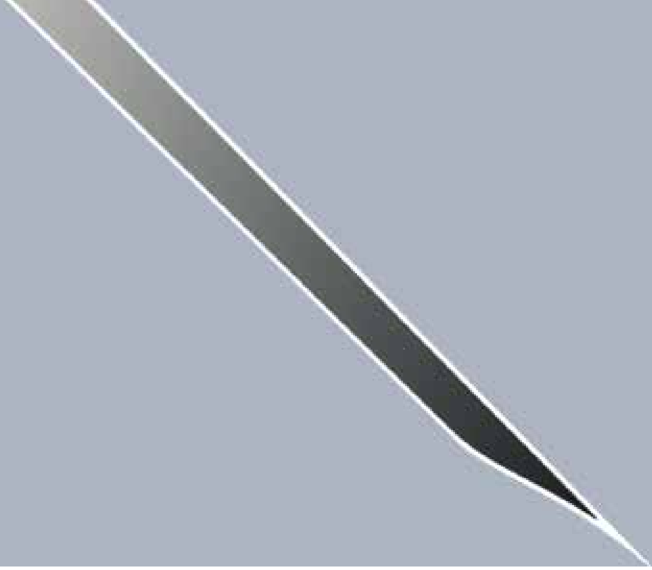


Korden

Nye takter på ungdomstrinnet?

Det er et økende problem i den norske skolen at mange ungdommer ikke fullfører videregående opplæring. Mange dropper ut før de kan få sitt vitnemål. Undersøkelser (Se Stortingsmelding 22 (2010–2012)) viser at problemene ofte starter i ungdomsskolen og at elevene mister motivasjonen der. Der sies det at motivasjonen er lavest i 10. klasse. Derfor lanserer regjeringen nå sin satsning på ungdomstrinnet. Bakgrunnen er Stortingsmelding 22 *Motivasjon-Mestring-Muligheter*. Den sentrale strategien i denne satsningen er *skolebasert kompetanseutvikling*, et konsept der de skolene som ønsker det kan få hjelp og støtte til å utvikle kompetansen til hele lærerstaben i form av kurs på egen skole. Satsningsområdene er klasseledelse, lesing, regning og vurdering.

Tilbakemeldingen fra piloteringen tilsier at store deler av etterutdanningen som skjer under denne paraplyen bør skje for et samlet kollegium ved en skole. For vårt fags vedkommende betyr det at regning i alle fag står i fokus. Samarbeid over faggrensene blir dermed viktigere enn dybde i det enkelte fag i denne satsningen. I Tangenten ser vi absolutt potensialet i en slik tilnærming, samtidig som vi er betenkt. Kan satsningen slik den er planlagt nå virkelig få bukt med de problemene den er ment å imøtegå, nemlig mangel på motivasjon? Det kan nok tenkes at gode idéer til fagovergripende samarbeid kan fenge noen elever. Men, så lenge en ikke får opp motivasjonen også innen hoveddelen av undervisningen i matematikkfaget, vil ikke motivasjonen kunne feste seg og vare over tid. Vi mener derfor det vil være viktig at kompetansehevningen også må inkludere fordypning innen selve faget matematikk. De institusjonene som kommer til å tilby den etterutdanningen som skolene og kommunene etterspør vil forhåpentligvis strukturere sine tilbud slik at også de enkelte faglærerne får utvikle sine egne fag slik at de kan inspirere og motivere sine matematikkelever.

En annen side ved satsningen vekker også bekymring. Det sies at den skal videreføre NyGiv-tenkningen. NyGiv er utviklet for elever som sliter i ungdomsskolen og som står i fare for ikke å klare matematikkfaget i videregående skole. En generell satsning på hele trinnet vil etter vår mening kreve at man også har en plan for de som er flinke og trives i faget. Det som hittil er kommet på denne fronten er deler av den «Virtuelle matematikkskolen» utviklet av IKT-senteret. Signalet som gis, at elever som er sterke i faget kan få et digitalt tilbud og ikke trenger noe lærerstøtte for sin utvikling, er ikke bra. Gode lærere er avgjørende for utviklingen til alle elever!

Christoph Kirfel

Rikke Teglskov

GeoGebra allerede i indskolingen?

Når elever i matematikundervisningen skal tilegne sig problemløsningsstrategier, de skal kunne bruge i forskellige situationer, er det i min erfaring et vigtigt parameter, at eleverne så tidligt som muligt i deres matematikforløb møder strategierne for at kunne blive fortrolige med dem.

Derfor mener jeg, at det er for sent, hvis eleverne først møder dynamisk geometri fx i form af programmet GeoGebra i udskolingen. De skal i mine øjne lære at bruge programmet allerede i indskolingen, og deres fortrolighed med at bruge programmet skal herefter videreudvikles i resten af skoleforløbet. Min hensigt med denne artikel er at give inspiration til, hvordan man kan bruge GeoGebra i indskolingen, samt lægge kimen til nogle didaktiske overvejelser, som kan have indflydelse på den tilgang, man vælger at have til matematikken i GeoGebra. Da jeg ikke på forhånd ved, om læseren af artiklen er øvet eller begynder i brugen af GeoGebra, bliver mine beskrivelser nogle gange tekniske i håbet om at hjælpe begynderen i GeoGebra videre.

Jeg har sammen med min mand Bo, som også er matematiklærer, prøvet nogle forløb af i en 2. klasse. Egentlig ville vi have været i gang allerede i 1. klasse, men forskellige omstændigheder gjorde, at vi først fik startet op i efteråret i 2. klasse. I denne artikel vil jeg bringe nogle eksempler og erfaringer fra forløbet, og forhåbentlig giver det andre lysten til at kaste sig ud i at bruge programmet allerede i indskolingen.

Rikke Teglskov
University College Lillebælt
rstk@ucl.dk

Teknikken og tålmodigheden

Eleverne skal være fortrolige med at kunne logge på computere og tilgå hjemmesider, og det var denne 2. klasse i høj grad. Men rent praktisk går der nogle gange 10-15 min. fra den første elev har logget ind og er klar, til den sidste elev også når dertil. Det kan man organisere sig ud af, ved at have nogle regn-selv-øvelser klar til eleverne, som de går i gang med, indtil alle er klar, hvis man har brug for at vise noget fælles. Det kunne være rull-og-regn plusstykker/minusstykker/gangestykker eller lignende. med terninger, en bestemt hjemmeside med træningsopgaver som fx www.emat.dk eller lignende. Det minimerer den del af det kaos og den larm, der nogle gange kan opstå, når elever i den alder og med vidt forskellige computerkompetencer skal logge på computere. Endnu vigtigere sætter det ikke elevernes tålmodighed over for hinanden på prøve.

Fortrolighed med programmet

Eleverne skal lære GeoGebra at kende. Man kan bruge GeoGebraPrim som er en forsimplet udgave af GeoGebra målrettet det engelske Primary School (barneskole til 6. klasse ca.) eller man kan bruge den fulde udgave af programmet. Eleverne skal igennem samme proces som man selv har været igennem som lærer. De skal fx lære at bruge ikoner, gøre sig til mus/pil for at kunne flytte på ting, kunne zoome ind og ud osv., og de vil lave de samme begynderfejl, som man selv har gjort. Man kan skelne mellem to typer af formål, når elever arbejder med GeoGebra.

1. Skal eleverne opnå fortrolighed med funktionaliteter i GeoGebra (udvikle hjælpemiddelkompetencen)?
2. Skal eleverne erkende noget matematisk ved at bruge GeoGebra (udvikle andre matematiske kompetencer og matematiske emner)?

I opstarten mener jeg, det er vigtigt, at man skelner mellem de to typer af formål, når man planlægger de øvelser, eleverne skal lave i GeoGebra. Ellers risikerer man, at eleverne ikke får det optimale udbytte af undervisningssituationen. Jeg vil i det følgende give eksempler på to øvelser med forskelligt fokus på begge typer af mål. Det betyder dog ikke, at man udelukkende arbejder med et mål af gangen, men det har indflydelse på den måde man vinkler de opgaver, eleverne skal løse ved at bruge GeoGebra. Desuden skal man i tilvænningsfasen afstemme sine forventninger og ikke forvente, at alle elever fanger alle de matematiske pointer, mens de lærer de grundlæggende tekniske færdigheder i programmet.

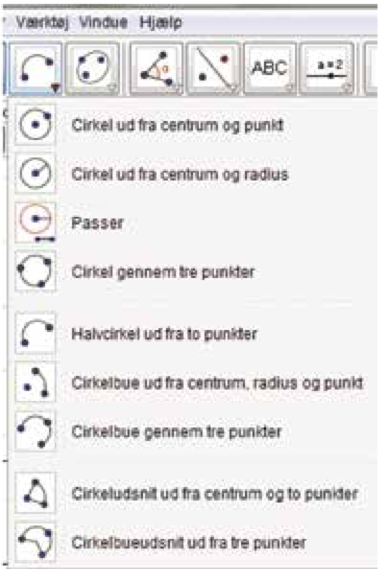
Fortrolig med GeoGebras funktionaliteter

Hvis man ønsker, at eleverne skal blive fortrolige med konstruktionsværktøjerne i GeoGebra og fx lære at bruge linjeværktøjerne, polygonværktøjer og tegne cirkler mm., kunne man give dem denne opgave, som har mange løsninger:

I skal tegne et hus i GeoGebra. På jeres tegning skal der være nogle ting, men I må gerne selv lave andre ting også. Der skal være:

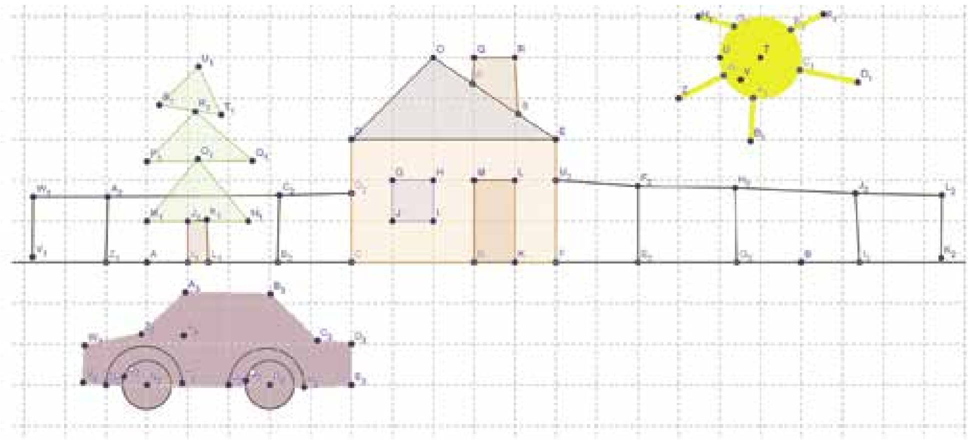
1. Mindst 1 vindue.
2. 1 dør.
3. 1 skorsten.
4. 1 sol.
5. 1 træ

Man kan indledningsvis vise eleverne nogle forskellige ikoner, linjeværktøjet, polygonværktøjet og cirkelværktøjet. Under cirkelværktøjet kan man vise eleverne muligheden for fx at lave halvcirkler mm. Herved lærer de, at man kan folde et ikons menu ud ved at trykke på den lille røde trekant i hjørnet for at få flere valgmuligheder.



Menu som kan foldes ud i GeoGebra.

Man kan desuden udfordre eleverne i forskellige funktionaliteter i GeoGebra undervejs, fx: *kan du farve solen gul? Træet grønt? Huset rødt? Kan du lave dit hus om til et hus med to etager?*



Billede lavet af Noah på 7. år i GeoGebra.

Eleverne i 2. klasse på Højby Skole i Odense arbejder med GeoGebra i matematik

Eksport af filer: En GeoGebra fil kan lægges tilgængelig for eleverne via en læringsportal, eller de eksporteres som hjemmeside/webside ved at gå ind i menupunktet FIL og vælge punktet EKSPORT.

Kan du lave en blomst i haven? En bil ved siden af huset? En regnbue? Hvor mange forskellige geometriske former er der på din tegning? Osv.
For nogle elever kan det være en støtte at have et baggrundsnet og at man evt. lader punkterne blive låst til gitteret. Andre elever kan sagtens løse denne opgave uden baggrundsnet.

Det, jeg med stor glæde observerede i 2. klassen på Højby Skole, var, at eleverne meget hurtigt lod sig inspirere af hinanden, og med en simpel opfordring var de også meget hjælpsomme til at vise en kammerat, hvordan de selv havde fundet ud af noget smart i programmet. Denne vidensdeling kan man med fordel systematisere ved at lave små 'se-dig-omkring'-pauser, hvor eleverne går rundt og ser hinandens tegninger for evt at blive inspireret til nye features på egen tegning.

Der ligger selvfølgelig også elementer af matematik, som eleverne lærer ved at arbejde med den type opgave. Eksempelvis en viden om geometriske former/polygoner mm. Styrken ved denne opgave er, at den udover at have mange løsninger også tillader at eleverne kan arbejde i deres eget tempo. De skal arbejde med programmet og løse en problemstilling uden nødvendigvis at skulle erkende en større matematisk sammenhæng.

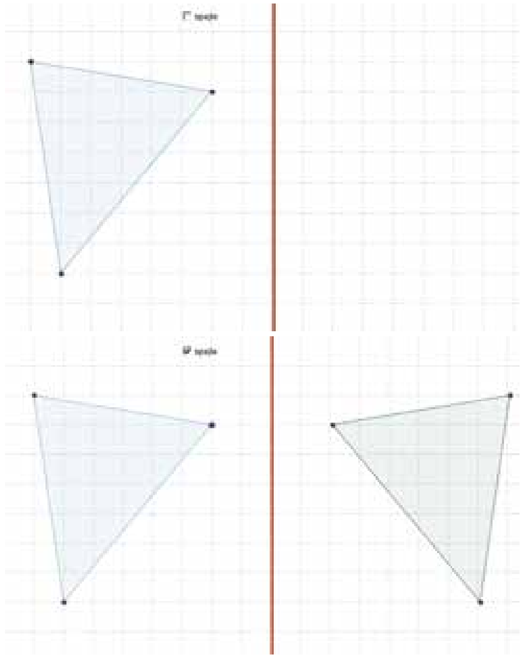
Erfare matematiske sammenhænge

Hvis eleverne på et tidspunkt skal lære at bruge GeoGebra til at udforske matematikken og sætte ord på de erfaringer, de gør sig, kan man sagtens starte i indskolingen. Man kan som lærer med relativt enkle midler lave en GeoGebrafil klar på forhånd, som eleverne kan arbejde videre med i undervisningen.

Et eksempel på en sådan fil kunne omhandle spejling. Eleverne vil på et tidspunkt i indskolingen møde det matematiske begreb spejling. Nogle elever har lettere end andre ved at gennemskue, hvad spejling går ud på, hvis man som lærer har klargjort en fil, hvor eleverne har en figur, en spejlingslinje og muligheden for at spejle figuren ved at sætte flueben i en boks (se ill. til højre).

Eleverne får spejlbilledet at se når de sætter flueben i boksen spejl. Herefter kan man stille denne opgave til eleverne:

- Prøv at trække punkterne i trekantens hjørner forskellige steder hen. Hvad sker der med spejlbilledet?
- Kan du sige noget om, hvordan et spejlbillede er i forhold til det 'rigtige' billede og spejlingslinjen?
- Prøv at trække i punkterne på spejlingslinjen, så linjen bliver lodret eller skrå. Hvad sker der med spejlbilledet?
- Hvad sker der med spejlbilledet, hvis et at trekantens hjørner ligger lige på spejlingslinjen?
- Hvad sker der med spejlbilledet, hvis et af trekantens hjørner ligger på den anden side af spejlingslinjen?



Der er ingen ikoner på den viste applet, så eleverne skal ikke bruge energi på at konstruere noget, men alene forholde sig til den matematik, der er på spil. Det gør, at alle kan arbejde samtidig uden at skulle hægtes af pga at det tekniske i at få konstrueret dette eller hint i GeoGebra driller dem. Her kommer vi til nogle af de vigtigste fordele ved netop at bruge GeoGebra til opgaver som denne – at eleverne ikke bremses af at skulle tegne og måske tegner upræcist. At eleverne meget hurtigt kan generere en masse eksempler, som de kan udtale sig på baggrund af.

Samtidig med, at eleverne lærer om spejling, arbejder de dog også her med funktionaliteter i GeoGebra fx ved at trække rundt på objekter i tegnefladen. For mange elever vil man hurtigt kunne udfordre dem til selv at udføre spejlinger ved at stille en opgave efterfølgende: *kan du selv lave en figur med mindst 3 punkter, som du bagefter spejler i en spejlingslinje?*

GeoGebra rummer også muligheden for, at man kan programmere og fx få programmet til at generere vilkårlige figurer efter forskellige præmisser. Er det et område, man vælger at sætte sig ind i, åbner der sig for alvor nogle muligheder for at designe og tilpasse dynamiske materialer til undervisningen, som rammer præcis det faglige område, man har fokus på. På billedet på næste side ses en dreng og to piger i 2. a, som er ved at undersøge, om to trekanter er såkaldte 'zoom-figurer' dvs. ligedannede.

Fra bunden eller med fælles udgangspunkt?

På sigt skal eleverne blive så fortrolige med programmet, at de kan udføre fx spejlingsoperationer o.lign. på egen hånd, men selv for udskolingselever kan det i nogle tilfælde være hensigtsmæssigt at eleverne arbejder videre på en fil som læreren har forberedt, eller som andre

Appletten genererer hele tiden to forskellige trekanter som nogle gange er ligedannede, og andre gange ikke er. Eleverne kan trække den lille trekant ind i den store trekant og undersøge, om fx vinklerne er ens mv.

elever har forberedt for at have fokus på noget bestemt inden for matematikken.

De to typer af mål, som jeg indledningsvis beskrev, kan på sigt godt kombineres sådan at eleverne både udvider deres fortrolighed med GeoGebra samtidig med, at de erfarer/erkender nogle matematiske sammenhænge, men der er stor forskel på det tempo undervisningen kan skride frem med, hvis man vælger at eleverne konsekvent skal konstruere alting fra grunden. Det samme gør sig gældende på de kurser i GeoGebra jeg er med til at holde for voksne. Voksne har ikke samme arbejdshastighed i GeoGebra og det samme gælder for elever uanset deres alder. Derfor er det vigtigt at overveje, om det man ønsker at eleverne skal arbejde med kræver, at de kan følges nogenlunde ad, for i fællesskab at kunne italesætte det matematiske indhold, eller om de kan arbejde i forskellige tempi. Den erfaring, vi gjorde os i 2. a, var, at det er vigtigt, at man omhyggeligt udvælger de gode opgavetyper til at starte fra bunden, hvor arbejdstempoet for den enkelte ikke betyder noget, som det fx gør sig gældende i 'tegn et hus' opgaven, jeg beskrev i begyndelsen af artiklen. En fil med fælles udgangspunkt kan have en tilpasset værktøjslinje, men den kan også sagtens have den fulde værktøjslinje og så rumme nogle elementer i tegneblokken, som eleverne skal arbejde videre med eller gøre noget med i forhold til en given matematisk problemstilling fx spejle, undersøge areal, længde, omkreds mm.

Inspiration til at du selv kan komme godt i gang

Jeg har netop holdt kursus for lærere om at bruge GeoGebra i indskolingen, og noget af det, som appellerede meget til deltagerne på kurset var netop muligheden for at tilberede filer med et bestemt indhold. Eller muligheden for at man kan tilpasse værktøjslinjen, så den ikke har så mange forskellige valgmuligheder. Jeg kan godt forstå, hvis nogle lærere måske har afholdt sig fra at tage hul på at bruge GeoGebra pga. det kaos man har kunnet se for sig, hvis eleverne skal følges ad, og man skal forklare tingene trin for trin, hvis eleverne starter fra bunden hver gang.

Til det pågældende kursus havde Bo og jeg udviklet et website tænkt som en idébank med faglige områder, man kan bruge GeoGebra til i indskolingen. Sitet ligger frit tilgængeligt og kan findes her: https://sites.google.com/site/geogebraiskolen/. Sitet rummer en masse appletter som kan bruges direkte, som de er i undervisningen, man skal blot klikke på billederne af de forskellige appletter for at komme til dem. Læserne af denne artikel skal være meget velkomne til at bruge det på sitet, som måtte appellere til jer. Der er inspiration til forskellige faglige områder på sitet, herunder ses i korte træk, hvilke områder vi har lagt på. For hvert område forsøger vi at opstille, hvilke faglige mål der arbejdes med, og hvilke teknikker i GeoGebra der arbejdes med.

Faglige områder fra inspirationssitet
Geometriske figurer (Figurjagt)
Mønstre
Spejling og symmetri
Forstørre og formindske (Zoom-figurer)
Omkreds og areal
Regn på tallinjer

Hjælpemiddelkompetence også for elever med faglige udfordringer

Eleverne skal udvikle deres hjælpemiddelkompetence gennem hele skoleforløbet. Det at kunne bruge GeoGebra er bestemt en del af denne hjælpemiddelkompetence. Det er med største fornøjelse, at jeg oplever, hvordan frusterede skoleelever i en 8. klasse, som fortvivles over at de ikke kan tegne præcist med blyant på papiret, eller ikke kan være med i løsningen af et problem, fordi de matematisk er udfordret, pludselig ved hjælp af GeoGebra kan få vendt denne frustration til at kunne være med om det centrale indhold i matematikken, fordi de mestrer hjælpemidlet. Et par gange har de spurgt mig: *'Jamen er det ikke snyd Rikke?'*. Nu siger de: *'Det gad jeg godt have kunnet for 5 år siden!'* Jeg har lige oplevet en hel 8. klasse med største lethed overbevise sig selv om, hvorfor Pythagoras' sætning var god nok ved at konstruere retvinklede trekanter og kvadrater på kateter og hypotenuse i GeoGebra. Det, der sker i elever, når de indser nogle sammenhænge er så fantastisk at bevidne. De oplevelser skal ikke kun være elever i udskolingen forundt. Det skal alle elever opleve, i høj grad også de yngste, så de oplever en glæde ved matematik, der kan vokse gennem skoleforløbet.

Mit budskab er, at ikke alene er GeoGebra vidunderligt til at udforske og eksperimentere med om matematikken for såvel de ældste som de yngste elever. Men det er i den grad også et redskab som de elever, der kæmper mest med matematikken, kan have stor støtte af at lære at bruge så tidligt som muligt. Jeg mener, at det er at sammenligne med læse-skrive-støtte-programmer til de elever, som er udfordret med at læse/skrive. Jo tidligere de elever møder læse-skrive-støtte, jo flere muligheder har de for at være med omkring det samme indhold som resten af klassen. GeoGebra er også et matematik-støtte-program som kan støtte eleverne til at opleve og møde matematikken. Men GeoGebra er også meget mere end det.

Jeg håber med denne artikel at have klædt jer lidt på til at tage hul på GeoGebra allerede i indskolingen. Jeg vil meget opfordre til, at man inspirerer sine kolleger og får oparbejdet en fælles vidensbank om gode GeoGebra-eksempler og idéer til brug i indskolingen, og jeg modtager meget gerne input fra jeres praksis, hvis I har lyst til at dele dem med mig.

Jo før vi lærer eleverne bruge programmet, jo mere fortrolige vil de blive op igennem skoleforløbet. Og vigtigere endnu: jo flere muligheder får vi for at lave en undersøgende og eksperimenterende matematikundervisning, hvor eleverne selv er med til at sætte ord på matematiske sammenhænge, og det gælder for alle elever uanset deres faglige niveau.

Ole Enge, Anita Valenta

Varierte representasjoner

Bla i en matematikkbok eller en lærebok for grunnskole, videregående skole eller universitet. Uansett hvilken bok du tar, er det nokså sikkert at boka inneholder mange matematiske symboler og mange ulike typer tegninger (f.eks. tallinje, tallfigurer, geometriske figurer, projeksjoner), tabeller, diagrammer, grafer og regnefortellinger.

Dette mangfoldet i matematisk språk og uttrykk refereres det også til mange steder i LK06. Under beskrivelsen av grunnleggende ferdigheter i matematikk står det at det å uttrykke seg skriftlig i matematikk innebærer at en lager tegninger, figurer, tabeller og diagram, og at en bruker det matematiske symbolspråket.

De forskjellige uttrykksformene i matematikk, som symboler, tegninger, regnefortellinger, konkreter, diagrammer og tabeller, kalles ofte representasjoner. Det å forstå og bruke ulike representasjoner er en viktig del av matematisk kompetanse (se blant annet LK06, Niss og Højgaard Jensen, 2002). Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) påpekte at et viktig tegn på begrepsforståelse i matematikk er at en kan representere et matematisk objekt (for eksempel multiplikasjon eller brøk) på flere ulike måter.

Ole Enge
Høgskolen i Sør-Trøndelag
ole.enge@gmail.com

Anita Valenta
Høgskolen i Sør-Trøndelag
anita.valenta@hist.no

Hva vil det si å representere et matematisk objekt?

La oss se på multiplikasjon med positive hele tall først, for eksempel $3 \cdot 17$. Regnestykket er her gitt i en symbolsk representasjon, og utregningen kan være rent symbolsk der man kan utnytte den distributive egenskapen til multiplikasjon:

$$3 \cdot 17 = 3 \cdot (10 + 7) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = 30 + 21 = 51.$$

Men regnestykket kan også representeres gjennom en regnefortelling: «Det var tre barn som hver fikk 17 kroner. Hvor mye fikk de til sammen?» Man kan tenke seg at først fikk hvert av barna ti kroner slik at det ble 30 kroner til sammen. Så fikk de 7 kroner hver, og totalt ble 21 kroner fordelt i den andre omgangen. Altså var det 30 pluss 21, som gir at de fikk 51 kroner til sammen.

En tredje måte å representere denne oppgaven på kan være å bruke konkreter, for eksempel unifixkuber (figur 1). Man kan ordne tre bunker i ulike farger med 17 kuber i hver bunke og telle hvor mange det er til sammen (ev. ved å lage tierbunker av kubene først).

En fjerde måte å representere regnestykket på

Figur 1

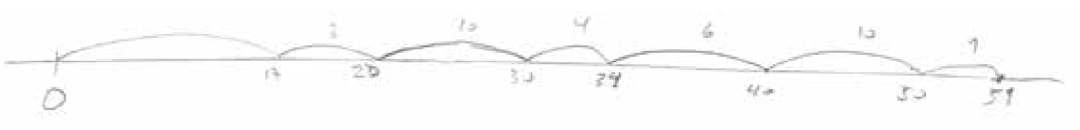
kan være å bruke en åpen tallinje som i figur 2. Her kan man for eksempel hoppe først 17, så 3 til 20, så en tier til 30, og så hoppe 4 til 34. Da har man tatt 17 to ganger. Så kan man ta 6 til 40, en tier til 50 og det er 1 igjen. Til sammen blir det 51.

Hvorfor ulike representasjoner?

Som vi kan se i eksemplet ovenfor, kan bruk av ulike representasjoner gi elevene mulighet til ulike løsningsmetoder. De kan for eksempel bruke den distributive egenskapen i symbolsk representasjon eller stegtelling på en åpen tallinje der de bruker tiere i løsningsstrategien. Et viktig aspekt for matematikklæring er å undersøke likheter og forskjeller mellom metodene, hva som er fordeler og ulemper, og hvordan representasjonene henger sammen. I den symbolske representasjonen brukes det en distributiv egenskap, og den samme egenskapen brukes faktisk også i regnefortellingen. I regnefortellingen kan man se og forstå hvorfor multiplikasjon har den distributive egenskapen, at man kan dele 17 opp i 10 og 7, og deretter multiplisere begge leddene med 3. Hvis vi tenker på $3 \cdot 17$ som en regnefortelling om tre barn som får 17 kroner hver, ser vi at de først kan få 10 og så 7 kroner. Begge gangene må vi multiplisere med 3 for å finne ut hvor mye de fikk til sammen. Om de får 17 kroner hver med én gang, eller om de får 10 først og så 7, endrer ikke totalsummen. Videre kan en også se at det ikke er noe spesielt med 3 og 17, slik at dette vil være en mulig strategi i multiplikasjon generelt (se også Enge og Valenta, 2011).

Alle matematiske begreper og objekter er abstrakte (selv om noen kanskje kan oppleves som mer reelle enn andre). Multiplikasjon er ikke bare symbolet «·» og de symbolske utregningene, det er heller ikke bare en regnefortelling om like store grupper, og det er ikke bare en tegning av like store hopp på tallinjen. Multiplikasjon er et abstrakt matematisk begrep som blir mer og mer abstrakt gjennom skoleårene. Duval (2006) påpeker at abstrakte objekter kun er tilgjengelige *via* sine representasjoner. Ingen av representasjonene *er* objektet, men de gir oss alle noe innsikt i objektet. Ulike representasjoner gir oss gjerne mulighet til å forstå ulike aspekter ved objektet, og de har også forskjellige potensialer for både matematisk arbeid og matematikklæring. Et typisk eksempel er funksjonsbegrepet, der en kan representere en funksjon ved en graf, ved et algebraisk uttrykk eller som en tabell. De tre representasjonene åpner for ulike aspekter ved forståelsen av en funksjon, om hvordan den ene størrelse varierer i forhold til den andre, men ingen av representasjonene er selve funksjonen.

