt øst fra Bergen møtes de?

Familien Nilsen som også bor i Bergen hadde lyst til å bli med de andre til Trondheim. De bestemmer seg for å kjøre etter for å møte de to familiene. De starter klokka 10.00 fra Bergen og kjører i en konstant fart på 75 km/t. Greier de å nå igjen familiene før de begynner å kjøre nordover? Dersom alle tre familiene skal møtes til samme tid, hvor fort må familien Hansen kjøre da?

Marit Velure Andersen og Leif Bjørn Skorpen

Matematikkvanskar 2000

Didaktisk perspektiv på matematikkvanskar

Tangenten har fått tilsendt to rapporter frå konferansen. Redaksjonen har samla stoffet i denne artikkelen.

15. og 16. november vart det halde ein nasjonal konferanse om matematikkvansker på Fleischers hotell på Voss. Stiftelsen INAP (Institutt for Anvendt Pedagogikk) var arrangør. Det var 180 påmelde deltakarar. Om lag halvparten av desse kom frå grunn- og vidaregåande skular, mange frå PPT-kontor og andre kompetansesentra og ein relativt liten kontingent frå høgskular og universitet.

Eit overordna mål for konferansen var at det skulle vera til nytte for det einskilde barnet og den einskilde ungdomen som strevar med matematikkfaget, og ikkje minst vera ei vitamininnsprøyting for oss som underviser og er opptekne av matematikkundervisning og tilrettelegging av det matematiske fagstoffet.

Arrangørane hadde henta fem framtredande ekspertar innanfor kvar sine fagfelt for å leggje fram sine erfaringar og skissere tiltak i samband med matematikkvanskar. Det vart også arrangert ein etterkonferanse 16. og 17. november for tilsette frå høgskular, universitet og enkelte andre fagmiljø, der ein drøfta problemstillingar omkring matematikk og matematikkvanskar.

Dei fem hovudforedraga var ulike både i form og innhald, prega av foredragshaldarane sine ulike faglege bakgrunnar og interesseområder. Dei utfylte kvarandre på ein interessant måte. Vi vil her prøve å gje ein kort presentasjon av hovudforedraga.

Først ut var **Olav Lunde**, leiar for Klepp PPT og Sørlandet kompetansesenter, som har lang fartstid med spesialpedagogisk arbeid innanfor PPT. Tittelen på hans foredrag var: *Kartlegging og tiltak ved matematikkvansker*. Her presenterte han blant anna ein del av sine spesialpedagogiske erfaringar med matematikkvanskar, ulike diagnostiseringsmåtar og behovet for gode læringsstrategiar.

Kjernen i det didaktiske perspektivet må vera å hindra at eleven utviklar matematikkvanskar. Det er viktig å få greie på kva barnet kan og veit frå før og knyta ny lærdom til dette. Matematikk er å tenkja, men korleis få kartlagt korleis eleven tenkjer? Det er vanskeleg å læra alt, men er det nødvendig?

Hovedspørsmålet i hans foredrag var kva me kunne gjera med matematikkfaget for at elevane skal oppleva å lukkast. Me har gjerne vore meir opptekne av kva me skulle gjera med eleven for at han/ho skal få til dette faget. (Ekstratimar, eineundervisning for å «tetta flest mogelege hol» og liknande ordningar.)

Målet må vera at matematikk skal vera eit fag for alle elevar!

Gard Brekke, høgskuledosent i matematikk ved Høgskolen i Telemark, leiar for KIM-prosjektet, heldt foredrag over temaet. *Omgrepsdanning og matematikk*. Med utgangspunkt i ulike «kunnskapstypar» innanfor matematikkfaget og døme på typiske misoppfatningar i samband med utvikling av sentrale omgrep i faget, ga han ei matematikkdidaktisk tilnærming til problemområdet.

Kva er matematisk kompetanse? Kva vil det seia å «kunna matematikk»?

Stikkord her er faktakunnskap, dugleik (ferdigheter), omgrepsstruktur og generelle strategiar. Kva undervisningstradisjon har nettopp dette faget? Brukar skulen altfor mykje tid til faktalæring og drill i matematkk? Er det ikkje viktigare å leggja til rette for aktivitetar der eleven kan vinna erfaringar som dei kan byggja kunnskapen på?

Han peika på at det i L-97 vert understreka at me må gje elevane høve til å stoppa opp i arbeidet sitt for å reflektera over det dei har gjort og det dei har funne ut/lært gjennom eigen aktivitetet. L-97 oppfattar kunnskap som personleg eige. Kunnskapen ein person har er avhengig av modning og ikkje av lærebok/ pensum.

Andreas Hansen, INAP, Høgskolen i Harstad, PPD for Sør Troms, sitt foredrag hadde tittelen: *Grunnleggende begreper og begrepssystemer i matematikkundervisningen*. Hansen presenterte teori og tiltak som i hovudsak byggjer på Magne og Ragnhild Nyborg sine arbeid med «Grunnleggende begrepssystemer», GBS og «Begrepsundervisningsmodell», BUM.

I mange tilfelle kan vanskane barna har vera grunna i at dei ikkje meistrar grunnleggjande omgrep godt nok. Erfaring og forskning viser at systematisk omgrepsundervisning kan vera med å redusera lærevanskane. Med andre ord barn treng «begrep til å begripe med» som Hansen hadde som hovedpoeng i sitt foredrag.

Fritz Johnsen er leiar for PP-tenesta i Vesterålen og Lødingen, og har blant anna arbeidd med nevropsykologisk utredning av matematikkvanskar. Gjennom foredraget sitt om: *Spesifikke matematikkvansker – kartlegging og tiltak* tok han oss med «inn i hjernen» til tre kasus frå sitt omfattande empiriske materiale. Gjennom døme på to av desse, som tilsynelatande hadde relativt like problem men der tiltaka burde bli svært forskjellige, fekk me innblikk i kompleksitet og nytta av grundig diagnostisering. Han gjorde oss merksame på russaren Vadim A. Krutetskii sitt store og viktige arbeid om barn med matematikkvanskar. Interessante artiklar på: http//:www.dysnett.org/

Snorre Ostad, professor ved institutt for spesialpedagogikk, Universitetet i Oslo, har i mange år forska på, og publisert stoff nasjonalt og internasjonalt om elevar med matematikkvanskar. I foredraget sitt: *Matematikkvansker i strategisk perspektiv*, presenterte han resultat frå den store undersøkinga som han gjennomførte på nittitalet (MUM-prosjektet). Der studerte han strategivalg og fleksibilitet i strategivalg i addisjons- og subtraksjonsoppgåver hos elevar med matematikkvanskar og «normalt fungerande» elevar.

«Matematikkvansker er en betegnelse på tilkortkomming i matematikk som sett i forhold til normaltfungerende elevers utviklingsmønster, ikke har en forsinket utvikling, men en kvalitativt forskjellig utvikling.»

Matematikkkunnskapar har ein kvantitetsdimensjon og ein kvalitetsdimensjon.

Korleis måle kvalitet i elevarbeid? Det er ikkje nok å telja rette svar! Kva strategiar brukar eleven? Varierer han mellom generelle strategiar og oppgåvespesikke strategiar? Eller er barnet prega av strategifattigdom når det løyser oppgåver i matematkk?

Gjennom ulike innfallsvinklar, frå kvar sine arbeidsområde og fagfelt, bidrog desse fem til å auke innsikta i problem knytt til elevar med matematikkvanskar.

Torsdag 16. november hadde alle kursdeltakarane høve til å vera med på ein presentasjon av ulike forskningsprosjekt.

Tone Dalvang, Sørlandet Kompetansesenter: «Undersøkelse om matematikkvansker» som skal setjast igang på nokre skular i Kristiandsandsområdet.

Kva problemstillingar er aktuelle å fokusera på i ei undersøkjing om matematikkvanskar?
Marit Holm, Institutt for Spesialpedagogikk, Universitetet i Oslo: «Kvalitetsvurdering og- utvikling i opplæringen av elever med spesielle behov sett i lys av utdanninspolitiske signaler».

Gunvor Sønnesyn, Gjernes skule/INAP: «Begynnaropplæring på ein annan måte». Presentasjon av *Grunnlaget*, materiell for begynnaropplæring og spesialundervisning.

Morten Hem, Voss interkommunale PPT: «Matematikkvanskar i grunnskulen».

Det var eit tettpakka fagleg program, og for dei som ikkje deltok på etterkonferansen var det lite høve til å «fordøye», reflektere over og diskutere det stoffet som vart lagt fram. Enkelte kunne ynskt ei veksling mellom plenumsforedrag og mindre fora der ein kunne utveksle erfaringar og meiningar. På den andre sida viser erfaring at mange kjem til kurs og konferansar med eit ynskje om å få «påfyll» av ny kunnskap. Organiseringa av konferansen var best tilpassa denne gruppa.

