Korden

Regning som grunnleggende ferdighet

«Lærer elevene ingen ting i matematikktimene? De vet ikke en gang at det er 100 centimeter i en meter!» Uttalelsen kom fra en frustrert sløydlærer. Dette er lenge siden, lenge før Kunnskapsløftet. Nå er ansvaret for at elever skal lære å regne ikke bare knyttet til matematikklærer og matematikkfaget. For å bli god i kunst og håndverk, må eleven også lære å vurdere mål og måleredskap og kunne anvende kunnskaper om mål fleksibelt. Elever må lære å regne i ulike kontekster og med ulike formål for å anvende redskap fra matematikk. Regning i andre fag kan også bidra til å utvikle dypere forståelse og motivasjon for regning i matematikkfaget fordi det viser matematikk i bruk.

Evaluering av Kunnskapsløftet viste at lærere har svært sprikende formeninger om hva regning som grunnleggende ferdighet kan bety. Dette gjøres det noe med gjennom læreplanarbeid og planer for etter- og videreutdanning. I rammeverk for grunnleggende ferdigheter er det tydeliggjort hva som ligger i begrepet «å kunne regne» tydeliggjort. Det handler om opplæring til å klare seg i samfunnet og å bygge opp kritisk beredskap for å kunne delta i et demokratisk samfunn. Ferdighetsområdene er beskrevet som å gjenkjenne og beskrive, bruke og bearbeide, kommunisere, og reflektere og vurdere. Dette skal utvikles gjennom å bruke regneferdigheter i konkrete situasjoner og i mer sammensatte og abstrakte situasjoner, knyttet til ulike fagområder.

I de reviderte læreplanene kommer regning som grunnleggende ferdighet nå tydeligere fram i kompetansemålene. Dette ønskes velkommen. Det gjør det lettere å trekke inn regning som grunnleggende ferdighet i planlegging av undervisning.

Regning som grunnleggende ferdighet vil bli satset på som et eget videreutdanningsfag for lærere i skolen. Lærere som tar faget kan bli ressurspersoner på egen skole i det å kunne regne i alle fag. Revisjonen av læreplanene og videre- og etterutdanning for lærere, kan skape nye muligheter til å se matematikkfaget i sammenheng med andre fag. Kan det utvikles en felles forståelse for hva elever trenger av regning for å bli kritiske deltakere i framtidens samfunn? Tangenten trenger artikler om arbeid med regning som grunnleggende ferdighet i alle fag. Har du erfaringer du vil dele? Har du skrevet en studentoppgave om temaet, eller utviklet praksis på egen skole? Vi hører gjerne fra deg!

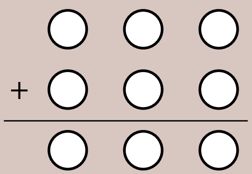
Toril Eskeland Rangnes

Kai Forsberg Kristensen

Addisjon med komplikasjoner

Utgangspunktet for denne artikkelen er en oppgave fra læreverket «Multi» (Nordberg, Alseth & Røsseland, 2007, s. 12). Den dukket opp som hjemmelekse for sønnen min da han gikk i 6. klasse. Den er som følger:

Bruk alle sifrene fra 1 til 9. Skriv ett siffer i hver sirkel, slik at summen blir riktig.



Jeg lot meg fascinere av problemstillingen fordi den skiller seg fra oppstilte regnestykker som løses med en fast oppskrift. Den pirret nysgjerrigheten min og skapte et umiddelbart ønske om å finne ut litt mer enn det oppgaven ber om, nemlig hvor mange kombinasjoner som finnes i alt, og om det finnes fellestrekk ved dem. Nå kan en kanskje ikke forvente at flertallet av elever automatisk vil være fulle av begeistring ved å møte denne typen utfordringer, men oppgaven bærer i seg muligheter for logisk tenkning, regnetrening og algebra, og forutsetter forståelse av posisjonssystem, tverrsummer og odde- og partall. Jeg mener det er verdifullt at elever, ikke bare sjetteklassinger, erfarer at de tradisjonelle rammene for tall og regning kan utfordres.

En lærer kan kanskje finne det vanskelig å gi veiledning til en slik oppgave. Man ser for seg elevenes situasjon som det å skyte på blink på langt hold; det kan gå mange forsøk før man treffer. Jeg vil nærme meg de ulike kombinasjonene skritt for skritt, noe som kan gi en potensiell veileder verdifulle tips.

Kai Forsberg Kristensen
Høgskolen i Telemark
kai.f.kristensen@hit.no

Tverrsummer og likninger

Den første innskytelsen min var å få addisjonsstykket til å gå opp uten å veksle. Etter prøving og feiling fikk jeg en mistanke om at dette ikke lot seg gjøre. Mistanken min ble i første omgang bekreftet ved et relativt tungvint resonnement der jeg benyttet meg av at det var fem oddetall og fire partall blant de ni sifrene i regnestykket. Etter at jeg tilfeldig nevnte problemet for en kollega, ble det klart for meg at det ville være mer effektivt å benytte tverrsummer. Et slikt resonnement kan gi innsikt i hvilke tverrsummer en må ha over og under addisjonsstreken. Jeg vil vise tankegangen …

Ingen veksling?

Jeg skal plassere ut sifrene 1–9, som har summen 45. En tilfeldig utplassering ga oppstillingen

$$\begin{array}{rccc} & 4 & 7 & 2 \\ + & 3 & 9 & 1 \\ \hline = & 5 & 6 & 8 \end{array}$$

Jeg så jo raskt at regnestykket ikke stemte, men la også merke til at summen av sifrene under addisjonsstreken ble 19, et oddetall, mens summen av sifrene over addisjonsstreken ble 26, et partall. Siden 19 + 26 = 45, er dette et eksempel på at det trengs ett oddetall og ett partall for å oppnå oddetallet 45 som sum.

Uten veksling tenkte jeg at summen av sifrene over addisjonsstreken (addendenes samlede tverrsum), T_1, alltid må være like stor som summen av sifrene T_2 under streken (tverrsummen til svaret), altså T_1 _ T_2. Men siden $T_1 + T_2 = 45$, som er et oddetall, går ikke det. Dette fikk jeg også bekreftet ved at likningssystemet

$$\begin{aligned} T_1 \quad &= T_2 \\ T_1 + T_2 &= 45 \end{aligned}$$

ikke har heltallsløsninger. Hvis $T_2 - T_1$ settes inn i likningen $T_1 + T_2 = 45$ må $2T_1 = 45$, noe som er umulig hvis T_1 skal være et heltall.

Én veksling?

Siden jeg nå hadde fått bekreftet mistanken om at det var umulig å la være å veksle, var det neste naturlige steget å prøve med én veksling. Jeg tok et eksempel med veksling på sistesifferet:

$$\begin{array}{rccc} & \bigcirc & \bigcirc & 6 \\ + & \bigcirc & \bigcirc & 7 \\ \hline & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{array}$$

Selv om 6 + 7 = 13, noteres bare 3 på enerplassen i svaret, altså et siffer som er 10 lavere enn den egentlige summen. De 10 som forsvinner fra enerplassen i svaret, veksles i en ener på tierplassen over addisjonsstreken.

$$\begin{array}{rccc} & & 1 & \\ & \bigcirc & \bigcirc & 6 \\ + & \bigcirc & \bigcirc & 7 \\ \hline & \bigcirc & \bigcirc & 3 \end{array}$$

På bakgrunn av dette eksempelet fant jeg ut at minnetallet 1 addert til resten av sifrene over streken alltid må bli 10 høyere enn summen av sifrene under streken (gitt at det bare veksles én gang). Altså fikk jeg $1 + T_1 = T_2 + 10$ eller $T_1 - T_2 = 9$. Siden det fremdeles var sifrene fra 1 til 9 som skulle benyttes, kunne jeg gjenbruke likningen $T_1 + T_2 = 45$. Det endte derfor med de to likningene:

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= 9 \\ T_1 + T_2 &= 45 \end{aligned}$$

Ved å legge sammen venstre- og høyresidene hver for seg fikk jeg $2T_1 = 54$ og derfor $T_1 = 27$. Da jeg så satte dette inn i en av likningene, ble resultatet $T_2 = 18$. Jeg fant altså at korrekte kombinasjoner med én veksling alltid har svar med tverrsum 18, og at addendenes samlede tverrsum alltid er 27.

I fasiten til Multi-oppgaven (Nordberg, Alseth & Røsseland, 2008, s. 49) gis for eksempel løsningen

$$\begin{array}{rccc} & 4 & 8 & 7 \\ + & 1 & 5 & 2 \\ \hline = & 6 & 3 & 9 \end{array}$$

Her blir det vekslet én gang (på tierplassen). I dette tilfellet blir $T_2 = 6 + 3 + 9 = 18$ og $T_1 = 4 + 8 + 7 + 1 + 5 + 2 = 27$, noe som stemmer med løsningen av likningssystemet.

Veksle to ganger?

For å fullføre resonnementet måtte jeg også ta for meg tilfellet med to vekslinger. Over addisjonsstreken blir det da tilført to 1-tall som minnetall. Under addisjonsstreken skjer det to ganger at de virkelige summene reduseres med 10 (10 enere på enerplassen og 10 tiere på tierplassen).

På tilsvarende måte som tilfellet med én veksling ble jeg derfor i stand til å sette opp to likninger, $2 + T_1 = T_2 + 20$ og $T_1 + T_2 = 45$, som også kan skrives:

$$T_1 - T_2 = 18$$
$$T_1 + T_2 = 45$$

Jeg la sammen venstre- og høyresidene hver for seg og fikk $2T_1 = 63$, som er umulig fordi $2T_1$ må være et partall. Konklusjonen ble derfor at det ikke er mulig med to vekslinger.