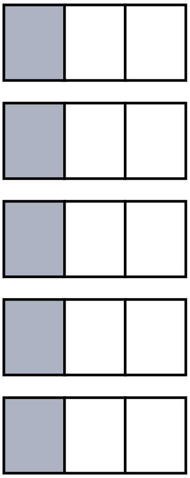
Et annet eksempel er begrepet brøk. Brøk er rasjonale tall definert som a/b hvor a og b er hele tall, der b er ulik 0. Dette er en symbolsk representasjon som er nyttig å bruke for mange aspekter i matematikk. Samtidig er det mange ulike bruksområder for brøk i hverdagssituasjoner og andre representasjoner av brøk som kan være nyttige både for utvikling av brøkfor-



Figur 2

ståelse og for arbeidet med brøk. Det fins ikke én representasjon som fanger alle aspekter ved brøk. For eksempel vil 3/5 kunne representeres som del av et hele:

Men det vil ikke gi mening å representere 5/3 som del av en hel. Da gir det mer mening å tenke på 5/3 som en kvotient, det vil si som resultatet av en divisjon slik definisjonen tilsier, 5 : 3 i dette tilfelle. Skal man bruke en regnefortelling her, kan den ikke være om del–hel, men heller om tre barn som skal dele fem sjokolader likt. Da får hvert barn 5/3 sjokolade, og hele delingen kan representeres i en tegning:



Symbolsk representasjon som i vårt multiplikasjonseksempel åpner for utvikling av effektive regnestrategier gjennom utnyttelsen av den distributive egenskapen, mens regnefortellinger åpner for utvikling av forståelse for den distributive egenskapen i multiplikasjon. Representasjonen med konkreter gir et visuelt bilde der man kan bruke omgruppering og telling, illustrere den distributive egenskapen samt også styrke forståelsen av «unitizing» (det å se en gruppe objekter som ett objekt, for eksempel 10 kuber samlet som én tiergruppe). Tallinjen bærer med seg et annet potensiale igjen – utvidelsen av tall og multiplikasjon til andre typer tall, for eksempel desimaltall. På den tomme tallinjen er det heller ikke noe spesielt med tiere (som i unifixkubene eller tierstaver). Det åpner for betraktning av andre relasjoner mellom tall, for eksempel relasjonen mellom tregangen og seksgangen og for tall mellom 5 og 6. Strategien som er blitt brukt på tallinjen, viser også at gjentatt addisjon er en måte å tenke multiplikasjon med positive hele tall på, og at man ikke alltid trenger å dele opp i tiere og enere.

Det er i samspillet mellom ulike representasjonene og gjennom utnyttelsen av det potensialet de har, at vi får mulighet til å lære matematikk. Flere studier (f.eks. Brizuela og Earnest, 2008) peker på at evnen til å bruke ulike typer representasjoner og evnen til å veksle mellom dem etter behov har stor betydning for utvikling av både begrepsforståelse i matematikk og problemløsningskompetanse. Det å kun bruke én representasjon for et objekt kan lede elevene til å tro at representasjonen *er* objektet. Ensidig vekt på øving av symbolsk manipulasjon i en multiplikasjonsalgoritme kan lede elevene til å forbinde multiplikasjon kun med denne manipulasjonen. Slik ensidighet kan føre til at elevene ikke gjenkjenner multiplikative situasjoner fra virkeligheten. Hvis de ikke husker algoritmen, har de ikke andre representasjoner å ta i bruk som kan hjelpe dem å regne.

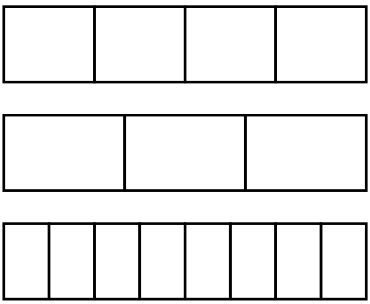
Å lære å bruke flere representasjoner

Det å arbeide med flere representasjoner av et matematisk objekt er en viktig del av det å utvikle begrepsforståelse. Ulike representasjoner brukes veldig ofte i matematikkundervisning, men konkreter, tegninger og regnefortellinger kan fort bli noe en bare gjør uten å tenke over det og uten å oppleve at man forstår noe bedre. Et vanlig eksempel er regnefortellinger som avsluttes med et spørsmål, og som bare brukes til å øve på regning og ikke til å forstå regneoperasjonene bedre. Ofte vil elevene lete etter tall i slike regnefortellinger. De ser etter signalord som «til sammen» eller «færre» for å finne ut hvilken operasjon som skal gjennomføres. Et annet vanlig eksempel er at elevene bruker tallinjen bare fordi læreren har sagt at den skal brukes: Først regner de ut et regnestykke på en annen måte, og så tegner de det inn på tallinjen. Bruk av tallinjen er dermed redusert til et meningsløst ritual, den brukes ikke som en annen representasjon for å styrke begrepsforståelsen.

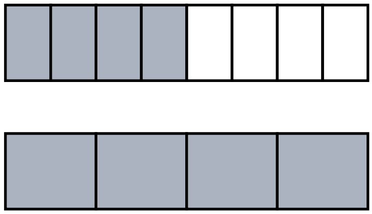
Her skal vi diskutere en del momenter en som lærer bør være bevisst på i arbeid med ulike representasjoner. Vi ser på brøkundervisning som et eksempel.

Lamon (2006) forsket på undervisning av brøk og rasjonale tall, og hun påpeker at det er veldig viktig at elevene møter ulike representasjoner av disse begrepene. Den abstrakte definisjonen og den symbolske notasjonen for brøk må knyttes til flere ulike representasjoner. Ifølge Lamon kan en med fordel vente med å introdusere algoritmer for brøkregning og heller bruke tid på å utvikle forståelse for brøkbegrepet og proporsjonal resonnering.

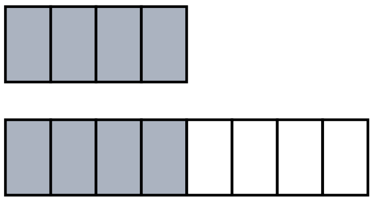
I brøkundervisningen er det ofte vanlig å tilby ferdige representasjoner til elevene, slik som ferdig inndelte brøkbrikker, brøksirkler eller rektangler:



Slike representasjoner kan være gode å ha for å belyse noen deler av brøkbegrepet, men noen ganger kan de føre til at viktige deler av begrepet skjules, og at viktige spørsmål ikke stilles. Skal man bruke slike brøkrektangler til å sammenligne brøkene 4/8 og 4/4, så er *enheten* (det som er en hel) implisitt gitt (se Ball, 1993). Enheten defineres ikke eksplisitt ved å si «dette er en hel» først, men er indirekte definert gjennom spørsmålet og konkretene. Det betyr at elevene ikke trenger å definere en felles enhet for å kunne svare. Brøkrektanglene tvinger så å si elevene til å svare korrekt uten at de nødvendigvis utvikler en dypere forståelse for brøk eller for betydningen av enheten. Sammenligning av brøk med ulike enheter gir ingen mening, men dette fremmes ikke av den gitte representasjonen. I figurene under er det «tydelig» at 4/4 er større enn 4/8:



Ball (1993) gjorde en studie på elever som ikke hadde tilgang til slikt brøkmateriale, og som selv måtte lage representasjoner. En niårig gutt laget denne representasjonen:



Eleven bruker to ulike enheter og beholder delene (1/4 og1/8) som like. Læreren brukte hans forslag til en diskusjon i klassen om hvorvidt størrelsen på rektanglene måtte være lik for at en skulle kunne sammenligne brøker. Elevene fikk dermed mulighet til å diskutere dette viktige aspektet.

Vi har selv opplevd en lignende situasjon i en femteklasse der betydningen av enheten ble aktuell. Elevene arbeider med addisjon av brøk, og en elev skriver i boka $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$. Læreren ser dette, og følgende samtale utspiller seg:

Lærer: Hvis du prøver å forklare meg hva en fjerdedel er?
Elev: En fjerdedel er … det er fire biter og så er én fargelagt (tegner en sirkel og skraverer).
Lærer: Mmm. Hvis du nå skal forklare meg hva en fjerdedel pluss en fjerdedel er?
Elev: Det er … du får åttendedeler.
Lærer: Mmm. Kan du vise meg med en tegning?
Elev: Ja. Da skal vi plusse der (tegner en sirkel til, skraverer en fjerdedel og skriver plusstegnet mellom sirklene). Er lik. Og så kan du ta en firkant, for eksempel. En, to, tre, fire, fem, seks, sju. Åtte! (Deler firkanten i åtte deler.) Og så fargelegger du to av dem … slik de der er fargelagt (peker på sirklene).

Vi ser at det også her savnes en diskusjon og bevissthet om hva som er enheten. I det eleven går fra en symbolsk representasjon til en tegning, blir det uklart om enheten er representert ved *én* sirkel eller ved *to* sirkler. Slike overganger mellom representasjoner er generelt et kritisk moment i matematikklæring og er noe en lærer må være oppmerksom på. For mange elever kan det være vanskelig å se sammenhengen mellom ulike representasjoner av det samme matematiske objektet. Resultatet kan være at de betrakter representasjonene som ulike objekter.

Det er ikke slik at representasjonene eller konkretene kommer med noe magisk matematisk innhold som lett «sees» av elevene, og der alt bare faller på plass. Det å velge passende representasjoner, enten det er konkreter, regnefortellinger eller tegninger, er krevende. Men det som er enda viktigere, er å være oppmerksom på hvordan elevene bruker dem, og hvordan de ulike representasjonene brukes til å drøfte ulike aspekter ved begrepet, sammenligne ulike representasjoner og drøfte fordeler og ulemper i ulike matematiske problemer. Hvis man ikke diskuterer tolkninger og den matematiske bruken av representasjoner, kan det føre til at viktige matematiske aspekter bli gjemt, som i de ferdig inndelte brøkstavene, eller at deres potensiale ikke blir brukt.

I tillegg til slike diskusjoner kan man også gjerne veksle mellom start- og målrepresentasjon. Duval (2006) påpekte at det er veldig vanlig å starte med funksjonsuttrykk (symbolsk representasjon) og be elevene skissere grafen, men det er også mye læring i det å starte med en graf og be elevene lage funksjonsuttrykk. Tilsvarende kan det være mye læring i å be elevene lage regnefortellinger til en gitt symbolsk utregning, og ikke alltid gå i motsatt retning. Videre viser eksemplet med brøk at variasjon i bruk av ulike typer representasjoner er viktig for å få frem ulike aspekter ved et begrep. Brøk er ikke bare pizza som deles likt mellom noen personer.

Variert undervisning er et viktig element for elevenes læring i alle fag. Variasjon i bruk av representasjoner og bevisst bruk av disse til å styrke begrepsforståelsen kan betraktes som utdypning av hva variert matematikkundervisning kan være.

Referanser

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. I T. Carpenter, E. Fennema, R. Putnam, & R. A. Hattrup (red.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (s. 189–219). Hillsdale, NJ: Prentice Hall.

Brizuela, B. M. & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the “best deal” problem. I J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (red.), *Algebra in early grades* (s. 273–301). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1/2), 103–131.

(fortsettes side 46)

Heidi Dahl

Undervisningsforklaringer i multiplikasjon

I matematikk er det mange ganger slik at det bare finnes ett riktig svar på en oppgave, men mange veier frem til svaret. Ofte er de ulike veiene frem mer interessante enn selve svaret. Hva skiller en strategi eller et resonnement fra et annet? Hva er det som gjør at en strategi fungerer i noen situasjoner, men ikke i andre? Ta for eksempel multiplikasjonsstykket $5 \cdot 17$. Hva kan være en mulig hoderegningsstrategi for denne oppgaven? En mulighet er å starte med $5 \cdot 10$ som gir 50, fortsette med $5 \cdot 7$, som gir 35, og så legge sammen til slutt: 50 og 35 gir 85, så da blir $5 \cdot 17 = 85$. En annen mulighet er å runde opp til et enklere stykke, for eksempel $5 \cdot 20$, som gir 100, for så å trekke fra $5 \cdot 3$, som er 15, og igjen ende opp med svaret 85. I bunn og grunn er begge utregningene eksempler på samme strategi. Det er gjort en oppdeling av den bakerste faktoren, 17, i to ledd, til henholdsvis $10 + 7$ og $20 - 3$, og så er hvert av leddene multiplisert med den fremste faktoren i multiplikasjonsstykket, altså 5.

Strategien som er vist over, kan generere flere matematiske spørsmål. Kan tallet 17 deles opp på andre måter enn i $10 + 7$ eller $20 - 3$ og fortsatt gi samme svar? Virker strategien på alle multiplikasjonsstykker? Kan en tilsvarende oppdelingsstrategi benyttes ved andre regneoperasjoner enn multiplikasjon? Svaret på de to første spørsmålene er ja, en slik oppdelingsstrategi virker på alle multiplikasjonsstykker. Derimot er svaret på det andre spørsmålet nei, det er langt fra alle regneoperasjoner som tillater at man deler opp ett av tallene i to ledd for så å gjennomføre den ønskede regneoperasjonen på hvert av leddene. Ved divisjon vil for eksempel $140 : 17$ *ikke* gi samme svar som $140 : 10 + 140 : 7$, og ved addisjon er ikke $5 + 17$ det samme som $(5 + 10) + (5 + 7)$. Hva er det som er så spesielt med multiplikasjon, og som gjør at man uten betenkeligheter kan dele opp det ene tallet og så multiplisere begge leddene med det andre tallet, mens samme strategi gir feil svar ved andre regneoperasjoner?

Matematikklærere må være i stand til å besvare spørsmål som dette på måter som gir mening både for dem selv og for elevene. Å vise med eksempler kan gjøre elevene oppmerksomme på fenomenet, men et talleksempel alene kan aldri overbevise noen *ut over enhver tvil* om at strategien *alltid* vil fungere. Talleksempel er ikke et gyldig matematisk argument for å vise at noe gjelder generelt. Det som ligger til grunn for at oppdelingsstrategien over fungerer ved multiplikasjon, går under betegnelsen *den distributive egenskapen*. Denne kan i symbolform utrykkes som $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ og brukt

Heidi Dahl
Høgskolen i Sør-Trøndelag
heidi.dahl@hist.no

på eksempelet her gir den $5 \cdot 17 = 5 \cdot (10 + 7) = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 7$. Men i hvor stor grad vil en henvisning til den distributive egenskapen oppleves som en meningsfull forklaring for elever som står i startgropen med å utforske multiplikasjon? Egenskapen satt opp på symbolform sier ingenting om *hvorfor* den gir mening ved multiplikasjon, men ikke for eksempel ved divisjon. Er det mulig å finne et argument for den distributive egenskapen som i så stor grad knytter seg til elevenes forståelse for hva multiplikasjon handler om, at risikoen for at de overgeneraliserer egenskapen til å gjelde også ved divisjon, blir liten?

Denne teksten ser på noen kjennetegn på gode forklaringer i matematikk, forklaringer som støtter elevers læring og forståelse av et matematisk konsept. Eksemplene er hentet fra multiplikasjon med positive heltall, og spesielt undersøkes den distributive egenskapen, den kommutative egenskapen og en strategi som omhandler halvering og dobling.

Hva kjennetegner gode undervisningsforklaring i matematikk?

Lærere legger til rette for elevers læring på mange måter, kanskje særlig gjennom valg av oppgaver og aktiviteter de setter elevene til, og gjennom å gi elevene tid og mulighet til å utforske, prøve og feile og prøve på nytt, diskutere strategier og fremgangsmåter, sette opp hypoteser, resonnere og argumentere. Det å gi forklaringer som elevene opplever som meningsfulle på matematiske fenomen og regnestrategier, som bruk av den distributive egenskapen ved multiplikasjon, er bare en liten del av arbeidet, men det er en viktig del. Forskning viser at mange lærere har problemer med å finne på forklaringer som støtter elevers læring samtidig som de er tro mot det komplekse matematiske innholdet som skal formidles (Ball, 1988; Inoue, 2009; Kinach, 2002; Leinhardt 1989; Lo et al., 2004; Thanenheiser, 2009; referert i Charalambous, Hill, &Ball, 2011). Særlig uerfarne lærere tenker i mindre grad igjennom hva slags representasjon som kan være egnet til å forklare et matematisk konsept eller fremgangsmåte, og de introduserer gjerne en ny representasjon samtidig som de formidler nytt fagstoff, i stedet for å benytte en for elevene kjent representasjon. I tillegg er forklaringene gjerne ufullstendige og fokuserer i liten grad på kritiske nøkkelbegrep. Ofte reduseres forklaringene til å *fortelle* elevene hvordan en prosedyre skal gjennomføres. (Borko et al., 1992; Leinhardt, 1989).

Hva som er en god og meningsfull forklaring på et matematisk fenomen, er i stor grad avhengig av elevenes utgangspunkt og forutsetninger. Likevel er det mulig å trekke frem enkelte kvaliteter som synes å være av generell viktighet. Leinhardt definerer *undervisningsforklaringer* (instructional explanations) som måter en lærer kommuniserer fagkunnskap til elevene på hvor formidlingen er eksplisitt rettet mot å støtte elevenes forståelse av det faglige innholdet (Leinhardt, 2001). Det er snakk om verbale forklaringer, men også demonstrasjoner og andre teknikker læreren benytter for systematisk å legge til rette for at elevene skal få erfaringer som bygger forståelse. I matematikk vil en undervisningsforklaring være noe annet eller noe mer enn en instruks om hvordan elevene skal gå frem for å løse et problem. Undervisningsforklaringer har som hensikt å gi elevene utvidet forståelse av et matematisk begrep og skape forståelse for både hvorfor, hvordan og når en fremgangsmåte fungerer. Leinhardt spesifiserer noen kriterier for hva som gjør en undervisingsforklaring god. Den skal blant annet være utvetydig, oppleves som meningsfull for elevene og samtidig respektere fagets egenart (Leinhardt, 2001). I studier gjennomført av Charalambous, Hill og Ball har lærerstudenter i samarbeid med forskerne utarbeidet en liste bestående av åtte kriterier som undervisningsforklaringer i matematikk kan vurderes ut fra, se Tabell 1 (Charalambous et al., 2011).

Også her trekkes det frem at gode undervisningsforklaringer må oppleves som meningsfulle for elevene. Det innebærer blant annet at

	En god matematisk forklaring
1.	er meningsfull og enkel å forstå
2.	definerer nøkkelbegrep og terminologi på en hensiktsmessig måte
3.	bygger på og belyser sentrale matematiske idéer
4.	forklarer tankeprosessen steg for steg uten hopp
5.	gjør overgangen mellom hvert steg tydelig
6.	bruker et språk som er tilpasset elevene
7.	velger egnede eksempler og representasjoner, og viser tydelig sammenhengen mellom de matematiske konseptene og representasjonene
8.	klargjør spørsmålet og viser hvordan svaret fremkommer

Tabell 1. Kriterier for å vurdere en undervisningsforklaring i matematikk (Charalambous, Hill, Ball, 2011, s. 447, forfatterens oversettelse).

de må ta utgangspunkt i den kunnskapen elevene allerede har, og benytte et språk tilpasset elevene. Ofte vil dette tilsi at læreren bruker én eller flere representasjoner i forklaringen, så som en tegning, noen klosser eller liknede. Samtidig fremhever gode undervisningsforklaringer det faglige innholdet. Dette betyr blant annet at de matematiske spørsmålene og de matematiske idéene som er i spill, må fremheves og belyses, ikke kamufleres, gjennom de representasjonene som benyttes. Det er av betydning at sammenhengene mellom de matematiske konseptene som skal undersøkes, og representasjonene som benyttes, vises på en tydelig og eksplisitt måte.

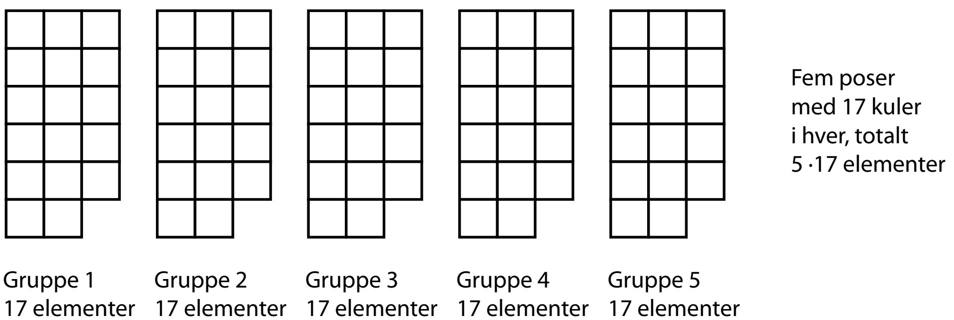
I den påfølgende presentasjonen av eksempler på undervisningsforklaringer i multiplikasjon fokuseres det på følgende tre utvalgte kriterier basert på de kriteriene Charalambous et al. presenterer:

– Undervisningsforklaringen klargjør det matematiske spørsmålet som betraktes.
– Forklaringen benytter egnede eksempler og representasjoner (figurer, regnefortellinger og lignende) hvor spørsmålet klargjøres i representasjonen.
– Stegene i løsningsprosessen er tydeliggjort gjennom bruk av den valgte representasjonen, og viktige matematiske idéer belyses underveis.

Noen eksempler fra multiplikasjon

Den distributive egenskapen

Utgangseksempelet i artikkelen var $5 \cdot 17$, som for eksempel kan regnes ut ved å benytte den distributive egenskapen, altså utregningen $5 \cdot 17 = 5 \cdot (10 + 7) = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 7$. Hva kan fungere som en god undervisningsforklaring på den distributive egenskapen – noe som gjelder ved multiplikasjon, og som er tilpasset elever på mellomtrinnet? Hva slags representasjon kan man velge? En naturlig innfallsvinkel kan være en modell for heltallsmultiplikasjon med *like grupper*. I en slik modell kan $5 \cdot 17$ tenkes



Figur 1. Multiplikasjonsstykket $5 \cdot 17$ representert ved hjelp av en like-grupper-modell for heltallsmultiplikasjon.

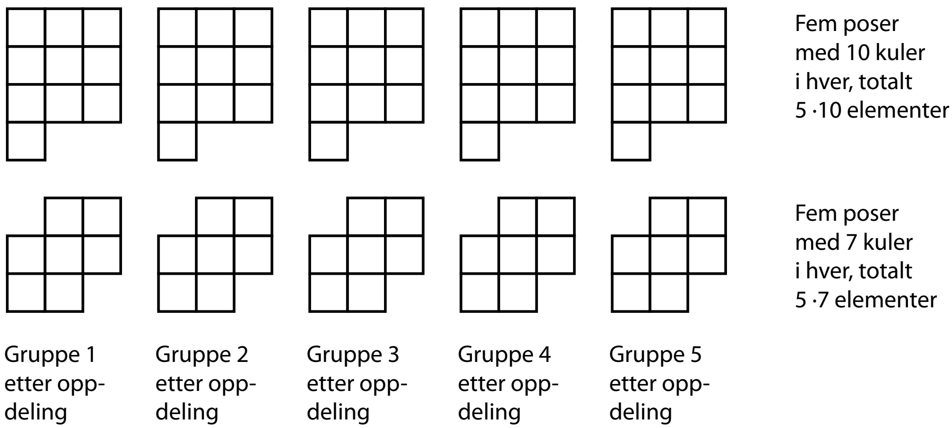
på som det totale antall av «noe», for eksempel klinkekuler, dersom en har fem like store grupper med 17 elementer (her klinkekuler) i hver, se figur 1.

Det matematiske spørsmålet som betraktes, er å argumentere for at $5 \cdot 17$ er det samme som $5 \cdot 10 + 5 \cdot 7$. I den valgte representasjonen med poser med klinkekuler vil det si å vise at fem poser med 17 kuler i hver kan omorganiseres til en situasjon bestående av fem poser med ti kuler i hver og fem poser med sju kuler i hver, uten at man verken mister eller legger til kuler underveis. En måte å få til dette på er å åpne alle de fem posene med sytten klinkekuler, ta ut ti kuler fra hver pose og legge disse over i fem nye poser. De fem gamle posene inneholder nå nøyaktig sju kuler hver. Omorganiseringen har tydelig ikke endret totalantallet klinkekuler, og dermed må $5 \cdot 10 + 5 \cdot 7$ være like mye (mange) som $5 \cdot 17$, se figur 2.

I forklaringen over er det matematiske spørsmålet om distributivitet omformulert fra symboler (hvorfor er $5 \cdot 17 = 5 \cdot (10 + 7) = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 7$?) til en representasjon av multiplikasjon som klinkekuler organisert i like store grupper. Det matematiske spørsmålet er klargjort i modellen, forklaringen sier både hva som er utgangspunktet (fem poser med sytten kuler i hver), og hva som skal til for å kunne konkludere med at likheten er etablert (de samme kulene organisert i fem poser med ti klinkekuler i hver og fem poser med sju klinkekuler i hver). Her er det bare ett steg som er under betraktning på veien frem til etablert likhet: oppdelingen av hver av de like gruppene av størrelse 17 i *to* sett av like grupper av størrelse henholdsvis 10 og 7. Gjennom den valgte representasjonen med poser med klinkekuler kommer den nødvendige sammenhengen mellom størrelsen på de opprinnelige gruppene og størrelsene på de nye gruppene frem ($17 = 10 + 7$), samtidig som omorganiseringen viser hvorfor vi har fem av hver av de nye gruppestørrelsene.

Selv om forklaringen tar utgangspunkt i et konkret talleksempel, er situasjonen som beskrives, så generell at samme modell kan benyttes uansett hvilket multiplikasjonsstykke (med positive heltall) som betraktes, og uansett hvordan man velger å dele opp den ene faktoren i stykket. Det sentrale i forklaringen er hvordan oppdelingen av det ene tallet (her sytten) fremkommer ved at man deler innholdet i alle de like gruppene i to deler på samme måte, noe som gir to nye sett av like grupper, og at en slik oppdeling ikke endrer på totalantallet elementer.

Det kan tenkes andre innfallsvinkler og forklaringer på hvorfor $5 \cdot 17 = 5 \cdot (10 + 7) = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 7$. En forklaring som kun baserer seg på at de



Figur 2. Oppdeling av fem grupper med sytten elementer i hver til fem grupper med ti elementer i hver og fem grupper med syv elementer i hver.

to regnestykkene $5 \cdot 17$ og $5 \cdot 10 + 5 \cdot 7$ gir samme svar (nemlig 85), vil ikke tilfredsstille noen av de tre oppsatte kriteriene for gode undervisningsforklaring, og bygger ikke på elevers forståelse for hva multiplikasjon handler om. Ved å fokusere på svaret på de konkrete matematikkstykkene får man ikke synliggjort den sentrale matematiske idéen om distributivitet, og eksempelet har ikke noen overføringsverdi. Men også forklaringer som tar utgangspunkt i en like-grupper-modell av multiplikasjonsstykkene kan være mangelfulle. En regnefortelling av typen «En frukthandler selger en dag 5 poser med 10 appelsiner i hver og 5 poser med 7 epler i hver. Tilsammen har han nå solgt $5 \cdot 17$ frukt» gir en riktignok en representasjon av både $5 \cdot 10$ og $5 \cdot 7$, men det matematiske spørsmålet er ikke formulert direkte, og forklaring tar ikke for seg det sentrale steget i løsningsprosessen, det vil si oppdelingen (eller sammenslåingen) av de like gruppene, eksplisitt. Det kreves altså en tydeliggjøring av tallet 5 sin rolle i situasjonen, og en tydeliggjøring av sammenhengene mellom 17 og 10 og 7, for at forklaringen skal tilfredsstille kriteriene for en god undervisningsforklaring.

Den kommutative egenskapen

At faktorenes orden i multiplikasjon er likegyldig, slik at $5 \cdot 17$ gir samme svar som $17 \cdot 5$, er så velkjent at det sjelden settes spørsmålstegn ved det. Denne *kommutative egenskapen* kan skrives med symboler som $a \cdot b = b \cdot a$. Men *hvorfor* blir det det samme, og hvordan kan man være sikker på at gjelder for alle multiplikasjonsstykker? Igjen er det snakk om en egenskap som ikke gjelder ved for eksempel divisjon, så hvordan kan man forklare kommutativitet til elever på en måte som både bygger på og videreutvikler deres forståelse for regneoperasjonen multiplikasjon?

I forklaringen på den distributive egenskapen var utgangspunktet en like-grupper-modell for multiplikasjon. Andre modeller av multiplikasjon som kanskje er vel så egnet for å forklare den kommutative egenskap, finnes også, men å se på multiplikasjon som noe som er gjentatt mange ganger, er ofte det mest intuitive. Det kan derfor være ønskelig å få til en forklaring basert på denne modellen. Det som ikke er like intuitivt, er hvordan for eksempel en situasjon med 5 poser med 17 klinkekuler i hver kan omorganiseres til en situasjon med 17 poser med 5 klinkekuler i hver uten at antallet klinkekuler endres. Dette blir formuleringen av det matematiske spørsmålet om hvorfor $5 \cdot 17 = 17 \cdot 5$ i en klinkekulerepresentasjon. Utgangspunktet er altså 5 poser med 17 klinkekuler, totalt $5 \cdot 17$ kuler. Første skritt kan være å åpne posene, ta ut nøyaktig én kule fra hver pose, og plassere disse samlet i en ny pose. Den nye posen inneholder da nøyaktig 5 kuler, én fra hver av de gamle posene, mens de gamle posene på dette tidspunkt inneholder 16 kuler hver. Igjen kan man ta ut én kule fra hver av de fem gamle posene og legge over i en ny pose. Situasjonen vil da være to (nye) poser med 5 kuler i hver og fem (gamle) poser, nå med 15 kuler i hver. Totalantallet kuler vil være det samme. Prosessen med å ta ut én kule fra hver av de gamle posene og legger over i en ny pose kan gjentas til de gamle posene er tomme, altså 17 ganger. Resultatet vil være nøyaktig 17 nye poser som hver inneholder nøyaktig 5 kuler (én fra hver av de gamle posene). Den nye situasjonen er altså en representasjon av $17 \cdot 5$. Siden det ikke på noe tidspunkt har blitt fjernet eller lagt til noen kuler, inneholder sluttsituasjonen akkurat like mange klinkekuler som utgangspunktet, og dermed er $5 \cdot 17 = 17 \cdot 5$.

Forklaringen over kan virke omstendelig, men den klargjør det matematiske spørsmålet (kommutativitet) og bruker en representasjon (poser med klinkekuler) for å vise hvordan man kan komme seg fra en situasjon som representerer $5 \cdot 17$, til en situasjon som representerer $17 \cdot 5$. Forklaringen og representasjonen er ikke direkte avhengig av tallene som er involvert, så den tjener som et generisk eksempel på hvordan likheten $a \cdot b = b \cdot a$ kan etableres generelt, i alle fall for multiplikasjon med positive heltall.