Kor stort utbytte ein hadde av denne konferansen var sjølvsagt avhengig av kva bakgrunn ein hadde innanfor fagfeltet og kor godt ein kjende foredragshaldarane sine arbeid på førehand. For enkelte av deltakarane vart det presentert relativt lite nytt stoff. Ein stor del av stoffet var kjent/tilgjengeleg før konferansen. Andre deltakarar ga uttrykk for å ha fått mange nye impulsar og hadde stort utbytte. Uavhengig av bakgrunn og forventningar til konferansen, er det altid nyttig å møte og diskutere med fagpersonar frå andre miljø og med ein annan erfaringsbakgrunn enn den ein har sjølv.

Gunvor Sønnesyn, konferanseleiar, oppsummerte og gav oss nokre tankar med på vegen heim. Kva er det i eleven sin situasjon som hindrar han i å forstå matematikk? Kva kan me gjera for desse elevane for at dei opplever å lukkast i faget, at dei får mot til å bli kjent med matematikken? Kan det vera at læraren har undervisningsvanskar når eleven ikkje lærer?

Men framleis er matematikkvanskar eit uklart fenomen med ukjente årsaker og med liten og ingen teoribasis. Det er framleis vanskeleg å diagnostisera.

Lærevanskar i matematikk seier ikkje noko om kva vanskar eleven har, spesielle kjenneteikn ved eleven, årsak til vanskane eller kva tiltak som bør setjast i verk.

Men me veit at det er aukande interesse for matematikkundervinsning noko som dette kurset med 180 deltakarar viste.

Bokomtaler

Gunnar Nordberg: *Matematikklæreren*
Håndbok for lærere på ungdomstrinnet
Akribe forlag 256 sider ISBN 8279500294

Mange av dei som arbeider med matematikkfaget i ungdomsskulen har i fleire samanhengar etterlyst «tilleggslitteratur» – til hjelp for å få ei betre og meir variert undervisning. No er det omsider kome ei slik bok: *Matematikklæreren*, der forfattaren er Gunnar Nordberg. Han har arbeidd i mange år som matematikklærar på ungdomstrinnet, og har i tillegg erfaring som øvingslærar, rettleiar og kurshaldar – i tillegg til å vera lærebokforfattar.

Boka er retta mot lærarar som underviser på ungdomstrinnet, men må også i høg grad vera nyttig for studentar på høgskular og universitet.

Matematikklæreren kan brukast både som oppslagsbok og som studiebok, og er eit godt supplement til lærarrettleiingane til læreverka. Boka kan brukast som ein idebank både når det skal planleggast langsiktig, eller når undervisninga skal førebuast innanfor eit konkret emne.

Handboka er sett saman av to delar :

Første delen er ein generell del som omhandlar didaktiske/metodiske spørsmål og problemstillingar. Emne som vert tekne opp, er m.a. : Korleis motivera ungdom for matematikkfaget, matematikksynet i L-97, korleis kunna skapa eit godt arbeidsklima i klassen, korleis skapa variasjon i undervisninga, vurdering som grunnlag for læring, tema/prosjektarbeid i matematikkfaget, matematikkprøver m.m.

I den andre delen av boka går forfattaren inn på konkrete faglege emne innanfor kvart av fagplanen sine målområde for ungdomstrinnet. Døme på slike emne er: utanlandske pengar, femtallssystemet, formelrekning, likningar med brøk, geometri i natur og kultur, mål for sentral tendens og tolkning av grafar. På slutten av kvart kapittel i boka vert det gitt spørsmål/problemstillingar under overskrifta «Til ettertanke og diskusjon», der målet er å gje idear til vidare arbeid med stoffet.

I føreordet skriv forfattaren at det største ønskjet hans med boka er at fleire elevar skal oppleva matematikkfaget som både eit nyttig og eit morosamt fag i skulen. Han er oppteken av å gjera faget mest mogeleg tilgjengeleg for alle elevar, og han har den grunnhaldninga at alle elevar har bruk for faget i mange samanhengar.

Han peikar vidare på eit moment som eg synest er svært viktig, nemleg behovet for variasjon i undervisningsformene. Det er nok diverre slik at mange elevar framleis opplever faget som kjedeleg og lite spanande. Men L-97 legg stor vekt på arbeidsmåtane i faget, og at eigenaktiviteten til elevane er eit viktig element.

Med dette som utgangspunkt vert *Matematikklæreren* ei god og matnyttig bok for alle som arbeider med faget i ungdomsskulen. Forfattaren ønskjer i denne boka å dela erfaringane sine frå klasserommet gjennom meir enn 25 år, og det klarer han på ein interessant, engasjerande og ryddig måte.

Frå den første delen av boka vil eg spesielt trekka fram desse innspela :

– Klassemiljøet står heilt sentralt når det gjeld føresetnadene for læring. Dette må også matematikklærarane vera seg bevisste, og oppstartfasen i ungdomsskulen vert særleg viktig.
– Læraren må ha ei grunnleggande tru på at alle elevar kan læra matematikk, og prøva å inspirera elevane gjennom stadig å vera på jakt etter gode måtar å formidla lærestoffet på.
– Det er måla for faget i L-97 som skal styra undervisninga vår, ikkje innhaldet i kvart enkelt læreverk. Dette skulle vera sjølvsagt, men det heng nok litt for mykje igjen av lærebokstyrt matematikkundervisning i norsk skule i dag.
– Alle treng matematikk, men treng me all matematikk ? Her er me inne på eit kontroversielt tema. Men er det i tråd med L-97 der tilpassa opplæring vert vektlagd, å pressa alle elevane gjennom det same stoffet ? Kan det ikkje vera meir meiningsfylt for dei elevane som slit med faget å få arbeida med eit utval av lærestoffet - enn å rekna algebraoppgåver med brøk ?

Boka har med kapittel om vurdering som grunnlag for læring /eigenvurdering og matematikkprøver, og det er store emne der ein må gjera eit utval Forfattaren kunne gått meir inn på eigenvurdering, og forskjellige oppgåvetypar (oppgåver med val av vanskegrad, valfrie oppgåver, opne oppgåver). Det er også mange spørsmål blant matematikklærarar knytta til arbeidet med elevboka, så det emnet kunne også ha fått litt fleire kommentarar.

Eg går ut frå at forfattaren meiner at informasjon om dette finn matematikklærarane i diverse skriv og eksempelsamlingar frå Eksamenssekretariatet/Læringssenteret og i heftet *Matte er gøy*, som han fleire gonger viser til.

Det som er det fine med den andre delen av boka, er at det vert vist forskjellige forklaringsmodellar/innfallsportar/løysingsframlegg til mange konkrete emne innan faget. Kvart emne vert delt inn på denne måten: Utgangspunkt–Motivering–Eksempel.

I alt 40 emne frå dei 5 målområda vert omtala, og her er det mange idear å få.

Eit døme på emne er «Å gå vegen om 1», ein «gammal» strategi som for mange elevar kan fungera som ein døropnar til å løysa mange matematikkoppgåver.

Eit nyare emne som sannsynsrekning kunne kanskje ha fått litt meir plass. Det er eit emne der mange lærarar føler at dei skulle hatt ei betre og breiare fagleg platform.

(fortsettes side 38)

Lærebokvurdering

Vurderingen av lærebøker for 1MX/MY fortsetter, denne gangen er det Aschehougs verk *Matematikk* og *Eureka* fra NKS-forlaget som står for tur. Vi følger samme mal som ved presentasjonen av *Sinus*, først beskriver vi verket, dernest følger en gjennomgang av hvordan verket behandler de viktigste av de temaene som er nye i matematikkfaget på grunnkurs.

Forlag: *Aschehoug*

Tittel: *1MX 1MY Matematikk*

Forfattere: *Gunnar Erstad, Odd Heir, Ivar Bjørnsgård, Ørnulf Borgan og Jan Pålsgård*

Verket består av:

- Lærebok som dekker alle moduler, 352 sider, Pris: 395 kr
- Oppgavesamling som dekker alle moduler, 256 sider, Pris 235 kr
- Ressursperm for læreren med abonnementsordning. Pris: 398 kr.
- Matematikknytt, kommer to ganger i året.