To spesifikke kombinasjoner

Med informasjon om svarets og addendenes tverrsum følte jeg at jeg var kommet atskillig nærmere målet, som var å finne alle (eller antall) slike regnestykker. Jeg oppsummerte situasjonen for meg selv ved å gjenta det som var oppnådd: Det skal veksles bare én gang, og regnestykket

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ +\,d\ e\ f \\ \hline =g\ h\ i \end{array}$$

må være slik at $a + b + c + d + e + f = 27$ og $g + h + i = 18$. Jeg fant at denne informasjonen virkelig gjorde letingen lettere, men samtidig innså jeg at tiden for å prøve seg litt fram nå var kommet. Siden 1 var det minste sifferet, valgte jeg å la sistesifferet i svaret være nettopp 1, altså $i = 1$. Dette viste seg å ha konsekvenser. Siden tverrsummen til svaret var 18, fulgte $g + h = 17$, med bare to muligheter:

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ +\,d\ e\ f \\ \hline =8\ 9\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a\ b\ c \\ +\,d\ e\ f \\ \hline =9\ 8\ 1 \end{array}$$

Videre så jeg at valget $i = 1$ hadde som konsekvens at $c + f = 11$, fordi $c + f = 1$ var umulig. Da jeg så skulle finne ut hvilke mulige verdier c og f kunne ha, fant jeg bare de kombinasjonene der både c og f er mindre enn 8, altså $c = 4$ og $f = 7$ eller $c = 5$ og $f = 6$. Siden jeg på dette tidspunktet var mest interessert i å finne en eller annen løsning, brydde jeg meg mindre om at c og f kunne bytte verdi.

Jeg fikk disse regnestykkene:

$$\begin{array}{r} a\ b\ 4 \\ +\,d\ e\ 7 \\ \hline =8\ 9\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a\ b\ 5 \\ +\,d\ e\ 6 \\ \hline =8\ 9\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a\ b\ 4 \\ +\,d\ e\ 7 \\ \hline =9\ 8\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a\ b\ 5 \\ +\,d\ e\ 6 \\ \hline =9\ 8\ 1 \end{array}$$

Nå var kompleksiteten i problemstillingen blitt kraftig redusert, og det så atskillig mer overkommelig ut å skulle forsøke seg fram for å finne de siste fire sifrene.

Jeg plukket i første omgang ut en av variantene

$$\begin{array}{r} a\ b\ 4 \\ +\,d\ e\ 7 \\ \hline =8\ 9\ 1 \end{array}$$

Siden jeg nå bare hadde sifrene {2, 3, 5, 6} til disposisjon og måtte bruke dem alle, var antall muligheter begrenset. Det viste seg at jeg kunne finne løsninger av likningene $a + d = 8$ og $1 + b + e = 9$ ($b + e = 8$) fordi $2 + 6 = 3 + 5 = 8$. Jeg fant på grunn av dette to spesifikke kombinasjoner:

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 4 \\ +\,5\ 6\ 7 \\ \hline =8\ 9\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ 3\ 4 \\ +\,6\ 5\ 7 \\ \hline =8\ 9\ 1 \end{array} \tag{1}$$

Gratiskombinasjoner

Siden målet mitt var å finne flest mulig kombinasjoner, helst alle, lot jeg meg ikke stoppe etter å ha funnet to av dem. Jeg innså at den kommutative loven, $a + b = b + a$, kunne brukes til å lage flere kombinasjoner når jeg først hadde funnet én. Å bytte sifre vertikalt mellom 1. og 2. rekke (som svarer til at addendenes rekkefølge er likegyldig) kunne ikke endre svaret. Denne framgangsmåten viste seg alltid å gi tre nye gratismuligheter. Det første regnestykket i (1) ga meg derfor tre i tillegg:

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 4 \\ +\,5\ 6\ 7 \\ \hline =8\ 9\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\ 2\ 4 \\ +\,3\ 6\ 7 \\ \hline =8\ 9\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3\ 6\ 4 \\ +\,5\ 2\ 7 \\ \hline =8\ 9\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\ 2\ 7 \\ +\,5\ 6\ 4 \\ \hline =8\ 9\ 1 \end{array}$$

De øvrige mulighetene, som fremkom ved å bytte siffer mellom 1. og 2. rekke, ga de samme tresifrede addendene, bare i ulike «etasjer».

Det andre regnestykket i (1) ga også opphav til tre nye kombinasjoner. For å komplettere situasjonen der svarets sistesiffer er 1, gikk jeg videre og så nærmere på

$$\begin{array}{r} a\ b\ 4 \\ +\,d\ e\ 7 \\ \hline =9\ 8\ 1 \end{array}$$

Her viste det seg at det ble totalt fire kombinasjoner, og da med utgangspunkt i

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 4 \\ +\,6\ 5\ 7 \\ \hline =9\ 8\ 1 \end{array}$$

I tillegg fant jeg ut at det fantes fire regnestykker av typen

$$\begin{array}{r} a\ b\ 5 \\ +\,d\ e\ 6 \\ \hline =9\ 8\ 1 \end{array}$$

og ingen av typen

$$\begin{array}{r} a\ b\ 5 \\ +\,d\ e\ 6 \\ \hline =8\ 9\ 1 \end{array}$$

Til slutt trakk jeg den slutningen at det totalt er 16 kombinasjoner der sistesifferet i svaret er 1.

Totalt antall kombinasjoner

Jeg kan ikke trette leseren med tilsvarende resonnementer for de åtte øvrige mulighetene på svarets sistesiffer, så jeg nøyer meg med å referere mine funn i tabell 1.

Sistesiffer i svaret	Antall regnestykker
1	16
2	8
3	20
4	20
5	20
6	16
7	24
8	20
9	24
Totalt	168

Tabell 1

Jeg kom altså til at det i alt er 168 «godkjente» regnestykker, men da er kombinasjonene

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ +\,d\ e\ f \\ \hline =8\ 9\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} d\ e\ f \\ +\,a\ b\ c \\ \hline =g\ h\ i \end{array}$$

naturlig nok betraktet som like. Å bytte om de to tresifrede tallene vil jo ikke tilføre nye kombinasjoner.

Snarvei ved hjelp av datamaskin

Selv om det ikke er noen uoverkommelig oppgave å fylle inn tabell 1 ved å behandle hvert sistesiffer for seg, ble jeg fristet til å benytte datamaskin. De ni ulike sifrene kan rent kombinatorisk plasseres på

$$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$$

måter siden det er ni plasser til rådighet. Jeg lot programpakken *Maple* (www.maplesoft.com) sjekke, for hver sifferplassering, om regnestykket ble riktig, og samtidig kreve at den øverste addenden var lavere enn den nederste (for å unngå gjentakelser). Da viste det seg raskt at antall regnestykker var 168, og det var heller ikke så vanskelig å få skrevet ut alle kombinasjonene. Det jeg imidlertid gikk glipp av ved å la datamaskinen gjøre arbeidet, var mellomliggende resonnementer, krav til forståelse og gleden ved å nærme meg løsningene skritt for skritt. Uten den manuelle tilnærmingen ville jeg heller ikke fått øye på fellestrekkene knyttet til tverrsummer og antall vekslinger, iallfall ikke umiddelbart.

Noen variasjonsmuligheter

1. En enklere situasjon er gitt ved oppsettet

$$\begin{array}{r} a\ b \\ +\,c\ d \\ \hline =e\ f \end{array}$$

Krav om at sifrene ligger i en klynge (tett og etter hverandre, for eksempel: 2, 3, 4, 5, 6, 7) og at alle må brukes, vil føre til at det ikke finnes løsninger. Hvis man bare krever at sifrene skal være forskjellige (og at alle må brukes), finnes det flere. Hvis for eksempel alle sifrene 1, 2, 3, 5, 7 og 9 må brukes i regnestykket, viser det seg av svaret ikke kan bli annet enn 72. Det er da to kombinasjoner: 13 + 59 = 19 + 53 = 72.

2. Se på regnestykket

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ +\,d\ e\ f \\ \hline =g\ h\ i \end{array}$$

Tilfellet der bokstavene representerer alle sifrene fra 1 til 9, er allerede behandlet. Men hva skjer om alle sifrene fra 0 til 8 må brukes i stedet?

Det viser seg at det totalt blir 84 muligheter hvis innledende null (null på hundrerplassen) tillates, og at 48 av dem ikke har innledende null.

3. I oppsettet

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ +\quad d\ e\ f \\ \hline =g\ h\ i\ j \end{array}$$

skal alle ti sifrene {0, 1, 2, …, 9} benyttes. Da må $g = 0$ eller $g = 1$, siden svaret må være under 2000. Hvis $g = 0$, er situasjonen den samme som for Multi-oppgaven. Hvis $g = 1$, viser det seg at 48 tilfeller oppfyller kriteriene. 32 av disse krever tre vekslinger (eksempel 743 + 859 = 1602), mens 16 krever at det veksles én gang (eksempel 324 + 765 = 1089). Ingen av kombinasjonene innebærer at det brukes innledende null.

4. Hvis siffergjentakelser er tillatt, er det naturlig nok mulig å lage situasjoner der man ikke trenger å veksle. Det blir likevel ganske utfordrende å finne slike kombinasjoner når det er spesifisert hvilke sifre som må benyttes i regnestykket. Hvis alle sifrene i mengden {1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 8} skal være med, eksisterer det 48 kombinasjoner, der 36 er uten veksling (for eksempel 125 + 143 = 268) og 12 er med to vekslinger (for eksempel 135 + 286 = 421). En nødvendig betingelse for å kunne lage regnestykker uten veksling ut fra en gitt samling siffer (med siffergjentakelser), er at summen av sifrene er et partall.

Noen refleksjoner

Oppgaver av typen som er drøftet i denne artikkelen, har neppe mange umiddelbare anvendelser i dagliglivet. Uten å spekulere i forfatternes hensikter, synes jeg likevel de står på trygg grunn når de trekker inn en ren-matematisk problemstilling der de normale løsningsprosedyrene blir utfordret. Historisk sett har det

(fortsettes side 28)

Rakel Tellevik Blaalid,
Rune Sandland, Tor Inge Vethe

Undersøkande samtale, eller?