Hvordan kan en ufullstendig forklaring på kommutativitet ta seg ut? En typisk feil man kan gjøre når man forsøker å forklare kommutativitet gjennom bruk av en like-gruppermodell for multiplikasjon, er å lage to helt ulike situasjoner for $5 \cdot 17$ og $17 \cdot 5$ uten å fokusere på selve omorganiseringen fra den ene situasjonen til den andre. Et eksempel kan være «Kari har fem poser med sytten klinkekuler i hver, mens Jon har sytten poser med fem klinkekuler i hver. Da har både Kari og Jon 85 klinkekuler hver». Tanken er nok at elevene gjennom å oppdage at siden Kari og Jon har like mange klinkekuler, så er $5 \cdot 17 = 17 \cdot 5$, og dermed må multiplikasjon være en kommutativ regneoperasjon. Men forklaringen baserer seg bare på en sammenlikning av svarene på de to multiplikasjonsstykkene $5 \cdot 17$ og $17 \cdot 5$, og det sies ingenting om *hvorfor* vi kan endre rekkefølgen. Stegene i en løsningsprosess er ikke bare utydelige, de er helt fraværende. Dermed finnes det ingen garanti for at det ikke er tilfeldig at regnestykkene gir samme svar. Den ønskede konklusjonen om at man kan snu rekkefølgen på faktorene i et multiplikasjonsstykke, kan med andre ord ikke generaliseres. Så lenge fokuset på hvorfor og hvordan man kan omorganisere fra Karis til Jons klinkekulesituasjon, ikke er til stede i resonnementet, forsvinner hele den sentrale matematiske idéen om kommutativitet.

Halvering og dobling

Halvering og dobling er en strategi som i mange tilfeller er effektiv å ty til når man skal multiplisere to tall i hodet. Stilt ovenfor multiplikasjonsstykket $12 \cdot 50$, vil mange automatisk gjøre om til det enklere multiplikasjonsstykket $6 \cdot 100$. Den fremste faktoren er altså halvert fra 12 til 6, samtidig som den bakerst faktoren er doblet fra 50 til 100. Men hvordan kan man vite at de to multiplikasjonsstykkene gir samme svar, uten å kontrollregne? Gjelder strategien generelt ved multiplikasjon? Å sammenlikne med hva som skjer ved andre regneoperasjoner kan være nyttig for å innse at det faktisk er noe som må argumenteres for her. Ved divisjon gjelder for eksempel denne halverings- og doblingsstrategien ikke, der er det derimot slik at når divisor halveres, må også dividenden halveres for at svaret skal være det samme. For eksempel gir $16:4$ samme svar som $8:2$.

En undervisningsforklaring på halverings- og doblingsstrategien som baserer seg på en like-grupper-modell for multiplikasjon, kan igjen ta utgangspunkt i omorganisering av klinkekuler. For eksempelet med $12 \cdot 50 = 6 \cdot 100$ kan $12 \cdot 50$ representeres av 12 poser med 50 klinkekuler i hver. Målet er en situasjon hvor akkurat de samme kulene ligger pakket i 6 poser med 100 kuler i hver. Dette er en klargjøring av det matematiske spørsmålet i den valgte representasjonen. Sluttsituasjonen kan oppnås fra startsituasjonen ved å slå sammen to og to poser. Da blir antall poser halvert fra 12 til 6, og hver pose vil inneholde dobbelt så mange kuler som før, altså en dobling fra 50 til 100. Siden totalantallet kuler holdes konstant gjennom sammenslåingsprosessen, etableres likheten $12 \cdot 50 = 6 \cdot 100$.

Undervisningsforklaringen forholder seg mer til egenskaper ved multiplikasjon enn de tallene som er involvert, og forklaringen kan dermed brukes til å etablere at strategien med halvering og dobling gjelder generelt for multiplikasjon (av positive heltall). Det mer generelle matematisk fenomenet som ligger til grunn her, er den *assosiative egenskapen* ved multiplikasjon, som på symbolform kan utrykkes som $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. I talleksempelet over gir dette $12 \cdot 50 = (6 \cdot 2) \cdot 50 = 6 \cdot (2 \cdot 50) = 6 \cdot 100$ Dette er jo i for seg en ryddig forklaring, men den kan kanskje kjennes litt abstrakt for en matematiker in spe, og den knytter seg i liten grad til det eleven kan om multiplikasjon fra før.

Avslutning

Denne teksten har tatt for seg multiplikasjon av heltall for å eksemplifisere undervisningsforklaringer i matematikk. Dette er mer eller mindre tilfeldig. Tanken er at modellene og representa-

(fortsettes side 50)

Hanne M. Sæter

ENT3R og jenter

I ENT3R deltar nå 2100 elever i alderen 15–17 år, og av disse utgjør jentene 60 prosent. En ville kanskje forventet et flertall av gutter siden guttene er i flertall når de velger realfag på videregående. Et interessant spørsmål er dermed: Hvilken effekt har så ENT3R relatert til om du er gutt eller jente?

Våren 2012 ble det gjennomført en elevundersøkelse i ENT3R, det er denne undersøkelsen som legges til grunn for å si noe om eventuelle kjønnsforskjeller i ENT3R.

Læringsstrategier og kjønn

Resultater fra TIMMS og PISA peker på at jenter har et større behov for drøfting og samtaler som læringsform i matematikkfaget enn guttene har. Jentene trenger diskusjoner, og de trenger å kjenne på nytteverdien av faget. Norsk skole har ikke hatt tradisjon for å sette av tid til slike refleksjoner rundt matematikkfaget, og det spekuleres i om dette kan være én av årsakene til at jentene opplever lavere grad av mestring i realfagene enn guttene (PISA). Vi vet at realfag appellerer sterkere til guttene, og vi ser en kjønnsforskjell når det gjelder valg av de ulike realfagene. Gutter velger «harde» realfag (fysikk

Hanne M. Sæter
NTNU
hanne.sather@ntnu.no

ENT3R er et initiativ fra Kunnskapsdepartementet i samarbeid med NHO, TEKNA, NITO og Matematikksenteret. ENT3R administreres og ledes av RENATEsenteret, Kunnskapsdepartementets nasjonale senter for realfagsrekruttering. ENT3R er et motivasjonsprogram for ungdom hvor studenter fra realfaglige og teknologiske studier er mentorer som gir matematikktrening for elever fra 10. klasse og på videregående nivå. Gjennom ENT3R skal ungdom få et mer positivt forhold til realfagene og motiveres til videre studier i realfag. ENT3R er et rekrutteringstiltak for å få flere elever – spesielt jenter – til å velge realfag. I ENT3R møtes elever og studenter fra universiteter og høgskoler ukentlig for å løse realfaglige problemer.

Ved inngangen til 2013 er det 175 mentorer og 2100 elever som ukentlig deltar på ENT3R. Elevene er i aldersgruppen 15–17 år.

ENT3R skal gi ungdom en mestringsfølelse i matematikkfaget og styrke ungdommens motivasjon og valgkompetanse. Tiltaket har som mål å redusere frafallet i videregående opplæring og sikre tilgang på kvalifiserte søkere til høyere utdanning.

og matematikk), mens jentene velger biologi og geofag (*Jenter og realfag i videregående opplæring*, Birgit Bjørkeng, rapport 3/2011 fra SSB).

For at jenter skal tørre å velge realfag, stiller de høyere krav til egen kompetanse og mestring enn guttene. Det finner vi støtte for når vi ser på karakterene til elever som har valgt realfag på videregående – jentene har i hovedsak bedre karakterer enn guttene. Av de elevene som går på ENT3R, ser vi også at jentene har litt bedre karakter i matematikk enn guttene, samtidig som de har mindre selvtillit i faget. Det er ingen faglig grunn til at jentene ikke skal mestre faget – de har bare ikke troen på det selv!

I ENT3R er det fokus på tid til refleksjoner. Mentorene skal ikke bare vise elevene hvordan de løser en oppgave, men de utfordrer dem også til å komme med egne løsninger. Feil svar inneholder også veldig mye tenkning. Hvorfor blir det feil, og hvorfor blir noe mer riktig? Her er det tatt hensyn til de læringsstrategiene som treffer jentene. Hva er så motivasjonen hos jentene til å delta på ENT3R? Og hvorfor er de her overrepresentert? Trenger de mer hjelp med leksene, kanskje?

Forskjell på ENT3R-jente og ENT3R-gutt?

Vi finner ingen kjønnsforskjell i den sosioøkonomiske bakgrunnen til ENT3R-elevene. De har forholdsvis høyt utdannende foreldre, og foreldre med realfagsbakgrunn er overrepresentert. ENT3R- elevene har gode karakterer fra grunnskolen, hvor jentene har noe høyere karaktersnitt enn guttene. De melder seg på ENT3R fordi de ønsker å lære mer matematikk, de har venner som deltar og de blir inspirert til å melde seg på når studentene presenterer ENT3R på skolen.

Det som er interessant, er at flere jenter enn gutter melder seg på ENT3R fordi de selv mener at de sliter med matematikk og trenger mer hjelp med faget. Dette indikerer nok en gang at jentene har lavere selvtillit i faget. I mentorundersøkelsen svarer da også mentorene at jentene har lavere selvtillit i faget enn guttene. En jente med en firer i matematikk vil si at dette får jeg ikke helt til. En gutt vil si at dette går jo veien.

Bygging av selvtillit i ENT3R

Når vi spør elevene om ENT3R har gitt bedre selvtillit i matematikk, viser undersøkelsen at selvtilliten til jentene har blitt mer positivt påvirket enn hos guttene. Vi spør også om i hvilken grad ENT3R har påvirket deres interesse for matematikk og realfag, og flere jenter enn gutter svarer da at de i svært stor grad har blitt påvirket. Men det er små prosentforskjeller, og det er mer en tendens i undersøkelsen enn signifikante forskjeller. Ved å delta på ENT3R har jentene fått bedre selvtillit, og interessen for realfag har økt.

Karriereveiledning

Ungdom i Norge velger tradisjonelt, og dette virker selvforsterkende på det kjønnssegregerte arbeidsmarkedet. Ungdom velger studier og yrker de har kjennskap til – naturlig nok. Og vi vet at gutter har et større reelt register å velge fra enn hva jentene har. Derfor er det i ENT3R en viktig målsetning å vise fram de karrieremulighetene som finnes i realfag og teknologi. Overraskende nok er det gutter som har fått økt sine kunnskaper om studiemulighetene i realfag og teknologi mest ved å delta på ENT3R. Prosentandelen gutter som kan tenke seg å studere realfag eller teknologi etter videregående, er noe høyere enn hos jentene. Så guttene blir mer inspirert enn jentene til å velge realfag som en studie- eller yrkesvei ved å delta på ENT3R.

Hva nå, ENT3R-jenter?

Det er tidlig å trekke bastante konklusjoner, men en kan kanskje bli fristet til å antyde at jentene deltar på ENT3R for å forbedre sine karakterer i matematikk. «Dette er et nyttig tiltak for meg, jeg deltar her for å få hjelp med leksene og jeg blir faktisk flinkere i faget. Jeg lærer om de karrieremulighetene som finnes i realfagsverdenen, men jeg er fortsatt litt skeptisk …»

Jentene opplever altså å få bedre selvtillit og bedre karakterer i ENT3R (det gjør også guttene), samtidig som interessen for realfag øker. Men å inspirere dem til å velge videre realfagsstudier er fortsatt en utfordring, for økt selvtillit i faget synes kanskje ikke i seg selv å være nok for dem til å velge realfag videre.

Det som likevel er svært tydelig i undersøkelsen, er at der mentorene klarer å bli sterke rollemodeller for jentene, klarer de også å inspirere jentene til å vurdere en karriere i realfag. Det er ikke nok med gode karakterer og informasjon om mulighetene som finnes, jentene trenger også gode rollemodeller som kan vise veien.

Følgende universiteter og høgskoler tilbyr ENT3R i 2012–2013:
Universitetet i Oslo, NTNU, Universitetet i Tromsø, Universitetet i Agder, UMB, Universitetet i Bergen, Universitet i Stavanger, Høgskolen i Ålesund, Høgskolen i Sør-Trøndelag, Høgskolen i Bergen, Høgskolen Stord Haugesund, Høgskolen i Vestfold, Høgskolen i Østfold, Høgskolen i Telemark og Høgskolen i Gjøvik, Høgskolen i Buskerud, Høgskolen i Narvik.

Rune Herheim

Matematikk i vinden

Kan du tenkja deg å fly som Supermann, sveva vektlaus fri som fuglen (nesten) og læra å kontrollera kroppen din når vinden kjem susande mot deg i 200 km/t? På Voss kan du det – sjølv om du har høgdeskrekk eller angst for fallskjerm som ikkje løyser seg ut. Denne vindtunellen er den fyrste og einaste av sitt slag i Norden. Voss Vind heiter selskapet som har fått bygd denne vertikale vindtunellen for å forsterka skibygda Voss sin posisjon som hovudstad for ekstremsport; søkjer ein på ordet «vektlaus» føreslår Google «Voss» som neste ord. Men korleis kan ein fly utan fallskjerm? Og utan å risikera liv og lemmer? Jo, ein kan «fly innomhus», og sjølvsagt er det matematikk i botnen. I denne artikkelen skal me sjå litt på korleis vindtunellen er bygd, korleis han fungerer og kva som er gjort for å redusera energibruken.

Bygget

Bygget består av eit høgbygg på 36 meter som inneheld ein vertikal vindtunell og eit servicebygg på 171 m^2. Vindtunellen er ikkje berre éin tunell. Det er eit tunellsystem med to høge vertikale siloar knytt saman av ein horisontal tunell oppe og nede. Om lag på midten av den

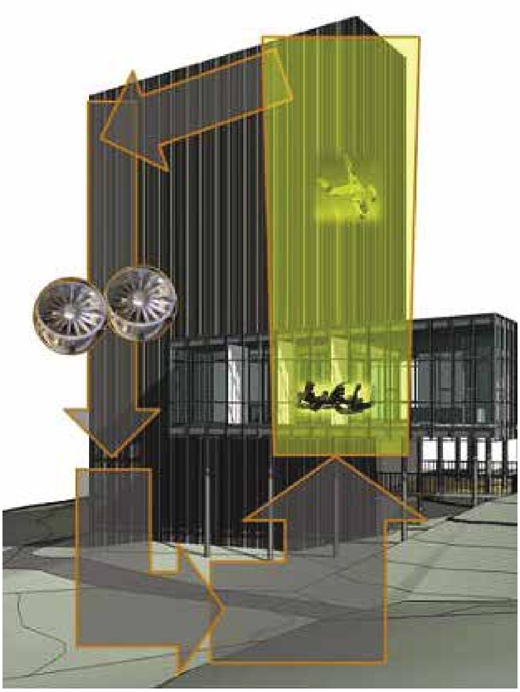
Bilete 1

eine siloen er det fire vifter som blæs lufta nedover. Lufta kjem så opp att den andre tunellen, der flykammeret er. Midt i servicebygget står det eit regulært tolvkanta glaskammer som er den nedste delen av flykammeret. Grunnsystemet for vindtunellen spring ut frå tysk bilindustri og horisontale vindtunellar, og det er forskarar ved Universitetet i Berlin som har gjort utrekningane for konstruksjonen.

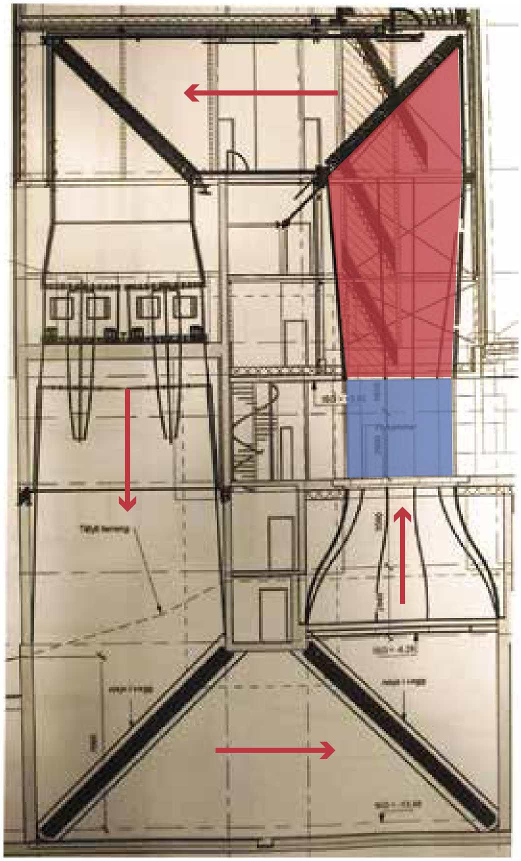
Detaljar i konstruksjonen

Lufta går runde på runde i tunellsystemet: opp gjennom flykammeret (blå og raud boks på bilete 3), vidare til venstre, ned nabosiloen gjennom viftene, til høgre i botnen og oppover til flykammeret att. Glaskammeret (den blå boksen) er 4 meter høgt, og diameteren mellom to motståande sider er 4,27 meter. Heile flykammeret er 13 meter høgt til venstre og heile 17 meter opp til høgre hjørnet. Den raude delen

Rune Herheim
Høgskolen i Bergen
rune.herheim@hib.no



Bilete 2



Bilete 3

av flykammeret er naturleg nok også tolvkanta sidan han er ei fortsetjing av glaskammeret. Men i motsetning til dei loddrette glasplatene utvidar den raude delen seg gradvis oppover slik at vindfarten går raskt ned dess høgre ein kjem. Ein treng med andre ord ikkje uroa seg for å «gå rett i taket». Ein treng heller ikkje uroa seg for å gå gjennom glaset eller i golvet. Dei tolv glasplatene i glaskammeret er trelags, skotsikkert gorillaburglas, og golvet er eit stålvaiernett med «demping».

Rett under glaskammeret er det plassert ei *trakt*. Trakta har ein nøkkelfunksjon i tunellen. Den spesielle s-forma til trakta skal akselerera vindfarten utan å skapa turbulens. Før trakta er tunelltverrsnittet $7{,}65\text{ m} \cdot 7{,}65\text{ m} \approx 58{,}5\text{ m}^2$. Etter trakta, i glaskammeret, gir diameteren på 4,27 meter eit areal på $14{,}6\text{ m}^2$. Tverrsnittet som lufta har å boltra seg på, vert med andre ord redusert til ¼, og for å oppretthalda kontinuiteten på vindstraumen i heile tunellsystemet vert farten firedobla i det innsnevra området, til dømes frå 50 km/t før trakta til 200 km/t i glaskammeret.

Ved å strupa lufta på denne måten oppnår ein det som vert kalla ein venturieffekt. Venturieffekten inneber òg eit trykkfall, slik at ein må ha ei trykksluse for å gå inn og ut når tunellen er i drift.

Eit anna nøkkelaspekt er det som vert kalla *turning vanes*. I kvart hjørne skal lufta svingast til venstre, og det skal skje utan at det oppstår turbulens. For å løysa denne utfordringa er det i kvart hjørne montert ei diagonal «ramme» med vinklar tett-i-tett . Desse vinklane, eller «styrevengene», endrar retninga på lufta med nøyaktig 90 grader. Utan slike venger hadde det vorte kraftig turbulens i kvart hjørne og langt meir ustabil luft i flykammeret.

Når farten i flykammeret er 200 km/t, har ein målt at lufta (ein luftpartikkel som fylgjer

Bilete 4

senterlina i tunellane) brukar fire sekund på éin runde. Viss ein mistar handlelappen medan ein flyr, kan ein fylgja med fire sekund seinare, for då kjem papiret att omtrent på same plassen (det er berre viftene som byter litt plass på luftpartiklane). Ut frå planteikningar kan ein summera distansen for ein luftpartikkel som fylgjer senterlina, til å verta omlag 72,5 meter. Då finn ein snittfarten: v = (72,5/4) m/s ≈ 18,1 m/s ≈ 65 km/t. Dette betyr at ein klarar å laga ein vindfart i flykammeret på heile 200 km/t med ein snittfart i tunellsystemet på berre 65 km/t. Lufta som går nærast vantet, har same fart og brukar såleis kortare tid:

$t = s/v$ = 43,8 m/18,1 m/s ≈ 2,4 sekund

på ein runde, medan lufta langs ytterveggen har lengst veg og brukar lengre tid på ein runde:

$t = s/v$ = 101,35 m/18,1 m/s ≈ 5,6 sekund.

Redusering av energibruk

På grunn av at tunellen er «resirkulerande», sparar ein energi. Eitt av spareaspekta handlar då om oppvarming av luft. Konvensjonelle vindtunellar som hentar luft utanfrå og blæs vinden rett ut etterpå, må, i alle fall mesteparten av året, varma opp lufta før ho kjem til flykammeret. Kontrollpanelet på bilete 4 viser at novembertemperaturen på Voss var 5,5 grader då eg tok biletet. Inne var det derimot 23,9 grader, utan anna oppvarming enn at tunellen var i drift. Energien som drifta produserer, vert i hovudsak til varmeenergi som vert lagra i betongkonstruksjonen.

Eit anna spareaspekt handlar om å bruka minst mogeleg energi for å oppnå høg nok vindfart for flyging. Bilete 4 viser at ein nyttar 80 % av kapasiteten. Maksimal fart er 295 km/t, og då tilsvarar 80 % ein vindfart på omlag 236 km/t (fartsmålaren står i glaskammeret). På grunn av at glaskammeret er partiet med minst tverrsnitt, og at trakta akselererer lufta rett før glaskammeret, klarar ein som før nemnt å oppnå vindfart på 200 km/t i flykammeret med ein snittfart i tunellsystemet på berre 65 km/t. Slikt reduserer energibruken. Energibruken vert òg redusert fordi tunellen berre «er på» når det trengst – ein kan starta og stoppa viftene på sekundar. Heile tunellsystemet er konstruert for å gje så lite luftmotstand som mogeleg. Då er veggane sjølvsagt glatte (luftvegane er kledde med støydempande plater, og heile bygget er konstruert for å redusera vibrasjon og støy), men endå viktigare i så måte er at trakta og styrevengene i hjørna ikkje skapar turbulens. Turbulent luft er langt tyngre å flytta enn stabil luft. Det handlar om å bruka så lite effekt som mogeleg for å flytta ei stor mengd luft.

Tunellen på Voss er per i dag den mest energieffektive i verda og brukar 500–550 kW for den jamne brukar. Dei fire viftene, sjå målarane midt på bilete 4 for rotasjonshastigheit, temperatur og vibrasjon, genererer 300 kW kvar. Viss ein reknar 525 kW i snitt per brukar, så utgjer det 525/1200 = 0,44 = 44 % av maksimal kapasitet. Vidare reknar ein at ein gjest flyr i gjennomsnitt tre minutt, og då vert energibruken 525 kW · (3/60) h ≈ 26 kWh. Med dette grunnlaget kan ein samanlikna innandørsflyging med fallskjermhopping frå fly. I vindtunellen brukar ein ekspert 850 kW per time. Eit standardfly til dette føremålet brukar omlag 159 liter per time, det klarar tre lyft i timen og tek ti passasjerar. Kvart fritt fall krev såleis

$$159 : 3 = 53 \text{ og } 53 : 10 = 5{,}3 \text{ liter bensin.}$$

Ein kan rekna at éin liter bensin tilsvarar 10,1 kWh, og då krev kvart hopp 5,3 · 10,1 kWh = 53,5 kW. Eit fallskjermhopp gjev berre 50 sekund med fritt fall, slik at ein må hoppa 60 : (5/6) = 72 gonger for å få éin time med fritt fall. Energiforbruket vert då: 72 · 53,5 kWh = 3852 kW. No er kanskje ikkje opplevinga i tunellen direkte samanliknbar med det å hoppa ut av eit fly, men ein kan i alle fall seia at i vindtunellen oppnår ein same tid i fritt fall med berre 850/3852 ≈ 0,22 = 22 % av energiforbruket ved tradisjonell flyging.

Flyging

I fallskjermhopping er det personen som flyr mot lufta. I ein vindtunell er det motsett, då kjem lufta mot personen. I familien på tre som eg observerte, flaug barnet med ein fart på 120 km/t, mor 140 km/t og far 160 km/t. Dette har naturleg samanheng med at far er tyngst. Trass i at han har ei større flyflate enn kone og barn, så må det høgre vindfart til for å utlikna tyngdekrafta på far. Då ekspertane trena etterpå var farten oppe i 280 km/t. Dei vekslar kontinuerleg mellom å gjera overflata si lita eller stor og kan såleis susa opp mot toppen av flykammeret, stupa ned att for så å flata ut rett før nettinggolvet. Dei brukar heile kroppen, og med ørsmå vridingar på hender og bein klarar dei å manøvrera seg hit og dit, opp og ned, både framlengs, baklengs og sidelengs. Minst. Og dei flyr fleire samstundes. Ein har mellom anna verdsmeisterskap for firarlag, og då handlar det om formasjonar, rotasjonar og symmetriar.

Når ein skal fly i ein vindtunnel er det to ekstra viktige punkt som gjeld geometrisk utforming og stabil luft. Utan å skapa turbulens skal styrevengene i kvart hjørne endra vindretninga med 90 grader, og trakta rett under flykammeret skal akselerera vindfarten. Dette er ein vinn-vinn-situasjon. Ved å unngå turbulens treng ein som før nemnt mindre energi for å driva lufta rundt, men det er òg luft utan turbulens som gjev best forhold for flyging. Lufta langs yttersvingane brukar over dobbel så lang tid som lufta som tek innersvingane, men det at lufta har lik fart, er nøkkelen til at ein oppnår same stabile flylufta i midten av flykammeret som ute ved kantane.

No var utgangspunktet at me ville fly som Supermann (med éin arm fram). Dette er diverre lettare sagt enn gjort. For å kunna flyta nokolunde kontrollert på luftstraumen må ein ha ei mest mogeleg symmetrisk form. Då treng ein både to armar og to bein. Skal berre eine armen fram må ein kompensera med resten av kroppen, og det er ikkje lett å få til på fyrste flyturen. Men tunellen er no i full drift, så ein kan alltids koma att.

Johan Lie

Om areal, invarians og Picks teorem

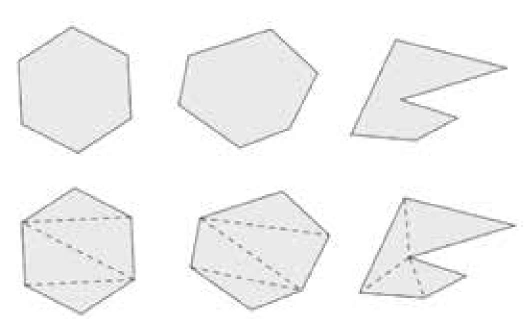
Ein motivasjonsfaktor i matematikken er overraskinga ein kan oppleve når ein får auge på samanhengar ein ikkje trudde fanst, jamfør Piaget og kognitiv ubalanse (Imsen, 2006). I denne artikkelen ser me på ein overraskande samanheng mellom heiltal og geometri, kjend som Picks teorem. Teoremet gjev samanhengen mellom arealet til ein mangekant der alle hjørna ligg plasserte i eit rutenett, og talet på punkt denne mangekanten «består av». Picks teorem seier at me kan finne arealet av ein mangekant ved å telje kor mange indre punkt og randpunkt mangekanten er bygd opp av.

Introduksjon

I denne artikkelen studerer me eigenskapar ved mangekantar med fokus på areal. Me har valt å fokusere på invariante storleikar, og me følgjer i grove trekk same framgangsmåten som forfattarane av artikkelen «Two beautiful proofs of Pick's theorem» (Raman, 2011). Dei invariante storleikane kan me angripe med ei utforskande tilnærming, og dei er isolert sett ikkje så vanskelege å handsame. Sett under eitt gjev dei oss eit bevis for Picks teorem.

Før me går vidare med denne problemstillinga, vil me understreke at det er vegen som er målet. Og langs vegen treffer me på fleire små utfordringar som me kan ta fatt på med ei utforskande tilnærming, til dømes ved hjelp av spikarbrett, ruteark eller dynamisk programvare.

Johan Lie
Universitetet i Bergen
johan.lie@math.uib.no



Figur 1. Regulær (venstre), irregulær, men konveks (midten) og irregulær og ikkje-konveks (høgre) sekskant. Kvar av desse sekskantane kan delast opp i fire trekantar ved at ein trekkjer diagonalar som vist i nedre rekkja.

Ein *regulær* mangekant er ein mangekant som har dei eigenskapane at alle kantane er like lange, og at alle vinklane er like store. I ein regulær mangekant kan me trekkje *diagonalar* mellom hjørnepunkt som ikkje er naboar, og på den måten dele opp mangekanten i mindre bitar som kvar for seg er trekantar. Dette kan me også gjere når mangekanten er konveks, men ikkje regulær. Det skal heller ikkje så mykje utprøving til før me innser at dette faktisk også gjeld for mangekantar som ikkje er konvekse. Desse tre ulike tilfella er illustrerte i figur 1.

Dette gjeld også andre vegen: Me kan byggje opp ein mangekant ved å setje saman fleire trekantar. Dersom me kjenner arealet til desse trekantane, kan me finne arealet av heile mangekanten ved å summere. Denne framgangsmåten er *konstruktiv* og vil alltid føre fram. Men for generelle mangekantar inneber framgangsmåten at me må finne koordinatane til kvart hjørne i kvar trekant for å rekne ut arealet.

Me skil mellom to hovudtypar punkt som er ein del av ein generell mangekant på eit rutenett: *indre punkt (i)*, som er punkt som ligg inni mangekanten, og *randpunkt (r)*, som ligg langs randa av mangekanten. Randpunkt kan igjen delast inn i to klassar: dei som ligg i hjørne (hjørnepunkt), og dei som ikkje ligg i hjørne. Merk at alle hjørnepunkt er randpunkt, men ikkje alle randpunkt er hjørnepunkt.

Det finst ein overraskande enkel samanheng mellom talet på punkt og arealet til mangekanten på rutenettet:

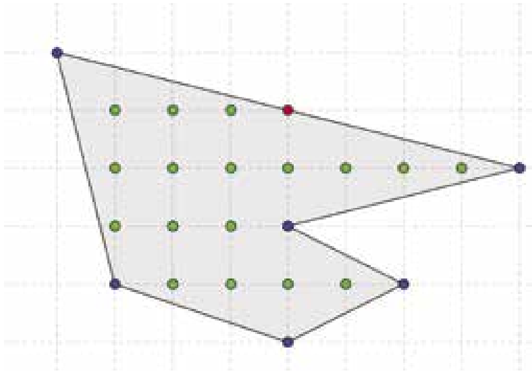
$$A = i + r/2 - 1.$$

Som me har sett (men strengt teke ikkje bevist!), kan ein mangekant alltid delast opp i mindre bitar der kvar bit er ein trekant. Dersom me held oss til trekantar som består av punkt på eit rutenett, er arealet ekstra enkelt å berekne[1].