Aschehoug: Matematikk

Dette læreverket praktiserer den strammeste læreplantolkningen i selve lærebokteksten, og litt av teksten er også merket som orienteringsstoff. Men forfatterne bruker bevisst oppgavesamlingen til å få med mer, her er det leseoppgaver som går videre og tar opp tema og metoder som stort sett er med i læreboka i de andre verkene. Et annet særtrekk er at all repetisjon av algebra er samlet i et eget kapittel til slutt, og ikke inkorporert i den ordinære teksten slik det er gjort i de andre verkene. Det er layoutmessig ei svært tiltalende bok, og mye av oppgavematerialet virker interessant. En har, både i valget av eksempler og oppgaver, lagt vekt på å få fram praktiske situasjoner der matematikk brukes.

Hele **læreboka** er trykt i farger. En fargekode i innholdsfortegnelsen viser hvilke avsnitt/kapitler som skal leses i 1M/X/Y. Det er merket av i margen ved stoff som er orienteringsstoff og stoff som bare skal leses i 1MX. Denne markeringen vises dårlig på oddetallsidene da streken nesten forsvinner inn i innbindingen. Lommeregnerstoffet er ikke alltid så tydelig merket, men noen steder står det Casio eller Texas i margen. Fargene og margen er brukt til ulike typer markeringer. Boka er sånn sett svært strukturert.

Oppgavene er plassert etter hvert avsnitt, men underveis i teksten er det markert hvilke oppgaver det passer å gjøre, og etter hvert kapittel er det en side med samleoppgaver. Oppgavene er nivådifferensierte og de er merket med fra ingen til tre trekanter. Det er stort sett oppgaver av de letteste typene i læreboka, mens en i oppgavesamlingen har mange i de vanskeligere kategoriene. Det angis for hvert kapittel hvilke læreplanmål som tas opp, og selve læreplanteksten står bakerst i boka. Boka har et fyldig register som blant annet kan brukes til å finne fram til lommeregnerstoffet. Begrep og skrivemåter forklares ganske grundig, men det legges ikke alltid vekt på å gå i dybden med bevis av formler og lignende. Elevenes kunnskaper fra grunnskolen tas på alvor. I kapittel 1 har en bruk for både prosentregning, grafisk framstilling og å løse likninger. Kapittel 2 starter med tall og tallmengder, intervall, venndiagram og mengdeteoretiske symbol. Ingen utpreget myk start.

Det kan synes som om det er lagt ned mye arbeid i **oppgavesamlingen**. Den inneholder både oppgaver til hvert avsnitt og samleoppgaver til hvert kapittel. Noen oppgaver er løst i sin helhet i fasiten. Det er fire nivå på oppgavene. Dessuten er det en god del leseoppgaver om tema og metoder som ikke er tatt opp i læreboka. Det ser ut som om forfatterne har lagt vinn på å finne fram til et variert utvalg av praktiske oppgaver, gjerne problemstillinger knyttet til naturfag og økonomi. Dette er motiverende for mange, illustrerer matematikkens betydning for andre fag og får fram en tverrfaglig dimensjon. Vi legger spesielt merke til oppgaver med tema fra biologi. Men noen elever får nok problemer når ord som biomasse, planteplankton og optisk fiber brukes uten nærmere forklaring. Et artig trekk er at det er med oppgaver med tekst på fremmede språk, så som engelsk og japansk. Det er dessuten diskusjonsoppgaver og oppgaver der en bruker Excel knyttet til kapitlet om sannsynlighetsregning. Her ligger det til rette for variasjon i undervisningsformene. Læreboka har ingen forslag til prosjekt eller større arbeid i matematikk. Dette kommer i lærerens ressursperm.

Ett kapittel i oppgavesamlingen er viet bruk av lommeregneren. Det er en naturlig konsekvens av at lommeregneren er lite nevnt i læreboka. Et annet kapittel inneholder problemløsningsoppgaver. Det vil for det meste si matematiske nøtter av den typen vi finner i Abel-konkurransen. Her mangler det ikke på ting å ta fatt i for de ivrige elevene.

Ressurspermen til læreren er ikke helt ferdig ennå (november 2000), men ut fra det som er klart er det tydelig at den vil bli et nyttig hjelpemiddel. Den inneholder forslag til årsplan, prøver for hvert kapittel samt diagnostiske tester en kan bruke ved skoleårets start. Det er også med noen forslag til prosjekt. De ulike kapitlene kommenteres. Foreløpig er det kapitlet om sannsynlighetsregning som er mest grundig behandlet. Her er det, i tillegg til kommentarer omkring teksten i læreboka, diskusjons- og aktivitetsoppgaver samt fullstendig løsning av alle oppgaver. Innholdsfortegnelsen røper at det vil komme et kapittel om nye oppgavetyper. Det er heller ikke å forakte at ungdomstrinnets læreplan samt et eksempel på eksamen fra grunnskolen inkluderes. Skoler som kjøper permen blir lovet å få tilsendt nytt stoff et par ganger i året.

Matematikknytt kommer en gang hvert semester. Det nummeret vi har sett inneholder forslag til heldagsprøver samt løsning på eksamensoppgaver.

Tema som er nye i læreplanen for matematikk på grunnkurs.

Mål 4: Geometri

Geometri er som i Sinus viet god plass. Trigonometri får et eget kapittel som introduseres med repetisjon av Pytagoras' læresetning og formlikhet. Arealsetningen er ikke inkludert. Kapitlet "Noen geometriske emner" består i stor grad av areal- og volumbetraktninger. I behandlingen av det nye læreplanmålet om kjeglesnitt er det lagt stor vekt på det historiske perspektivet. De plangeometriske definisjonene er gjengitt, samt noen få anvendelser, blant annet hvordan kjeglesnittene framkommer ved å lyse med en lommelykt på en vegg. Behandlingen av kjeglesnittene er etter vår oppfatning i tråd med læreplanens intensjoner. Det er få oppgaver om stoffet i læreboka, alle dreier seg om å tegne kjeglesnitt. Noen flere er gitt i oppgaveboka der blant annet begrepet eksentrisitet tas opp.

Mål 5: Sannsynlighetsregning

Kapitlet innledes med å definere sannsynlighet som "relativ frekvens i det lange løp". Dette er greit forklart, og illustreres blant annet gjennom simulering av terningkast på kalkulator. Ikke alle læreverkene velger å inkludere simulering.

Lenger ut i kapitlet kommer det godt fram hva en sannsynlighetsmodell er. I behandlingen av addisjons- og produktsetningen er de mengdeteoretiske symbolene for union, snitt og komplement brukt. Sammen med venndiagram er disse begrepene allerede introdusert i algebrakapitlet. I forbindelse med betinget sannsynlighet brukes pussig nok notasjonen P(A gitt B) framfor $P(A|B)$. Framstillingen bærer preg av grundighet og oppgavene er gode og mange. Det er for øvrig mye støttestoff til dette målet i lærerens ressursperm.

Mål 6: Geometri II

Mål 6a handler om mangekanter. Det er tatt med greie forklaringer på konstruksjon. I noen tilfeller er det alternative metoder i oppgavesamlingen. Tips til hvordan en kan tegne mangekantene er ikke tatt med, bortsett fra en fin figur i oppgavesamlingen som kan kopieres slik at ulike mangekanter får like lang side. Konstruksjonen av femkanten er gjort ved at en først lærer å konstruere en gyllen trekant. Denne brukes så til å konstruere femkanten. Når det gjelder flatefylling med regulære mangekanter som ikke er like, er denne læreboka den knappeste. Det blir ikke eksplisitt sagt at alle mangekantene skal ha like lang side. En liten feil har lurt seg inn: Minst *tre* mangekanter må møtes i et hjørne. Det blir ikke noe hjørne med *to*. I oppgavesamlingen tar en igjen for det som "mangler" i læreboka. Her er det oppgaver om både semiregulære og demiregulære mønster. Faktisk bygger alle flatefyllingsoppgavene i oppgavesamlingen på begrep som ikke er nevnt i læreboka.

Det neste delmålet omhandler spiraler og fraktaler. *Matematikk* har med mye om spiraler og hvordan en kan tegne dem. En tegner både mangekanter og spiraler på lommeregner ved hjelp av polarkoordinater. Forklaringen på hva polarkoordinater er, kommer i oppgavesamlingen. Å tegne femkanten på lommeregner er kanskje ikke den nyttigste bruken av teknologiske hjelpemiddel, men som en smaksprøve før spiralene kan det forsvares. Fibonaccitallene trekkes inn i forbindelse med spiralformer i naturen. Kapitlet om fraktaler er tiltalende med gode eksempler og illustrasjoner. Når det gjelder å ha med eksempler fra kunst, arkitektur og natur er denne boka en av de beste. Her er varierte eksempel og tiltalende illustrasjoner.