Å drive undersøkande samtale i klasserommet vert av mange lærarar sett på som både spennande og utfordrande. Slike samtalar kan gje eleven auka motivasjon, nysgjerrigheit og meistring. Gjennom ei praksisoppgåve der me skulle gjere ei kvantitativ undersøking i klasserommet, valde me å sjå nærare på korleis teljing av elevytringar kan hjelpe oss til å verte meir bevisste på korleis me kan legge til rette for utforskande matematikksamtalar i klasseromssamtalar. Meir konsist, i kor stor grad er elevane sin munnlege aktivitet fagleg relevant ved tavleundervisning? Og kva type elevytringar er mest dominerande når me som lærarar prøver å ha undersøkande samtalar? På bakgrunn av Skovsmose (2003) og Johnsen-Høines og Alrø (2012) sine artiklar om undersøkingslandskap, undersøkande samtalar og læringssamtale, vart me inspirert til å utfordra oss sjølve på klasseromssamtalen i praksis.

Rakel Tellevik Blaalid
Student, Høgskolen i Bergen
rakeeltblaalid@gmail.com

Rune Sandland
Student, Høgskolen i Bergen
runesmailer@gmail.com

Tor Inge Vethe
Student, Høgskolen i Bergen
ti.vethe@gmail.com

Stine Frækaland (også student ved HiB) var med å utforme og gjennomføre studentprosjektet.

Me brukte totalt seks matematikkøkter à 60 minutt som datagrunnlag. Desse timane vart gjennomførte på ein undervisningsmåte klassen var van med, med klassesamtale om eit tema tidleg i økta før arbeidspostar tok over. I den fyrste delen av økta tok den som hadde timen, opp spørsmål knytte til undervisningstema. Me fokuserte mellom anna på *samtidskontekst*, der me ynskte å få innsikt i det å bruke interessefelt hjå elevane. Me prøvde òg å knyte matematikken til *tidlegare tema* i matematikkundervisninga. Føremålet var å gjere stoffet aktuelt og binde saman tema i matematikken. Som lærarar nytta me mykje av tida til elevaktivitet der elevane fekk komme fram til tavla for å vise og forklare. Vidare stilte me eleven og resten av klassen spørsmål ut frå desse situasjonane. Fokus låg ofte tett på tema som forståing, refleksjon og det å sjå temaet som nyttig. Me bytta på å leie undervisninga og å sitje bak i klasserommet og registrere elevytringar.

Mot undersøkinga

I forkant av undersøkinga vår utforska me nytten av å ha samtale. Finst det grenser for kor delaktige det er råd å gjere elevane? Korleis reagerer dei? Og kva er responsen som trengst for å skape nysgjerrigheit og danne grunnlag for vidare undersøkingar?

For å finne ut meir om elevdeltakinga i samtalane valde me å sjå på kva respons ein får på samtale i klasserommet. Med respons er det meint både seriøse og mindre seriøse svar, kommentarar og innspel som elevar kjem med ved handsopprekking. Å ta med innspel som kom utan handsopprekking, ville komplisere biletet, så me valde å fokusere på innspela til dei som med handsopprekking viste at dei ynskte å svare / vere deltakande i undervisninga.

Observasjonskategoriar

Då me skulle i gang med observasjonen, hadde me behov for å kategorisere den munnlege aktiviteten til elevane. Me måtte på førehand lage eit observasjonsskjema der alle observatørane var klar over kva dei ulike kategoriane inneheldt. Dette var lettare sagt enn gjort. Fyrste gongen me observerte, var ikkje dei ulike kategoriane gode og fullstendige nok. Difor vart me nøydde til å finne ut kva som ikkje fungerte, og om me trong fleire kategoriar. Etter samtale rundt dei *nye kategoriane* me fann, vart me samde om fylgjande sju kategoriar:

- Svarer på spørsmål
- Svarer med nytt spørsmål
- Svarer på spørsmål frå medelevar
- Ikkje fagleg relevante svar
- Oppklaringsspørsmål
- Tverrfagleg spørsmål/svar
- Anna

Sidan me var fire som skulle observere, måtte alle vere klar over kva dei ulike kategoriane gjekk ut på. Kategorien *svarer på spørsmål* tyder at eleven heilt enkelt svarer direkte på spørsmålet som blir stilt, til dømes når læraren spør: «Kva er 2 + 2?» og eleven svarer «4». Kategorien *svarer med eit nytt spørsmål* er når eleven til dømes stiller spørsmål knytte til tidlegare døme som er gjennomgått, og spør om det er det same: «Er dette det same som 1 + 2 + 1?». *Svarer på spørsmål frå medelevar* er når ein elev stiller eit fagleg relevant spørsmål, og ein medelev svarer på spørsmålet i staden for læraren.

Ikkje fagleg relevante svar er når eleven svarer på eit spørsmål med noko som ikkje heng saman med spørsmålet, og som flyttar fokus vekk frå samtaleemnet, til dømes «Far min heiter òg Kåre». Kategorien *oppklaringsspørsmål* er når eleven er usikker på spørsmålet som vert stilt og må spørje kva læraren meiner. *Tverrfaglege spørsmål/svar*-kategorien vart brukt når elevane trekte inn andre fag i svaret eller spørsmålet dei kom med. Her var mellom anna vinteridrettane skiflyging, skiskyting og langrenn mykje nytta døme hjå elevane. Kategorien *anna* hadde me med i tilfelle det var noko me ikkje hadde klart å dekke med dei andre kategoriane.

Resultat

Resultata vart sette opp i tabell og kakediagram (sjå neste side). For kvar undervisningsøkt (time) fordelte me svara me fekk, i prosent på dei ulike kategoriane. Me fekk fordelinga slik vi ser den i tabellen.

Resultatet av observasjonen viste at elevane sin munnlege aktivitet stort sett var innanfor kategorien *svarer på spørsmål*. I gjennomsnitt frå alle seks timane me observerte, var det heile 84,94 % av all den munnlege aktiviteten som gjekk under denne kategorien. Dei to kategoriane som var størst nest etter *svarer på spørsmål*, var *ikkje fagleg relevant svar* og *oppklaringsspørsmål*.

Sjølv om svarprosenten er låg i kategoriane utanom *svarer på spørsmål*, finn ein likevel spor av annan aktivitet. Ein kan sjå at i fem av seks timar vart det stilt oppklaringsspørsmål. Dette vel me å sjå som positivt. Ikkje berre viser det at elevane følgjer med, men det indikerer òg at dei syner interesse og nysgjerrigheit for å finne ut og forstå det som faktisk vert gjennomgått. Me vel òg å tolke den låge prosentdelen for kategorien *ikkje fagleg relevant svar* slik at ele-

Kategori	1. time	2. time	3. time	4. time	5. time	6. time	Gj.snitt
Svarer på spørsmål	75,86 %	90,00 %	82,75 %	80,00 %	88,88 %	92,30 %	84,94 %
Svarer med nytt spørsmål			3,44 %		3,70 %		1,19 %
Svarer på spørsmål frå medelevar	3,44 %					7,70 %	1,85 %
Ikkje fagleg relevant svar	10,34 %		10,34 %		3,70 %		4,06 %
Oppklarings-spørsmål	3,44 %	5,00 %	3,44 %	10,00 %	3,70 %		4,26 %
Tverrfagleg spørsmål / svar	6,89 %			10,00 %			2,81 %
Anna (?)		5,00 %					0,83 %

Tabell 1

vane deltek aktivt i læringsprosessen. Sjølv om me ikkje kan lese dette direkte ut av resultatet, forstod me av aktiviteten i undervisninga etter samtalen at elevane forstod mykje av det som vart gjennomgått.

Tolkar me resultatet, viser det seg at i undervisningstimane me observerte, var det lite rom for annan munnleg aktivitet enn svar på spørsmål. Dei to kategoriane *svarer med nytt spørsmål* og *svarer på spørsmål frå medelevar* er dei med minst svarprosent utanom kategorien *anna*. Spørsmåla og refleksjon over kva dette fortalde oss, kom i etterkant. Var det læraren som la opp til berre spørsmål og svar? Eller kanskje finst det andre moglege årsaker til resultatet?

Den undersøkande eleven i undervisninga?

Ein episode som illustrerer kor dominerande mønsteret spørsmål–svar kan vere, sjølv om ein eigentleg legg opp til undersøkande samtale, skjedde i ein time der det var fokus på desimaltal og deira plassering i forhold til heile tall. I norsktimen før hadde klassen hatt om argumentasjon og om å lytte til kvarandre i diskusjonar. Slik sett hang den timen godt saman med samtalane me prøvde å få til i matematikktimane. Matematikktimen starta som dei fleste andre med tavleundervisning og gjennomgang av dagens tema. Studenten hadde teikna ei talline på tavla for å friske opp dagens tema og for å visualisere desimaltalomgrepet. Elevane blei oppmoda om å komme fram og setje inn ulike desimaltal på tallina. Fokus i framkant hadde vore på at ein deler inn i ti tidelar mellom to heile tall, og ti hundredelar mellom to tidelar osv.

I eitt tilfelle skulle ein elev setje inn desimaltalet 0,2 på tallina, noko eleven gjorde med fin presisjon. Studenten spurde eleven korleis han hadde tenkt for å komme fram til den staden som var merkt av på tallina. «Det var veldig lett», svarte eleven, «eg berre delte inn avstanden mellom 0 og 1 i fem like store delar, så sette eg ein strek ved den første delen, for der måtte jo 0,2 vere». Det kom høglydte protestar frå medelevar som svarte at ein måtte dele i ti like delar. Studenten roste eleven for svaret som var gjeve, men korrigerte og la til at dette i grunnen var det same som det dei hadde jobba med denne veka ved å dele inn i ti like store delar for så telje til to. Eleven aksepterte og retta svaret sitt til at ein måtte dele på ti og ikkje fem.