Med dette som bakteppe arbeider me vidare med grunnlaget for Picks teorem. Langs vegen treffer me på varians og invarians, generalisering og spesialisering, fridom og avgrensing. Alt dette er sentrale matematiske omgrep (Mason, Graham et al. 2011).

Invarians av areal

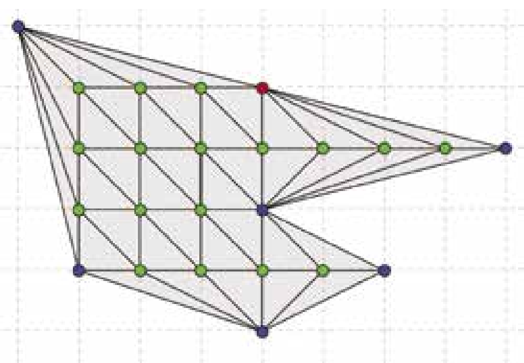
Me har allereie sett at me kan dele opp mangekantar i fleire trekantar. Dette kallar me å *triangulere* mangekanten. Det er alltid mogeleg å triangulere mangekanten med såkalla *elementære* trekantar. Ein elementær trekant er eit spesialtilfelle av ein trekant som består av



Figur 2. Eit døme på ein mangekant som har punkt på eit kvadratisk rutenett. Mangekanten inneheld 17 indre punkt og seks randpunkt. I dette dømet er fem av seks randpunkt hjørnepunkt.

tre randpunkt, som alle er hjørnepunkt, men ingen indre punkt. Med litt utforsking kan ein la seg overbevise om at det alltid vil vere mogeleg å dele inn ein mangekant i elementære trekantar. Å vise dette er utanfor rekkjevidda til denne artikkelen, sjå (Sally og Sally, 2007). La oss tenkje oss at me har delt inn mangekanten vår i elementære trekantar som vist i figur 3. Merk at inndelinga i seg sjølv ikkje er eintydig, men at *talet på elementære trekantar* ein gjeven mangekant på rutenettet kan delast opp i, er eintydig bestemt.

Av figuren ser me at trekantar som halverer kvadrat, har arealet 1/2. Litt meir urforsking viser oss at i denne figuren har alle elementære



Figur 3. Denne mangekanten er delt opp i elementære trekantar som alle har arealet 1/2.

trekantar areal lik 1/2. Dette gjeld ikkje berre for dette eine spesialtilfellet, men for *alle elementære trekantar på eit rutenett.* Her har me altså ein invarians, denne gongen for arealet til elementære trekantar. Litt utforskande aktivitet kan understøtte dette. *Prøv deg fram!*

Det at alle elementære trekantar har areal lik 1/2, betyr igjen at alle mangekantar på eit rutenett må ha eit areal som er gjeve som *talet på elementære trekantar* multiplisert med 1/2. Ein konsekvens av dette er at me kan *telje* oss fram til arealet ved å dele opp mangekantane våre i elementære trekantar. Me har altså funne ein samanheng for arealet av mangekantar på eit rutenett:

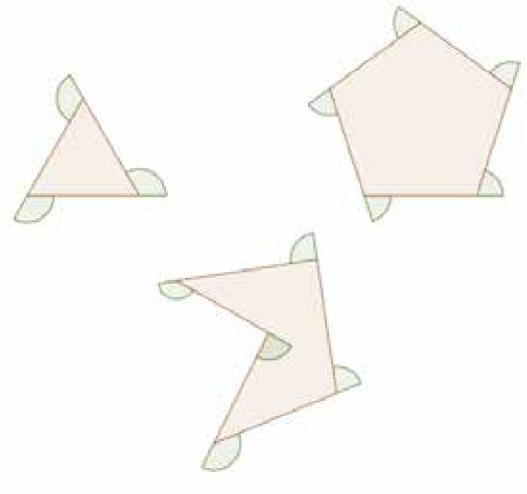
$$A = n/2,$$

der n er talet på elementære trekantar mangekanten kan delast opp i. Det fine her er at *me kan bruke dette resultatet sjølv om me ikkje faktisk har tenkt å gjennomføre denne oppdelinga.* Arealet til mangekanten er invariant enten me faktisk deler han opp i elementære trekantar eller ikkje.

Invarians av vinkelsum

Alle trekantar har indre vinkelsum 180°. Me har sett at me kan dele opp ein mangekant på rutenettet i elementære trekantar. Dersom me tenkjer oss at me tek utgangspunkt i *dei elementære trekantane*, vil den totale indre vinkelsummen over alle n elementære trekantar dermed vere $S_1 = n \cdot 180°$. (Me bruker her S_1 fordi me seinare ønskjer å finne eit anna uttrykk S_2 for vinkelsummen.)

Alternativt kan me uttrykkje vinkelsummen i mangekanten ved å ta utgangspunkt i *alle punkta som er delar av mangekanten.* For alle indre punkt vil summen av vinklane som møtest i punktet, vere 360°. For å finne summen av indre vinklar knytte til randpunkt må me skilje mellom dei punkta som er hjørne, og dei som ikkje er hjørne. Dei punkta som ikkje er hjørne, bidreg med ein indre vinkel på 180° til mangekanten sidan vinkelen ikkje dannar eit hjørne, men ei rett line. Når det gjeld hjørna, veit me ikkje direkte kor stor vinkelen til kvart einskilt punkt er. Men me kan likevel finne summen av dei ytre vinklane til alle hjørnepunkta ved å bruke den følgjande visualiseringa. Tenk deg at du «går» langs ytterkanten av ein mangekant mot klokka. Kvar gong du kjem til eit hjørne, måler du vinkelen mellom den førre og den nye retninga som vist i figur 4.



Figur 4. Summen av ytre vinklar er 360° for alle mangekantar. I den nedste mangekanten ser me eit døme på ein vinkel som tel som ein negativ vinkel.

Dei ytre vinklane vil i somme høve vere negative, i andre høve positive. (Kva må til for at alle vinklane skal vere positive?) Når du kjem attende til startpunktet, har du fullført ein heil runde rundt mangekanten, og summen av vinklar er den same som om du målte vinkelen i ein heil runde rundt ein sirkel: 360°.

Ein velkjend metode for å vise at ein trekant har *indre* vinkelsum på 180°, er å klippe ut ein vilkårleg trekant, rive av hjørna og leggje dei saman slik at ein får demonstrert at den indre vinkelsummen er 180°. Tilsvarande kan me klippe ut dei ytre vinklane i trekanten og demonstrere at ein trekant har ytre vinkelsum på 360°. Me kan bruke ein tilsvarande framgangsmåte for generelle mangekantar dersom me først merkjer av positive og negative vinklar med t.d. «+» og «–» eller ulike fargar, klipper dei ut og legg dei inntil kvarandre på ein slik måte at negative vinklar går i motsett retning av positive vinklar. (Det er enklast å først vise dette for ein konveks mangekant. Kvifor?) Med andre ord har me funne endå ein invarians: *alle mangekantar har ein ytre vinkelsum på* 360°. Merk at dette er ein invarians som gjeld for generelle mangekantar, ikkje berre mangekantar på rutenettet. Mangekantar som har sine randpunkt på eit rutenett, er spesialtilfelle av generelle mangekantar. Dermed må invariansen også gjelde for mangekantar på eit rutenett.

Me såg tidlegare at ytre punkt som ikkje er hjørnepunkt, må bidra med 180° til den indre vinkelsummen og dermed også 180° til den ytre vinkelsummen. Ytre punkt som er hjørne, vil bidra med 180° minus ein ukjend vinkel eller 180° pluss ein ukjend vinkel, som illustrert i figur 5. Me kjenner ikkje til kva kvart enkelt hjørne bidreg med til vinkelsummen.

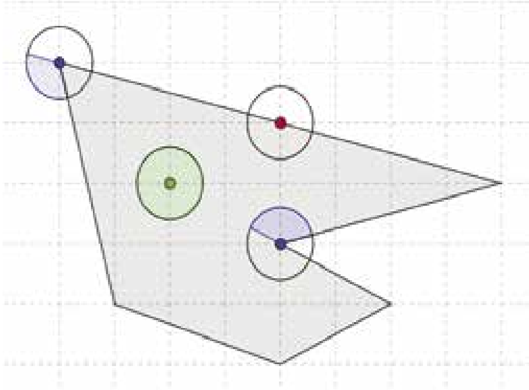
Men dersom me samlar opp bidraga frå kvart hjørne (t.d. ved å tenkje at me går rundt mangekanten og samlar positive og negative ytre vinklar), ser me at me til saman får 360°. Ved å skrive kvar ytre vinkel som $\alpha_i = 180° + \beta_i$, der β_i er ein positiv eller negativ «korreksjon», kan me lage oss eit algebraisk uttrykk som inneheld dei ytre vinklane $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Dersom me legg saman alle dei r ytre vinklane, får me

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r =$$
$$(180° + \beta_1) + (180° + \beta_2) + \cdots + (180° + \beta_r) =$$
$$r \cdot 180° + (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r) = r \cdot 180° + 360°.$$

For å finne summen av dei tilhøyrande indre vinklane γ_i kan me skrive

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_r = r \cdot 360° - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r)$$
$$= r \cdot 360° - r \cdot 180° - (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r)$$
$$= r \cdot 180° - 360°.$$

(For randpunkt som ikkje er hjørner, vil den korresponderande vinkelen β_i vere lik null.) Med dette har me ein ny måte å skrive ned den totale vinkelsummen på, som



Figur 5. Denne figuren viser kor mykje dei ulike typane punkt bidreg til den totale vinkelsummen.

$$S_2 = i \cdot 360° + r \cdot 180° - 360°,$$

der det første leddet kjem frå dei indre punkta, og dei to siste ledda kjem frå randpunkta.

Samanstelling av resultata

Me har no funne ei rekkje invariansar, og somme, men ikkje alle er eksplisitt nemnde. Kva kan me bruke dei til? La oss samle saman det me har kome fram til så langt. For det første kom me fram til at *alle mangekantar på eit rutenett kan delast opp i elementære trekantar, som kvar for seg har areal* 1/2. Dette gjev totalt arealet $A = n \cdot 1/2$. Deretter kom det fram at me kan finne den totale vinkelsummen til ein mangekant på to måtar. Me kan enten summere over alle dei elementære trekantane og få ein total vinkelsum $S_1 = n \cdot 180°$, eller me kan summere over vinkelsummen omkring indre punkt og randpunkt og få ein total vinkelsum som er lik $S_2 = i \cdot 360° + r \cdot 180° - 360°$. Desse to uttrykka for den totale vinkelsummen uttrykkjer det same. Det kan me skrive som $S_1 = S_2$, som gjev oss

$$n \cdot 180° = i \cdot 360° + r \cdot 180° - 360°,$$

som me kan skrive om til

$$n = 2 \cdot i + r - 2.$$

No kan me bruke det første resultatet me kom fram til, nemleg at arealet er halvparten av talet på elementære trekantar. Då får me denne elegante samanhengen mellom arealet og talet på indre punkt og randpunkt:

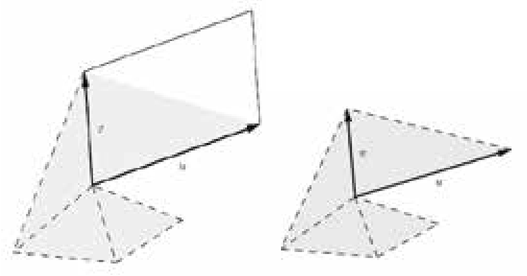
$$A = i + r/2 - 1.$$

Dette betyr at me har vist korleis me kan kome fram til ein ny invarians: Picks teorem.

Avslutning

Me har i denne artikkelen sett på ulike invariante storleikar som kvar for seg er relativt ukompliserte å forklare. Når me koplar desse invariansane til eit rutenett, avgrensar me oss til å sjå på spesialtilfelle som gjev særleg enkle samanhengar. Langs vegen har me (både eksplisitt og implisitt) vore innom viktige matematiske omgrep som invarians og generalisering og spesialisering. Me har lagt opp til ei utforskande tilnærming til problemet. Me har blitt merksame på nye samanhengar.

Me treng på ingen måte stoppe her: Det dukkar opp nye problemstillingar. Korleis kan me endre på rutenettet vårt utan å gå utanfor rekkjevidda av Picks teorem? Her er det naturleg å sjå på kva som ligg til grunn for dei ulike stega i beviset for teoremet. Kva skjer om me introduserer hol i mangekantane våre? Kva med tredimensjonale figurar? Me kan arbeide på mange ulike nivå med desse problemstillingane. Som Sally og Sally uttrykkjer det: «… certain contemporary mathematical problems have caught our interest because their origins lie in mathematics covered in the elementary school curriculum and their development can be traced through high school, college, and university level mathematics.» (Sally og Sally, 2007). Boka *Roots to research: A Vertical Development of Mathematical Problems* inneheld ein detaljert gjennomgang av Picks teorem og fleire andre fruktbare matematiske problem.



Figur 6. To vektorar, u og v, spenner ut parallellogrammet som korresponderer til ein av *trekantane* i figur 1.

Note

1 Som ein motivasjon til å ta i bruk punkt som ligg på rutenettet, skriv me arealet av ein trekant ved hjelp av determinanten frå lineær algebra. Arealet til ein trekant er halvparten av arealet til eit tilhøyrande parallellogram. Me kan uttrykkje arealet av paralellogrammet som determinanten til matrisa $M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$, der $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ og $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ er to vektorar som spenner ut parallellogrammet. Sjå figur 6. Me kan uttrykkje determinanten til matrisa som $\det(M) = u_1v_2 - u_2v_1$. Arealet til parallellogrammet er absoluttverdien til determinanten. Dermed vert arealet til den tilhøyrande trekanten

$$A = |u_1v_2 - u_2v_1|/2.$$

Her står $|x|$ for absoluttverdien til x.
Og no nærmar me oss eit poeng. Dersom me legg hjørnepunkta på eit rutenett, er arealet til trekanten ein multippel av 1/2, sidan $|u_1v_2 - u_2v_1|$ i dette tilfellet er eit heiltal. Dette inspirerer oss til å studere mangekantar som er avgrensa ved at dei berre kan ha hjørne på eit rutenett, som vist i figur 2.

(fortsettes side 34)

Håvard Johnsbråten

Læringsstøttende prøver i matematikk

I oktober 2012 la Utdanningsdirektoratet ut en samling med læringsstøttende prøver i matematikk på sine nettsider. Prøvene er tilgjengelige for alle elever og lærere i grunnskolen gjennom Utdanningsdirektoratets elektroniske prøvegjennomføringssystem, og det er lagt ut informasjon om bruken av prøvene på Utdanningsdirektoratets nettsider[1]. De læringsstøttende prøvene i matematikk inneholder oppgaver fra alle hovedområder i grunnskolen for 5.–7. og 8.–10. årstrinn. Oppgavene fokuserer på begrepsforståelse i matematikk, og prøvene er til frivillig bruk.

Prøvene baserer seg på oppgaver som ble utviklet i det såkalte *KIM-prosjektet*, og de er en revidert utgave av et dataprogram – *KIM-programmet* – som baserte seg på disse oppgavene. I artikkelen vil jeg først beskrive dette prosjektet og programmet. Deretter vil jeg orientere om hvordan de læringsstøttende prøvene atskiller seg fra KIM-programmet. Til slutt nevner jeg planer og ønsker for videreutvikling av prøvene.

KIM-prosjektet og KIM-programmet

Det opprinnelige *KIM-prosjektet* ble utført fra 1995 til 2002 av Telemarksforsking – Notodden og Institutt for lærerutdanning og skoletjeneste ved Universitetet i Oslo. Gard Brekke var prosjektleder. I prosjektet ble det utviklet kartleggingsprøver og skrevet veiledningshefter[2] innen *Tall og tallregning*, *Funksjoner*, *Algebra*, *Geometri* og *Måling og enheter*. Oppgavene ble prøvd ut i stor skala, og resultatene ble lagt inn i veiledningsheftene, som også hadde egne kapitler med idéer til undervisningsaktiviteter.

Oppgavene som ble utviklet i KIM-prosjektet, går i stor grad på forståelsen av begreper innen sentrale emner i matematikk. De fleste oppgavene ble laget som såkalte diagnostiske oppgaver, der hensikten er å få fram hvordan elevene tenker om emnet, og i hvilken grad de har mangelfullt utviklede begreper eller misoppfatninger innen emnet. For mange av oppgavene skulle elevene i tillegg til svaret forklare hvordan de hadde tenkt eller regnet. I Rasch-Halvorsen (2008) gis det mange eksempler på oppgaver av denne typen, og disse blir drøftet grundig.

I 2006 besluttet Utdanningsdirektoratet å lage en nettbasert og interaktiv versjon av KIM-prosjektet i samarbeid med Telemarksforsking – Notodden. Formålet var bl.a. å øke tilgjengeligheten til KIM-oppgavene og å bidra til et nasjonalt løft innen IKT og matematikk. Jeg var prosjektleder for utviklingen av dette *KIM-programmet*. Programmet inneholdt samtlige oppgaver fra KIM-prosjektet. Det ble også lagt inn tekstfelter, der elevene skulle begrunne sine

Håvard Johnsbråten
Høgskolen i Telemark
havard.johnsbraten@hit.no

svar. Disse måtte evalueres spesielt av læreren. Se Johnsbråten (2008a) og Johnsbråten (2008b) for detaljert informasjon om KIM-programmet.

Programmet har vært operativt fra våren 2008, men det har aldri vært lansert offentlig av Utdanningsdirektoratet. Rundt 200 skoler har hatt tilgang til KIM-programmet, og det er også brukt i lærerutdanningen ved flere universiteter og høgskoler.

Høsten 2008 bestemte Utdanningsdirektoratet seg for at de ville legge inn KIM-programmet i sitt prøvegjennomføringssystem. Det krevde ny programmering av samtlige oppgaver og systemet forøvrig, og det var først i oktober 2012 at programmet var ferdig, i form av de nye læringsstøttende prøvene. Det gamle KIM-programmet er nå ikke lenger tilgjengelig.

I det opprinnelige KIM-prosjektet ble det utviklet oppgaver i samtlige hovedområder i matematikk unntatt statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk, og ett av målene våre i videreføringen av prosjektet var å lage oppgaver også innen dette hovedområdet. Våren 2009 leverte vi et oppgavesett i *Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk* til Utdanningsdirektoratet. Disse oppgavene er tatt med i de læringsstøttende prøvene. Det er også lagt inn et fyldig ressurshefte om statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk skrevet av Bjørnar Alseth. Heftet inneholder også resultater fra utprøvinger på åttende og tiende årstrinn.

De læringsstøttende prøvene

De læringsstøttende prøvene inneholder oppgaver innen samtlige hovedområder i matematikk for årstrinn 5–7 og 8–10. Følgende delprøver inngår:

– *Tall* (trinn 5–7 og 8–10)
– *Tallregning* (trinn 5–7 og 8–10)
– *Funksjoner* (trinn 8–10)
– *Algebra* (trinn 8–10)
– *Geometri* (trinn 5–7 og 8–10)
– *Måling* (trinn 5–7 og 8–10)
– *Statistikk* (trinn 8–10)

Elever og lærere ved en skole får tilgang til de læringsstøttende prøvene slik:

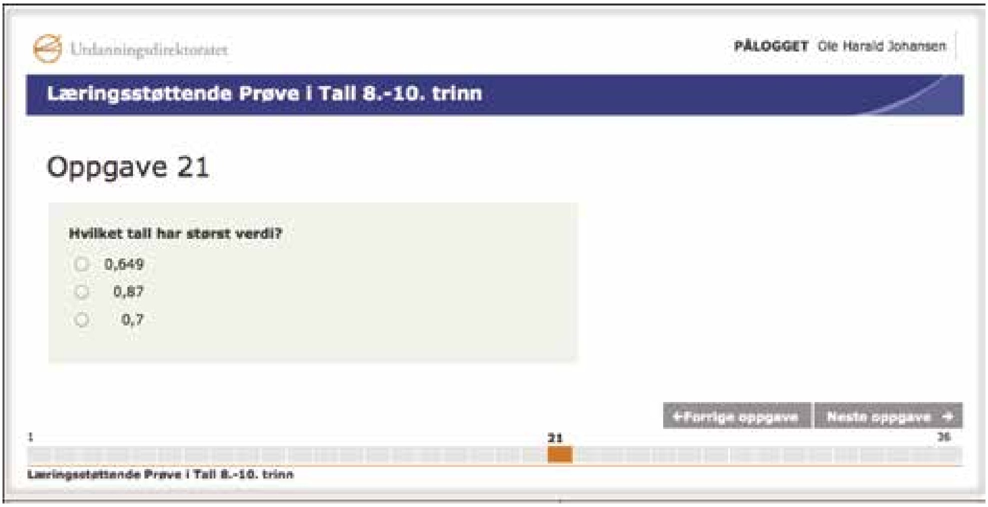
– Skoleadministrator melder på elevene til prøven i Utdanningsdirektoratets *prøveadministrasjonssystem* (PAS) og registrerer hvem som er ansvarlig lærer på elevgruppene. Lærer eller administrator tildeler elevene brukernavn og passord.
– Elevene logger seg inn i Utdanningsdirektoratets *prøvegjennomføringssystem* (PGS) og gjennomfører aktuelle prøver.
– Dagen etter at prøven er avholdt, kan læreren lese resultatene fra prøven i PAS. Læreren kan få en oversikt over samtlige elevers resultater, og hun/han kan også se svarene på hver oppgave for hver enkelt elev.
– Læreren vurderer resultatene og planlegger videre oppfølging i klassen. Her kan ressursheftene være til hjelp.

Flere detaljer omkring prøvene finnes i veiledningsteksten på Utdanningsdirektoratets nettsider. Se eksempel på oppgave på neste side.

De læringsstøttende prøvene er laget slik at elevenes svar skal kunne evalueres av dataprogrammet. Derfor inneholder oppgavene ingen felter der elevene skal forklare hvordan de har tenkt. Sammenlikn gjerne figuren i denne artikkelen (på neste side) med figuren for den tilsvarende oppgaven i KIM-programmet, se Johnsbråten (2008a).

I noen av oppgavene i tallregning skal elevene skrive inn et tall i en rute som inngår i et regnestykke. Feltet der eleven skal skrive inn tallet, kan være så bredt at regnestykket nesten ikke «henger sammen». Dette kan gi uønskede feilsvar fra elever.

I KIM-programmet var det med en del oppgaver innen funksjoner og geometri der elevene skulle tegne figurer eller linjestykker. De fleste av disse oppgavene er også tatt med i de læringsstøttende prøvene. På grunn av begrensninger i datasystemet for disse prøvene blir det grafiske bildet svært uheldig for flere av disse oppgavene. To eksempler:



– Eleven skal markere en linje ved å klikke på to punkter på skjermen. Da tegnes ikke «hele» linjen opp, bare linjestykket mellom de to punktene.
– Eleven skal markere en trekant ved å klikke på tre punkter. Det er ikke mulig å starte med noen av de punktene som står der fra før – et slikt punkt må velges senere i prosessen.

Læreren bør opplyse elevene om slike ting før de starter på en prøve i funksjoner eller geometri.

Disse kommentarene gjelder imidlertid bare noen få av oppgavene i de læringsstøttende prøvene. De fleste oppgavene er pent satt opp og fungerer fint på skjermen.

Ressursheftene

Til hvert av hovedområdene er det laget et ressurshefte. Det er tilgjengelig for læreren i PAS. Ressursheftet til statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk er nytt, mens de andre ressursheftene er reviderte versjoner av de gamle KIM-heftene.

Det er også laget egne hefter med frekvenstabeller for svarfordelingen på samtlige oppgaver. Alle tabellene i ressursheftene og i frekvenstabellene er imidlertid laget ut fra utprøvinger av oppgavene i *papirversjon*. Det gjelder også de nye oppgavene i statistikk, kombinatorikk og sannsynlighet. De andre tabellene gjengir fordelingen av svar i det gamle KIM-prosjektet. Ingen av oppgavene er prøvd ut i digital versjon! Det er ikke alltid samsvar mellom den digitale versjonen av oppgaven og tabellene i ressursheftene og i frekvenstabellene. Dette bør læreren være klar over når ressursheftene leses.

Noen av tabellene refererer til utprøvinger som er mer enn 15 år gamle, men de misoppfatningene som avdekkes, gjelder nok i stor grad også for dagens elever.

Alle ressursheftene innholder idéer til undervisningsaktiviteter. Her er det mye verdifullt å hente for lærerne. Det er imidlertid ikke lagt inn noen nye forslag til aktiviteter i de reviderte versjonene av de gamle KIM-heftene.

Ønsker for videreutvikling av prøvene

For at de læringsstøttende prøvene skal bli godt kjent blant grunnskolelærerne, er det viktig at prøvene blir gjennomgått i lærerutdanningen. Dette forutsetter at lærere og studenter i UH-sektoren får tilgang til prøvene på samme måte som lærere og elever i skolen. Ved Utdanningsdirektoratet vil det bli arbeidet med å gi tilgang til prøvene for lærere og studenter i UH-sektoren.

Fra høsten 2013 vil en ny prøvebank være operativ på Utdanningsdirektoratets nettsider, og da planlegges det en omfattende lansering av systemet. Muligens vil de læringsstøttende prøvene bli revidert i 2014 i forbindelse med læreplanrevisjonen. Da håper jeg at flere av oppgavene som inneholder figurer og grafikk, blir forbedret. Jeg håper videre at alle oppgavene blir prøvd ut i digital versjon, og at det lages nye tabeller til ressursheftene og frekvenstabellene ut fra dette.

De læringsstøttende prøvene i matematikk tester elevenes begrepsforståelse på sentrale områder i matematikken, og frekvenstabellene inneholder svarfrekvenser med korte forklaringer på hvordan feilsvarene er kommet fram. Ressursheftene følger videre opp med forklaringer og idéer til undervisningsaktiviteter. Jeg anser dette verktøyet som svært verdifullt og håper at de fleste lærere i grunnskolen vil ta det i bruk.

Noter

1 Informasjon om de læringsstøttende prøvene i matematikk finnes på Utdanningsdirektoratets nettside www.udir.no under Utdanning, Vurdering og Læringsstøttende prøver. Direktelenke: www.udir.no/Vurdering/Laringsstottende-prover/Laringsstottende-prover-matematikk/

2 Veiledningsheftene i KIM-prosjektet ble skrevet av Gard Brekke, Gunnar Gjone, Liv Sissel Grønmo, Bo Rosén, Guri Nortvedt og Helge Støren. Disse heftene er nå revidert og lagt inn som ressurshefter til de læringsstøttende prøvene. Men det første KIM-heftet, Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk, er ikke revidert. Dette heftet utdyper hovedtanker bak slike læringsstøttende prøver og kunne gjerne ha vært tatt med blant ressursheftene. Mange hovedoppgaver/masteroppgaver i matematikkdidaktikk er relatert til KIM-prosjektet. Gunnar Gjone har laget en liste med kommentarer til disse oppgavene. Den er tilgjengelig på Tangentens nettsider www.caspar.no/tangenten/2013/KIM-master.pdf

Referanser

Johnsbråten, H. (2008a). KIM – nå også som et digitalt kartleggingsverktøy. *Tangenten, 19*(2), 43–46.

Johnsbråten, H. (2008b). KIM – nå også som et digitalt kartleggingsverktøy. I Konferanserapport 5 – 2008 (s. 17–21). Trondheim: Matematikksenteret. www.matematikksenteret.no/attachment.ap?id=631

Rasch-Halvorsen, A. (2008). Bruk av KIM-materiale i undervisningen. I *Konferanserapport 5 – 2008* (s. 37–41). Trondheim: Matematikksenteret. www.matematikksenteret.no/attachment.ap?id=631

(fortsatt fra side 30)

Referansar

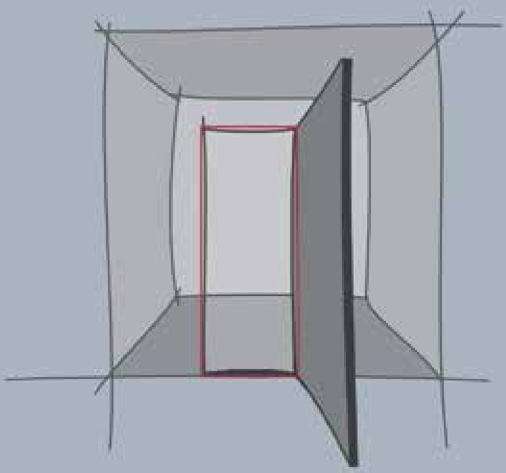
Sally, J. & Sally, P. (2007). *Roots to research. A Vertical Development of Mathematical Problems*. AMS.

Mason, J., Graham A., & Johnston-Wilder, S. (2011). *Å lære algebraisk tenkning*. Bergen: Caspar Forlag.

Manya, R., & Öhman, L.-D. (2011). Two beautiful proofs of Pick's theorem. *Proceedings of Seventh Congress of European Research in Mathematics Education*. Lest 31012013: www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_Raman&Ohman.pdf

Pick, G. (1906). Geometrisches zur Zahlenlehre. Lest 31012013: www.biodiversitylibrary.org/pdf2/002577100050207.pdf

Imsen, G. (2006). *Elevens verden. Innføring i pedagogisk psykologi*. Oslo: Universitetsforlaget.



Einar Asbjørn Bratberg

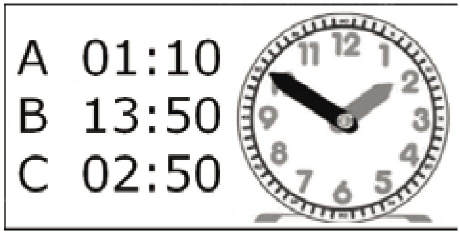
Fysiske aktiviteter

Artikkelen bygger på verkstedet «Matematikk med fysisk aktivitet» på LAMIS sommerkurs. Aktivitetene er brukt på matematikkrommet ved Midt-Norsk Realfag- og Teknologisenter (MNRT) i Verdal. Aktivitetene er primært tilpasset mellomtrinnet, men kan tilpasses til både yngre og eldre elever. De er knyttet til ulike tema som måling, brøk og de fire regneartene.