Det siste delmålet omhandler det gyldne snitt. Konstruksjon av et gyllent rektangel med utgangspunkt i langsiden er vist i læreboka. I oppgavesamlingen viser en konstruksjon med utgangspunkt i kortsiden, men det forklares ikke hvorfor konstruksjonen er riktig.

Mål 7 og 8: Praktisk bruk av funksjoner og algebra

At elevene skal kunne *bruke* briggske logaritmer til å løse likninger er tatt bokstavelig. Det er ikke tatt med forklaring på hva logaritmene er, bare nødvendige tastetrykk på lommeregneren. Den regneregelen som er nødvendig for å løse likningene er ikke bevist, men en viser i et eksempel at den gir riktig svar.

Generelt stoff om halveringstid for radioaktive isotoper er ikke tatt med, men et eksempel med terningkast tar oss direkte over til halveringstid for ^{14}C. En regner så ut antall halveringer når det er tilbake en gitt prosent av ^{14}C, og finner alderen ved å multiplisere med halveringstiden for ^{14}C. Bruken av en algoritme tror vi gir bedre forståelse enn om en ferdig formel ble presentert. ^{238}U-datering er demonstrert i en oppgave.

Mål 9: Funksjonslære

Momentan vekst er behandlet på en elegant måte som vi tror gir elevene innsikt i hva begrepet står for. En viser hvordan en kan beregne momentan vekst ved å bruke to punkt på en inntegnet tangent. Beregning av gjennomsnittlig vekst for et lite intervall nær et punkt er demonstrert ved å bruke tall fra funksjonstabellen på lommeregneren. Til slutt viser en hvordan en kan bruke lommeregneren til å finne momentan vekst. Men hvorfor bruke ordet lommeregnermagi når en har et så godt utgangspunkt til å forklare hvordan lommeregneren gjør dette?

Avsnittet om areal under grafer starter med et eksempel der arealet vi skal beregne er uttrykk for en avstand. Mange elever vil nok ha problem med å assosiere en avstand med størrelsen av et areal.

Boka legger altså opp til at en fra første stund må være oppmerksom på at arealet under grafen kan være uttrykk for hva som helst. Flere eksempel følger. Det beregnes hvor mange solbriller et firma selger og en har en modell for beregning av hvor mange mennesker som har levd på jorda opp gjennom tidene. Dette gjøres både ved å beregne areal av rektangler og ved hjelp av lommeregner. Integrasjonssymbolet brukes ikke.

Teknologiske verktøy.

Teknologiske verktøy nevnes i læreplanen i forbindelse med geometri og funksjonslære.

Matematikk introduserer lommeregneren seint i den ordinære lærebokteksten. De arbeider med grafer og funksjoner uten lommeregner først. Den er imidlertid nevnt i repetisjonskapitlet. Det er nok meningen at en skal bruke lommeregnerkapitlet i oppgavesamlingen fra første stund. Forklaringene på bruken er relativt korte. Få skjermbilder er gjengitt.

I geometri brukes lommeregneren til å tegne mangekanter og spiraler. Ellers er det ikke med noen eksempel på bruk av teknologiske vertøy innenfor dette temaet.

Oppgavesamlingens kapittel med oppskrifter på lommeregnerbruk omhandler Casio CFX-9850GB PLUS og TI-83 Plus. Det tar for seg alt fra grunninnstillinger til beregning av areal under kurver og momentan vekst, men er relativt kortfattet. Programmet for annengradslikningen på TI-83 er med her.

Når det gjelder bruk av andre teknologiske hjelpemiddel er det noen oppgaver i oppgavesamlingen der en bruker Excel. Dessuten har vi funnet en henvisning til statistisk årboks internettutgave.

På de fleste punkt er dette et grundig gjennomarbeidet læreverk. Så langt i skoleåret tyder alt på at læreplanen er omfattende. Den bevisste avgrensningen som gjøres i dette verket vil nok fungere som rettesnor for mange lærere og elever. En delikat og oversiktlig layout sammen med et godt og variert oppgavemateriale gjør også sitt til at vi står igjen med et positivt inntrykk av verket.

NKS-forlaget: Eureka

Dette verket er helt nytt. Læreboka gir et tiltalende førsteinntrykk, men skjemmes av en del unødvendige feil. Bruken av verket krever at læreren gjennomgår mye av stoffet med klassen. Det passer nok for lærere og elever som trives med den undervisningsformen. En del gode eksempler og oppgaver med bakgrunn i for eksempel matematikkens historie er tatt med. Forfatterne har på en del felt ikke greid å begrense seg. Det gjør at boka enkelte steder blir overlesset. Den ville tjent på at en hadde brukt mer tid til å bearbeide manuskriptet og å lese korrektur.

Læreboka har myk perm og det er brukt farger i hele boka. Vi har funnet ett bevis som er merket tilvalgsstoff. Denne merkingen virker noe tilfeldig

Forlag: *NKS-forlaget*
Tittel: *Eureka*
Forfattere: *Memund Daltveit, Geir Ellingsrud, Ivar Horjen, Nils Voje Johansen*

Verket består av:
- Lærebok som dekker alle moduler, 377 sider. Pris: 398 kr
- Oppgavesamling som dekker alle moduler, 116 sider. Pris: 265 kr
- Ressursperm til læreren. Forfattere: Erik Holst og Jon Asbjørn Ringseth. 253 sider. Pris: 560 kr.

da det er mange andre ting som like gjerne kunne vært merket tilvalgsstoff. Sidene er tydelig merket med en fargekode som angir hvilken modul kapittel hører til. Dette gjør det lett for elevene å finne det lærestoffet de skal kunne. En bør ikke stole blindt på denne merkingen. Det er for eksempel ikke merket av at elever på Y-modulen ikke behøver kjenne til definisjonsmengde og verdimengde. Oppgaver kommer fortløpende i teksten. Ved slutten av hvert kapittel er det egenvurderingsoppgaver samt flere oppgaver til hvert avsnitt. Oppgavene i grunnboka er ikke nivådifferensiert men dette verket har flere oppgavenummer i grunnboka enn de andre verkene. De fleste kapitler avsluttes med et interessant avsnitt med historisk stoff. Læreplanen står bakerst i boka, men det er ikke markert hvilke mål som hører til hvilken modul. Det er ikke alltid lett å finne fram i læreboka. Definisjoner og forklaring av skrivemåter og uttrykk er ikke alltid tydelig markert, og indekset er dårlig.

I denne boka brukes det mye matematisk notasjon og det overlates i noen tilfeller til læreren å forklare notasjonen. Skrivemåten R\{–2, 2} innføres for eksempel uten noen forklaring. Det at en bevisst bruker matematisk notasjon når det er mulig, gjør teksten presis, men vil nok gjøre det vanskelig for mange elever å lese den på egen hånd. En del begrep som strengt tatt ikke er nødvendige brukes også. Dette kan kanskje vekke nysgjerrighet hos ivrige elever men vanskeliggjør stoffet for de svake. En har for eksempel nevnt parallellpostulatet i forbindelse med euklidsk geometri. Ikke-euklidsk geometri er ikke nevnt, så her gir forfatterne læreren en god mulighet til å presentere noe som vekker nysgjerrigheten. Funksjoner og algebra synes å være grundig behandlet i dette læreverket. En legger opp til mye utforsking av funksjonene ved bruk av lommeregner. Noen iøynefallende feil skjemmer boka: Lineær staves feil, og tegnet for mengdesubtraksjon er blitt / i stedet for \ gjennom hele læreboka. Boka tar opp åpne oppgaver i et eget avsnitt helt i starten. Dette følges desverre ikke opp videre, heller ikke i oppgavesamlingen.

Førsteinntrykket av **oppgavesamlingen** er at her får en lite for pengene. En rask opptelling viser også at det er vesentlig færre oppgaver i denne boka enn i oppgavesamlingene fra de andre forlagene. En nærmere titt på oppgavene viser imidlertid at det er en del oppgaver her som ser spennende ut. Eleven får prøve å «oppdage og eksperimentere med mønster, system og sammenhenger». Vi synes nok at det er få lette oppgaver. Det er mulig en mener at svake elever greier seg med læreboka. Oppgavene er differensiert i fire nivå merket med fra ingen til tre stjerner. Noen av oppgavene er såpass vanskelige at de neppe hører hjemme på dette nivået.