Studenten vel her å korrigere eller å føye til det som har vore repetert den siste veka. Det kan vere fordi han var redd dei andre elevane skulle bli utrygge på det dei hadde lært. Resultatet var at eleven ikkje fekk høve til å forklare eller argumentere for ein – i dette tilfellet – enklare måte å løyse oppgåva på. Konsekvensen av at me som lærarar vil halde oss til det trygge, til berre éin tenkjemåte, og nærmast leier elevane fram til det svaret me vil ha, er at me kan stoppe elvane sine eigne kreative og gjerne fleksible løysingar.

Det vart ikkje nokon invitasjon til å vere med i eit undersøkingslandskap (Skovsmose, 2003). Det er godt mogleg å tenkje seg at det var like lett for nokre elevar å dele tallina i fem like store delar for å komme fram til svaret. Som lite erfarne lærarstudentar er det naturleg at me prioriterer det trygge og føreseielege i relasjon til elevane, og kanskje dette er ein generell trend i skulekvardagen blant andre lærarar òg?

Me stilte oss spørsmålet: Kvar ligg problemet? Ligg det hjå oss som lærarar? Legg me ikkje godt nok til rette for vidare samtale? Spør me for mange enkle spørsmål? Ligg det i metoden me nyttar? Dette slo me frå oss då klassen var van med å jobbe med samtale, og i den dominerande kategorien svar på spørsmål var mange av elevane i klassen representerte. Er me som lærarar redde for å gå ut av vår eiga komfortsone? Er hovudsaka å gjennomføre planen for timen, for om det blir gjort, er det ein god time? Kva er ein god time?

Lærarfokus

Det er eit aukande fokus på at læraren skal vere leiar, rettleiar og tilretteleggar av undervisning. Ei tilrettelegging for undersøking kan gje elevar opning for å bruke sine kreative evner til å vere undersøkande i eiga læring. Ei av lærarens viktigaste oppgåver, i tillegg til å utøve god klasseleiing, er å legge til rette for diskusjon i plenum, men òg i grupper eller åleine. Det ven eleven til å utfordre seg sjølv i læringsprosessen. Det å drøfte og prøve hypotesar kan hjelpe eleven til å meistre stoffet. Dette meiner me fører til ein relasjon mellom lærar og elevar der elevane forventar at læraren legg til rette (skaper rammene) for dette, slik at elevane kan respondere på læraren sine spørsmål eller oppgåver.

Det me reflekterte over etter undersøkinga, var at mykje kreativitet kan forsvinne til fordel for fastlagde rutinar, og at fleirtalet av elevane svarer det dei trur læraren vil at dei skal svare. Både me som lærarar og elevane utfordra i liten grad rammene for klasseromssamtale – me tok ikkje risikoen. Avviser me i for stor grad spørsmål og innspel som er noko på sida av det me har undervist? Fordi me ikkje torer å la elevane gå inn i ei verd full av moglegheiter for å finne tilknyting til tema som kan relaterast til den enkelte elev si erfaringsverd? Blir slike «trygge timar» dårlige timar? Berre fordi læraren ikkje har mot nok til å la eleven få utdjupe på sine premiss?

Konklusjon og ettertanke

Den kvantitative undersøkinga vår viste at me ikkje hadde opne og undersøkande samtalar i undervisningsøkter, noko me i framkant hadde ei oppleving av å ha. Praksissituasjonen me deretter gjekk inn i, hjelpte oss til å få meir innsikt i kva me gjorde i samtalen – kva me la eller ikkje

(fortsettes side 39)

Ove Gunnar Drageset

Korleis leie ein matematisk samtale

Dei seinare åra har det vore mykje fokus på kva ein matematikklærar må kunne for å undervise i matematikk. Det er brukt fleire teoretiske modellar, men den som har fått mest gjennomslag innan forsking og utviklingsarbeid, er modellen til Ball, Thames og Phelps (2008). Modellen beskriv undervisningskunnskap i matematikk i to grupper: kunnskap om undervisning og kunnskap om matematikk. Det som ikkje vert lagt vekt på i denne modellen, og heller ikkje i dei andre modellane som er mykje brukte, er kunnskap om å leie ein matematisk samtale. Dette er eit paradoks fordi det ser ut til å vere ei etablert sanning at gode matematiske samtalar er svært viktige for at elevane skal utvikle matematisk kompetanse.

Ulike omgrep som beskriv samtalar

Eit velkjent mønster frå samtalar i klasserommet er det såkalla IRE-mønsteret (Cazden, 1988), der læraren tek initiativ (ofte ved å stille eit spørsmål), eleven responderer, og læraren evaluerer. I eit slikt mønster snakkar læraren annankvar gong. Ofte vert eit slikt mønster forbunde med samtalar som er dominerte av læraren, der eleven berre svarer når læraren spør, og elles ikkje tek initiativ. Alternative mønster er også skildra, m.a. av Brendefur og Frykholm (2000). Dei beskriv korleis elevar kan bli meir aktive ved at læraren byggjer opp ein kultur der det blir forventa at elevar skal ta initiativ i større grad, og der elevar også kan delta i evalueringa av dei innspela som kjem på lik linje med læraren. Då går vi meir i retning av ein elevaktiv samtale der det kan vere mogleg å få til utforsking og reelle diskusjonar. Men då er ein avhengig av å slutte å tenkje at læraren alltid skal ha siste ordet fordi læraren har den faglege autoriteten. Ein må i staden arbeide fram ein kultur der det er matematiske argument som har den reelle autoriteten.

Samtidig som vi må aktivisere elevane meir i samtalen, må læraren styre diskusjonane. I følgje Stein, Engle, Smith og Hughes (2008) har det vore ein tendens til at lærarar trekkjer seg for mykje tilbake når dei skal prøve å aktivisere elevar meir, noko som fører til lita framdrift og samtalar utan særleg matematisk læring. I staden meiner dei at lærarar aktivt må planlegge korleis ein kan legge til rette for ein samtale der strategiane, tenkinga og argumentasjonen til elevane kjem fram i plenum. Dette foreslår dei å gjere i fem steg. Først må ein planlegge ei eller nokre få oppgåver som alle skal prøve seg på. Det er viktig at desse oppgåvene er litt vanskelege, men moglege å løyse for dei fleste. Då kan ein få ulike forslag og kan skape reelle

Ove Gunnar Drageset
UiT, Norges arktiske universitet
ove.drageset@uit.no

diskusjonar om tema som rett og gale, lurt og mindre lurt, effektivt og tungvint. Ein del av denne planlegginga er å tenkje gjennom kva elevar kan svare. Det andre steget er at elevane arbeider med oppgåvene mens læraren går rundt og ser korleis dei løyser dei, og spør korleis dei tenkjer. Dermed samlar ein informasjon om ulike strategiar og argument som blir brukte. Det tredje steget er å velje ut dei som har ein strategi som bør delast med resten av klassen. Då vel ein ut nokre få elevar, to eller tre, basert på kven som har noko å tilføre, noko som dei andre bør få sjå. Viss det er mogleg, er det ein fordel å velje ut strategiar på ulike nivå. På andre trinnet kan det vere at dei skal løyse 5 + 8. Då kan éin elev få vise dette ved å bruke teljestrategien «telje alt og telje om igjen», ein annan kan vise «telje vidare», og ein tredje kan vise korleis ein bruker fakta (8 = 5 + 3, då blir 5 + 5 = 10, og 3 til er 13). Det fjerde steget er å planlegge rekkefølgja desse bør få presentere i, gjerne slik at den mest avanserte kjem til slutt. Det femte og siste steget går ut på at læraren forklarer samanhengar mellom strategiane som er presenterte. Ved å følgje desse fem stega oppnår ein fleire ting. Læraren er den som styrer alt, men samtidig er det elevar som legg fram ideane og argumenterer for kvifor dei er rette, og elevar kan lære av kvarandre.

DØME 1

Elevane skal finne ut kva som er størst av ein tredel av tjuefire og ein firedel av tjue. Ein elev foreslår at ein tredel av tjuefire er størst, og læraren spør kvifor. Då følgjer dette:

E1 Fordi ein tredjedel er større enn ein fjerdedel
L Ja men du har, du har ikkje det same mengden du skal ta det av
E2 Ein tredjedel av tjuefire er mykje meir
L Men kor mykje er ein tredjedel av tjuefire?
E2 … sju?
E3 Det er åtte
L Det blir åtte. Og så ein fjerdedel av tjue, kor mykje blir det?
E4 Det blir …
E2 Fem
L Det blir fem ja og veit du kva som er størst då?
E2 Åtte

DØME 2

L No har eg førti kroner … Og så skal eg gi ein femdel av det til … til veslebroren, kor mykje er ein femdel av dette her? … Då må eg ha førti kroner, då må eg antakeligvis ta førti kronestykker og så må eg dele det opp i fem like store hauger, og kor mykje penger blir det? Klarer de å tenkje det?

Kva grep bruker norske lærarar?

I ein studie av kva grep fem norske lærarar brukte for å styre matematiske samtalar (Drageset, 2013), viste det seg sjølv om lærarane stort sett styrte samtalen innanfor IRE-mønsteret, vart det brukt mange ulike grep. Lærarane jobba alle på mellomtrinnet og hadde éin klasse i matematikk kvar. All matematikkundervisning vart filma i ei veke frå første dagen dei tok til med brøk det året. I analysen vart kvar utsegn frå læraren studert med tanke på korleis læraren brukte eller ikkje brukte elevane sine kommentarar til å jobbe med matematikk. Resultatet av studien vart 13 kategoriar som beskriv ulike grep lærarane gjorde, og desse vart delte inn i tre grupper: retningsforandring, framdrift og fokusering.