Her brukes eksempler på aktiviteter for å vise hva man kan oppnå med bruk av fysiske aktiviteter i matematikkfaget. Den fysiske delen i aktivitetene er alltid enkel. Den innebærer at elevene må bevege seg for å finne oppgavetekst, nødvendige opplysninger og utstyr som er nødvendig for å løse oppgavene.[1]

Variasjon

Variasjon framholdes som et viktig pedagogisk prinsipp. På matematikkrommet ved MNRT har vi dagsbesøk hvor elevene arbeider med ett tema. Med relativt lange økter (1,5 til 2 timer) er det nyttig å ha aktiviteter som gir et fysisk avbrekk. Vår erfaring er at det er gunstig med fysiske aktiviteter hvor elevene fortsatt har fokus på temaet, heller enn korte pauser der elevene får leke fritt. Rebusoppgaver er en måte å variere et tema på. Her er et eksempel på en oppgave med klokka som tema:



Figur 1: rebusoppgave med klokka som tema

Rebusoppgavene plasseres ut i rommet på ulike steder. Riktig løsning på en oppgave gir en bokstav, det vil si bokstaven ved det digitale klokkeslettet som stemmer med klokka med visere. Elevene samarbeider to og to om å løse en oppgave. De må huske løsningen, gå tilbake til plassen sin og notere ned svaret der. Deretter går de til neste oppgave. Når alle oppgavene er løst, skal bokstavene settes sammen til et ord. I tillegg til å øve på klokka kan slike oppgaver brukes til å øve på samarbeid og oppgavefokus. Elevene må holde oversikt over hvilke oppgaver de har løst. Med feil løsning på en oppgave blir det umulig å finne riktig løsningsord.

Einar Asbjørn Bratberg
Midt-Norsk Realfag- og Teknologisenter
Einar-Asbjorn.Bratberg@ntfk.no

Motivasjon

Elevenes motivasjon er en utfordring også i matematikkfaget. Å variere med fysiske aktiviteter kan virke positivt på motivasjon og interesse hos enkeltelever. Oppgaver knyttet til måling av lengde, vekt og volum har innimellom ført til frustrasjoner hos oss som lærere. Er det noen som kjenner seg igjen i et hjertesukk som «Elevene kan ikke bruke måleredskaper, de bruker feil skala, og om de finner rett skala, greier de ikke å lese av på riktig sted»?

Det har en klar positiv betydning for elevenes motivasjon at måleresultat skal brukes til noe. Dette gjelder uansett elevenes ferdighetsnivå. Om vi lager rebusoppgaver, skal elevene bruke måleresultatet til å finne riktig bokstav. Om vi sammenligner erfaringen med rebusoppgaver med oppgaver hvor svaret bare skal skrives ned, er vår erfaring er at elevene jobber vesentlig mer konsentrert med rebusoppgavene.

Rebusoppgaver på måling kan lages med enkle oppgavetekster som *hvor lang …?* og *hva veier …?* Sammen med oppgaveteksten plasseres et måleredskap, en gjenstand eller mengde som skal måles, og tre ulike svaralternativ. Oppgavene kan brukes for å øve på nøyaktighet ved måleavlesning og til å velge riktig skala på både volummål, målebånd og vekt. Man kan også øve på realistiske anslag av lengde, vekt og volum og på å vurdere om man har riktig måleenhet.

Automatisering av ferdigheter

I matematikkfaget er det mange tema hvor det trengs mye øving og repetisjon. Multiplikasjonstabellen er et typisk eksempel. Her kan en stafett med terningkast være et supplement til andre læringsaktiviteter.

Elevene er delt opp i lag med hvert sitt bingobrett. Lagene stilles opp i én del av rommet. Ett sett med bingobrett, terninger og blyant plasseres i en annen del av rommet. Elevene går enkeltvis til lagets bingobrett, kaster terningene, multipliserer og krysser av på brettet. Laget som først får seks på rad, har vunnet. Slike stafetter kan lages for alle regnearter (addisjon kan brukes fra første trinn). Terninger med flere flater åpner for større utfordringer. Det kan også lages varianter for prosent og algebra som passer på ungdomstrinnet.

56	2	28	6	42	18
16	64	5	48	10	24
30	12	24	8	36	9
6	20	7	21	15	4
35	3	16	14	12	40
1	25	32	8	49	4

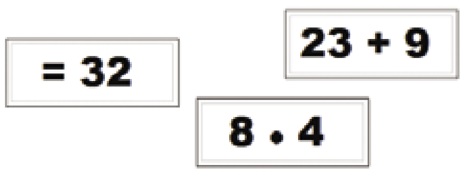
Figur 2: bingobrett for multiplikasjonsstafett med to åtter-terninger.

Regnestrategier

Svaret er gitt er en type samarbeidsoppgave som kan brukes til øving på hoderegning i alle regnearter. Den kan varieres i vanskelighetsgrad gjennom å bruke mindre eller større tall, og den kan brukes til omgjøring mellom brøk og prosent og mellom enheter.[2]

Elevene deles inn i grupper på tre. Ett sett lapper med regnestykker (f.eks. 2 + 2) legges på ett sted i rommet. Ett sett med svar (f.eks. = 4) legges på et annet sted.

Aktiviteten er kalt *Svaret er gitt* fordi elevene alltid begynner med et svar. Én elev velger et svar. Eleven må huske dette og fortelle det videre når han eller hun er tilbake i gruppa. De andre på gruppa går til regnestykkene og samarbeider om å finne riktig løsning. Ettersom svaret hentes først, må elevene regne gjennom flere regnestykker før de finner ett som er riktig.



Figur 3: eksempler fra «Svaret er gitt».

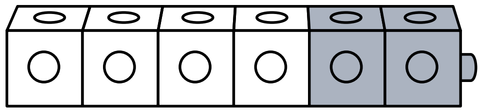
Løsningen tas med tilbake og kontrolleres mot svaret.

Ved å tilpasse oppgavene kan aktiviteten knyttes til konkrete strategier for hoderegning, for eksempel *bryte opp i tiere og enere*; *legge til for å finne differanse*; *subtrahere et lett tall som er i nærheten, og rette svaret etterpå* ved subtraksjon av tosifrede tall. Internasjonale undersøkelser som TIMMS har påpekt at «Både trening med sikte på å automatisere viktige ferdigheter og diskusjon og refleksjon rundt svar og løsningsmetoder blir mindre vektlagt i norsk skole enn i andre land» (Grønmo, 2010, s.11). Oppgaver som beskrevet her kan gi bidrag til automatisering av ferdigheter og være grunnlag for å diskutere løsninger, valg av strategier osv. etter at aktivitetene er gjennomført.

Forståelse

Ved bruk av konkreter kan læreren vurdere løsninger og raskt oppdage eventuelle misoppfatninger. Hvis aktiviteten flyter godt, kan man få tid til å snakke med elever om oppgaver og løsninger. Et eksempel på en aktivitet med konkretiseringsmateriell er *brøkstafett*. Elevene deles i grupper på tre eller fire. I denne stafetten brukes multilink-kuber (eller lignende utstyr) som settes sammen slik at de tilfredsstiller gitte krav. Oppgaver og kuber med riktige farger plasseres rundt om i rommet. Gruppene sender to elever sammen for å løse en oppgave. Oppgavetekst og løsning (dvs. sammensatte kuber) bringes tilbake til gruppa.

Konkretiseringsmateriellet kan være til stor nytte for å avdekke misoppfatninger og for å styrke forståelsen. Ett eksempel er oppgaven «1/2 er blå og 1/3 er rød og 2/12 er oransje». Når elevene har en løsning, kan denne sjekkes ved at man deler den i to like deler og ser etter at én av disse er blå, man kan dele i tre like deler og kontrollere at én av dem er rød osv. Hvis ikke alle kravene er tilfredsstilt, må elevene gå tilbake til kubene og prøve ut en ny løsning.



Figur 4. Mulig løsning av brøkoppgave: 'Sett sammen kuber slik at 2/3 er hvit'.

Mestring

Vanskelighetsgraden på slike oppgaver må være tilpasset elevgruppen. Man kan legge inn enkeltoppgaver som er mer utfordrende, som er egnet for å avdekke misoppfatninger osv. Et generelt råd er at det er bedre med oppgaver som er for enkle, enn oppgaver som er for vanskelige. Enkle oppgaver vil gi mestringsopplevelser for elever som ikke behersker faget spesielt godt, og det vil påvirke motivasjonen til elevene.

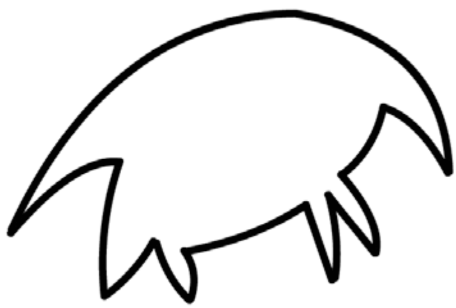
Kunnskapsdepartementet skriver om motivasjonssvikt i faget: «Undersøkelser viser at mange elever allerede på barnetrinnet mister motivasjonen for faget og melder seg ut» (Kunnskapsdepartementet, 2011, s. 3). Årsakene til dette er sammensatte, og det finnes ingen enkle løsninger. Men større variasjon i arbeidsmåter har effekt på elevenes oppfatning av et fag. Fysiske aktiviteter er én av mange arbeidsmåter som kan brukes for å skape variasjon, motivasjon og mestring i faget. Den siste TIMMS-undersøkelsen påviser en klar framgang i matematikk hos norske elever på fjerde trinn. Dette er gledelig. Samtidig «presterer vi fortsatt lavt i forhold til land det synes naturlig å sammenligne oss med, og det området som framstår som mest problematisk, er Tall.» (Grønmo et al., 2012, s. 29). Om vi tar konsekvensen av dette, må vi legge mer vekt på automatisering av regneferdigheter og strategier for hoderegning i norsk skole. Fysiske aktiviteter kan brukes som et godt supplement innenfor området tall.

(fortsettes side 43)

Christoph Kirfel

Hvordan lage pene kurver?

Bildet i figur 1 er tegnet med tegneprogrammet *Sumopaint*, et program som er gratis tilgjengelig på Internett, og som noen av leserne kanskje har brukt en gang. Andre har sikkert brukt liknende programmer (Paint) til å lage invitasjoner til bursdager og konfirmasjoner eller bare til å tegne «kruseduller».



Figur 1.

I Sumopaint finnes det en opsjon der man setter en rett strek på «arket» som man etterpå kan forandre til en pen bue etter eget ønske. Buene blir pene, behagelige kurver som det er lett å lage gode former av. Prøv gjerne selv.

Hvordan datamaskinen velger å lage disse kurvene, får vi selvsagt ikke vite noe om i Sumopaint, men det er opplagt at det er en god porsjon matematikk som ligger bak. I denne artikkelen vil vi først presentere en kurvetegner som likner på den i Sumopaint. Elevene kan selv være med og konstruere den i f.eks. GeoGebra. Riktignok blir den egenkonstruerte graftegneren ikke like «flink» som den profesjonelle, men det går i alle fall an å se hvilken matematikk som ligger bak verktøyet, og en kan glede seg over de egenproduserte kurvene. Disse blir noen ganger vel så fine som de programmet lager. Til slutt vil vi også komme inn på den kurvetegneren som er brukt i Sumopaint. Her trenger vi litt mer matematikk for å gjennomskue virkemåten. Opplegget er prøvd ut med en R2-klasse ved Tanks videregående skole i Bergen.

Klassen fikk demonstrert Sumopaint-programmet, og mange kjente igjen funksjonaliteten. Elevene syntes kurvene liknet biter av parabler, og vi ble enige om å ta disse «parabelbitene» som vårt utgangspunkt. Vi bestemte oss for å sette sammen en rekke med parabelbiter som går gjennom de punktene som brukeren velger. Gjennom to påfølgende punkter ønsket vi å legge en parabel. I tillegg ønsket vi å tilpasse tangentstigningen i startpunktet. Senere skal vi se hvordan vi kan lage «glatte overganger» uten knekk. Her får vi bruk for den deriverte av en parabel.

Vi viser her prosessen med tre punkter og

Christoph Kirfel
Universitetet i Bergen
christoph.kirfel@math.uib.no

to parabelbiter. Den kan selvsagt utvides til vilkårlig mange punkter og tilsvarende mange parabelbiter. Vi har valgt punktene $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (3, 4)$ og $P_3 = (4, 0)$ og skal i første omgang legge en parabel gjennom $P_1 = (1, 2)$ og $P_2 = (3, 4)$. I neste omgang ser vi etter en ny parabel gjennom $P_2 = (3, 4)$ og $P_3 = (4, 0)$. Vi skal bare bruke de bitene av parablene som går mellom de oppgitte punktene. Parablene strekker seg altså ikke i det uendelige. De er bare «synlige» over de angitte intervallene. Som startstigningstall for den første parabelen velger vi $m_1 = 3$. For den andre velger vi $m_2 = -5$.

Den første parabelen, $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, skal gå gjennom $P_1 = (1, 2)$ og $P_2 = (3, 4)$. Vi brukte parametrene a_1, b_1 og c_1 for senere å kunne skille mellom de forskjellige parablene. Da får vi to likninger:

$$\begin{matrix} f_1(1)=2 \\ f_1(3)=4 \end{matrix} \quad \text{eller} \quad \begin{matrix} a_1+b_1+c_1=2 \\ 9a_1+3b_1+c_1=4 \end{matrix}$$

Her var elevene ivrige og fant fort at subtraksjonsmetoden gir oss $4a_1 + b_1 = 1$.

For tangentstigningen har vi $f'_1(x) = 2a_1x + b_1$. At starttangenten, dvs. stigningen i punktet $P_1 = (1, 2)$, er lik 3 kan uttrykkes som en likning:

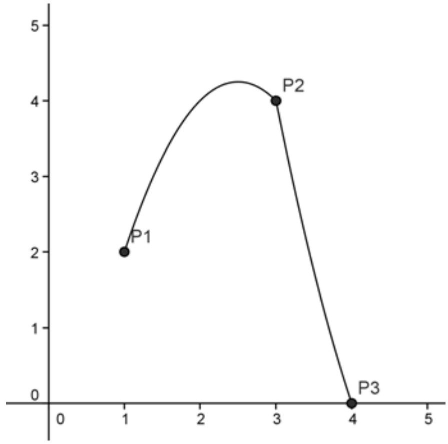
$$f'_1(1) = 2a_1 + b_1 = 3.$$

Dermed har vi to likninger med de ukjente a_1 og b_1. Igjen kunne vi bruke subtraksjonsmetoden. Ved å trekke likningene fra hverandre finner vi $a_1 = -1$ og dermed $b_1 = 5$. Fra en av de første likningene finner vi deretter $c_1 = -2$og vi har funnet den første parabelen $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 = -x^2 + 5x - 2$.

Den andre parabelen, $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, skal gå gjennom $P_2 = (3, 4)$ og $P_3 = (4, 0)$. Da får vi to nye likninger:

$$\begin{matrix} f_2(3)=4 \\ f_2(4)=0 \end{matrix} \quad \text{eller} \quad \begin{matrix} 9a_2+3b_2+c_2=4 \\ 16a_2+4b_2+c_2=0 \end{matrix}$$

som gir oss $7a_2 + b_2 = -4$. Starttangenten i $P_2 = (3, 4)$skal ha stigningstall -5, som fører til



Figur 2.

$$f'_2(3) = 2a_2x + b_2 = 6a_2 + b_2 = 5.$$

Ved å trekke likningene fra hverandre får vi $a_2 = 1$ og dermed $b_2 = -11$ og $c_2 = 28$. Det betyr at vi har funnet den andre parabelen: $f_2(x) = x^2 + 11x + 28$. Nå har vi begge parabelbitene på plass, og funksjonen som beskriver hele løsningen vil derfor se slik ut:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+5x-2 & x\in[1,3] \\ x^2-11x+28 & x\in[3,4] \end{cases}$$

Her ser vi også nytten av delte funksjonsuttrykk. Grafen er tegnet i figur 2.

Ved å variere starttangentene i P_1 og P_2, dvs. ved å variere tallene m_1 og m_2, kan en få til forskjellige pene kurver gjennom de oppgitte punktene. Prøv selv!

Vi kan ønske oss en utvidelse av den foreslåtte modellen der man ikke bare ser på faste gitte punkter (hos oss $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (3, 4)$ og $P_3 = (4, 0)$), men der punktene er variable og kan flyttes rundt på skjermen etter behov. I tillegg må vi selvsagt inkludere muligheten for mer enn tre gitte kurvepunkter. La oss først se på problemstillingen med «variable punkter». Vi kaller punktene for $P_1 = (u_1, v_1)$, $P_2 = (u_2, v_2)$ og $P_3 = (u_3, v_3)$. Den første parabelen, $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, skal gå gjennom $P_1 = (u_1, v_1)$ og $P_2 = (u_2, v_2)$, noe som gir oss to likninger,

$$f_1(u_1) = v_1 \quad \text{eller} \quad a_1u_1^2 + b_1u_1 + c_1 = v_1$$
$$f_1(u_2) = v_2 \qquad\qquad a_1u_2^2 + b_1u_2 + c_1 = v_2 \; .$$

Igjen var elevene ivrige, og kunne bruke subtraksjonsmetoden, som gir oss

$$a_1(u_2^2 - u_1^2) + b_1(u_2 - u_1) = v_2 - v_1 \; . \qquad (1)$$

Vi kjenner også tangentstigningen m_1 i startpunktet $P_3 = (u_3, v_3)$. Dette kan uttrykkes som en likning:

$$y'(u_1) = 2a_1u_1 + b_1 = m_1. \qquad (2)$$

For å kunne bruke subtraksjonsmetoden på variabelen b_1 må vi dividere begge sider i likning (1) med $u_2 - u_1$. Dermed får vi

$$a_1(u_2 + u_1) + b_1 = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} \, ,$$

som er likning (1).

Trekker vi likningene fra hverandre, forsvinner b_1 og vi får:

$$a_1(u_2 + u_1 - 2u_1) = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} - m_1$$

eller

$$a_1 = \frac{\dfrac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} - m_1}{u_2 - u_1} \, .$$

Siden vi nå har bestemt a_1, har vi ved likning (2) også at

$$b_1 = m_1 - 2a_1u_1.$$

Den siste parameteren, c_1, finner vi ved hjelp av likningen $a_1u_1^2 + b_1u_1 + c_1 = v_1$ slik at $c_1 = v_1 - a_1u_1^2 - b_1u_1$.

Dermed har vi alle de tre parameterne i den første parabelen på plass.

For å bestemme den neste parabelbiten, $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, kan vi gjennomføre de samme beregningene. Her tar $P_2 = (u_2, v_2)$ plassen til $P_1 = (u_1, v_1)$, og $P_3 = (u_3, v_3)$ tar plassen til $P_2 = (u_2, v_2)$ og til slutt overtar stigningstallet m_2 plassen til m_1. Formlene er de samme. En må bare bytte ut indeksene.

$$a_2 = \frac{\dfrac{v_3 - v_2}{u_3 - u_2} - m_2}{u_3 - u_2}$$

$$b_2 = m_2 - 2a_2u_2 \text{ og}$$

$$c_2 = v_2 - a_2u_2^2 - b_2u_2 \; .$$

Elevene satte pris på at vi her én gang for alle hadde funnet et uttrykk for de tre parameterne til parablene slik at gjentatte beregninger ved å løse likningssystemer (slik vi gjorde til å begynne med) ble overflødige. Dette fikk dem til å innse at det kan være en fordel å løse et generelt system i stedet for mange spesielle likningssystemer med konkrete tallverdier. Vi diskuterte også de forskjellige variabeltypene i denne sammenhengen. Både x, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 og a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 er variable. Mens x representerer tallinjen, står u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 for punktkoordinater som vil være kjente konkrete tall så snart punktene er valgt. Dermed kan programmet GeoGebra bruke disse i beregninger. Variablene a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 er parameterne til parablene. Disse er avhengige av punktkoordinatene og beregnes automatisk av programmet så snart punktkoordinatene er gitt. Disse tre forskjellige variabeltypene voldte elevene ingen større problemer.

For hvert nytt punkt vi ønsker å inkludere i tegningen, får vi en ny parabelbit som beregnes suksessivt med de angitte formlene. Vi trenger ikke å nøye oss med to parabelbiter. På nettsiden www.caspar.no/tangenten/2013/fig2.html kan du prøve modellen med til sammen sju punkter. Punktene P_1, P_2 og P_3 er allerede synlige. Ønsker du flere punkter i modellen, så kan du i den tilhørende avkrysningsboksen krysse av for hvert av tilleggspunktene P_4, P_5, P_6 og P_7 om de skal være synlige. Etterpå kan du selvsagt flytte punktene dit du ønsker (men bare til høyre for foregående punkt pga. kravet om stigende x-verdi). Elevene lagde selv en slik kurvetegner med to parabelbiter, og eksperimenterte med denne. Etter hvert ville noen sikre seg at parabelbitene passet etter hverandre med en glatt overgang. Vi ønsker oss altså en modell der vi ikke har knekker i hvert ankerpunkt. I punktet P_2 kan vi få det til ved å velge stigningstallet til starttangenten for den andre parabelbiten lik stigningstallet for avslutningstangenten på den første parabelbiten.

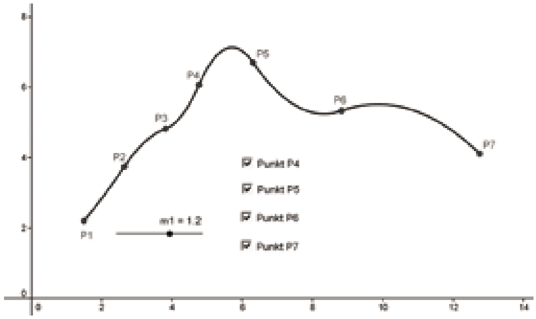
Det gir oss følgende sammenheng:

$$m_2 = 2a_1u_2 + b_1.$$

På samme måte kan vi få til glatte overganger ved de andre ankerpunktene også. En må da definere de andre starttangentene på liknende vis og skifte ut indeksene. Nå kan vi selvsagt ikke lenger velge disse tangentstigningene, men det aller første stigningstallet m_1 kan fortsatt velges fritt.

Svakheter med modellen

Etter å ha lekt litt med modellen så elevene fort at den har noen alvorlige svakheter. For det første ser vi at tegningene blir rare eller ekstreme når to punkter får tilnærmet samme x-koordinat. Dette er lett å forklare siden $(u_2 - u_1)$ står som nevner i formelen for a_1. Ligger punktene rett over hverandre (samme x-koordinat), så bryter beregningen for a_1 og dermed også alle de andre verdiene sammen, og vi får ingen løsning (ingen parabel). Tangenten i dette punktet blir da gjerne loddrett, og denne effekten forplanter seg ved at tangenten i endepunktet for intervallet også blir loddrett. Dermed blir alle de resterende «parablene» mer eller mindre loddrette streker. Dette gjelder den «glatte» modellen. Dette er selvsagt en alvorlig skavank og kan ikke tåles ved et profesjonelt produkt. En annen ulempe er at parablene ikke kan ha loddrette tangenter. I en tegning kan nettopp det være ønskelig. Vi kan heller ikke få til en kurve med et øvre og et nedre løp, noe som er svært ønskelig i en tegning. Vår modell egner



Figur 3. En modell med 7 støttepunkter og glatte overganger

seg i grunnen bare til en rekke med punkter på rad med stigende x-verdier (noe som likner litt på et fjellandskap).

Vi har altså klart å lage en modell som har visse kvaliteter som et designerverktøy skal ha, men på langt nær alle kravene er innfridd. Elevene var fornøyd med sine egne graftegnere, men også litt skuffet over at de ikke fikk til det samme som det profesjonelle verktøyet. Dermed var de klare for å lære noe nytt. Elevene var lydhøre for å vite mer om vektorfunksjoner som de lærte om i R1. Vi startet med å lage en enkel vektorfunksjon $P(t) = P_1t$, der vi bare forlenger eller forkorter en vektor P_1 ved hjelp av en variabel t. Resultatvektorene ligger da på en linje. Dette fikk vi synliggjort ved at vi slo på «sporet» til resultatvektoren i GeoGebra. Elevene foreslo også vektorfunksjoner som $P(t) = P_1t + P_2$, som også representerer linjer. Kvantespranget kom da vi utvidet den siste vektorfunksjonen til følgende form: $P(t) = P_1t^2 + P_2t + P_3$, en utvidelse som virker naturlig når man ser på parabler av formen $y = ax^2 + bx + c$. Vi så at de nevnte kurvene liknet veldig på kurvene i Sumopaint. Riktignok var det også her snakk om parabler, men de «kunne ligge skeivt i landskapet». Dermed steg optimismen, og elevene ville vite mer om disse nye vektorfunksjonene. Jeg presenterte nå Bézier-kurver[1] som en spesiell form for kvadratiske vektorfunksjoner.

$$P(t) = P_1(1-t)^2 + 2P_2t(1-t) + P_3t^2 =$$
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}(1-t)^2 + 2\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}t(1-t) + \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}t^2$$

Elevene ble først noe perplekse, men aksepterte etter hvert at det her dreide seg om en kvadratisk vektorfunksjon, riktignok i en noe utradisjonell forkledning. Dette gjorde det nødvendig å argumentere for fordelene med en slik fremstilling.

Vi snakket en del om definisjonsmengden for variabelen t, som var intervallet [0, 1], og hvordan start- og sluttpunktet så ut. Vi fikk oss en liten overraskelse da vi så at:

$$P(0) = P_1(1-0)^2 + 2P_1(1-0) + P_3 0^2 = P_1$$

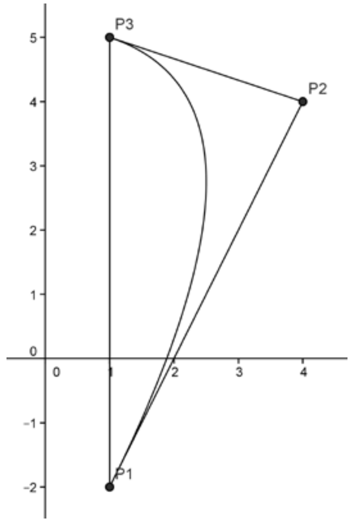
$$P(1) = P_1(1-1)^2 + 2P_1(1-1) + P_3 1^2 = P_3$$

Dermed var betydningen til punktene P_1 og P_3 avklart. Men punktet P_2 forble noe mystisk. For å kunne vise kurven i GeoGebra ikke bare som sporet til en vektor, men som en kurve som kan reagere på endring av parametrene – i dette tilfelle plasseringen av de tre punktene P_1, P_2 og P_3 – trengte vi kjennskap til en ny GeoGebra-opsjon, nemlig kurveopsjonen. Til dette formålet må Bézier-kurven «deles opp» i én funksjon for x-koordinaten og én for y-koordinaten:

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}(1-t)^2 + 2\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}t(1-t) + \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}t^2$$

med $x(t) = u_1(1-t)^2 + 2u_2(1-t)t + u_3t^2$ og $y(t) = v_1(1-t)^2 + 2v_2(1-t)t + v_3t^2$. Dermed kunne vi bruke kurveopsjonen og fikk se og studere Bézier-kurvene. Vi så tydelig at punktet P_2 var ansvarlig for tangentene i slutt- og endepunktet, og begynte derfor å studere den deriverte av vektorfunksjonen. Elevene var kjent med at den deriverte av en vektorfunksjon beskriver hastigheten til et punkt som beveger seg langs kurven. Vi fant

$$P'(t) = -2P_1(1-t) + 2P_2(1-2t) + 2P_3t$$



Figur 4.

og kunne så beregne start- og slutthastigheten:

$$P'(0) = -2P_1 + 2P_2 = 2(P_2 - P_1)$$

og

$$P'(1) = -2P_2 + 2P_3 = 2(P_3 - P_2).$$

Dette kunne vi så tolke slik at tangenten til kurven i startpunktet er en vektor som peker fra P_1 til P_2, og at den tilsvarende tangentvektoren i sluttpunktet peker fra P_2 til P_3. Dermed blir P_2 et styringspunkt for tangentene i endepunktene, og vi begynner å få kontroll over kurvenes utseende. Faktisk var vi nå like langt som det profesjonelle tegneverktøyet Sumopaint.

Fordeler med Bézier-kurver

Det viser seg nå at den nye kurvetypen, Bézier-kurvene, ikke har noen av de skavankene som vårt opprinnelige selvlagde tegneverktøy led av. Det er lett å lage loddrette tangenter. Vi kan velge punkter over hverandre, og vi kan få til kurvedeler som ligger over hverandre, dvs. kurver som ikke lenger er slik at y er en funksjon av x.

Det hadde vært spennende å gå videre og sette sammen flere Bézier-kurvebiter etter hverandre. Det hadde også vært en utfordring å beskrive hva som må til for å lage glatte overganger mellom kurvebitene. Men dette ble det altså ikke tid til i dette prosjektet. Synd!

Bézier-kurver av høyere orden

Se på følgende vektorfunksjon:

$$P(t) = P_1(1-t)^3 + 3P_2t(1-t)^2 + 3P_3t^2(1-t) + P_4t^3 =$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}(1-t)^3 + 3\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}t(1-t)^2 + 3\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}t^2(1-t) + \begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}t^3$$

Dette er en utvidelse av den kvadratiske Bézierkurven til grad tre. Vi finner raskt at $P(0) = P_1$ og $P(1) = P_4$, mens $P'(0) = 3(P_2 - P_1)$ og $P'(0) = 3(P_4 - P_3)$. Dermed kan vi styre tangentvektorene i start- og sluttpunktet helt uavhengig av hverandre med punktene P_2 og P_3. Før hadde vi bare ett styringspunkt til begge tangentvektorene. Med det nye regimet får vi altså en enda større frihet til å tilpasse kurvene til våre ønsker. Det finnes også Bézier-kurver av høyere orden.