I **lærerens ressursperm** er det forslag til framdriftsplaner og detaljerte arbeidsplaner for hvert kapittel. Det er godt mulig at læreren må lage sine egne arbeidsplaner, men de som er her kan fungere som en god mal. Det fins dessuten tips om elevers egenretting av prøver og litt om mappevurdering. Det er laget prøver til hvert kapittel. Fullstendige løsningsforslag med tanke på egenretting følger med. Vi finner også forslag til prosjektoppgaver og noen eksempler på laborativ matematikk. Dette er en arbeidsmåte hvor elevene oppdager sammenhenger etter først å ha gjort en praktisk undersøkelse. Denne arbeidsmåten er helt i tråd med læreplanen. Det er tatt med korte kommentarer til hvert kapittel, og flere forslag til problem- og gruppeoppgaver. Dessuten er en del av lommeregnerstoffet å finne her, blant annet programmet for andregradslikningen for TI-83.

Tema som er nye i læreplanen for matematikk på grunnkurs.

Mål 4: Geometri

Geometridelen i Eureka bærer preg av å være skrevet i en kort og konsis stil. Av alle de fire læreverkene som foreligger er det Eureka som i særklasse har spandert færrest sider på dette stoffet. Man har likevel lagt seg på en bred tolkning av læreplanen. For eksempel inkluderes arealsetningen samt relasjonen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ i det korte trigonometriavsnittet. For nesten alle påstander gjennomføres bevis; to i tilfellet Pytagoras´ læresetning. Når det gjelder det nye læreplanmålet om kjeglesnitt er den brede tolkningen av læreplanen spesielt påfallende, i hvert fall matematisk sett. Her presenteres refleksjonsegenskapene til alle tre typer kjeglesnitt og begrepet eksentrisitet innføres (også for hyperbelen!). Man har valgt å vektlegge de matematiske aspektene ved kjeglesnittene. Således ofres deres «rolle for utviklingen av vårt verdensbilde» så å si ingen plass. Av praktiske anvendelser er det heller ikke for mange.

Mål 5: Sannsynlighetsregning

I dette kapitlet går man rett på sak. Vi introduseres raskt for begrepet sannsynlighetsmodell. I den uniforme modellen blir sannsynlighet definert som antall gunstige utfall dividert på antall mulige utfall, mens i forbindelse med ikke-uniforme modeller blir empirisk sannsynlighet, altså relativ frekvens i det lange løp, brukt som definisjon. Sammenhengen mellom disse er forsøkt illustrert gjennom et eksempel med simulering av terningkast på lommeregner. Vi legger merke til en utstrakt bruk av matematisk notasjon gjennom hele kapitlet. Alle delmålene er dekket. Begrepene uavhengighet og betinget sannsynlighet illustreres gjennom eksempel. Disse kunne det kanskje vært flere av i disse avsnittene. Uavhengighet er for øvrig tidligere i kapitlet feilaktig brukt om hendelser som ikke har noe felles utfall. Addisjonssetningen er utledet ved bruk av venndiagram, men dette er merket tilvalgsstoff. I dette kapitlet er det relativt sett færre oppgaver enn i de andre kapitlene. En del av oppgavene vil nok falle vanskelig. Ingen er utradisjonelle av natur, men det er et eksempel på en gruppeoppgave i lærerens ressursperm. Her presenteres også fullstendig løsningsforslag til alle oppgavene i læreboka. Vi får inntrykk av at dette lærestoffet nok krever en del av både lærer og elev.

Mål 6: Geometri II

Målet som omhandler flatefylling bærer mer preg av beregning enn eksperimentering. Konstruksjon av de mangekantene som er kjent fra grunnskolen er ikke tatt med, men det er med gode oppskrifter på tegning av mangekanter. Femkantens geometri er viet et eget avsnitt. Konstruksjonen er forklart. Det er med mye om flatefylling med én type mangekant. Videre vises det hvordan en regner ut vinkelsummen i et hjørne når en fyller flaten med flere typer mangekanter. Ett avsnitt er uforståelig slik det er formulert. Det heter «Mønstre av tre regulære mangekanter», men burde hett «Mønstre der tre regulære mangekanter møtes i hvert hjørne». Språkbruken er feil gjennom nesten hele avsnittet. Videre prøver en å finne fram til regler for når mønstrene ikke går opp selv om kantvinkelsummen blir 360°. På grunn av litt upresis språkbruk er det ikke så lett å få tak i poenget her, men eksemplet er med på å vekke nysgjerrighet, og her kan kanskje elevene eksperimentere seg fram til regelen. Formelen som kan brukes til å kontrollere om tre ulike mangekanter kan danne et hjørne i et mønster avslutter avsnittet. Det er en fin utfordring for interesserte elever å vise at den er riktig.

Avsnittet om det gyldne snitt er preget av en mengde regler. Konstruksjon av gyllent rektangel er tatt med både med utgangspunkt i den korte og den lange siden.

Det er ikke vist noen måte å tegne en arkimedisk spiral på, men en har forklart hvordan spiralformete kurver kan beskrives ved hjelp av polarkoordinater. En har merkelig nok ikke vist i læreboka hvordan dette kan brukes til å tegne spiraler på lommeregneren. I lærerens ressursperm er det imidlertid oppskrift på hvordan en tegner både mangekanter, spiraler og andre kurver på lommeregneren. Stoffet om fraktaler er sentrert rundt fraktaler elevene kan tegne på papir.

Mål 7 og 8: Praktisk bruk av funksjoner og algebra

Briggske logaritmer innføres i forbindelse med at en løser eksponentiallikninger. I teksten for Y-modulen er det forklart hva logaritmer er, men regneregelen som trengs er ikke bevist. Temaet er grundigere behandlet i X-modulen. Her er regneregelen bevist og det er tatt med eksempler på bruk av logaritmiske skalaer. For X-modulen starter datering av historiske funn med halveringstid av radioaktive isotoper. En går videre med formelen som brukes til å beregne hvor mye som er igjen av et radioaktivt stoff etter en gitt tid når halveringstiden er kjent. Fra den går en videre med et eksempel med ^{14}C, og gjør om formelen slik at en beregner tiden som er gått når en har en gitt prosent igjen av det radioaktive stoffet. En prøver på en noe enklere forklaring for Y-modulen. Vi tror imidlertid at likningene som er nødvendig for å finne halveringstiden med den metoden som vises i eksemplet her, vil falle vanskelig for mange av elevene.

Mål 9: Funksjonslære

Både momentan vekst og areal under kurver er kort og konsist behandlet med mer vekt på matematiske sammenhenger enn praktiske eksempler. Det er ingen eksempel i lærebokteksten på hvordan areal under kurver kan tolkes i praktiske situasjoner. Det er heller ikke forklart i læreboka hvordan en kan bruke *lommeregneren* til å beregne momentan vekst og areal under kurver selv om læreplanen sier at eleven skal kunne gjøre det. Oppskrift på arealberegning med lommeregner fins i lærerens ressursperm. Det fins *oppgaver* der elevene skal beregne momentan vekst og areal under kurver med lommeregner, men ingen oppgaver der arealet tolkes som noe annet enn et areal.

Teknologiske verktøy

Når det gjelder bruken av lommeregneren, mener forfatterne av ressurspermen at læreren må gjennomgå denne for klassen. Noe av lommeregnerstoffet fins nettopp i lærerens ressursperm. Læreboka legger opp til at lommeregneren tas i bruk fra starten. Verket utmerker seg ved at lommeregneren brukes til å eksperimentere med funksjoner. På to punkt synes vi at bruken av teknologiske læremidler er for lite framhevet ut fra læreplanens formuleringer: Beregning av momentan vekst og areal under kurver samt eksperimentering i geometri. Stoff som elevene i følge læreplanen må kunne er henvist til lærerens ressursperm. Dette synes vi ikke er en god idé. Det er mange andre ting i denne læreboka som kunne vært flyttet til ressurspermen.

Ingen andre teknologiske verktøy enn lommeregneren er, så vidt vi kan se, nevnt i læreboka eller oppgavesamlingen. I lærerens ressursperm er det en del henvisninger til internettadresser med matematikkstoff og statistiske data.

Læreverket har med mye stoff, mange begrep og bruker mye matematisk notasjon. Det er nok ikke spesielt godt egnet for de svakeste elevene, selv om for eksempel mye av stoffet om funksjoner er tilrettelagt for denne elevgruppen. Vi tror at verket krever en lærer som styrer og forklarer mye av stoffet og er svært bevisst på læreplantolkningen. Selv sterke elever vil ha behov for lærerforklaringer til mange av temaene når de arbeider med denne boka. Får de den hjelpen de trenger kan imidlertid de matematikkinteresserte elevene få mye ut av verket. Lærerveiledningens eksempler på prøver tilrettelagt for egenretting og eksemplene på laborativ matematikk er nyttige pedagogiske tips. Boka ville nok tjent på å få noen ekstra uker før den gikk i trykken. Spesielt gjelder det de nye temaene. Siden vi har lagt vekt på å se på disse temaene, kommer muligens disse manglene sterkere fram enn fortjent i omtalen vår.