Retningsforandring

Av og til vel elevar ein strategi som enten er feil, tungvint eller ein annan enn den læraren ønskjer. Då forsøkjer læraren ofte å få eleven til å endre strategi, og dette vart i hovudsak gjort på tre måtar. Éin måte er å avvise eleven sitt forslag, enten ved å seie at det er feil, eller ved å oversjå forslaget og la andre sleppe til. Ein annan måte er å aktivt anbefale eleven å bruke ein annan strategi. Den tredje måten som vart brukt for å endre elevar sine strategiar, var å bruke korrigerande spørsmål. Det kom vanlegvis til uttrykk ved kommentarar som «Ja, det kan du gjere, men kva viss …?» Det er ein slags dobbelt kommunikasjon i dette fordi læraren først aksepterer forslaget og deretter kjem med eit spørsmål som viser at eleven sitt forslag ikkje er godt nok likevel. Faktisk var dette den mest brukte måten å få til ei retningsforandring på.

Framdrift

Ein viktig del av arbeidet i matematikk er å få til ei viss framdrift slik at ein kjem fram til ei eller fleire løysingar. Hovuddelen av dei grepa lærarane gjorde i samtalane, gjekk ut på å få til ei framdrift, og det vart funne fire forskjellige typar. Det aller mest brukte grepet lærarane brukte, var å dele oppgåvene opp og stille eitt spørsmål for kvart steg. Dette er illustrert i døme 1, der læraren etter litt fram og tilbake startar med å spørje kor mykje ein tredel av 24 er, deretter kor mykje ein firedel av 20 er, og så kva som er størst av 5 og 8. Dermed tek læraren ansvar for prosessen, kva som skal gjerast for å finne svaret, og elevar svarer berre på dei enkle utrekningane. Dette har eg kalla lukka framdrift, og det svarer til det Lithner (2008) kalla for «guided algorithmic reasoning». Det kan fungere som modellering på ein god løysingsprosess, men det er òg klart at viss elevar skal klare å gjennomføre slike løysingsprosessar, må dei sjølve få eller ta ansvaret for prosessen langt oftare enn læraren tek dette ansvaret.

Ein annan mykje brukt metode for å få til framdrift mot eit svar er bruk av forenkling. Dette oppstår gjerne når læraren er så oppteken av å få rett svar at han gjev hint og omformulerer oppgåva slik at elevane til slutt får ei anna og enklare oppgåve å løyse enn det som var utganspunktet. Dette svarer til det Brousseau og Balacheff (1997) kalla Topaze-effekten. I døme 2 ser ein korleis dette kan sjå ut. Der er oppgåva frå boka å finne ut kor mykje ein femdel av 40 er. Når læraren har presentert oppgåva, legg han til at ein må ta dei 40 kronene og fordele dei i fem like store haugar. Dermed har læraren endra oppgåva frå å vere ei brøkoppgåve til å bli ei oppgåve som kan løysast med teljing.

Felles for kategoriane lukka framdrift og forenkling er at dei beskriv grep der læraren reduserer kompleksiteten slik at elevar lettare skal finne eit svar. Dette er grep som av og til kan vere nyttige for å unngå at elevar går seg fast og gjev opp, men samtidig gjer desse grepa at elevar løyser oppgåver på eit lågare nivå enn det dei treng for å lære noko nytt. Difor må ein passe på å finne ein balanse slik at læraren ikkje alltid reduserer kompleksiteten og dermed tek vekk utfordringane elevar må få for å lære seg det som er viktig og ofte også litt vanskelig på det aktuelle trinnet.

Eit tredje grep for å få til framdrift var at læraren demonstrerte korleis ein skulle løyse eit problem, og dermed gjennomførte heile løysingsprosessen stort sett utan innspel frå elevar. Eit fjerde grep som vart funne, var å bruke opne spørsmål utan å gje hint om korleis problemet skulle løysast. Då brukte lærarane heller spørsmål som «kva skal vi gjere her?»

Fokusere

I tillegg til å gjere grep for å endre retning og for å få til framdrift gjorde lærarane ein del grep for å stoppe opp og sjå nærmare på svaret eller metoden. To av desse grepa går ut på at læraren fortel kva som er viktig. Det eine grepet var å poengtere i løpet av ein samtale kva som var viktig å hugse på, enten for å hjelpe elevar med å halde tråden eller for å få dei tilbake på sporet. Det andre grepet var å samanfatte etter at ein hadde funne ei løysing, for å framheve kva som var viktig og lurt i løysingsprosessen. Ein løysingsprosess i plenum kan jo vere uoversiktleg og vanskeleg å følgje med på, så slike grep for å klargjere ting undervegs og etterpå er viktige for læringsutbytet til elevar (Franke, Kazemi, & Battey, 2007).

Dei fire andre grepa i denne gruppa har det til felles at læraren stoppar framdrifta for å be elevar om å forklare, grunngje, anvende eller vurdere. Det mest brukte av desse grepa er at elevar blir bedt om å forklare kva ein har gjort, eller korleis ein kom fram til svaret. Dette handlar om å gjere detaljar eksplisitte, noko som i følgje Franke et al. (2007) er eitt av dei mest effektive grepa ein lærar kan gjere for å utvikle den matematiske kompetansen til elevane. Dette er også ideen bak dei fem stega som Stein et al. (2008) foreslår, der delinga av strategiar føregår ved at elevar forklarer relativt detaljert kva dei har gjort, og korleis dei har tenkt. Eit like viktig grep, som er langt mindre brukt, er det enkle spørsmålet kvifor. Det handlar om å be om ei grunngjeving: Kvifor har du valt denne metoden, kvifor har du gjort slik, kvifor er det rett å gjere slik, kvifor er dette matematisk korrekt? Slike spørsmål er viktige å stille for å øve opp evna til å argumentere matematisk. På mellomtrinnet er det stort sett snakk om uformell argumentasjon, men dette legg jo grunnlaget for meir formell argumentasjon og bevisføring seinare. Det er jo slik at grunngjeving og argumentasjon er viktig, men også noko av det aller vanskelegaste for mange elevar.

Det tredje grepet handlar om å be elevar om å bruke det dei har funne ut, på nye og liknande oppgåver. Av og til kjem ein fram til generelle påstandar, som at i brøkar som er lik ein halv, er teljaren alltid halvparten av nemnaren. I ein slik situasjon spurde ein lærar om elevane kunne bruke denne kunnskapen til å finne ein brøk som var lik ein halv viss dei berre visste at teljaren var 34.

Det fjerde grepet gjekk ut på at læraren bad elevane om å vurdere svaret som kom fram (overlate E-en i IRE-mønsteret til eleven). Dette skjedde sjeldan i dei observerte klasseromma.

Utvikle undervisninga

Kva er så verdien av slike kategoriar? Eitt svar er at dei kan brukast til å beskrive kvalitetar i samtalar, eit anna er at ein kan bruke dei til å samanlikne ulike samtalar eller praksisar. Men vel så viktig er det å sjå på korleis dette kan gje lærarar verktøy for å utvikle sin praksis. Det er faktisk grunn til å tru at viss lærarar blir medvitne på kva grep dei bruker, og korleis dei legg til rette for at elevar kan lære matematikk på ulike måtar, så vil dei bruke denne kunnskapen til å utvikle og endre sin eigen praksis. Eit døme på dette er CGI-prosjektet («Cognitively Guided Instruction») (Carpenter, Fennema, Franke, Levi, & Empson, 1999). Dette prosjektet utvikla kunnskap om korleis elevar tenkte når dei løyste oppgåver i addisjon og subtraksjon, såkalla additive strukturar. Denne kunnskapen vart så formidla til lærarar gjennom relativt omfattande kurs. Desse kursa sa ikkje noko om korleis lærarane skulle undervise, men dei inneheldt mykje og detaljert informasjon om korleis elevar tenkjer, kva som er lett og vanskeleg, og korleis kunnskapen i addisjon og subtraksjon utvikla seg. Forskarane som heldt kursa, følgde også undervisinga til ein del av lærarane som deltok, og fann ut at dei endra sin praksis etter kursa. Dette gjorde dei på bakgrunn av ny kunnskap. Dei begynte mellom anna å lytte meir til elevane enn før og fokuserte meir på å dele strategiar og å synleggjere detaljar i tenking og framgangsmåtar. Dette tyder på at kunnskap som gjer at ein forstår meir av samanhengane mellom grep for å styre samtalar og læringsprosessane betre, får ein til å endre praksis. Viss ein til dømes blir medviten om korleis mykje brukte kategoriar som forenkling, lukka framdrift, opne spørsmål, synleggjering av detaljar, grunngjeving, poengtering og oppsummering fungerer, så vil dette kunne føre til at ein endrar si undervisning.

Viss ein lærar endrar grepa som blir brukte, har dette truleg ein effekt på korleis elevar tenkjer. Schoenfeld (1992) gjorde ein forsøk i eit klasserom der han sa frå om at berre tre spørsmål skulle stillast, og at desse tre spørsmåla alltid måtte kunne svarast på. Han ville berre spørje om kva dei gjorde no, korleis det dei gjorde, kunne hjelpe dei til å finne svaret, og om det dei gjorde, var matematisk korrekt. Etter ei stund der han berre stilte desse spørsmåla, oppdaga han at elevar hadde svaret før han spurde, noko som tydde på at dei hadde begynt å tenkje på desse spørsmåla medan dei arbeidde med oppgåveløysing. Dette viser at måten elevar tenkjer på, kan bli påverka av kva læraren spør om. Det betyr truleg at viss ein lærar aldri ber om grunngjeving, så vil elevar i liten grad tenkje på å grunngje i prosessen. Stadige hint og overdriven hjelp frå læraren vil gjere at elevane vert avhengige av dette. Ein lærar som konsekvent spør «kvifor det?», kan derimot få elevar til å tenkje grunngjeving og argumentasjon også når det ikkje blir spurt etter det. Ein kan anta at stadige spørsmål om korleis ein har tenkt, gjer elevar meir medvitne på korleis ting kan forklarast og heng saman.