Avslutning

Mitt didaktiske utgangspunkt for undervisningsopplegget var noen overveielser som stammer fra den danske matematikkdidaktikeren Mogens Niss. Han kommer med følgende

Påstand 1: «Matematiken er en væsentlig faktor i formingen af rammerne for menneskers liv i kultur og samfund, gennem den rolle matematikken spiller i beskrivelsen, forståelsen og bemestringen af dele af verden.»

Problem 1: «Denne rolle for matematikken er i vidt omfang usynlig for en umiddelbar betragtning, fordi matematikken i højere grad virker i understrømmen af kultur og samfund end på overfladen.»

Oppgave 1 (for skolen/læreren): «At synliggøre matematikken i samfundet og i verden rundt os (f. eks. teknologi).»

Det å avsløre matematikken bak et dagligdags fenomen (som et grafisk verktøy som tegner kurver) blir dermed et forsøk på å synliggjøre den matematikken som ellers er skjult for elevene. Her var matematikken på et nivå elevene kjente fra før, og der de måtte lære seg noe nytt, kunne de likevel mestre de ekstrautfordringene som dukket opp. Det er ikke alltid man er så heldig at de fenomenene som en ønsker å belyse, lar seg beskrive med matematikk som elevene kan forstå. Derfor er det viktig med mange gode eksempler på et nivå som ikke overskrider elevenes forutsetninger.

På nettsiden www.caspar.no/tangenten/2013/bezier.html kan du selv prøve ut en slik Béziermodell (med tangenter). Du kan selv lage en modell med flere punkter hvis du vil.

Takk til Anne Bjørnestad og R2-klassen hennes ved Tanks videregående skole som våren 2012 ville være med på dette prosjektet.

Note

1 Pierre Bézier introduserte disse kurvene i 1962. Han trengte dem for å kunne designe bildeler da han arbeidet for Renault.

(fortsatt fra side 37)

Note

1 For fullstendige beskrivelser vises til undervisningsopplegg på matematikk.org.

2 Idéen til aktiviteten er hentet fra «Finn målet som matcher» på Matematikksenterets nettsider.

Referanser

Grønmo, L. S., Onstad, T., & Fristad Pedersen, I. (2010). *Matematikk i motvind, TIMSS Advanced 2008 i videregående skole*. Oslo: Unipub 2010.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., & Borge I. C. (2012). *Framgang, men langt fram. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011.* Oslo: Akademika forlag.

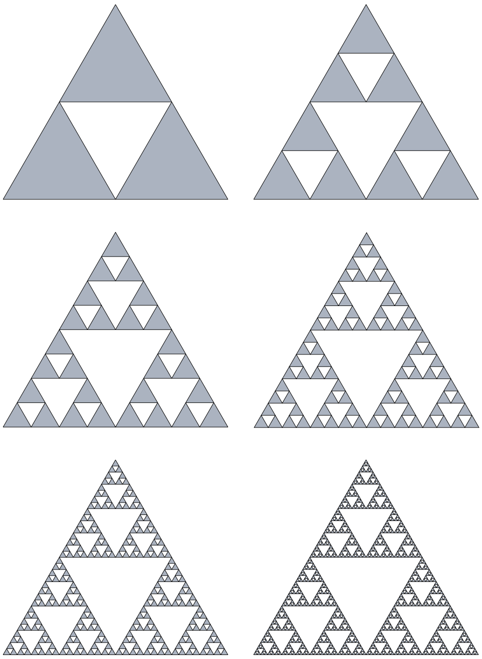
Kunnskapsdepartementet (2011). *Fra matteskrekk til mattemestring*. Lest 31012013: http://www.regjeringen.no/upload/KD/Vedlegg/Grunnskole/Strategiplaner/Matematikk_aug_2011.pdf

Tom Lindstrøm

Hva er dimensjon? – Sammenhengsidéen

I det forrige nummeret av Tangenten skrev jeg om «koordinatidéen» for å beskrive dimensjon. Tanken var at dimensjonen til en mengde er det antall koordinater vi trenger for å beskrive mengden på en «geometrisk naturlig» måte. Denne idéen fungerer godt når vi skal beskrive tradisjonelle kurver, flater og romlegemer, men den kommer til kort når vi skal beskrive mer uregelmessige mengder.

La oss begynne med å ta en titt på to slike mengder, begge konstruert av den polske matematikeren Waclaw Sierpinski (1882–1969) for nesten hundre år siden. For å konstruere den første av disse mengdene, *Sierpinski-trekanten*, starter vi med en likesidet trekant som i figur 1. Vi deler opp trekanten i fire mindre, likesidede trekanter, og fjerner (det indre av) den hvite trekanten i midten. Så gjentar vi denne prosedyren på de tre gjenværende trekantene: deler dem opp i fire og fjerner den hvite trekanten i midten. Tenker vi oss at vi fortsetter å fjerne stadig flere og stadig mindre, hvite trekanter, er Sierpinski-trekanten den figuren vi ville ha sittet igjen med til slutt dersom det var mulig å gjenta prosessen uendelig mange ganger (den består altså av de punktene i den opprinnelige trekanten som ikke blir fjernet i noen av stegene i den uendelige prosessen).

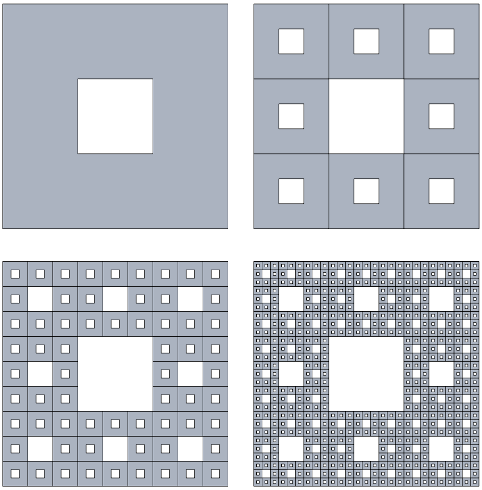


Figur 1: Sierpinski-trekanten

Den neste figuren, *Sierpinski-teppet*, konstrueres på en helt tilsvarende måte, men denne gangen starter vi med et kvadrat istedenfor en trekant (se figur 2). Vi deler kvadratet opp i ni mindre kvadrater og fjerner det hvite kvadratet i midten. Så gjør vi det samme med de åtte mindre kvadratene vi sitter igjen med: deler dem opp i ni mindre kvadrater og fjerner (det indre av) det

Tom Lindstrøm
Universitetet i Oslo
t.l.lindstrom@cma.uio.no

midterste. Tenker vi oss at vi kunne fortsette slik med uendelig mange generasjoner av stadig mindre kvadrater, ville Sierpinski-teppet være figuren vi satt igjen med til slutt (den består altså av de punktene i det opprinnelige kvadratet som ikke blir fjernet i noen av stegene i den uendelige prosessen).



Figur 2: Sierpinski-teppet

Hva er dimensjonen til de to figurene ovenfor? De ser begge to ut til å ligge et sted mellom en endimensjonal kurve og en todimensjonal flate. I vår konstruksjon kuttet vi stadig flere hull i et todimensjonalt utgangspunkt, men det er også mulig å konstruere figurene ved å starte med noe endimensjonalt (omkretsen til en trekant eller et kvadrat) og så addere stadig flere linjestykker.

Koordinatidéen vi diskuterte i forrige artikkel, gir ikke noe klart svar på hva dimensjonen til slike mengder er. Punktene på Sierpinski-trekanten kan beskrives omtrent like naturlig ved hjelp av både én og to koordinater, og det samme gjelder punktene på Sierpinski-teppet. I denne artikkelen skal vi se på sammenhengsidéen for å presisere og utvide dimensjonsbegrepet slik at det omfatter uregelmessige mengder som Sierpinski-trekanten og Sierpinski-teppet.

Sammenhengsidéen

Observasjonen bak sammenhengsidéen er enkel: Det er vanskeligere å dele et objekt i to deler dess større dimensjonen er: En endimensjonal linje kan kuttes i to ved et ørlite snitt, en todimensjonal flate kan deles i to ved å klippe den over langs en kurve, mens et tre-dimensjonalt legeme må sages i to langs en flate. I hvert enkelt tilfelle deler vi mengden langs et snitt som er én dimensjon lavere. Vi skal bruke denne observasjonen til å bygge opp dimensjonsbegrepet nedenfra.

La oss først bestemme oss for at punkter har dimensjon null. Dette er kanskje uvant språkbruk, men punkter er åpenbart nivået under endimensjonale objekter som linjer og kurver, og da er det naturlig å gi dem dimensjon null. Har vi først godtatt dette, er det også rimelig å si at en endelig mengde av punkter har dimensjon null.

Neste skritt er å si at en mengde (i planet, rommet eller et høyere dimensjonalt rom) er endimensjonal dersom den kan deles i to deler (som ikke henger sammen med hverandre) ved å fjerne et endelig antall punkter, altså ved å fjerne en nulldimensjonal mengde. Ifølge denne definisjonen er en linje endimensjonal siden vi kan dele den i to «halvlinjer» ved å fjerne ett punkt, og en sirkel er endimensjonal siden vi kan dele den i to sirkelbuer ved å fjerne to punkter.

Vi definerer nå en mengde til å være todimensjonal dersom den kan deles i to deler (som ikke henger sammen med hverandre) ved å fjerne et endimensjonalt objekt. Et plan er således todimensjonalt siden vi kan dele det i to halvplan ved å fjerne en endimensjonal linje, og en kuleflate er todimensjonal siden vi kan dele den i to halvkuleflater ved å fjerne en endimensjonal sirkel (f.eks. en «ekvator»).

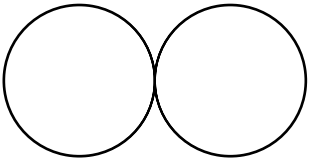
Vi fortsetter på samme måte: En mengde er tredimensjonal dersom den kan deles i to deler (som ikke henger sammen med hverandre) ved å fjerne et objekt av dimensjon to. En kule har dimensjon tre siden vi kan dele den i to halvkuler ved å fjerne en todimensjonal sirkelskive.

Generelt er en mengde n-dimensjonal dersom den kan deles i flere deler ved å fjerne et objekt av dimensjon n-1.

Hva nå med Sierpinski-trekanten og Sierpinski-teppet? En kan dele Sierpinski-trekanten i to deler ved å fjerne to punkter (ta f.eks. midtpunktet på to av ytterkantene), så denne figuren er endimensjonal etter definisjonen ovenfor. Sierpinski-teppet, derimot, henger sammen langs linjestykker og kan ikke deles i to biter ved å fjerne et endelig antall punkter, men det kan åpenbart deles i to ved å fjerne et linjestykke (bruk et hvilket som helst linjestykke som skjærer figuren). Denne figuren er derfor todimensjonal etter definisjonen ovenfor.

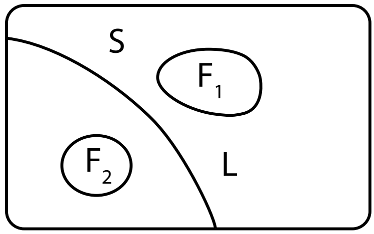
Problemer

Beskrivelsen i forrige avsnitt fanger ånden i sammenhengsidéen, men den er på flere måter for upresis til å kunne brukes som en matematisk definisjon. Figur 3 viser ett av hovedproblemene: Siden en sirkelskive er todimensjonal, burde to sirkelskiver limt sammen i et punkt også være det, men ifølge definisjonen ovenfor er dette en endimensjonal mengde – vi kan nemlig dele den i to ved å fjerne sammenlimingspunktet! Dette er åpenbart urimelig, og vi må derfor modifisere definisjonen for at ikke slike «heldige kutt» ødelegger systemet vårt.



Figur 3: Dobbel sirkelskive

Figur 4 viser idéen: For at en mengde S skal ha dimensjon n, må det uansett hvordan vi plukker ut to ikke-overlappende, lukkede delmengder F_1 og F_2, være mulig å skille dem med en mengde L av dimensjon n-1. Mengdene F_1 og F_2 kan vi bruke til å styre unna «heldige kutt» – i figur 3 kan vi f.eks. la F_1 dekke hele den ene sirkelskiven og gå et stykke inn i den andre for å styre kuttet unna sammenlimingspunktet. For Sierpinski-trekanten og Sierpinski-teppet har ikke modifikasjonen ovenfor noen betydning – de vil fortsatt ha dimensjon én og to, for uansett hvordan vi legger F_1 og F_2, kan vi skille dem ved å fjerne henholdsvis et endelig antall punkter eller en endimensjonal kurve.



Figur 4: Separasjon av F_1 og F_2.

Jeg skal ikke forfølge sammenhengsidéen her. De som er interessert, kan finne en (relativt!) ikke-teknisk innføring i kapittel 3 av Gerald Edgars bok *Measure, topology and fractal geometry* fra 1990 der dimensjonsbegreper av denne typen (det finnes flere varianter) kalles *topologisk dimensjon*. En naturlig fortsettelse på denne diskusjonen rundt dimensjon kan være å se på en helt annen type dimensjonsbegrep der vi ikke tar utgangspunkt i hvordan mengder henger sammen, men i hvordan størrelsen deres (lengde, areal, volum) endrer seg når vi forstørrer og forminsker dem. Dette tar vi opp i neste artikkel.

(fortsatt fra side 12)

Enge, O. & Valenta, A. (2011). Argumentasjon og regnestrategier. *Tangenten, 22*(4), 27–32.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New York: Routledge 3. utg.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up*. Washington, DC: National Academy Press.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserier nr. 18.* København: Undervisningsministeriet.

Torger Johannes Nilsen

Å «gjenoppdage» Eulers tall e

Det var på gymnaset at jeg for første gang møtte Eulers tall e og den naturlige logaritmefunksjonen $\ln(x)$. Jeg husker at jeg raskt lærte å ta dem i bruk og at de ble mine gode venner, men det var en gåte for meg hvor de kom fra. Det var også en gåte hvorfor $\ln(x)$ var naturlig. Jeg forsto dem altså ikke skikkelig, og en bør forstå sine venner. Dit kom jeg først mange år etter.

En vanlig definisjon av Eulers tall i norske lærebøker er

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Denne formelen stammer opprinnelig fra den sveitsiske matematikeren Jacob Bernoulli (1654–1705) som oppdaget sammenhengen mens han arbeidet med rentesrenteproblemer (i følge Wikipedia). Jeg har ikke sett noe forsøk på å forklare hvordan Bernoulli kom fram til formelen, og derfor blir Eulers tall noe mystisk og eiendommelig for elever som møter tallet for første gang. Situasjonen i dag er derfor ikke vesentlig forskjellig fra det jeg selv opplevde.

Fra jeg begynte som matematikklærer i videregående skole, har jeg opplevd dette som et stort problem. Sist høst oppdaget jeg hvordan en med enkle redskaper kan gi elevene muligheten til å gjenoppdage tallet e på en måte som både klargjør tallets egenskaper og åpner veien for en dypere forståelse av den naturlige logaritmefunksjonen $\ln(x)$.

I sin berømte bok *Complex analysis* (1979) definerer den finske matematikeren Lars V. Ahlfors eksponentialfunksjonen som løsningen av differensialligningen

$$f'(x) = f(x)$$

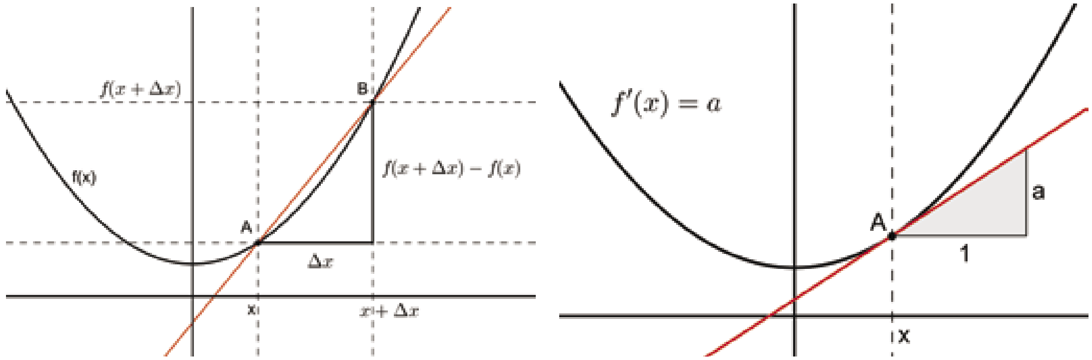
med initialbetingelsen $f(0) = 1$. Dette gav idéen og nøkkelen til en ny pedagogisk tilnærming til Eulers tall e.

En funksjon og dens deriverte

For å skjønne Alsfors definisjon, er det nødvendig å forstå sammenhengen mellom en funksjon f og dens deriverte f'.

Den deriverte gir oss mulighet til arbeide med bevegelse og forandring på en matematisk måte. Dette er intellektuelt krevende for elevene og en pedagogisk utfordring for læreren, kanskje den største utfordringen både for lærer og elever i arbeidet med stoffet i 1T. *GeoGebra* gir oss muligheter til å studere sammenhengen mellom en funksjon f og dens deriverte f' på en dynamisk måte. Hvordan dette kan gjøres, er demonstrert i flere sammenhenger. Jeg leste om metoden i et opplæringshefte skrevet av Judidt

Torger Johannes Nilsen
Mosjøen videregående skole
torger.nilsen@gmail.com

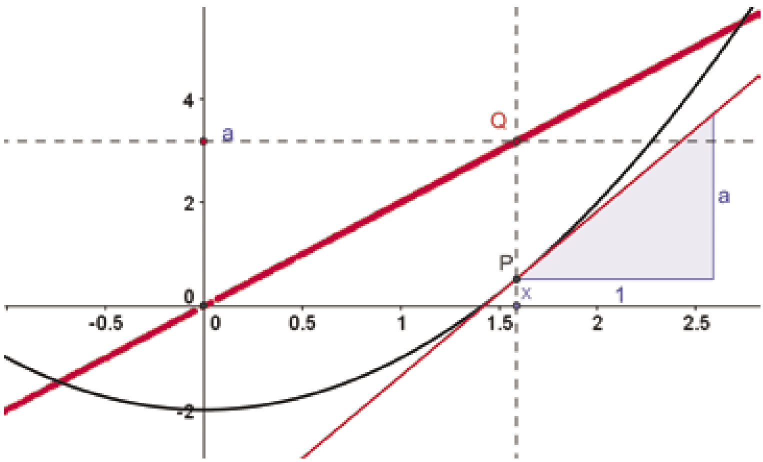


Figur 1: Til venstre vises den tradisjonelle definisjonen av den deriverte. Til høyre vises en forenklet definisjon som kort kan uttrykkes: Den deriverte *f'*(*x*) er stigningstallet *a* til tangenten gjennom punktet *A*.

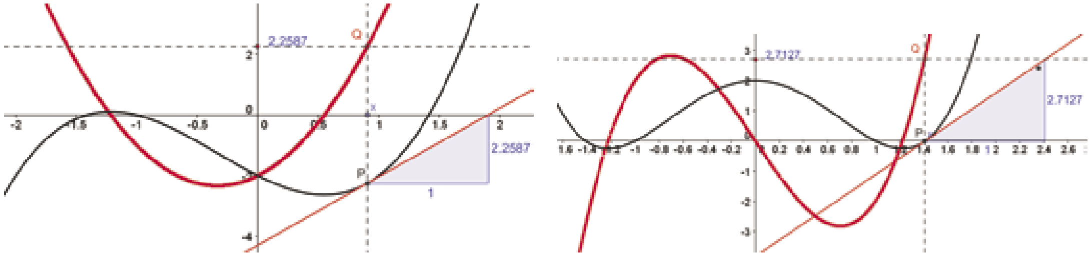
Hohenwarter til en av de tidlige versjonene av GeoGebra. Fordi vi bruker den samme arbeidsformen når vi skal gjenoppdage Eulers tall, gir jeg en kortfattet presentasjon av metoden.

Metoden krever en noe forenklet definisjon av den deriverte. Dette er vist i figur 1. Videre lager en en GeoGebra-fil hvor en knytter sammen funksjonen f og den deriverte f' ved å utnytte flere funksjoner i GeoGebra: tangentfunksjonen, stigningsfunsjonen for en linje og sporingsfunksjonen for et punkt. Hvordan dette kan gjøres, er skissert i figur 2.

Vi kan lete etter Eulers tall ved å bruke samme metode som vist ovenfor. Vi spør: «Finnes det en funksjon med egenskapen $f'(x) = f(x)$?» og utfordrer elevene til å lete. De første funksjonene elevene arbeider med er polynomfunksjonene, og det er derfor blant polynomfunksjonene det er naturlig å lete først. Funksjonen som er brukt i figur 2 er $f(x) = x^2 - 2$, og et raskt blikk avslører at denne funksjonen ikke har den søkte egen-



Figur 2: Funksjonen *f* er tegnet inn med svart, heltrukket linje. Langs *x*-aksen har vi avsatt punktet *x*. Fra punktet *x* er det en kobling til punktet *P* = (*x*, *f*(*x*)) på kurven. Vi tegner tangenten i punktet *P* (rød farge) ved å bruke Tangentfunksjonen i GeoGebra og måler deretter stigningstallet *a* for tangenten. Vi kan nå generere et nytt punkt *Q* = (*x*, *a*) og punktet spores. Når vi drar i punktet *x* kan vi nå observere at punktet *P* beveger seg langs funksjonsgrafen, punktet Q beveger seg samtidig og avsetter spor som danner en rett, rød linje. Dette demonstrerer at både *f* og *f'* er funksjoner av *x*.



$g(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ $h(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

Figur 3: For begge polynomfunksjonene over ser vi at den deriverte og funksjonen ikke faller sammen.

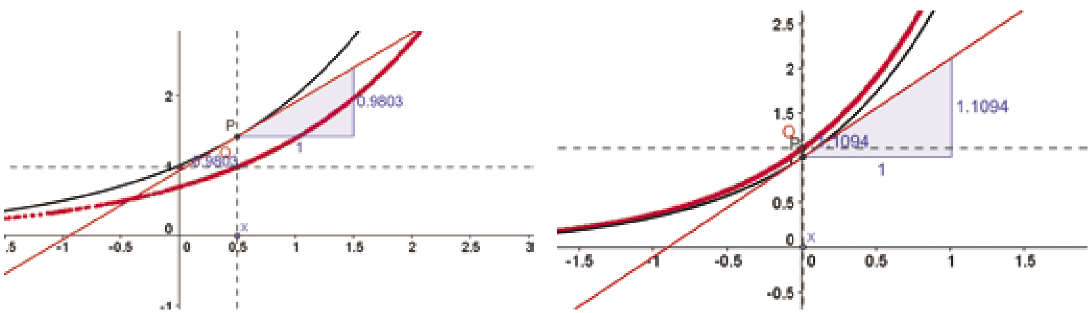
skapen. Heller ikke tredjegradsfunksjonen $g(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ eller fjerdegradsfunksjonen $h(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ fører oss noe nærmere en løsning som vi kan observere i figur 3. Vi kan søke blant de trigonometriske funksjonene, men resultatene blir omtrent like nedslående.

Av de funksjonene som elevene kjenner, har vi igjen å lete blant eksponentialfunksjonene. Det er nærliggende først å prøve $i(x) = 2^x$, og nå får vi et resultat som virker lovende. Den deriverte har samme form som 2^x, men ligger litt under funksjonen som vi ser i figur 4 til venstre. Prøver vi deretter med $j(x) = 3^x$ observerer vi at den deriverte blir liggende enda nærmere, men nå høyere enn funksjonen, se figur 4 til høyre.

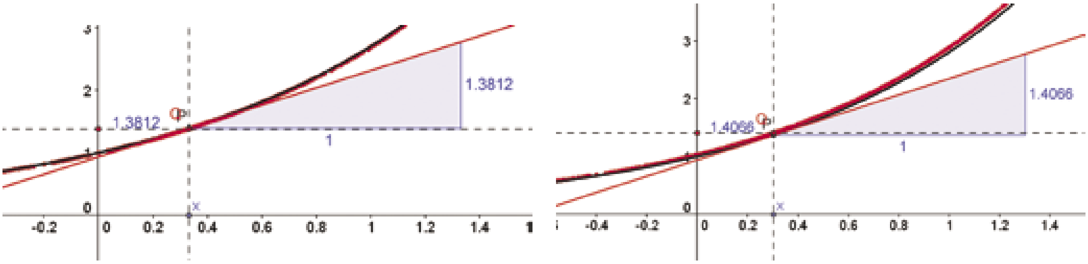
Etter de erfaringene vi gjør, virker det som en god idé å prøve funksjoner som ligger mellom $i(x)$ og $j(x)$, for eksempel $k(x) = 2{,}8^x$ og $l(x) = 2{,}7^x$. Resultatet kan vi observere i figur 5. Med det blotte øye kan vi se at $l(x) = 2{,}7^x$ er den funksjonen som ligger nærmest av disse to. I denne letingen går det etterhvert opp for oss at vi leter etter et bestemt tall. Dette tallet ligger altså en plass mellom 2,7 og 2,8. Ved å velge nye verdier mellom disse to tallene, kan vi minske intervallet enda mer. I denne teksten går vi ikke lenger, men overlater til leseren å finne enda bedre tilnærminger.

Noen refleksjoner

Det er tid for å reflektere over hva vi har observert. Vi startet med å lete etter en funksjon som har egenskapen $f'(x) = f(x)$. Vi har funnet funksjoner der den deriverte f'og funksjonen f er nesten like. Flere forsøk ville ganske sikkert ha gitt oss funksjoner som er enda mer lik sin deriverte. Vi kan derfor formode at det finnes en funksjon som har de egenskapene vi er ute etter og at hvis den funksjonen finnes, kan vi komme nærmere og nærmere ved hjelp av arbeidsformen i refleksjonen. Med de redskaper vi har til rådighet i videregående, er det hit vi kommer. Vi



Figur 4: Her observerer vi at funksjonen og den deriverte har samme form, $i'(x)$ ligger noe under, mens $j'(x)$ ligger over og enda nærmere.



Figur 5: Funksjonene *k'*(*x*) og *l'*(*x*) ligger ganske nær funksjonene de er utledet fra. Det kan også se ut som $2{,}7^x$ er den funksjonen som ligger nærmest funksjonen vi søker.

kan derfor avsløre at det vi har gjort er å gjenoppdage Eulers tall $e \approx 2{,}71828$. Det har fått navnet sitt fra den sveitsiske matematikeren Leonhard Euler (1707–1783) som ikke var alene om å oppdage tallet, men som har gitt viktige bidrag til forståelsen av det. Dette er et irrasjonalt tall og har stor betydning i matematikken. Derfor har vi brukt så mye tid for å lete etter det.

Slik vi har definert funksjonen e^x og tallet e blir det ganske enkelt å forstå at $(e^x)' = e^x$.

Det følger direkte av definisjonen. Når tallet e er definert, kan vi definere den naturlige logaritmefunksjonen $\ln(x)$ ved relasjonen

$$\ln(a) = b \quad \Leftrightarrow \quad e^b = a.$$

Ved å bruke kjerneregelen og det faktum at $(e^x)' = e^x$, finner vi at $(\ln(x))' = 1/x$.

Bare ett av mine spørsmål fra gymnastiden gjenstår: Hvorfor er $\ln(x)$ «naturlig»? Elevene kjenner begrepet *de naturlige tall* $\mathbb{N}$. De har selv lært dem ved å telle på fingrene, og da blir begrepet naturlig lett å skjønne. Gjennom arbeidet vi har gjort, får elevene elevene en opplevelse av å gjenoppdage tallet e. Det er ikke et tilfeldig valgt tall, men et tall som finnes i universet og naturen. Funksjonen $\ln(x)$ er skapt fra tallet e, og hvis noen logaritmefunksjon skal få betegnelsen naturlig, må det vel være denne?

(fortsatt fra side 18)

sjonens som er valgt for multiplikasjon er såpass intuitive at kriteriene for undervisningsforklaringer ikke forsvinner helt i matematiske utfordringer. Samtidig inneholder multiplikasjon sentrale matematiske idéer som distributivitet og kommutativitet, så når valget først var falt på multiplikasjon, pekte disse seg ut som mer eller mindre selvsagte egenskaper å ta tak i.

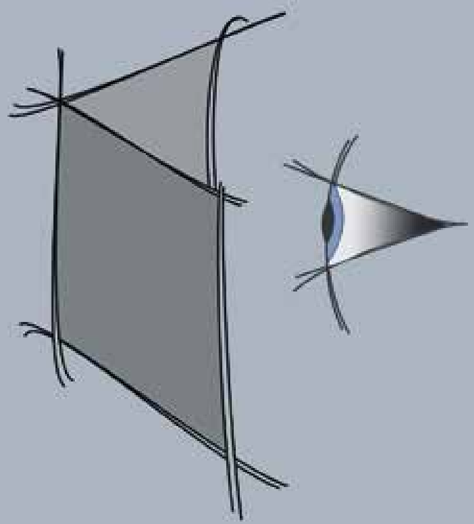
Referanser

Borko, H., Eisenhardt, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Doug, J. & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 194–222.

Charalambous, C. Y., Hill, H. C. & Ball, D. L. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: how does it look and what might it take? *Journal of Mathematical Teacher Education, 14*(6), 441–461.

Leinhardt, G. (1989). Math Lessons: A Contrast of Novice and Expert Competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 52–75.

Leinhardt, G. (2001). Instructional explanations: A commonplace for teaching and location for contrast. I C. Richardson (red.), *Handbook for research on teaching* (4. utgave, s. 333–357). Washington, DC: American Educational Research Association.



Bokomtale

Håkan Sollervall
Tall og de fire regneartene
Cappelen Damm As, 2012
172 sider 289,–
ISBN: 978-82-02-38867-6

Gode kilder med tips til variasjon i både tilnærming og metoder er kjærkomment for den som skal undervise i matematikk. Denne boken, som er beregnet på matematikklærere og lærerstudenter, presenterer et utvalg av varierte strategier og har som formål å styrke leserens tallforståelse og regneferdigheter. Dette vil forfatteren oppnå gjennom å vise flere måter å betrakte matematikken på, gi leseren noe nytt å gruble på og vise metodisk variasjon. Forfatteren fremhever at matematikk ikke bare handler om å regne, men om spennende måter å tenke på. Matematikklærere med god regnekompetanse er en selvfølge for god matematikkundervisning, men forfatteren vil bidra til at vi også har metodisk variasjon og kan arbeide med ulike representasjons- og kommunikasjonsformer for å styrke begrepsdannelsen hos elevene. Han fremhever at ulike metoder er gode på ulike måter, og advarer mot å lete etter en «beste» metode. Tanken er at variasjon vil styrke kreativiteten, utdype tallforståelsen og øke evnen til å vurdere sammenhenger og gjøre generaliseringer.