I kommende numre av Tangenten vurderes disse læreverkene:
Gyldendal: *Formel og fakta*
Matematikkforlaget: *Arven fra Pytagoras*

(fra side 31)

Konklusjonen er i alle fall at dette er ei bok som heilt sikkert vil vera til god hjelp, og som vil gje inspirasjon og idear til alle som arbeider med matematikk.

Denne boka bør alle ungdomsskular kjøpa inn til lærarbiblioteket. Men eg trur – og håpar – at mange matematikklærarar går til bokhandlaren og skaffar seg boka sjølve.

Boka kostar 355 kr, men det er ho verd. All honnør og takk til Gunnar Nordberg!

Landslaget for matematikk i skolen

Adresse:
Landslaget for matematikk i skolen
Boks 2919, Landås
N-5825 Bergen
E-post: lamis@hib.no
Postgiro: 0819 2039356 Organisasjonsnr: 980 401 103

Det overordnede målet for Landslaget for matematikk i skolen er å heve kvaliteten på matematikkundervisningen i grunnskolen, den videregående skole og på universitet/høyskole.

Landslaget skal stimulere til kontakt og samarbeid mellom lærere på ulike utdanningsnivåer og mellom lærere og andre som er opptatt av matematikk.

Styret består av:
Fra grunnskolens barnetrinn:
Henrik Kirkegaard, Ålesund
Arne Gravanes, Trondheim (styremedlem)

Fra grunnskolens ungdomstrinn:
Johannes Hjelland, Bømlo
Per Egil Toldnes, Trondheim (styremedlem)

Fra videregående skole:
Anne Karin Wallace, Trondheim
Bjørg Johansen, Trondheim (leder)

Fra høyskole/universitet:
Kristian Ranestad, Oslo
Ingvill Holden, Trondheim (styremedlem)

Medlemskontingent for 2001

Skole/institusjon	500,–
Enkeltmedlem	275,–
Husstandsmedlem	125,–
Studenter	200,–

Tangenten inngår i kontingenten (Gjelder ikke husstandsmedlemmer)

Nytt fra styret

Følgende fungerer som LAMIS' kontaktpersoner:

KUF: Bjørg Johansen
Norsk matematikkråd: Henrik Kirkegaard
Fellesrådet for kunstfagene i skolen: Helge Flagstad
Sophus Lie-sentret (leirskolen): Kristian Ranestad, Henrik Kirkegaard og Arne Gravanes
MINERVA-prosjektet (matematikk for jenter): Ingvill Holden
Matematrikkrommet på Fet: Helge Flakstad
Friluftsrådenes landsforbund (uteskolematematikk): Arne Gravanes
Tangenten: Arne Gravanes
LAMIS' internett-sider: Grete Tofteberg

Arbeidsutvalget jobber med å få til en avtale med matematisk institutt i Trondheim om føring av regnskap og ansvar for andre administrative oppgaver. Dersom avtalen blir økonomisk minst like gunstig som avtalen med Caspar i Bergen, vil sekretariatet flyttes. For arbeidsutvalget som er plassert i Trondheim vil dette lette arbeidet betydelig.

LAMIS har forhandlet fram en ny avtale med Tangenten. Denne innebærer at våre utgifter til medlemsbladet reduseres i takt med økning av medlemsmassen. Dersom medlemsmassen øker fra 700 til 1200 vil LAMIS' rabatt på Tangenten øke fra dagens 15 % til 25 % (avtalen fra 2000 innebar 8,5 % prisreduksjon). Styret mener det er realistisk å fordoble medlemsmassen, men for å lykkes er vi avhengig av at alle medlemmer sprer viten om vår eksistens. Fortell om LAMIS til matematikklærer du kjenner, be dem ta kontakt enten via internettsidene, via e-mail eller vår postadresse i Bergen.

Sammenhenger i matematikken

Annie Selle

De små skritts pedagogikk, å finne fram til de små kjedene med forståelse som hekter seg sammen til et hele, det er en kunst. Det krever innsikt og en kunnskapsmengde hos læreren som er minst like stor som den kunnskapen som knyttes til utregninger og problemløsning. Jeg vil bruke begrepet speiling som eksempel. Det må vi arbeide med over år, arbeide oss fra virkeligheten til begrepet, og bruke begrepet til å forstå virkeligheten.

I 1.klasse kan vi leke 'speilleken' i gymnastikktimen. Barna arbeider to og to; de står mot hverandre. Den ene gjør grimaser, løfter bein og armer, vinker, tramper, går bakover, framover. Den andre er 'speilet' som aper etter det den første gjør.

Vi kan lage 'sommerfugler': male våte fargeklatter på den ene siden av et tegnepapir, brette den delen som ikke er malt over det våte feltet og gni hardt på utsiden. Bretter vi arket ut igjen, har vi fått to tilnærmelsesvis like figurer på hver sin side av bretten. En malt kropp og et par følere, så, vips, har vi en sommerfugl. Den kan jo også klippes ut ved å brette den sammen igjen først, og klippe etterpå.

Nå er ikke veien lang til å gå på jakt etter speiling i bokstavene. Gi elevene et lommespeil eller speilograf, og undersøk hvor speilingslinjen går på de bokstavene som som er symmetriske om en linje. Kanskje det finnes mer enn *en* symmetrilinje?

I 2. klasse lager vi mønster med speiling i. Til jul klipper vi juletrær, hjerter, snømenn og stjerner av dobbelt papir, hvor bretten er speilingslinjen. Vi undersøker kroppen. Er det en speilingslinje der? Vi går på undersøkelsestokt på utedagen: Er det speiling i naturen?

I 3. klasse tegner vi med speilograf. Vi tegner et mønster – og et speilmønster. Vi prøver å skrive navnet vårt med en blyant i hver hånd. Navnet som venstrehånd skriver, blir speilvendt.

Lag et mønster på den ene halvparten av geoboardet (pluggbrettet). Bytt med sidemannen, og lag speilbildet med strikk på den andre siden av midtlinjen. Har dere ikke geoboard, så kan et prikkepapir gjøre nytten.

Kunnskapene om speiling er gode å ha

når vi skal lære om varmegrader/kuldegrader. Kunnskapen om speiling hindrer mange i den svært vanlige oppfatningen at *kuldegrader telles fra der den fargede kulen starter, til der den fargede søylen slutter.* Er bakgrunnskunnskapen om speiling sterk nok, ser de fleste poenget med *å telle nedover fra 0° til der vi møter den fargede søylen. 0° er speilingspunktet for gradetallene.*

I 4. klasse har vi bruk for innsikten om speiling når vi skal lære å si hvor mye klokka er 'på gamlemåten': Fem på halv – fem over halv, ti på – ti over osv.

Vi lager de fineste tegninger etter å ha vært ute en blank høstdag og sett at trær og åser speiler seg i sjøen, at båtene har et annet speilingspunkt – men speiler seg like fullt. Vi går på jakt i reproduksjoner som henger på veggene i korridorene: Kunstnerne har brukt kunnskapen om speiling i sine bilder, de også!

Vi lærer om de store tallene, og med dem hører også tidslinjen. Hva er f.Kr.? eller e.Kr.? Erfaringen med speiling er god å ha.

_____

Det neste utviklingssteget knyttet til speiling, er når begrepet kobles til den rette vinkelen: Dersom vi trekker en linje mellom de to punktene som er identiske på hver side av speilingslinjen, står denne linjen vinkelrett på speilingslinjen. De identiske punktene ligger dessuten like langt fra speilingslinjen på hver sin side. Utnytt kunnskapen i kunst- og formingsfaget – og i geometrien.

Vi kobler speiling med kunnskapen om innfallsvinkler og utfallsvinkler.

Denne kunnskapen kan vi utforske i gymnastikktimen når vi spretter ball til hverandre. Vi kan lage periskop eller sladrespeil, vi kan sende solstrålene dit vi vil med et speil.

Til slutt: Å arbeide med speiling, det er moro det!

Matteleirskole – noe for deg?

Da er Fjordane folkehøgskule i Nordfjordeid stedet, med kort avstand til fjord, fjell, innsjø og bre, ligger Norges eneste (?) matteleirskole. LAMIS tar imot dine ønsker for matematikkfaglig innhold og skaffer en «spesialist» på nettopp det emne du og dine elever har lyst på. Eller vi gjennomfører opplegg vi allerede har prøvd ut, opplegg som vektlegger praktisk arbeid, fortrinnsvis utendørs.