Oppsummering

Evna til å leie ein matematisk samtale er ein viktig del av ein lærars undervisningskunnskap i matematikk. Viss ein ikkje er medviten på korleis ulike grep verkar på læringa og tenkinga til elevane, kan dette redusere sjansane deira til å utvikle matematisk kompetanse. Erfaringane frå CGI-prosjektet tyder på at når lærarar får tilgang til kunnskap om sentrale grep, kan dei utvikle seg og endre praksis. Men dette krev truleg at lærarane får like solid opplæring som i CGI-prosjektet, med ei grundig innføring først og deretter støtte over tid gjennom samlingar der ein deler erfaringar. Viss ein får til ei utvikling og endring i måten ein som lærar spør på, har dette truleg ein effekt på måten elevar tenkjer på og deira sjansar til å lære matematikk – særleg viss dette fører til ein auke i deling av strategiar (detaljar), auke i elevars bruk av forklaring og argumentasjon, og avgrensa bruk av lukka framdrift og forenklingar.

Referansar

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. doi: 10.1177/0022487108324554

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(2), 125–153. doi: 10.1023/a:1009947032694

Brousseau, G., & Balacheff, N. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: cognitively guided instruction*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Cazden, C. B. (1988). *Classroom discourse: the language of teaching and learning*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.

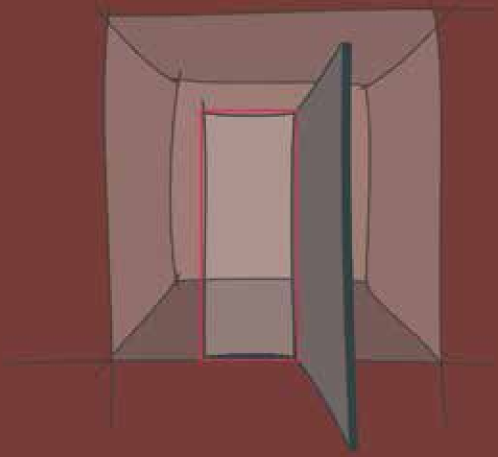
Drageset, O. G. (2013). Redirecting, progressing, and focusing actions—a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 1–24. doi: 10.1007/s10649-013-9515-1

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225–256). USA: Information Age Publishing Inc.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255–276.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340.



Annbjørg Håøy

Nærmiljøet som prosjekt

Hvor bor du? Hvordan er skoleveien din? Hvordan ser det ut på skolen? Hvor er lekeplassen? Dette er spørsmål som engasjerer førsteklassinger når vi samtaler om hverdagen og det nye som skjer – de er blitt elever og forholder seg til sin nye rolle og sitt nye læringsmiljø. Elever må orientere seg når de går til skolen, besøker venner eller går til butikken. Slik lokalkunnskap kan brukes i matematikklæring.

I min førsteklasse var «skoleveien» tema da elevene begynte på skolen om høsten. En elev fortalte ivrig: «Min vei er bare rett nedover, og så er jeg der». Han bodde rett ved skolen. «Jeg kan gå to veier», sa ei av jentene. «Jeg kan enten gå bortover gangveien og forbi dammen og nedover der. Eller jeg tar følge med Kari. Da går jeg nedover og bortover til fotgjengerfeltet. Så er jeg på skolen.» Elevene tegnet skoleveien sin og forklarte hvordan de gikk.

Det å utforme, forklare, leke med telling, måle og lokalisere er fundamentale matematikkaktiviteter, aktiviteter Bishop fant i ulike kulturer som grunnlag for å utvikle matematikk (Bishop 1988). Evnen til å lokalisere innebærer å se retninger, orientere seg i planet og se utover i rommet (Heiberg Solem og Reikerås, 2011).

Elevers lokaliseringsevne, det vil si plan- og romforståelse, utfordres gjennom dette prosjektet. De utvikler matematikkforståelse i fellesskap, i grupper og i hele klassen. Elevene får prøve å finne ut av nye omgivelser samtidig som de samarbeider og tilegner seg sentrale matematiske begreper. Læring i samhandling og gjennom dialog knyttes til et sosiokulturelt syn på læring (Braathe, 2002) Barna arbeider enkeltvis og sammen. De beskriver veien muntlig, men uttrykker seg også ved hjelp av tegning og skriving.

Prosjektet

Hovedfokus til prosjektet er å utforske området rundt skolen, og representere området ved hjelp av kart, modeller, diagrammer, tegninger og ord.

Prosjektet sikter mot at barn utfordres i sin forståelse av lokalmiljø, dvs. retning, romorientering, lokalisering. Videre er det et mål å uttrykke seg billedlig – ved å tegne skoleveien sin, og romlig ved å bygge og utforme bygninger som egne hus, skole, barnehage og andre viktige bygninger i nærmiljøet.

Gjennom prosjektet tilegner barna seg matematisk kompetanse innen:

Annjørg Håøy
Universitetet i Agder
annbjorg.haoy@uia.no

– Å anslå og måle lengde, areal og tid
– Telling
– Uformell bruk av skala – (ved bruk av en modell av lokalmiljøet)
– Begreper som tilhører to- og tre-dimensjonale former

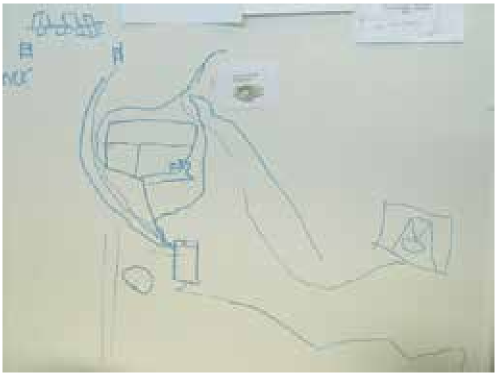
I alle samtaler vektlegges det å kunne fortelle, lytte, stille spørsmål og gi positiv respons til hverandre. Det å kunne fortelle om seg selv, vente på tur, lytte og samhandle er sosiale ferdigheter som nå brukes i en ny sammenheng. Barna får medvirke, bestemme, velge materialer og utforming. Det som produseres plasseres på kartet av elevene selv i samarbeid med lærer.

Dette er et prosjekt jeg selv har gjennomført på første trinn sammen med to andre lærere og deres klasser. Vi satte av tid til prosjektet en dag i uken og arbeidet ble drevet fram i en felles diskusjon.

Hva ble gjort?

Klassen går rundt på skolen og blir kjent med inne- og utemiljø

Etterpå tegnet vi kart over nærmiljøet (figur 1).

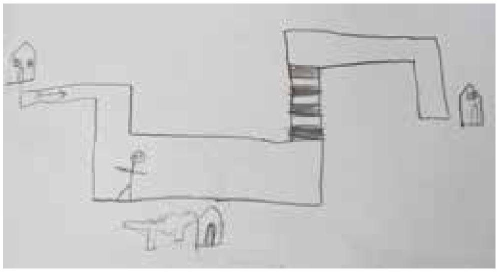


Figur 1

Tegningen viser hvordan en kan gå ut fra skolebygget og finne klatrestativ og huske på utelekeplassen. Tegninger ble laget av lærer og elev i samtale i små grupper etter friminutt i den første tiden på skolen.

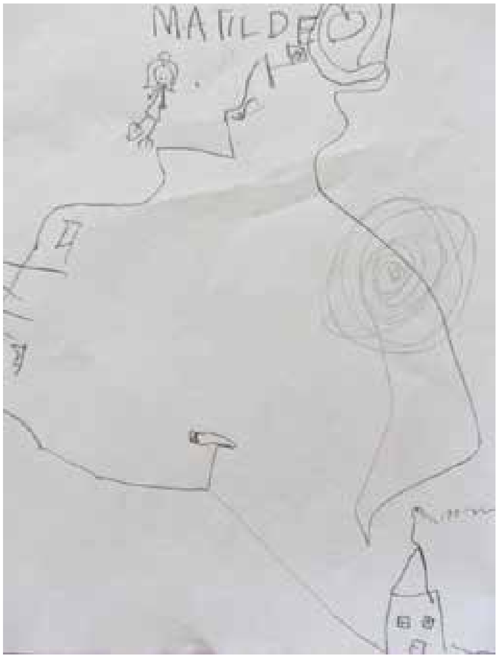
Skoleveien min – tegne og forklare

Alle elevene laget en tegning av skoleveien sin (figur 2). De viste fram tegningene og forklarte hvordan de gikk til skolen. Tegningene viser ulike beskrivelser.



Figur 2

Even forteller om tegningen sin: «Jeg går bortover veien, forbi en hund og huset dens, så går jeg over fotgjengerfeltet. Så kommer jeg til skolen.»



Figur 3

Matilde forteller (figur 3): «Det er så mye oppover, jeg går oppover hele veien til skolen. Det er en veldig bratt bakke, så er det et skilt og så går jeg forbi Emilie, så kommer jeg til stien og så går jeg oppover her. Til sist kommer jeg til den store veien og da går jeg over ved lyskrysset.» En må gå oppover en bakke fra huset hennes. Dimensjonen *oppover-nedover* avspeiles i perspektivet som er valgt på tegningen, vi ser fra siden og kan følge stigningen oppover. Arket har hun snudd på høykant slik at hun får plass til å vise stigningen fra skolen til hjemmet.

Klassen går tur til de ulike elevene

Vi ser hjemmet deres og snakker om veien de pleier å gå til skolen. Det var en lang runde å gå for å komme innom alle, og det var nødvendig å dele opp turen i mindre deler. Det var stor stas for hver og en når vi nærmet oss deres hus og de kunne vise fram. Flere steder var det noen hjemme og det var hyggelig å kunne hilse på. Før turene snakket vi med barna om å gå i trafikken, hva man da må passe seg for. Matilde gjentar fortellingen sin når vi går oppover bakken forbi huset hennes. «Det er så bratt, jeg må stoppe og puste». Og det må klassen også gjøre. Små elever synes ofte at en tur kan bli lang, og vi la inn pauser i parker slik at de fikk bevege seg fritt. På tur hjemover kan vi følge Eriks anvisning slik han fortalte om skoleveien sin: «Jeg går først på veien bortover og så er det oppover før jeg kommer til stien og den er bratt. Så går jeg bortover og til fotgjengerfeltet med lys. Der går vi over og så er vi på skolen.» Senere går vi enda en tur i lokalmiljøet, ser på store hus, gårder, butikker og barnehager og undrer oss over hvordan de ulike husene ble laget og hva de blir brukt til.