Boken har seks kapitler som tar for seg henholdsvis regning med positive heltall, brøk og divisjon, desimaltall og potenser, negative tall og subtraksjon, likheter og ulikheter, prosentregning.

Boken er rikt illustrert med forklarende figurer, uten å fremheve bruk av figurer og tegning som representasjon i seg selv. Jeg ser likevel visualiseringen som gjøres av de ulike tenkemåtene, som en styrke i boken. Det presenterer en forståelse og tenkemåte for oppgaven og gir likevel rom variasjon i den formelle skrivingen av matematikken som følger.

Spesielt i det første kapitlet, som tar for seg regning med positive heltall, tar forfatteren oss gjennom en stor variasjon av metoder og resonnementer. Blant disse metodene fant jeg, som forfatteren innledningsvis også hevdet alle vil finne, nye metoder som jeg kunne gruble litt på og vurdere opp mot metoder jeg kjenner fra før. Forfatteren ønsker at leseren skal møte spennende måter å tenke på, og presenterer også de ulike emnene på ulike måter. Noen metoder er utførlig begrunnet med hvilken forståelse som ligger bak, mens andre metoder presenteres løsere og mer som huskeregler. Det kan bli en fallgruve for leseren hvis man bare aksepterer regelen og leser videre. Leser man boken slik den er ment, betrakter man regelen, grubler litt over matematikken i den og utdyper sin egen forståelse for de ulike metodene. Erfarne lærere vil også kunne komme opp med enda flere metoder enn de som er beskrevet i denne boken. For eksempel presenteres det under emnet divisjon en metode forklart ved hjelp av hoderegning og en utførlig beskrivelse av det det jeg kjenner som standardalgoritme. Mange elever opplever divisjon som den vanskeligste regnearten. Av den grunn kunne jeg ønske et noe bredere grunnlag for metodevalg presentert akkurat i emnet divisjon, selv om forfatteren ikke tar mål av seg til å presentere en fullstendig «metodebank». For lærerstudenter og andre som har et ønske om å utdype sin egen forståelse for regneartene og få et bredere grunnlag til undervisning, oppnår forfatteren å få leseren til å tenke, gruble og ikke minst vurdere nye metoder mot dem vi kan fra før. I tillegg oppnår man gjerne å se allerede godt innarbeidete metoder i et nytt lys.

Forfatteren lykkes i denne boken i å presentere noen spennende betraktninger om matematikkforståelse og regnemåter. Beskrivelse av et rikt utvalg innfallsvinkler og metoder viser hvordan forskjellige kreative matematiske metoder kan brukes i forskjellige sammenhenger, alt etter hva hvilken matematikk oppgaven er ment å formidle.

Jannecke Lampe

Dodekaeder-kalender

Bas Vlam er kalligraf, og tidligere lærer ved Tveit skule på Askøy. Hvert år lager han en dodekaeder-kalender. Tangenten har fått lov til å legge malen for 2013-kalenderen på våre nettsider.

Du kan fritt benytte denne i din undervisning. Husk at den gjør seg best i A3-format.

www.caspar.no/tangenten/2013/kalender.pdf

KALENDER 2013

For å lage dodekaederet: lim alle trekantene inn etter tur men la august - som er uten limklaff - være den siste du limer.

sist →

Vil du notere deg noen bursdager eller andre merkedager; gjør det først, det er plass på linjene til slikt.

Kalenderen består av tolv femkanter (do=2 og deka=10) og er én av fem former som kan lages ut av samme geometriske grunnform. Dette påviste Platon (427-347) og de fem kalles derfor for platonske legemer.

Kalenderen er merket med rødt for søn - og helligdager, blåe ukenummer og de gamle folkelige navn på månedene også.

Med ønske om et godt år,
Bas Vlam,
postboks 147,
5329 Florvåg
mobilnr: 48 28 51 78

sjekk min hjemmeside: kalligraf.no

Rom for matematikk – i barnehagen er en nødvendig bok for arbeid med matematikk i barnehagelærerutdanningen. Forfatterne viser ulike matematikkdidaktiske innfallsvinkler til fagområdet matematikk og barn. Fagstoffet blir presentert med nærhet til praksisfeltet samtidig som det blir satt inn i faglige og historiske sammenhenger. Boka utfordrer og bevisstgjør leserne til å se muligheter i barns matematiske verden.

Bidragsytere:

Magni Hope Lossius:
Bildenes betydning – for små barn

Gert Monstad Hana:
Varians og invarians

Leif Bjørn Skorpen:
Utforskande tenking og samtale

Line I. Rønning Føsker:
Grip rommet!

Vigdis Flottorp og Torgunn Wøien:
Barns klassifisering og pedagogens muligheter

Elena Bøhler:
Matematikk i barnehagen: en historie

Trude Fosse (red.)
Rom for matematikk – i barnehagen

ISBN 978-8290898-57-6

137 sider · 365,–

Caspar Forlag AS · www.caspar.no

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Realfagbygget *A*4, NTNU
7491 Trondheim
Telefon: +47 73 55 11 42
Faks: +47 73 55 11 40
merete.lysberg@matematikksenteret.no

Matematikk – et fag i utvikling

Lene Grøterud Leer

Det var en kald onsdag i slutten av november. I et auditorium på Gløshaugen i Trondheim satt 260 mennesker og ventet på at noe skulle skje. Så smalt det i en dør. Inn kom studentkoret Pirum med sine flotte stemmer og humoristiske sanger. Tilskuerne svarte med latter og applaus. Novemberkonferansen 2012 var i gang! Konferansen var den ellevte i rekken, og årets tema var «Matematikk – et fag i utvikling». Jon Walstad, leder på Matematikksenteret, innledet konferansen med å fortelle om hva Matematikksenterets 25 ansatte arbeider med for tiden. Prosjektene er blant annet knyttet til ungdomstrinnsatsinga, Ny GIV, FYR, nasjonale prøver, den virtuelle matematikksskolen og flere regionale kompetanseutviklingsprosjekt. I tillegg fyller Matematikksenteret ti år i år, og det må jo markeres!

Thomas Nordahl holdt åpningsforedraget med tittelen «Kvalitet i skolen». I dagens skole får ikke norske elever realisert sitt potensial for læring og utvikling, og den primære utfordringen er knyttet til lærerens kompetanse. Nordahl fokuserte på hvor viktig læring og utdanning er for barn og unge, og hvordan utdanning er nøkkelen til å bryte dagens mønster hvor sosiale forskjeller reproduseres fra generasjon til generasjon. Sogn og Fjordane er det eneste fylket som skiller seg ut. Der er det et lavt utdanningsnivå i befolkningen, men på tross av det får de gode resultater i internasjonale undersøkelser. Kanskje følgende mentalitet råder i fylket: «Gjør det du må først, så det du vil»?

Liv Sissel Grønmo gav oss så et grundig innblikk i hva som kjennetegner matematikk i norsk skole. Hun tok utgangspunkt i resultater fra TIMSS/TIMSS Advanced og PISA. TIMSS er en læreplanbasert undersøkelse som inneholder mye formell/ren matematikk, mens PISA legger vekt på «Mathematical literacy» og inneholder mye anvendt matematikk. Resultatene viser at Norge ligger under gjennomsnittet i matematikk i begge undersøkelsene. Elevene har ikke gode nok grunnleggende kunnskaper og ferdigheter i matematikk, og da spesielt i tall og algebra. Det legges for lite vekt på formell/ren matematikk, automatisering av ferdigheter og kollektive arbeidsformer med diskusjon og argumentasjon.

Etter en nydelig lunsj fordelte vi oss på seks ulike paralleller. Forum for matematikkmestring videreformidlet stemmene til barn og unge i matematikkvansker. Gina Onsrud gav et innblikk i sin matematikkundervisning med aktiviteter, tips og råd for å få kreative og engasjerte elever. Svein H. Torkildsen fortalte om skolebaserte etterutdanningsprogram som Matematikksenteret har vært involvert i. Anne-Gunn Svorkmo tok for seg matematikken i midten, altså matematikken på mellomtrinnet, og hvordan gode problemer kan bidra til at elever får lyst til å lære matematikk. Tor Espen Kristensen så nærmere på hvordan digitale verktøy påvirker matematikkundervisningen og elevenes læring, og Kjetil Idås demonstrerte den virtuelle matematikkskolen og fortalte om erfaringene fra pilotperioden.

Lars Gustafsson avsluttet første dag av konferansen. Vi fikk høre om forskjellen på matematikk i skolen og matematikk i en konkret aktivitet eller handling, og at det ikke alltid er like lett å tilpasse skolematematikken til situasjoner utenfor skolen. Gustafsson tok oss med ut på arbeidsplassen til tømreren, blikkenslageren, rørleggeren, steinleggeren og glassmesteren. Han gav oss et innblikk i hvordan yrkesutøverne bruker kunnskaper, ferdigheter, tidligere erfaringer og «et yrkesblikk» for å løse praktiske utfordringer som involverer matematikk. Gustafsson refererte til to steinleggere som forklarte det slik: «Ser det bra ut får ögat så behöver man inte mäta» og «Det kändes bra. … Det räcker».

Etter at dagens formelle program var avsluttet, var det tid for boklansering av Lisa Lorentzens «Hva er matematikk». Boka er en del av serien «Hva er», som består av bøker om en rekke til dels svært forskjellige temaer skrevet av fagfolk for lekfolk. Alle konferansedeltakerne fikk et eksemplar av boka som et ledd i feiringen av at Matematikksenteret er ti år, og forfatteren holdt et inspirerende foredrag under lanseringsfesten. Deretter var det klart for festmiddag på Britannia Hotel med god mat og godt drikke. Praten gikk lett rundt bordene, og Pirum bidro med flere musikalske innslag.

Ingvill Merete Stedøy-Johansen innledet konferansens andre dag med foredraget «Skolefaget matematikk – i utvikling til det bedre?» Hun tok oss med på en 50 år lang reise fra hun var skolejente via arbeidet med å etablere Matematikksenteret til jobben hun har i dag som lektor på Lillestrøm videregående skole. Stedøy-Johansen ønsker at elevene skal utvikle indre motivasjon for å lære matematikk, og hun har en tro på at eksperimentering og utforsking gir gylne øyeblikk som skaper slik motivasjon. Samtidig er pugging undervurdert og nødvendig for at elevene skal automatisere operasjoner og prosedyrer. Det koster å bli god! Stedøy-Johansen gav oss flere eksempler på gode undervisningsopplegg som tar i bruk digitale verktøy, før hun avsluttet med tre råd for hvordan lærere kan gjøre en stor forskjell for elevene:

1. Lær elevene «å tenke begge veier»
2. Utfordre elevene ved å skape kognitive konflikter når de tenker feil
3. Trekk elevene litt lenger når det finnes muligheter for det

Så var det klart for seks nye paralleller. Forum for matematikkmestring fortsatte med samme tema som første dag. May Renate Settemsdal, Ingvill Merete Stedøy-Johansen og Øystein Wika gav en innføring i veilednings- og kartleggingsmaterialet «Alle Teller!», med et spesielt fokus på hvor viktig det er at elevene utvikler solide begreper i matematikk. Jens Arne Meistad presenterte FYR-prosjektet som har som mål å lage yrkesrettede og relevante undervisningsressurser i fellesfagene matematikk, norsk og engelsk, og han gav også et eksempel på en enkel oppgave om armeringsjern som inneholdt overraskende mye matematikk. Grethe Ravlo tok for seg resultatene fra de nasjonale prøvene på femte og åttende trinn og hvordan lærerne kan bruke resultatene og veiledningsmateriellet i det videre arbeidet i egen klasse. Mira Randahl så nærmere på lærebokas rolle i matematikkundervisningen og hvilket syn på matematikk, læring og undervisning lærebøkene formidler. Mike Naylor gav flere eksempler på hvordan kunst kan gjøre oss til bedre matematikere, og hvordan matematikk kan gjøre oss til bedre kunstnere. Deretter var det lunsj.

Kjersti Wæge fortsatte så med foredraget «Å regne i alle fag – god undervisning og læring». I forbindelse med Kunnskapsdepartementets strategi for skolebasert kompetanseutvikling på ungdomstrinnet (2012–2017) har det blitt utarbeidet beskrivelser av hva det vil si å være god i regning på ungdomstrinnet, og eksempler på hvordan lærere i alle fag kan bidra til at elevene utvikler gode regneferdigheter. I foredraget hadde Wæge fokus på matematikkfaget, og hun gav en rekke råd til hvordan lærere kan utvikle sin egen undervisningspraksis. Ett av tipsene som kan være veldig effektivt er å øke responstiden fra læreren stiller spørsmål til elever gir respons. I mange klasserom går det under ett sekund fra læreren stiller et spørsmål til elever svarer, læreren kommer med et oppfølgingsspørsmål eller læreren svarer på sitt eget spørsmål. Ved å øke responstiden til tre-fem sekunder oppnår man en rekke fordeler, blant annet at elevene gir mer utdypende svar, begrunner og forklarer svarene sine og er mer engasjerte. Læreren gir også mer gjennomtenkt respons og stiller færre spørsmål, men flere spørsmål av høyere orden. Vi fikk også se to filmer som viste fram enkle teknikker som kan tas i bruk i klasserommet.

Oliv G. Klingenberg fikk æren av å avslutte Novemberkonferansen 2012. Hun delte sine refleksjoner rundt matematikk som «fremmedspråk» og hvilke muligheter det gir for utvikling i faget. Klingenberg har gjennomført en studie hvor tre elever som bruker punktskrift i opplæringen, har deltatt på et kurs i geometri. Deretter har de fått i oppgave å bruke begrepene de har lært, for å beskrive konkrete gjenstander, og Klingenberg fortalte om hvordan elevene «ser» egenskaper og dimensjoner gjennom kroppen. Ved å se på matematikk som språkopplæring blir det tydelig at undervisningen bør legge mer vekt på at elevene snakker matematikk.

Så var nok en fantastisk konferanse over, men Matematikksenteret hadde en liten godbit på lager før folk dro hver til sitt. I forbindelse med Matematikksenterets tiårsfeiring ble det nemlig arrangert en konkurranse hvor premien var konferanseavgift til Novemberkonferansen 2013. Oppgavene finner du nedenfor.

Vi ses vel på Novemberkonferansen 2013?

Jubileumsoppgaver!

Mike Naylor

Matematikksenteret er ti år og arrangerte nylig sin ellevte novemberkonferanse. Jubiléet ble markert med et oppgavesett der premien var konferanseavgift og inntil to netter på hotell til Novemberkonferansen 2013. Anne-Mari Jensen fra Meløy videregående skole var eneste deltaker som hadde svart riktig på alle oppgavene, og hun stakk derfor av med premien. Her kan du prøve deg på oppgavene.

Riktig svar ser du på matematikksenteret.no.

1. Selvbeskrivende tall

Finn et tisifret tall der det første sifferet forteller hvor mange av sifrene i tallet som er 1, det andre sifferet forteller hvor mange av sifrene i tallet som er 2, det tredje hvor mange av sifrene i tallet som er 3, og så videre, og det tiende sifferet forteller hvor mange av sifrene i tallet som er 0.

2. Tre paintballskyttere

Tre motstandere møtes til en treveis konkurranse. De velger tilfeldig hvem som går først, og i hvilken rekkefølge de skal skyte. I hver omgang tillates skytteren ett skudd mot én av motspillerne. En spiller som er skutt, er eliminert. Spillet fortsetter til bare én spiller er igjen.

Spiller A er ekspert og treffer 100 %. Spiller B treffer 75 %. Spiller C treffer bare 50 %.

Hvis hver spiller bruker den beste strategien, hvilken spiller vil mest sannsynlig vinne?

3. Stor stein?

En stein veier 10 kg pluss halve sin egen vekt. Hvor mye veier den?

4. Krysse broen

En gruppe på fire personer må krysse en bro. Det er mørkt, og de må bruke en lommelykt til å lyse opp veien. Ikke mer enn to personer kan krysse broen samtidig. Siden de kun har én lommelykt, må to krysse og én må ta lommelykten tilbake før de neste to kan krysse, osv. Alle personene bruker forskjellig tid på å krysse broen:

Anne-Gunn bruker 1 minutt, Bård bruker 2 minutter, Christine bruker 5 minutter, og Dag bruker 10 minutter.

Hva er den kortest mulige tid for gruppen å krysse broen?

5. Tre kroner

Du har to enkronemynter. Den ene er en triksemynt med «KRONE» på begge sider, og den andre er en vanlig mynt. Du velger én av dem tilfeldig uten å vite hvilken du har valgt, og kaster den tre ganger. Det kommer opp KRONE hver gang. Hva er sannsynligheten for at neste kast også blir KRONE?

6. Samarbeid

Arne bruker 3 timer på å klippe plenen. Merete bruker 2 timer. Hvor lang tid vil det ta hvis de begge klippet samtidig med hver sin gressklipper?

7. Kyr og kyllinger

En bonde har mange kyr og kyllinger. Han prøver å telle dem og finner at det er 88 hoder og 222 ben. Hvor mange kyllinger har han?

Kenguroppgaver – da snakker vi!

Morten Svorkmo

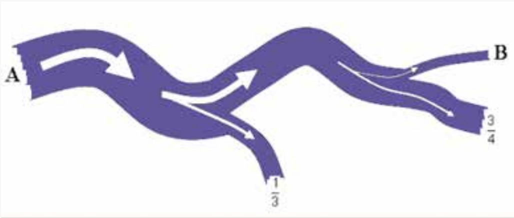
Mange kenguruoppgaver har problemstillinger som egner seg godt for pararbeid og diskusjon rundt løsninger og løsningsstrategier. Når elever er uenige om løsninger og må argumentere for sine løsningsvalg, er diskusjonene mellom elevene i gang. Dette gir ofte et godt utgangspunkt for å kunne arbeide med og forstå et matematisk problem. Matematisk argumentasjon og samtale er også et forsterket tema i kompetansemålene i høringsutkastet til reviderte læreplaner.

Jeg vil her vise eksempel på to oppgaver jeg har brukt i egen sjuendeklasse, og som jeg synes egner seg godt til dette formålet. Jeg sier ikke så mye om organisering her, men dersom en er bevisst på valg av organiseringsform, kan dette forsterke læringsutbyttet.

I begge disse oppgavene lot jeg elevene begynne med pararbeid for så å gå i grupper på fire før vi oppsummerte i fellesskap.

Oppgave 17 Benjamin 2008 (oppgaven er noe redigert)

En elv passerer punktet A og deler seg i to elveløp. I det ene går 1/3 av vannet, mens resten går i det andre elveløpet. Seinere deler elva seg enda en gang. Da går 3/4 av vannet til høyre og resten går til venstre mot punktet B.



Hvor stor del av vannet som passerer A, renner ut i elveløpet ved punktet B?

A) 1/4 B) 2/3 C) 11/12 D) 1/6 E) 1/2

Elevene fikk følgende utfordringer:

- Kan dere finne riktig løsning ut fra svaralternativene uten regning?
  Her må dere selvsagt kunne argumentere for valg av løsning.
- Kan dere velge andre tall i oppgaven, men slik at svaralternativet fortsatt er det samme?
- Kan dere velge andre tall i oppgaven slik at ett av de andre løsningsforslagene blir riktig?
- Lag en tegning av elva som stemmer med tallene dere har valgt.

Oppgave 23 Benjamin 2009

Åtte kort er nummerert fra 1 til 8. Kortene legges i boksene Rød og Blå slik at summen av kortene i begge boksene er den samme. Hvis det er bare tre kort i boks Rød, da kan du være sikker på at

A) tre kort i boks Blå er oddetall
B) fire kort i boks Blå er partall
C) kortet merket 1 er ikke i boks Blå
D) kortet merket 2 er i boks Blå
E) kortet merket 5 er i boks Blå

Elevene fikk følgende utfordringer:

- Bruk gjerne kort, og vis hvordan du kommer fram til løsningen. Forklar hvorfor dette må bli riktig.
- Lag en lignende oppgave til et annet par der du bruker et annet antall kort og lager minst tre løsningsalternativer der bare ett skal være riktig.

Kenguruoppgavene over er eksempler på hvordan en kan utvide oppgaver for så å bruke dem som utgangspunkt for en matematisk diskusjon. Oppgaver der elevene er avhengige av å snakke sammen, diskutere og bli enige om løsninger, anbefales både fordi det er motiverende, og fordi det kan gi en bredere forståelse. Ved en oppsummering i fellesskap må elevene kunne argumentere for sine løsninger. Det at de har jobbet i par og også i grupper på fire, gjør at flere lettere tar ordet og er aktive i en oppsummeringssekvens.

Finnes det en app for alt?

Gerd Åsta Bones

Høsten 2012 samarbeidet Gerd Åsta Bones og Mike Naylor ved Matematikksenteret med barn fra Regnbuen barnehage, Filip Witzell (også fra Regnbuen) og Anne Nakken ved DMMH (Dronning Mauds Minnes Høgskole) om å teste ut noen applikasjoner. Vi har lett etter applikasjoner med potensial for matematikklæring, testet ut med barn og utviklet opplegg i tilknytning til dem.

I Regnbuen barnehage har vi i denne perioden med testing og utprøving sett at barn elsker applikasjoner og nettbrett!

Barn har i dag tilgang til en ny og unik arena for spill, lek og læring med applikasjoner og nettbrett! Barn behersker ofte det tekniske nesten helt av seg selv.

Det ser ut til at touchmetoden faller naturlig for barna helt fra de er små. Barna finner selv ut hva de skal gjøre ved å prøve, trykke og se hva som skjer.

I rammeplanen er det presisert at «I barnehagen skal barna få kjennskap til digitale verktøy som inspirerer og motiverer.» Når vi tar i bruk applikasjoner og nettbrett, kan barna få mange erfaringer med matematikk på en lystbetont og engasjerende måte. Ved en gjennomtenkt og bevisst holdning sikrer vi god kvalitet og et godt læringsutbytte. Det er verdt å bruke tid og krefter på dette.

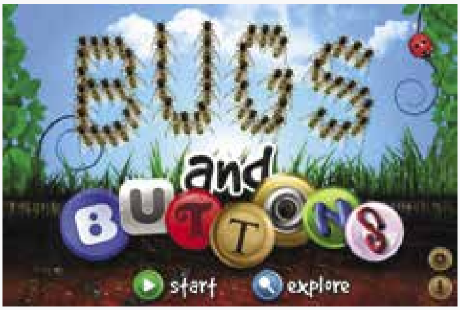
Selv om ikke alt har fungert like bra hele veien, har vi hatt mange aha-opplevelser og sett at den voksnes tilstedeværelse og tilrettelegging er en vesentlig faktor for suksess.

På nettsiden til Matematikksenteret finner dere en omtale av ti applikasjoner vi har funnet frem til og prøvd ut med barna. Vi håper dette kan gi inspirasjon og lyst til å prøve noen av dem og også lyst til å søke flere muligheter. I det følgende omtaler vi et eksempel: BUGS and BUTTONS.

Vi har videre utviklet et kvalitetssikringsskjema som vi håper kan være til hjelp når dere selv skal lete etter egnede applikasjoner. Skjemaet finner dere også på nettsiden til Matematikksenteret.

BUGS and BUTTONS

Her får barna røre på svermer av kakerlakker, bier, marihøner og knapper i ulike farger og mønster. Applikasjonen inneholder 18 forskjellige aktiviteter med telling, sortering, klassifisering, mønster med mer. Barna får en rekke utfordringer med fast progresjon, eller de kan utforske fritt. Det er enkle visuelle instruksjoner, og det er lagt opp til at barna kan gjennomføre aktivitetene individuelt og uten voksenstyring.



Faglig innhold (Hovedområde: Antall, rom og form):
- telleregla
- én-til-én-korrespondanse
- tall og symbol
- sortering
- klassifisering
- rekkefølge og plassering
- mønster

Gode spørsmål/idéer:

Finn frem knapper og insekter eller lignende konkretiseringsutstyr/materiell som kan brukes i tillegg til applikasjonen! Gjør de samme aktivitetene med dette materiellet både før og etter bruk av applikasjonen. På denne måten vil utbyttet/læringseffekten av det barna gjør individuelt, forsterkes når det blir reflektert og oppsummert rundt de ulike aktivitetene.

Kan du gi meg fem knapper? Er det nok knapper til at alle kan få én hver? Hvor er det flest knapper? (Legg frem to hauger med ulikt antall.)

Hvordan vil du sortere insektene? Kan du sortere knappene i to grupper? Kan du sortere knappene i éi gruppe med blå knapper og éi gruppe med knapper med to hull? Hva med de som er både blå og har to hull?

Hvor er knappen nå? (Gjem knappen i én av tre bokser, som deretter flyttes rundt.)

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
v/Randi Håpnes
NTNU, Realfagbygget
7491 Trondheim

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det overordnede målet for Landslaget for matematikk i skolen er å heve kvaliteten på matematikkundervisningen i grunnskolen, den videregående skole og på universitet/høyskole.

Landslaget skal stimulere til kontakt og samarbeid mellom lærere på ulike utdanningsnivåer og mellom lærere og andre som er opptatt av matematikk.

Styret for LAMIS

Leder
Anders Sanne, Trondheim
Barnehage/førskole
Else H. Devold, Oslo
Barnetrinnet
Åge Rygsether, Nedre-Eiker
Ungdomstrinnet
Gerd Nilsen, Hedmark
Videregående skole
Anne-Mari Jensen, Meløy
Høgskole/universitet
Marianne Maugesten, Østfold
Varamedlemmer
1. Grete Tofteberg, Østfold
2. Trine S. Forfang, Vestfold

Medlemskontingent

380 kr for enkeltmedlem m/Tangenten
150 kr for husstands-medlemmer
150 kr for studenter m/Tangenten
760 kr for skoler/institusjoner m/Tangenten

Organisasjonssekretær

Gro Berg
org.sek@lamis.no
41562324

Husk
LAMIS sommerkurs
i Trondheim
7.–9. august 2013

Lederen har ordet

Anders Sanne

Stortingsmelding 22 (2010-2011) legger opp til at elevene skal oppleve ungdomstrinnet som mer praktisk, relevant og engasjerende. Nye valgfag, en virtuell matematikkskole og en stor satsing på kompetanseutvikling skal bidra til å fornye ungdomstrinnet. I Norge er det nesten 1 200 skoler med ungdomstrinn, og i løpet av de neste fem åra vil alle disse skolene få tilbud om skolebasert kompetanseutvikling i klasseledelse, lesing, skriving og regning. Tilbudet vil bli gitt av lærerutdanningsmiljøene ved høgskolene og universitetene, og det er lagt opp til at skolene selv skal velge hvilke(t) tema de vil satse på. På Matematikksenteret, der jeg jobber, har vi det siste året utarbeidet bakgrunnsdokumenter og materiell som kan brukes av de skolene som velger å satse på regning. Satsingen skal gjelde alle skolens ansatte, og den er rettet inn mot regning som grunnleggende ferdighet i alle fag. Jeg håper LAMIS' medlemmer på ungdomstrinnet vil engasjere seg i regnesatsinga og bidra til å fornye ungdomstrinnet generelt og matematikkopplæringen spesielt.

Matematikkens dag og sommerkurs

Når dette nummeret av Tangenten foreligger, står Matematikkens dag for tur rundt om på mange av landets skoler. Matematikkdagsheftet er sendt ut til alle medlemmer, og LAMIS oppfordrer barnehager og skoler til å arrangere Matematikkens dag i uke 6. Årets hefte er laget av LAMIS Østfold, og det er fult av idéer til opplegg. Om uke 6 passer dårlig på din skole, så går det selvsagt fint an å arrangere Matematikkens dag på et annet tidspunkt også. Matematikksenteret og LAMIS Fosen inviterer til sommerkurs 7.–9. august 2013 i Trondheim. Sett av datoene allerede nå. Tittelen på årets sommerkurs er «Matematikk: Praktisk, relevant, engasjerende». Mange medlemmer er trofaste bidragsytere til verkstedene på sommerkurs, og jeg oppfordrer både gamle ringrever og nykommere til å melde inn sine bidrag. Verkstedene gir praksisnærhet, og er viktige for et godt sommerkurs!

Verving og medlemskap

Delta i vervekampanjen vår, og vinn en uke i Tyrkia! Siden i sommer har vi fått mange nye medlemmer, men vi har plass til flere. Har du en god kollega som vil være med? Har du fortalt studentene dine om LAMIS? Vi har utarbeidet en ny vervefolder som du kan bestille fra post@lamis.no, eller laste ned fra www.lamis.no og skrive ut selv.

I LAMIS' medlemsregister mangler det opplysninger om hvilket skoleslag medlemmene jobber i og hvilket lokallag de er tilknyttet. Vennligst bruk skjemaet på http://goo.gl/7Kkil, og send oss dine oppdaterte medlemsopplysninger.

Matematikkprøver – allsidighet og variasjon

Geir H. Botten

På de fleste klassetrinn er det tradisjon for at en gjennomfører prøver etter at en er ferdig med et emne eller et kapittel i matematikkboka. Mange elever har negative opplevelser knyttet til slike prøver, og på heldagsprøver opplever en det ved mange skoler som et stort problem at mange elever går etter én til to timer av prøvetiden.

Mange elever oppnår den beste læringen nettopp gjennom å arbeide med gode og meningsfulle oppgaver på en prøve. Men når mange tydeligvis har prestert det de makter i løpet av én til to timer, må det være selve prøven eller prøvesituasjonen det er noe fundamentalt galt ved.

De siste årene har en lagt stadig større vekt på at prøver skal være en forlengelse av læreprosessen, men også en integrert del av den. Samarbeid og samhandling i faget har også fått en større plass. Begge disse forholdene har resultert i behov for å endre innholdet i prøvene og ta i bruk flere nye prøveformer. Samarbeid og kommunikasjon må trenes opp gjennom hele skoleåret, både gjennom samarbeidsoppgaver og større eller mindre prosjektoppgaver. Også ved prøver må elevene få oppleve at samarbeid kan lønne seg. Det burde være et siktemål at alle elever har oppgaver og utfordringer de kan arbeide med under hele prøvetiden.