Fjorårets deltakere fra Kirkebygen skole i Østfold jobbet med lommeregneren, Pytagoras og puslespillbeviset, geometriske figurer, omkrets og areal. De hadde matematisk rebusløp, bygde flotte bengalske kampdrager av tynne bambusstenger og silkepapir, dekorert etter speilings- og dreiningsprisipp. De bygde skikkelige papirfly, og målte distanse og tid i luften. Tester kvalifiserte til «fly 2000 cm-klubben» eller deltok i «dagens høyeste». Hvordan måler man forresten hvor høyt papirfly flyr? Elevene satte også opp en modell av vårt solsystem i riktig størrelsesforhold.

Leiskolen tilbyr også andre aktiviteter. Like ved ligger et stort hestesenter. Elevene kan få seile/ro i en kopi av et vikingeskip, eller låne kano. Fjorden gir rike muligheter for fiskeinteresserte. En liten busstur unna ligger Briksdalsbreen, med muligheter for brevandring. Om kveldene tenner vi bål i fjæra og koser oss med sang, gitar, leiker og historier, eller et forfriskende kveldsbad.

Mer informasjon om folkehøgskolen: www.fjordane.fhs.no

Tilbud sommeren 2001

I uke 22 eller 23 tar Fjordane folkehøgskule imot grunnskoleklasser for 3–5 dagers leiskoleopphold. Innhold som omtalt over.

Bestill plass innen **1. mars 2001** til
rektor Arne Hagen, Fjordane folkehøgskule
tlf 57860422, fax 57861630, e-post: ffhskule@online.no

eller til

Lamis kontakt: Henrik Kierkegaard
tlf 70150145 (p), 70150808 (a), fax 70150011
e-post: henrikkirkegaard@hotmail.com

For økonomiske betingelser kontakt rektor Arne Hagen.

Elevbok i videregående skole

I et informasjonsskriv SUE/Vg-00-29 datert 08.08.00 åpner eksamenssekretariatet for en prøveordning med bruk av elevbok ved sentralt gitt eksamen i matematikk på grunnkurs i videregående skole. Dette er i første omgang en prøveordning som gjelder for alle elever (ikke privatister) ved eksamen våren 2001. Ut fra de erfaringer en gjør seg vil det senere bli tatt stilling til om tiltaket med elevbok bør følges opp og bli en permanent ordning.

Elevene har erfaringer med bruk av elevbok / regelbok fra grunnskolen der den ble innført med L97. Rammene for grunnskolen er gitt i informasjonsskriv SUE/Gr-99-004, som er et vedlegg til Informasjon SUE/Vg-00-29.

I Rundskriv LS-10-2000 fra Læringssenteret datert 10.11.00, er rammene for bruk av elevboken i videregående skole skissert.

Elevboka er ment å være et pedagogisk tiltak, først og fremst i læringsprosessen for den enkelte elev. Boka skal være elevens egenproduserte bok som skal inneholde oppsummeringer og bearbeidinger av lærestoffet. Den kan inneholde regler, formler, metoder, kommentarer og eksempler på anvendelse. Det er elevene selv som skal ha ansvar for å plukke ut og sette sammen innholdet, og det stilles ikke krav til at boka skal være håndskrevet. Elevene kan plukke ut og sette sammen det de mener er viktig for å forstå matematikken bedre. Siden boka skal være til individuell hjelp er det ikke fra sentralt hold laget mal eller ferdig oppsett for hva som er tillatt å ta med. Siden dette skal være elevenes individuelle bok, er det ikke meningen at læreren skal kontrollere hva som står i boka, eller diktere / lage innholdet i boka. Læreren kan hjelpe og veilede elevene dersom de ber om det. Som lærer kan en jo også presisere overfor elevene at det har liten hensikt å lage størst mulig elevbok. Det er viktigere at det som står i elevboka er gjennomtenkt og systematisert.

På tross av klossete og sein informasjon om elevboka, regner vi med at den blir prøvd ut i de fleste klasser. Lærere oppfordres til å drøfte sammen med klassen sin om en ønsker å videreføre ordningen. Det vil på grunnlag av erfaringer dette året bli avgjort om bruken av elevbok skal bli en permanent ordning i videregående skole.

Bjørg Johansen,
Anne Karin Wallace

Utematte og enheter

Arne Gravanes

Helt fra de aller første skoleår møter elevene ulike enheter i matematikktimene. De skal lære seg å måle, lengder, tid, areal, volum, fart osv, abstrakte enheter som ofte er vanskelig for unger å skjønne. Jeg mener at uteskolen gir unger erfaringer som vil lette forståelsen innen dette matematiske feltet.

Det gjøres mye bra arbeid når enheter skal læres. Elevene får prøve å beskrive avstand, tid osv. med egne ord, egne enheter. Museskritt og «ettusenogen-ettusenogto» er det heldigvis mye av i norske mattetimer. Det er også mye gjetting av korte avstander og måling av de samme avstandene. Men etter hvert som elevene blir eldre og enhetene vanskeligere å konkretisere, endres undervisningen.

Kilometeren i 4. klasse

Klassen min hadde jobbet mye med meter, vi hadde laget meterstokker (inndelt i dm og cm), vi hadde gjetta og målt alt som lot seg gjøre både i klasserommet og skolegården. Dessuten hadde vi snakka om at kilometeren den bestod av 1000 meter. Oi, det måtte være langt.

En uteskoledag skulle vi på museum i byen. Starten på dagen var som følger: – Si fra når du tror vi har gått en kilometer. Vi gikk til alle hadde sagt fra der de trodde kilometeren fra skoledøra var.

Den første eleven satte sitt kilometermerke vel 100 meter fra skolen, sistemann etter 970 meter. De fleste ungene gjetta kilometeren til mellom 600 og 800 meter. Mange elever valgte å telle skritt, problemet var dermed både å holde tellingen og ha riktig skrittlengde. Han som var nærmest valgte denne strategien, og det er ganske imponerende at en 9 åring greier å holde tellingen helt opp til 1000 (prøv selv) og samtidig ha en gjennomsnittlig skrittlengde som avviker bare 3 cm fra den har prøver.

Svaret på at erfaringer setter fokus og gir læring fikk vi på uteskoledagene i ukene etter. Hver gang vi gikk et stykke ville ungene gjette på hvor langt vi hadde gått. Vi kunne jo ikke måle nøyaktige avstander hver tur, men jeg er helt sikker på at tipsene i ukene etter var mye nærmere enn den første gangen.

Kubikkmeteren i 4. klasse

Vi hadde jobba mye med liter, sølt vann og hatt det ganske gøy. Dette er mye morsommere å gjøre utendørs, da trenger ingen bekymre seg for

og ikke minst tørke opp spilt vann. Vi hadde lagd kubikk-desimeterterninger på sløyden og kontrollert at de romma nøyaktig en liter sand. Og vi hadde tegna og bygd modeller som viser at det trengs 1000 slike for å fylle en kubikkmeter.

Så kom snøen, ja, den lava ned, kram og fin. Jeg samla sammen det som fantes av spader og snøskuffer på skolen og gikk ut for å bygge snø-kubikkmeterterninger. Ungene syns ideen var god og hver firergruppe ville gjerne lage en terning. Greit for meg, så vi satte i gang.

Etter 10–15 minutter viste ivrige grupper fram hvor langt de hadde kommet, hele bunnen var fylt og de hadde allerede kommet et par desimeter opp. Dette var ingen sak. Etter trekvarters tid var iveren synkende, det gikk jo så seint, de hadde mye igjen enda. Når 1 og 1/2-times økta var over hadde hele klassen slått seg sammen og fått ferdig en terning. Svette stolte 10-åringer hadde virkelig fått en erfaring med at en kubikkmeter er mye, faktisk mye mer en det ser ut til.

Fart i 7. klasse

Når elevene møter sammensatte enheter, er de kommet så langt opp i skolesystemet at konkretisering alt for sjelden brukes. Jeg tok med en 7. klasse ned til veien ved skolen og ba dem studere bilene som kjørte forbi. De skulle anslå hvor mange av bilene som holdt 30 km/t-grensa. Klassen syns at de fleste trafikkantene var lovlydige.

Så gikk vi gang med å finne ut hvordan vi kunne beregne hastigheten til bilene. Etter at ideer som å låne laser fra politiet var forkastet, satt vi igjen med å måle tida bilene brukte på 100 meter og regne det om. Så lot jeg elever sitte på med min bil og kontrollere hastigheten jeg holdt, mens andre tok tid. Det viste seg at vi hadde regna rett.