En modell av lokalmiljøet, «kartet».

Etter turene der klassen var innom alle elevenes hjem, kom oppgaven med å lage modell av det aktuelle lokalmiljøet ved hjelp av materialer som klosser og esker. På forhånd hadde lærer tegnet et kart over det aktuelle området rundt skolen på en voksduk og markert veiene i området med tape. Her var både elevenes hjem, barnehage, skole, natur/friområder og lekearealer inkludert.

Nå deltok barna også aktivt; de tok med egne esker til å lage hus og andre bygninger. Eskene ble dekorert med papir. Klipping og liming foregikk nå for fullt. Slik fikk elevene erfare overflate på tredimensjonale former. Plastelina og naturmaterialer ble brukt til veiskilt, trær og dyr ute i landskapet. Noen elever laget også hus med legoklosser dersom de foretrakk dette materialet.

Egne hus og bygninger

Elevene lagde først sine egne hus, deretter samarbeidet de om å lage skole, barnehager, kino, butikk, bensinstasjon mm. De tegnet, foreslo, prøvde ut og diskuterte. Underveis diskuterte to elever: «Hvordan kan brannstasjonen oppdage det hvis det brenner på skolen?» Lærer blir med på samtalen. Elevene vil opprette muligheter for kontakt mellom skole og brannstasjon. De kommer fram til at det må være telefonkontakt. Dette er en viktig sak. Telefoner lages, ledninger og koblinger settes opp. Andre aktuelle spørsmål som krevde svar og førte til gode diskusjoner var hvor elever skulle plassere sine hus i forhold til andres og hvor andre bygg som for eksempel barnehage, skulle plasseres.

Klassesamtaler

Underveis ble kartet plassert i samlingskrok eller på bord, lett tilgjengelig slik at alle kunne se og følge med på hva som skjedde. Flere ganger ble det brukt som utgangspunkt for ulike samtaler. Hva har dere laget, hvordan fikk dere det til? Hvem bor nært skolen, hvem bor lenger unna? Hva om vi hadde sittet på en fugl og flydd over skolen og området, hva hadde vi sett da?

Figur 4 Bilde av kartet med bygninger og barna rundt.

Oppsummering

Lærere og elever likte prosjektet. Elevene utfoldet seg og var aktive i prosjektet, alene, sammen med andre, i samtale og ved tegning og utforming. Ved slutten av første trinn, ble kartet tatt fram igjen, og klosser ble brukt for å symbolisere skolen, elevenes hus og huset til andre i klassen. To legofigurer ble brukt som personer og elevene løste følgende oppgave sammen i grupper på to:

Hva om dere skal på vennegruppe til en annen i klassen, hvor skal dere gå da? Start på skolen.

Og uten unntak: alle visste veien hjem til ulike venner i klassen, og kunne vise dette på kartet. Deres entusiasme og glede over oppgaven viste at de var engasjerte og likte denne utfordringen. «Jeg har flytta, så nå bor jeg like ved Trine», fortalte ei jente, og viste hvor det nye huset hennes var. De mestret det å orientere seg i lokalmiljøet, men fremdeles var det mye å arbeide med når det gjaldt begreper om retning og avstand.

I dette tverrfaglige prosjektet opplevde vi at elevene utviklet språk og tankegang, de lærte matematiske begreper gjennom en skolehverdag der det å bevege seg og tegne, lage, utforme og samtale stod i fokus. Elevene var stolte over lokalmiljø, hjem og skole. Vi erfarte prosjektet som positivt for oppbygging av fellesskapet i første klasse.

Litteratur

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Braathe, H. J. (2002). Ideologier i skolematematikken. I I. H. Solem, og J. E. Johansson, (red), *Barn skaper matematikk.* HiO-rapport 2002 nr. 22.

Solem, I. H. og Reikerås, E. K. L. (2011): *Det matematiske barnet.* Bergen: Caspar Forlag

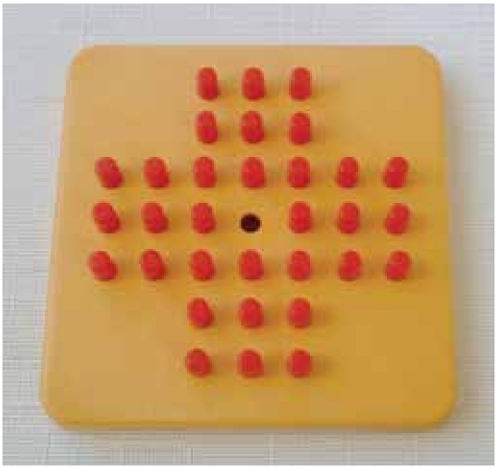
Håvard Johnsbråten

Eneboerspillet

Når vi tenker på anvendelser i matematikken, ser vi gjerne for oss Pytagoras' læresetning eller andre formler som vi kan bruke til å beregne lengder, arealer, kostnader osv. Men mer abstrakte teorier i matematikken kan også ha konkrete anvendelser. I denne artikkelen vil jeg gi et eksempel på hvordan matematiske strukturer kan kaste lys over konkrete problemer.

Jeg vil ta for meg det kjente eneboerspillet («peg solitaire») i forskjellige utgaver og med forskjellige startoppstillinger og vise at det er *umulig* å få igjen bare én pinne med flere av disse oppstillingene som utgangspunkt.

Den mest brukte varianten av eneboerspillet er den vi ser i figur 1.



Figur 1

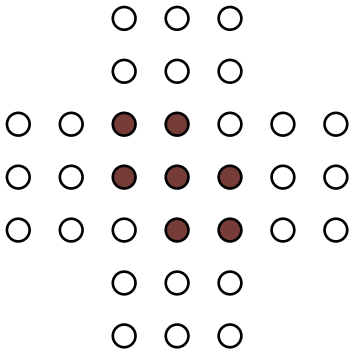
Spillet starter med pinner i alle hull bortsett fra i midten. Vi hopper over en pinne til et ledig hull og fjerner pinnen som ble hoppet over. Hoppene kan foretas «vannrett» eller «loddrett», men ikke diagonalt. Vi gjentar prosessen til vi ikke kan hoppe mer. Målet er å ende med bare én pinne i midten. Dette kan gjøres på mange måter, og flere av leserne har nok en eller annen gang klart å få igjen bare én pinne.

Vi kan også starte spillet med færre pinner. Da er det ikke sikkert at vi klarer å ende opp med bare én pinne. I figur 2 starter vi med noen ganske få pinner rundt midten. Prøv å få én pinne igjen fra dette utgangspunktet. Det er ganske fortærende, men det er faktisk *ikke mulig* å få bare én pinne igjen! Vi må ende med *minst to* pinner. Hvorfor er det slik, tro?

Håvard Johnsbråten
Høgskolen i Telemark
Havard.Johnsbraten@hit.no
johnsbra@hotmail.com

Analyse av forskjellige startoppstillinger

For å finne svar på spørsmål omkring eneboerspillet, vil jeg legge en *struktur* på spillet. Det gjør jeg ved å markere alle felt med bokstavene *a*, *b* og *c*, slik at tre påfølgende felt alltid vil bli markert med en bokstav av hvert slag, både



Figur 2

		c	a	b		
		a	b	c		
c	a	b	c	a	b	c
a	b	c	a	b	c	a
b	c	a	b	c	a	c
		b	c	a		
		c	a	b		

Figur 3

«vannrett» og «loddrett». Hvert trekk i eneboerspillet omfatter tre felt etter hverandre, og derfor vil hvert trekk omfatte én *a*, én *b* og én *c*. Dette vil bli brukt i analysen som følger. Strukturen

		c	a	b		
		a	b	c		
c	a	**b**	**c**	a	b	c
a	b	**c**	**a**	**b**	c	a
b	c	a	**b**	**c**	a	c
		b	c	a		
		c	a	b		

Figur 4

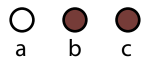
kan være som i figur 3.

Hvis ikke alle hull er fylt med pinner, vil jeg bruke *markeringene i de fylte hullene* til å *telle opp* antall *a*-er, *b*-er og *c*-er.

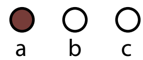
Eksemplet i figur 2 vil bli markert som i figur 4.

Feltene i figuren blir markert med 1 *a*, 3 *b*-er og 3 *c*-er. Det er *tre oddetall*. Hva kan så dette brukes til?

La oss se på hva som skjer under spillets gang. Et hopp omfatter alltid tre felt etter hverandre, langs en «vannrett» eller «loddrett» linje. *Så a, b og c er involvert i hvert hopp*. Nå ser vi på en detalj der feltene merket *b* og *c* er fylt (noe vi har flere eksempler på i figur 4):



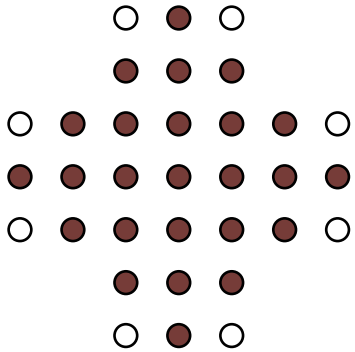
Vi tar tak i pinnen i feltet merket *c*, hopper over og fjerner pinnen i feltet merket *b* og setter den i feltet merket *a*. Da får vi denne situasjonen:



I forhold til starten i figur 2 vil antall *a*-er *øke med én*, mens antall *b*-er og *c*-er *minker med én*. Vi får to av hvert slag, altså *tre partall*. Vi får også tre partall uansett hva første trekk er. Neste gang får vi igjen tre oddetall, og dette vil alternere gjennom hele spillet. Derfor må vi ved spillets slutt stå igjen med *tre oddetall* eller *tre partall*. Vi kan altså *ikke* ende med én pinne (oddetall) i et felt merket f.eks. *a* og 0 pinner (partall) i de to andre feltene!1 *Det er derfor umulig å få igjen bare én pinne i dette spillet!*

Det beste vi kan oppnå, er å få *to* pinner igjen. Og da må de begge stå i felt merket med samme bokstav, f.eks. *a* og *a*. For da får vi tre partall: $a = 2$, $b = 0$ og $c = 0$. Finn selv ut hva slags felt pinnene kan ende på dersom vi får igjen *tre* pinner. Test det gjerne ut ved å prøve dette spillet noen ganger!