Jeg har med stort hell brukt ulike modeller for å gjennomføre prøver der elevene får anledning til å samarbeide på hele prøven eller på deler av den. Det gjelder blant annet:

Prøvetid to timer, uten at elevene har sett oppgavene på forhånd. De første 10 minuttene leser elevene oppgavene hver for seg. Deretter går de sammen i smågrupper (helst to og to) for å diskutere og gi hverandre idéer og tips til hvordan de skal løse de ulike oppgavene. Tiden bør være såpass knapp at de ikke kan sitte sammen og løse oppgavene, men de kan notere stikkord og diskutere strategier. Etter for eksempel 20 minutter går elevene hver for seg og løser oppgavene individuelt.

Prøvetid fire til seks timer, heldagsprøver uten at elevene har sett oppgavene på forhånd. En kan gjennomføre prøven omtrent som i forrige eksempel, men her er det naturlig å utvide tiden i smågruppene til for eksempel en time. Et alternativ er å bruke kortere tid til å gi hverandre idéer og tips, og i tillegg legge inn en samarbeidsøkt på for eksempel en halv time etter at prøven har vart i to timer.

Prøvetid fra to timer til hel dag, der elevene arbeider med oppgaver eller aktiviteter som læreren har plukket ut. Alle hjelpemidler er tillatt. En kan velge om elevene kan samarbeide under hele prøven eller under deler av den. Resultatet av alt elevene har gjort, blir levert og vurdert av læreren, eller deler av arbeidet kan leveres eller plukkes ut til mappevurdering.

Prøvetid to timer, der elevene sitter sammen i grupper (gjerne to og to) hele tiden. Det kan variere fra gang til gang om en gir ut oppgavene på forhånd eller ikke. Det kan også være aktuelt å gi rammen for oppgaven på forhånd, mens den detaljerte oppgaveutformingen blir gitt på selve prøvedagen. På slike prøver bør elevene levere hver sin besvarelse.

De to første prøveformene kan gjennomføres med oppgaver slik vi kjenner dem fra tradisjonelle prøver, mens de to siste krever at vi utformer oppgavene slik at de er egnet for samarbeid.

Tren Tanken – med forståelse i fokus

Monika Nordbakke, Kari-Anne Bjørnø Karlsen

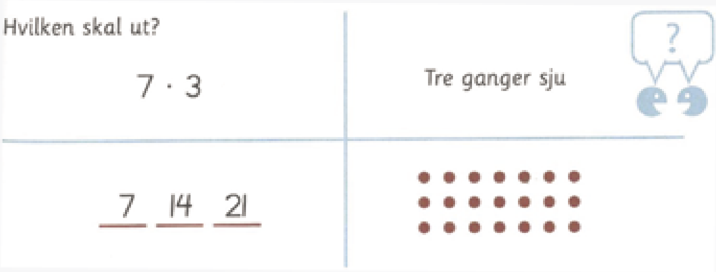
I idéheftet for matematikkdagen 2013 finner du et knippe aktiviteter innenfor undervisningsstrategien *Tren Tanken*. Denne arbeidsmåten er basert på en undervisning hvor matematisk forståelse står sentralt, og både refleksjon og muntlig samtale er hovedelementer i denne metodikken.

Hva er *Tren Tanken*?

Utgangspunktet for oppgaver innenfor *Tren Tanken* er at elevene øves opp i å bruke egen kunnskap, som skal utvikles videre på en kritisk måte (Nolet, 2006). Prosessen innebærer at elevene konstruerer innsikt, ferdigheter og kunnskaper i samspill med andre (Olafsen og Maugesten, 2009). Undervisningsoppleggene kalles *Teaching Thinking* i England, og ressursgrupper hovedsakelig i Norge, England og Nederland arbeider med å videreutvikle strategiene. Mye av litteraturen innenfor *Tren Tanken* finnes innenfor samfunnsfagdidaktikk, men i *Matematikkdidaktikk i klasserommet* (Olafsen og Maugesten, 2009) er et helt kapittel viet til undervisningsstrategien. *Tren Tanken* er en undervisningsstrategi som kan deles inn i fire faser (Nolet, 2005). Disse fasene er forberedelse, introduksjon for klassen, gjennomføring og til slutt gjennomgang. Aktiviteten planlegges av læreren, og den tilpasses både klasse og kompetansemål som ønskes gjennomgått. Deretter forklarer læreren for klassen hvordan oppgaven skal løses, og at det kan være flere svaralternativer og løsningsstrategier. Under gjennomgangen diskuterer elevene i grupper, og læreren observerer elevene uten å bryte inn. Til slutt legger alle elevene fram sine løsninger og skal reflektere over egen løsning. Det er den siste fasen som er den viktigste i *Tren Tanken*, og denne fasen skal bidra til at elevene resonnerer rundt egen kunnskap, og hvordan denne kan brukes videre på nye områder (ibid). I idéheftet til matematikkdagen 2013 er det foreslått at aktivitetene enten gjennomføres som en gruppeaktivitet eller som en aktivitet for hele klassen (Hågensen, Karlsen og Nordbakke, 2012a).

Hvorfor *Tren Tanken*?

Forskning på læringseffekten av *Tren Tanken*-opplegg har vært gjort innenfor geografi, samfunnskunnskap og historie (Nolet, 2005). I studiene har klasser med stadige opplegg i *Tren Tanken* blitt sammenlignet med andre klasser. Funnene viser økt læringsutbytte med bruk av *Tren Tanken*. Økt læringseffekt betyr i dette tilfellet bedre evne til kritisk tenkning og refleksjon. I matematikk har opplegg vært testet på elever, studenter og lærere. Alle gir positive tilbakemeldinger (Olafsen og Maugesten, 2009). Målet for aktivitetene er bedre forståelse av begreper og definisjoner. Erfaringsmessig vil *elever som strever med faget, i langt større grad delta aktivt i denne type aktivitet* (Hågensen, Karlsen og Nordbakke, 2012b, s. 47). Kunnskapsløftet begrunner muntlighet i en av de grunnleggende ferdighetene (Kunnskapsdepartementet, 2006). Å kunne uttrykke seg muntlig står helt sentralt i *Tren Tanken*-aktivitetene. Innenfor sosiokulturell læringsteori framheves læring av matematikk som en utvidelse av elevenes evne til å delta i faglig relaterte samtaler, og «[…] klasserommet som felles arena for læring framstår som en avgjørende faktor for hva elevene lærer i matematikk.» (Grønmo, Onstad



Figur 1: *Matte overalt* grunnbok 3B side 55.

og Pedersen, 2010, s. 219).

Oppgavetyper innenfor *Tren Tanken*

Det nye lærebokverket for barneskolen *Matte overalt* (Kaufmann, Olavsen og Rikheim, 2010) har refleksjon som én av hovedtankene. Oppgavetypene *Hvilken skal ut*? er en typisk *Tren Tanken*-aktivitet (figur 1).

Her skal elevene finne kriterier for at en figur eller et bilde ikke passer inn i gruppa. Det må gis begrunnelser for valget. Diskusjonene blant elevene bør føre til ulike løsninger slik at det ikke er entydige fasitsvar, og det kan konkurreres om å finne flest mulige løsninger. I heftet til matematikkdagen 2013 (Hågensen et al., 2012b) er det skissert løsningsforslag for alle de fire elementene i hver oppgave, og det er utarbeidet slike opplegg innenfor tall og algebra, geometri, areal og omkrets og funksjoner med ulik vanskelighetsgrad slik at de kan benyttes på alle trinn.

I *Matematikkdidaktikk i klasserommet* (Olafsen og Maugesten, 2009) foreslås flere opplegg. En aktivitet går ut på å definere begreper uten å bruke noen spesielt utvalgte ord. Et eksempel er å forklare begrepet sirkel uten å bruke ordene *rund*, *radius*, *omkrets* og *diameter*. En annen aktivitet dreier seg om å knytte begreper sammen med bilder. Her kan man eksempelvis ha bilder av ulike grafer som man kan koble sammen med generelle egenskaper (avtagende vekst, har nullpunkt, kontinuerlig stigende o.l.).

Et slagord bak *Tren Tanken* er «Lite å skrive, mye å tenke.» (Lund, 2006) Opplegget *Å finne riktig rekkefølge* (Olafsen og Maugesten, 2009) støtter dette. Her får elevene utlevert et løsningsforslag på en matematisk oppgave. Det som er spesielt, er at de ulike trinnene i løsningsprosessen er klippet opp, og elevene møter dem som fragmenter av løsningen. Elevene skal komme fram til opprinnelig rekkefølge. Da vil de også måtte vurdere om det er noen regneoperasjoner de ville ha utelatt. Dette kan eksempelvis benyttes i likningsløsning og algebraregning.

Hva mener du? er en annen aktivitet fra idéheftet. Opplegget er hentet fra Australia (Keeley og Toby, 2011). Innenfor hver oppgave er det bilde av flere barn som presenterer hver sin påstand. Elevene skal i gruppe vurdere hvorvidt påstandene stemmer, og flere av alternativene kan stemme. Svarene begrunnes med tegninger, regning eller konkreter. En lignende gjennomføring utføres i Sant–usant, hvor elevene avgjør om ulike kort med påstander knyttet til forskjellige kategorier er sanne eller ikke. I matematikkdagheftet for 2013 har også forfatterne laget egne påstander innenfor algebra, geometri og areal og omkrets. Det foreslås at elevene plasseres i grupper på 3-4 elever hvor elevene diskuterer om påstandene kan gjelde

STEMMER DET?

ALLTID – SOMME GONGER – ALDRI

a I bokstavuttrykk har kvar bokstav sin faste verdi.

b $a + a = a^2$ og $a \cdot a = 2a$

c Eit uttrykk er det same som ein formel.

d Når a står for ei lengd, er a^2 uttrykk for eit areal.

e Når $a = 3$, er $2a = 23$.

f $ab = ba$

Figur 2: *Sirkel Grunnbok* 10A side 133.

Figur 3: *Skolenes matematikkdag* 2007, side 44.

aldri, noen ganger eller alltid (Hågensen et al., 2012b). I Sirkel (Thorkildsen og Maugesten, 2008) benyttes også påstander på liknende måte (figur 2). I dette læreverket blir denne oppgavetypen ofte benyttet som en oppsummerende aktivitet mot slutten av et kapittel.

I tidligere matematikkdaghefter har vi sett samarbeidsoppgaver av ulike typer. En av dem er at fire elever på en gruppe henter hver sin opplysning, for så å sette alle opplysningene sammen til en løsning. Dette betinger bidrag fra alle elevene. For de som fortsatt ikke finner en løsning, kan man komme med ekstraopplysninger. Eksempelet i geometri for småskoletrinnet/mellomtrinnet (figur 3) er hentet fra 2007-utgaven (Alseth et al., 2007).

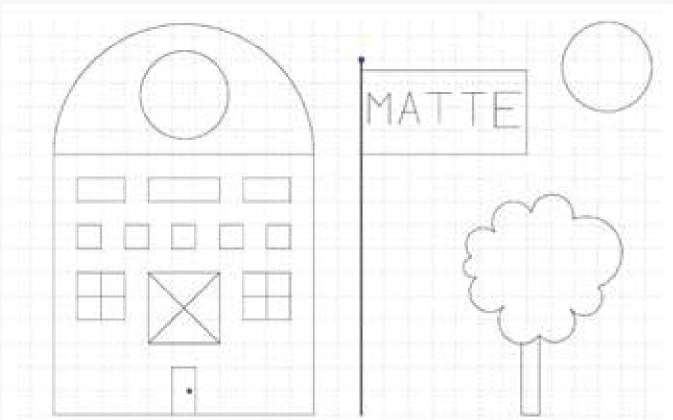
For at *Tren Tanken*-strategiene skal bli en suksess, må alle oppleggene avsluttes med en oppsummering der ulike forslag eller utdrag fra gruppediskusjoner drøftes i plenum (Lund, 2006). Det analyseres og reflekteres rundt valgene slik at flest mulig løsninger gjøres kjent for elevene. Gjennom denne samtalen diskuteres faglige problemstillinger og elevenes løsningsstrategier. I tillegg er det naturlig å snakke om hvordan man kommer fram til sitt løsningsforslag. Denne formen for metakognisjon er en krevende prosess for både lærer og elev, men ved hjelp av denne samtalen bevisstgjøres elevene, og det skapes innsikt i egen tenking og læring (ibid). Denne oppsummeringen er den fjerde fasen i *Tren Tanken*-strategien (Nolet, 2005).

Tren Tanken i klasserommet

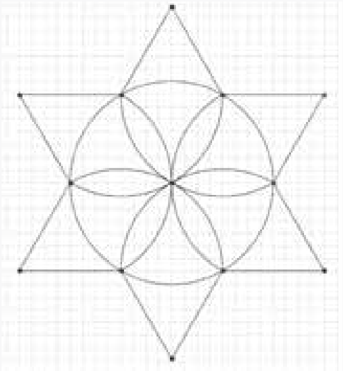
Tren Tanken-strategiene er undervisningsopplegg som elevene umiddelbart favoriserer og liker. Erfaringsmessig økes motivasjonen, og elevene jobber målrettet og konsentrert med oppgavene. Disse oppleggende er annerledes enn hva elevene som oftest er vant med fra tidligere, og det er en fordel å introdusere lavere trinns oppgaver for å understreke den nye arbeidsmetoden. Vi vil nå belyse et eksempel på bruk av *Tren Tanken* i geometriundervisning for ungdomstrinnet.

Første time

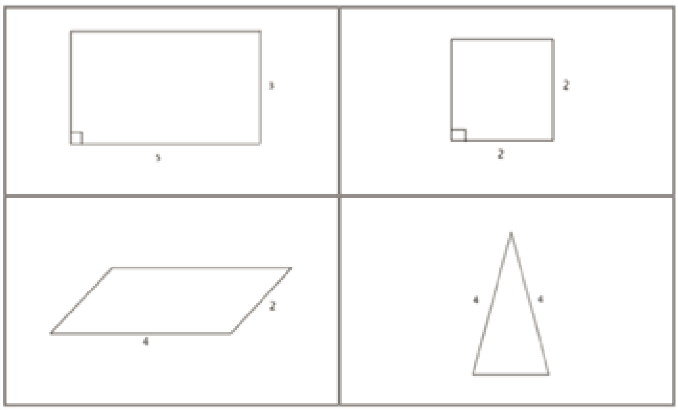
Elevene har på dette tidspunktet lært en god del om geometri. De har kjennskap til arealformler, volumformler og omgjøring mellom de ulike måleenhetene. For å «varme opp» elevene i bruk av *Tren Tanken*-filosofien, blir



Figur 4: *Idéhefte til Matematikkdagen* 2013, s. 67.



Figur 5: *Idéhefte til Matematikkdagen* 2013 s. 68.



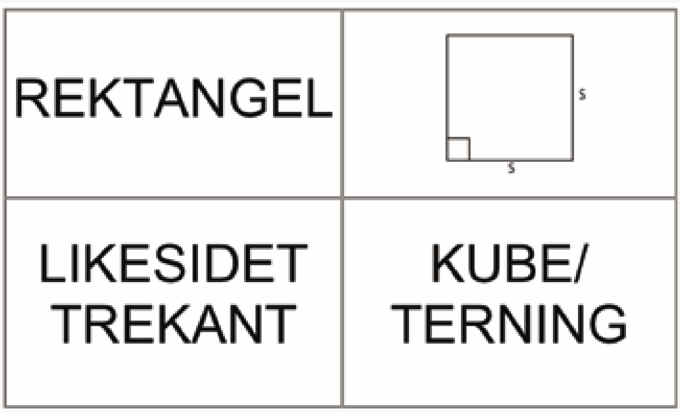
Figur 6: Idéhefte til Matematikkdagen 2013, s. 98.

elevene delt inn i grupper på fire. Deretter får de først oppgaven «Figur i minnet» for mellomtrinnet (figur 4). Denne introduksjonen er andre fase i *Tren Tanken* (Nolet, 2005), hvor elevene gjøres kjent med strategien. Gjennom muntlig kommunikasjon skal elevgrupper på 2–4 reprodusere et bilde som ligger permanent et sted i klasserommet. Første elev observerer bildet for så å returnere til gruppa og beskrive hva disse skal tegne. Neste elev ser på bildet og kommer med nye detaljer som tilføres tegningen. Underveis går læreren rundt for å høre den matematiske praten rundt pultene, og det er oppsiktsvekkende hvor mange matematiske begrep elevene benytter i oppgaveløsningen. Dette er tredje fase i *Tren Tanken* (Nolet, 2005). For å klare å reprodusere rett figur, er det viktig at elevene kjenner til begrep som kvadrat, rektangel, sirkel, halvsirkel og diagonal for å formidle figuren videre muntlig. Dette trener elevenes kommunikasjon med hverandre, og de blir nødt til å bruke matematiske begrep i samtalen (Hågensen et al., 2012a, s. 68).

Etter at læreren har godkjent figuren, får elevene prøve seg på en oppgave beregnet på ungdomstrinnet (figur 5). Denne gangen er det et krav fra læreren at elevene skal bruke passer for å konstruere figuren. Siste trinn i denne omgangen er å la elevene konstruere figuren ved hjelp av GeoGebra. I tillegg til at *Tren Tanken*-strategien gir elevene god trening i muntlig aktivitet, viser oppgaven seg å være en god arbeidsøkt for å lære mer om dette programmet. På den måten kan også reproduksjonen gjøres digitalt (Hågensen et al., 2012b).

Andre time

På dette tidspunktet er elevene godt i gang med den muntlige diskusjonen, og forrige time oppleves som annerledes og motiverende. Denne timen blir den tidligere nevnte *Hvem skal ut*?-strategien benyttet. Også denne



Figur 7: Idéhefte til Matematikkdagen 2013, s. 99.

Figur 8: *Idéhefte til Matematikkdagen* 2013, s. 132.

gangen blir elevene kjent med metoden gjennom lavere trinns oppgaver. Dette eksempelet er hentet fra mellomtrinnet (figur 6). *Elevene* starter argumentasjonen i grupper, og de skal igjen legge fram forslag muntlig i klassen. Læreren er klar over at oppgaven ikke har en entydig fasit, og dette gjør elevene mer modige til å komme med innspill. Det mest oppsiktsvekkende fra denne timen er at også elevene som presterer på lavt nivå, bidrar med gjennomtenkte og gode løsningsforslag. Dette gjør igjen at de våger å komme med argumenter også når oppgaven for ungdomstrinnet blir presentert. Etter et *Hvem skal ut*?-oppdrag fra ungdomstrinnet (figur 7) er timen omme, og elevene har argumentert, diskutert og konkurrert seg i mellom. I tillegg har mange begreper blitt benyttet, og de har regnet arealoppgaver, sjekket sammenhenger mellom figurene og virkelig utforsket geometrien. Elevene er i langt større grad enn vanlig lekne og vitebegjærlige, og når lærerens forslag til løsning blir presentert, er det spesielt hyggelig at en av de lavt presterende elevene har kommet nærmest en løsning. I dette tilfellet vil rektangelet være den mest optimale løsningen fordi det er den figuren som i framstillingen er den eneste figuren som ikke nødvendigvis er regulær.

Tredje time

For å avrunde temaet geometri blir siste time benyttet til aktiviteten *Areal, omkrets og diskusjon av påstander* (figur 8). Denne aktiviteten gir elevene tolv påstander de skal ta stilling til. Her må elevene diskutere i grupper om påstandene gjelder alltid, noen ganger, eller aldri. Aktiviteten blir delt ut, og elevene går i gang med opplegget med en positiv innstilling siden de forrige timene har vært svært motiverende. Praten går lett rundt bordene, og de elevene som normalt har vært innesluttet og lite deltagende, har fått ny tro på seg selv og egen kompetanse. De er ikke lenger like redde for å svare feil siden de fleste i klassen har kommet med løsningsforslag uten at det nødvendigvis har vært riktig. Det faktum at oppgavene ikke har en opplagt løsning, gjør at elevene blir langt modigere. Elevene diskuterer og er både enige og uenige om påstandene. I løpet av timen er det skapt kognitive konflikter samt etablert ny begrepsforståelse hos elevene.

I disse aktivitetene blir *Tren Tanken*-aktiviteter brukt som en oppsummerende aktivitet. Det er viktig å understreke at strategien med fordel kan benyttes gjennom hele arbeidet med et tema.

Konklusjon

«Det er i pedagogiske og fagdidaktiske miljøer en økt oppmerksomhet på språkets betydning i læreprosessen.» (Grønmo et al., 2010, s. 117.) *Tren Tanken*-strategiene er en måte å gripe fatt i matematikkens språk på. Metoden krever en annerledes tenkning som gir nye innfallsvinkler til sentrale matematikkområder. Å gjennomføre slike opplegg medfører en undervisning med fokus på forståelse, noe som er helt avgjørende for elevers utvikling av matematikkunnskap. *Tren Tanken* er et felt med svært mange muligheter

(fortsettes side 71)

Fra «Pythagoras i tareskogen» til Abelkonkurransen

Anne Borg, Anne-Marie Astad, Trine Gerlyng

«Pythagoras i tareskogen» er Abelstyrets tiltak for de aller yngste. Det er en matematikkutstilling på Vitensenteret Sørlandet i Arendal for barn i alderen ett til tre år. I tillegg ønsker man å nå foreldre og ansatte i barnehagene. Utstillingen som ble åpnet 12. desember 2012, er ett av prosjektene som i fjor fikk støtte gjennom midlene til barne- og ungdomstiltak som Abelstyret deler ut. «Pythagoras i tareskogen» presenteres av prosjektansvarlig Eili Lindøe under Holmboe-prisutdelingen på Oslo katedralskole 22. mai.

Foto: Harald Hanche-Olsen

De tre beste i Abelkonkurransen 2012: Sofia Lindqvist fra Trondheim katedralskole gikk helt til topps i Abelkonkurransen 2012. På de neste plassene fulgte Gard Olav Helle, Foss videregående skole og Yimou Li Red Cross Nordic United World College.

Abelstyret har oppnevnt et eget barne- og ungdomsutvalg med ansvar for tiltak rettet mot denne målgruppen. Utvalget, som ledes av Anne Borg, har de siste årene foreslått tiltak innenfor en ramme på omkring 1,5 millioner kroner. Det er to årlige søknadsfrister i 2013, 1. oktober og 1. mars. I tillegg kommer midler fra samarbeidet med PGS, Petroleum Geo-Services. PGS samarbeider med Det Norske Videnskaps-Akademi om å stimulere interessen for matematikk både i Norge og internasjonalt, spesielt blant barn og unge og i utviklingsland.

Barne- og ungdomsutvalget har over flere år bygd opp en tiltakskjede der de ulike elementene bygger på og utfyller hverandre. Med «Pythagoras i tareskogen» har også de aller minste barna fått et godt tilbud.

I den andre enden av aldersskalaen støttes Niels Henrik Abels matematikkonkurranse. Abelstyret bevilger videre midler til Nordic Math Class Competition som er den nordiske varianten av KappAbel.

LAMIS og Foreningen norske vitensentre har vært viktige samarbeidspartnere i mange år. Støtten til LAMIS har vært kanalisert gjennom to hovedtiltak: matematikkdagen på skolene i februar og sommerkurset som i år arrangeres i Trondheim i august. Tilskuddet for 2013 blir på 250 000 kroner, og Abelstyret har gitt tilsagn om samme beløp i 2014. Vitensentrene kom først på banen gjennom støtte til enkelttiltak. De har nå gått sammen om en felles matematikksatsing på vitensentrene. Abelstyret bevilger 500 000 kroner for 2013 og har gitt tilsagn om tilsvarende beløp også for de to påfølgende årene.

Abelpenger til aktiviteter

Abelstyret gir også støtte til enkeltprosjekter. Vitensenteret i Trondheim får i 2013 støtte til å utvikle matematikk som et nytt tema for Eksperimentklubben med 10–12-åringer som målgruppe. Det pedagogiske innholdet skal være praktisk rettet og vise spennvidden i matematikk. Eksperiment-klubben har eksistert siden 1999 som et populært tilbud i skoleferiene med temaer som fysikk, kjemi og teknologi. Eksperimentklubben vil være en flott arena for å utvikle interessen for matematikk.

Det har blitt en tradisjon at Abelprisvinneren besøker en av universitetsbyene utenom Oslo under Abeluka. Abeluka omfatter en rekke aktiviteter der utdelingen av Abelprisen er høydepunktet. I år skal prisvinneren til Trondheim 23. mai. Et fast innslag har alltid vært at prisvinneren møter barn som får prøve seg på varierte matematikkoppgaver. Institutt for matematiske fag ved NTNU planlegger i den anledning å lage en matematikkløype for åttende trinn i grunnskolen som både elever og Abelprisvinneren kan bryne seg på. Planen er at dette skal være oppstarten på en matematikkløype som kan tilbys på årlig basis. Abelstyret har bevilget 80 000 kroner til dette arrangementet.

Abelutstilling

Stiftelsen Abelsenteret har laget en ny Abelutstilling til Abelrommet på Holmen Gård i Gjerstad i Aust-Agder. Planen er å åpne utstillingen for skoleklasser i grunnskolen i fylket og lage aktiviteter i tilknytning til besøk og omvising. Det skal videre utarbeides en prosjektskisse til bruk i Den kulturelle skolesekken. Abelutstillingen ved Abelsenteret gir en fin synlighet av Niels Henrik Abel og matematikken hans for barn og unge, mener Abelstyret, som bevilger støtte til etablering av de nye tiltakene i 2013.

Neste søknadsfrist 1. mars

Neste utlysning av midler til tiltak for barn og unge er 1. mars 2013. Eget søknadsskjema kommer på www.abelprisen.no. Søknader sendes til trine.gerlyng@dnva.no; utfyllende informasjon kan fås ved henvendelse til Trine Gerlyng.

(fortsatt fra side 69)

som i hvert fall vi kommer til å utvikle videre. Vi håper at flere blir med oss på ferden!

Referanser

Alseth, B., Fjermedal, G., Jæger. E., Skori, T., Smestad, B. & Torkildsen, S. H. (2007). *Skolenes matematikkdag Idéhefte – 2007*. Trondheim: LAMIS.

Grønmo, L. S., Onstad, O. & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole*. Oslo: Unipub.

Hågensen, L., Karlsen, K. B. & Nordbakke, M. (2012a). Idéhefte til Matematikkdagen 2013. *Tangenten 23*(4).

Hågensen, L., Karlsen, K. B. & Nordbakke, M. (2012b). *Idéhefte til Matematikkdagen 2013*, Trondheim: LAMIS.

Kaufmann, O. T, Olafsen, A. R. & Rikheim, K. (2010). *Matte overalt*. Oslo: Det Norske Samlaget.

Keeley, P. & Toby, C. R. (2011). *National Council of Teachers of Mathematics. Mathematics Formative assessment.*

Kunnskapsdepartementet (2006). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet.* Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Lund, E. (2006). *Tren Tanken*. Oslo: Aschehoug.

Nolet, R. (2005). Geografi i nytt terreng. I R. Mikkelsen & P. J. Sætre (red.), *Geografididaktikk for klasserommet*. Høyskoleforlaget.

Nolet, R. (2006). *Tren Tanken* – et undervisningsopplegg for å utvikle kritisk tenkning. *Bedre skole 1/2006*, 22–30.

Nolet, R. (2008). Perspektiver i geografiundervisning. *Geografididaktikk i klasserommet*, kap. 8. Høyskoleforlaget.

Olafsen, A. R. & Maugesten, M. (2009). *Matematikkdidaktikk i klasserommet*. Oslo: Universitetsforlaget

Torkildsen, S. H. & Maugesten, M. (2008). *Sirkel 10A*. Oslo: Aschehoug.

Sommerkurset 2013

Velkommen til Trondheim 7.–9.8

Matematikk: praktisk, relevant og engasjerende

Dette temaet for årets sommerkurs bygger opp under det synet på matematikk og matematikkundervisning som LAMIS har stått for siden etableringen i 1997. Det er også i tråd med den offisielle utdanningspolitikken slik den kommer til uttrykk i Meld. St. 22 (2010–2011): Samtidig er det tungtveiende argumenter for å utvikle opplæring i matematikk og legge vekt på mer utforskende og praktisk matematikk for å øke elevenes forståelse og motivasjon.

Noen finner glede i å leke seg med den rene matematikken. Andre må se at matematikken har en praktisk nytteverdi før de lar seg rive med. På årets sommerkurs skal det bli noe for alle – uansett innfallsvinkel de foretrekker. Det skal Matematikksenteret og Fosen lokallag av LAMIS sørge for.

Habile forelesere

I skrivende stund – desember – har vi to dyktige foredragsholdere til plenumsforedragene på plass.

Birgit Pepin er professor ved Høgskolen i Sør-Trøndelag. Birgit har et bredt interessefelt som omfatter både klasseromstudier, læreplanstudier, lærebøker i matematikk og læreres bruk av ulike typer undervisningsmateriale. Hun har garantert mye interessant å komme med.

Oliv Klingenberg har mange års praksis som lærer for blinde og svaksynte. Hun har særlig undervist i matematikk. Oliv har i doktorgradstudiet sitt sett på hvordan blinde kan lære geometri. Den grundighet som må prege geometriundervisning for blinde er høyst relevant for undervisning av seende. Oliv har gjennom foredrag i ulike sammenhenger vist at hun har perspektiver på undervisning som er nyttige for alle som underviser i den obligatoriske grunnutdanningen.

Varierte verksteder

Vi legger opp til et program med fire parallellsesjoner. Her skal vi få noe for alle skoleslag i alle fire parallellene. Vi kan allerede røpe at Nils Kristians Rossing vil være på plass. Forfatteren av Den matematiske krydderhyllen byr alltid på noe praktisk arbeid som også krever en intellektuell innsats. Dere skal heller ikke se bort fra at det kan bli et Nonstop-verksted fra en barneskolelærer! Det vil nok trigge både de yngste elevene og lærerne deres!

Følg med på www.lamis.no

Program og annen informasjon blir lagt ut etter hvert som ting faller på plass. Påmeldingen åpner i slutten av mars / begynnelsen av april. Da er det bare å sikre seg en plass før kurset er fulltegnet!