Når vi dagen etter satte oss ned og studerte trafikken, syns klassen fortsatt at bilen holdt fartsgrensa. Vi tok fram stoppeklokkene og resultatet forbløffet de fleste. Bilene holdt mellom 40 og 50 km/t.

Dette prosjektet ga elevene erfaringer om fart, de fikk motivasjon til å regne om fra m/s til km/t og de fikk se hvor lite lovlydige trafikkantene er. Henvendelsen til politiet førte også til noen flere kontroller ved skolen.

Enheter av denne størrelsesorden er det umulig å konkretisere inne i klasserommet. Jeg tror at konkretisering er viktig langt opp i klassene. Når nye enheter innføres må elevene få et forhold til dem, de må ta på, føle på, gjøre, kjenne, observere. Til dette egner uteskolen seg. Oppfordringen er derfor åpenbar, la elevene dine oppleve matematikk ute (også inne), da vi den teoretiske/abstrakte jobbingen bli mye mer fundert på grunnleggende forståelse. Og en grunnregel for matematikklærere er vel at elevene ikke skal gjør ting de ikke forstår …?

Mangfold i matematikken

LAMIS Sommerkurs 2001

For tredje gang inviterer Landslaget for matematikk i skolen til sommerkurs. Etter det store oppbudet av norske lærere på Nordisk Matematikklærerkonferanse i Island sist sommer, har vi sterkt håp om at riktig mange også vil finne veien til Kristiansand 7.–10. august.

Etter sommerkurs i Trondheim og på Nesna inviterer vi nå til samling i sør. Selv om vi har fått en unormal porsjon regn det siste halve året, tør vi håpe at Sørlandet skal vise seg fra sin solrike side i august. Det pleier å syde av liv her nede på den tiden av året, så vi bør kunne kombinere fag og ferie på en behagelig måte.

Tema for kurset

Sommerkursets tema er *Mangfold i matematikken*. Fagplanene vi som lærere arbeider etter peker både på at skolematematikken skal gjenspeile fagets mange sider, og at det er et rikt mangfold av elever som skal arbeide med faget. Gjennom foredrag og verksteder vil disse utfordringene bli belyst fra ulike ståsted gjennom bidrag fra forelesere, verkstedholdere og andre kursdeltakere.

Om programmet

Programmet er lagt opp slik at kursdeltakerne kan reise til Kristiansand og bli innkvartert før åpningen tirsdag 7.8. klokken 15.00. Kurset avsluttes med festmiddag om kvelden fredag 10.8.

Ekskursjoner og sosialt program

Etter åpningsforedraget tirsdag ettermiddag drar vi til kystkultursenteret i de gamle saltbuene på Bragdøya i Byfjorden. Her serveres et måltid i en særegen atmosfære.

Onsdag får vi en omvisning på HiA's nye campus. Hvis ikke været slår seg vrangt, avslutter vi med en grillmiddag ute.

En kveld på byen med anbefalt samlingssted blir vårt tilbud for torsdagen.

Frister det med festmiddag i et miljø bygd opp av engelske lorder? Det koster vi på oss som en verdig avslutning på kurset. «Løa» ved Vigeland hovedgård har ry på seg som et selskapslokale med stil og atmosfære.

Under hele oppholdet legges det opp til pauser og felles måltider der kursdeltakerne får anledning til å møtes og dele erfaringer. Ofte er det disse uformelle møtene som gjør kursutbyttet komplett for den enkelte.

Foredrag

Foredragsholderne tar opp spørsmål knyttet til ulike nivå i utdanningssystemet og det mangfold av oppgaver og utfordringer lærerne står overfor i sin undervisning. En nærmere omtale av foredragsholderne og deres tema finner du på LAMIS' hjemmeside.

Verkstedene

spiller en sentral rolle på sommerkursene. Kursdeltakerne får anledning til å møtes i mindre grupper der de i større grad kan aktiviseres med diskusjoner og praktisk arbeid. Sammen med påmeldingen ber vi deg melde fra om du kan lede et verksted. Det kan enten være et tema du innleder til diskusjon om eller et opplegg du har god erfaring med og som du ønsker å dele med andre.

I løpet av året har en del medlemmer henvendt seg til LAMIS sentralt med spørsmål om hjelp til å komme i kontakt med skoler og kolleger som har arbeidet med spørsmål de selv er opptatt av, f.eks. differensiering. Spørsmålene har kommet fra lærere på alt fra barnetrinn til videregående skole. Et vektsted er en god møteplass som bare venter på en initiativtaker.

Påmelding og videre informasjon

Påmelding kan skje ved å sende inn kopi av påmeldingsblanketten på disse sidene eller ved å benytte blanketten på LAMIS' hjemmeside: http://www.lamis.no
Denne siden vil bli oppdatert etter hver. Før sommerferien vil de som har meldt seg på få tilsendt mer informasjon om kurset og kursstedet.

Kursavgift

Vi har søkt Statens Lærerkurs om støtte til kurset, men har dessverre ennå ikke fått svar på søknaden. Det sosiale programmet kan bli endret om bevilgningen avviker vesentlig fra det vi har fått til de to andre sommerkursene. Vi har som mål å holde en lav kursavgift. Informasjon om avgiften og pris på overnatting vil bli lagt ut på internettsiden.

Reisestøtte kan tilbys hvis vi får tilskudd fra Statens Lærerkurs. Vi oppfordrer hver enkelt til å søke om støtte til kurset og reisen fra sine arbeidssteder, hjemkommuner og fylker.

Påmeldingsblankett LAMIS sommerkurs 2001

☐ *Jeg ønsker å delta på kurset 7.–10. august 2001 i Kristiansand*

☐ *Jeg er interessert i å lede verksted på kurset, og legger ved brev om det*

Navn ______________________________

Skole ______________________________

Adresse ______________________________

____

____

e-post ______________________________

Påmelding sendes innen 30. april til

Olav Nygaard,
Høgskolen i Agder,
Serviceboks 422,
4604 Kristiansand

Internett-adresser

The Math Forum – Engelskspråklig idebank

http://www.forum.swarthmore.edu/

Denne siden er en grei plass å starte dersom du er ute etter problemløsningsoppgaver som gir utfordringer til ungene. Via åpningssida havnet jeg på elevsidene med ukentlige problemer. Dette er matematikk fra dagliglivet, problemer som er sammensatte, som krever kreativitet for å finne løsninger og som gir utvidelsesmuligheter. Utfordringen ligger i å få oppgavene oversatt til norsk og norske forhold.

Etter å ha surfet litt fram og tilbake på sidene, stod jeg igjen uten oppgaver for de aller laveste trinnene. Oppgavene er sortert etter alder og de som er tilpasset elementary school (5–11 år) manglet utfordringer som de aller yngste kan klare.

Sidene gir også utallige muligheter til å komme deg videre til andre nettsteder. Du finner egne søkemotorer hvor du kan søke på bestemte matematiske emner, egne diskusjonssider for lærere og gode beskrivelser av ulike internett-ressurser. Det er litt tidkrevende første gang du går inn på sidene, men når du først har blitt kjent med oppbyggingen, vil The Math Forum gi deg god hjelp i undervisningen din.

For videregående skole:

http://www.math.umass.edu/~mconnors/fractal/fractal.html

Denne web-referansen heter «Exploring fractals» og gir en enkel og meget klar innføring i de grunnleggende ideene bak en fraktal som en selvrepeterende geometrisk figur med fraktal dimensjon (ikke et heltall). Dette er et perfekt opplegg til Geometri 2 for grunnkurset i videregående skole, 1Y.

Fra denne siden kommer du videre til en spennende introduksjon til kaos og fraktaler:

http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game/chaos-game.html

Temaet egner seg ypperlig til en «større oppgave» i matematikk.

Teknologi i skolen

http://avdeling.nito.no/teknologi/

Her finn du opplysningar om pilotprosjektet **«Teknologi** og ***Formgiving*»**, starta av Norges Ingeniørorganisasjon – NITO. 19 grunnskular deltar i prosjektet som held fram til 2002.

Prosjektet omfattar fleire fagområde og tek sikte på å vera bindeledd mellom teori og praksis. Elevane får auka kunnskap om teknologi både i dagens samfunn og i historisk perspektiv, dei finn opp eigne produkt med anna med IT som hjelpemiddel.

Ein tur innom desse nettsidene er ikkje berre nyttig for elevar, pedagogar og foreldre, men også for næringslivet og andre som ser behov for å knyta teori og praksis tettare saman.

Læring gir næring!

Sidene har også lenker til andre aktuelle nettsider.