Vi ser på et eksempel til (figur 5). Markert med bokstaver får vi mønsteret i figur 6.



Figur 5

		c	a	b		
		a	b	c		
c	a	b	c	a	b	c
a	b	c	a	b	c	a
b	c	a	b	c	a	b
		b	c	a		
		c	a	b		

Figur 6

Hvis vi teller opp markeringene for denne figuren, får vi 11 *a*-er, 7 *b*-er og 7 *c*-er. Dette er også *tre oddetall*. Derfor kan vi resonnere på akkurat samme måte som i eksemplet foran og konkludere med at vi heller ikke i dette spillet kan ende opp med bare én pinne!

Nå går vi tilbake til *det vanlige eneboerspillet*, der alle hull er fylt ut, bortsett fra hullet i midten. *I dette spillet kan vi få én pinne igjen, og da må denne pinnen stå i et felt merket a*. Dette kan vi også begrunne ved hjelp av partall og oddetall! For med et hull i midten starter spillet med ti pinner (partall) i felt merket *a*, elleve pinner (oddetall) i felt merket *b* og elleve pinner (oddetall) i felt merket *c*. Vi får altså *partall–oddetall–oddetall* for hhv. *a*, *b* og *c*. Etter ett trekk øker eller minker alle tallene med én, og vi får *oddetall–partall–partall*. Og slik fortsetter det; «pariteten» på *a*-ene er i utakt med *b*-ene og *c*-ene. Så hvis vi får *én* pinne igjen, må den ende i *a*, for da er eneste mulighet én pinne (oddetall) i et felt merket *a* og null pinner (partall) i felt merket *b* og *c*. Og hvis vi ender med *to* pinner igjen, må de stå i felt merket *b* og *c*, for den eneste muligheten er null pinner (partall) i et felt merket *a* og én pinne (oddetall) i felt merket *b* og *c*. Finn gjerne selv ut hva slags felt pinnene kan ende på dersom vi får igjen *tre* pinner eller *fire* pinner!

Jeg har vist at hvis vi får én pinne igjen, må den ende i et felt merket *a*. Men dette er ikke hele historien, for vi kan ikke ende i alle felt merket *a*. Med et lite knep kan vi begrense mulige sluttposisjoner ytterligere. I diagrammet over forskjøv vi bokstavene *mot venstre* for hver rad. Men vi kan også forskyve dem *mot høyre* for hver rad. Vi setter dette sammen til et mer fullstendig diagram (figur 7).

		cc	aa	bb		
		ab	bc	ca		
cb	ac	ba	cb	ac	ba	cb
aa	bb	cc	aa	bb	cc	aa
bc	ca	ab	bc	ca	ab	bc
		ba	cb	ac		
		cc	aa	bb		

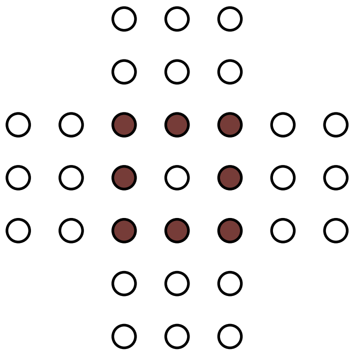
Figur 7

Hvis vi starter spillet med hull i midten, må spillet ende i et felt merket *a* både i den «venstrevridde» og i den «høyrevridde» varianten. Så om vi starter med hull i midten, markert *aa*, må vi ende med en pinne i et felt markert *aa*. Det kan altså ikke være mer enn fem måter å ende spillet på med én pinne igjen dersom vi starter i midten.

Dersom vi starter spillet med et hull et annet sted, f.eks. i *bc*, må spillet ende i et felt med samme markering. I McKerrell (1972) er disse mulighetene gjennomgått i detalj. Der er det også nevnt at *det er mulig* å få igjen én pinne i eneboerspillet uansett hvor starthullet velges.[2] På Internett finnes det løsninger for alle disse versjonene av eneboerspillet – søk på «peg solitaire».

I Gardner (1969) er det gitt mange eksempler på startoppstillinger som skal kunne ende opp med én pinne, og flere av dem er ganske krevende. En av dem er som i figur 5, men pinnen i midten er fjernet. Lag gjerne selv noen pene figurer, og test (både med teori og i praksis) om det er mulig å få én pinne igjen med disse som startoppstillinger.[3]

Men selv om en startoppstilling ikke inneholder tre partall eller tre oddetall mht. *a*, *b* og *c*, er det ikke sikkert at vi kan få én pinne igjen. Figur 8 er et eksempel på det. Her er det to *a*-er, tre *b*-er og tre *c*-er, men det er likevel *ikke mulig* å få bare én pinne igjen. Prøv, og se at det ikke er mulig!



Figur 8

For fullstendighets skyld vil jeg også ta med følgende: Den skjeve lille startoppstillingen i figur 2 har et odde antall *a*-er, *b*-er og *c*-er i den «venstrevridde» varianten, men i den «høyrevridde» varianten er det tre *a*-er, to *b*-er og to *c*-er! Det er likevel fortsatt umulig å få igjen én pinne, så usymmetriske figurer bør sjekkes i begge varianter.

Andre versjoner av eneboerspillet

For mange år siden kjøpte jeg en trekantet versjon av eneboerspillet som ble kalt IQ-testen (figur 9). Spillet starter med et hull i det øverste hjørnet eller et annet sted på spillebrettet. Trekkene er som i det vanlige eneboerspillet, men nå kan vi flytte i tre retninger.

Figur 9

Dette spillet kan analyseres på samme måte som foran ved at vi markerer hvert felt med *a*, *b* og *c*, og slik at hvert trekk vil omfatte én bokstav av hvert slag. (Nå trenger vi ingen dobbeltmarkering.) Hvis vi betegner det øverste feltet med *a* og starter med et hull der, vil vi finne at spillet inneholder fire *a*-er, fem *b*-er og fem *c*-er. Derfor *kan* det være mulig å ende opp med bare én pinne (og i et felt merket *a*). Av samme grunn *kan* det også være mulig å få igjen bare én pinne uansett hvor det første hullet velges.

Jeg har prøvd meg på dette spillet og funnet ut at *det er mulig* å ende opp med bare én pinne igjen, uansett hvor vi velger hullet i starten. Derimot er det *ikke mulig* å ende opp med bare én pinne igjen hvis spillet f.eks. starter med et hull i hvert hjørne, for da starter vi med fire *a*-er, fire *b*-er og fire *c*-er, altså *tre partall*.

Den siste versjonen av eneboerspillet som jeg vil nevne, kommer fra Frankrike og er ganske utbredt også her hos oss (figur 10). Spillebrettet er gjerne rundt og med fordypninger som det legges klinkekuler i.

Det er naturlig å starte spillet med et hull i midten. Men ingen av dem som har startet slik, har fått bare én pinne (eller klinkekule) igjen!

Figur 10

For det er rett og slett umulig å få én pinne igjen når vi starter med et hull i midten!

Dette kan begrunnes på samme måte som tidligere. Vi utvider markeringen med *a*, *b* og *c* for det vanlige eneboerspillet ved å ta med de fire ekstra feltene langs de skrå sidekantene, og i argumentet nedenfor trenger vi bare den «venstrevridde» varianten.

Vi får to *a*-er, én *b* og én *c* ekstra. Hvis vi teller bokstavene for alle fylte hull, får vi tolv *a*-er, tolv *b*-er og tolv *c*-er, altså *tre partall*. Under spillets gang vil vi veksle mellom å få *tre oddetall* eller *tre partall*, og derfor kan vi *ikke* ende med bare én pinne igjen, for det gir fordelingen én (odde), null (par) og null (par) for de tre bokstavene. Jeg kan derfor trøste dere som har strevet for å få igjen én pinne i dette spillet, med at dere ikke har spilt dårlig. *Det er rett og slett ikke mulig å ende opp med bare én pinne igjen*!

Spillet kan bare løses dersom hullet velges i ett av feltene som ikke inneholder noen *a*, verken med den «venstrevridde» eller den «høyrevridde» markeringen. *Hullet må derfor velges ett eller to felt fra midten eller i ett av hjørnene*. På Internett finnes løsninger for alle disse valgene av starthull. *Det er heller ikke mulig å ende i samme felt som starthullet*. For hvis hullet f.eks. er i et felt markert *b*, starter vi med 13 *a*-er, 11 *b*-er og 12 *c*-er, og samme argument som tidligere gir at vi må ende i et felt markert *c*. Hvis du vil prøve deg på dette spillet, kan du gjerne starte med hull *én* plass over midten. Da er det f.eks. mulig å ende med én pinne igjen *to* plasser over midten. Men dette var jo ikke så estetisk som det «vanlige» eneboerspillet, da …

Avslutning

I denne artikkelen har jeg tatt for meg noen problemer ved eneboerspillet, og jeg har brukt matematikken til å kaste lys over disse problemene.

Jeg har lagt på en struktur på eneboerspillet med forskjellige startoppstillinger og brukt et argument med partall og oddetall til å vise at det er *umulig* å få igjen bare én pinne med flere av disse oppstillingene som utgangspunkt. Det samme kan også vises ved hjelp av mer abstrakt gruppeteori, slik det gjøres i McKerrell (1972), og slik jeg har gjort i en parallellversjon av denne artikkelen (som er lagt ut på Tangentens nettsider[4]). Artikkelen har derfor ført oss inn mot noe av det som er «matematikkens innerste vesen»: studiet av *strukturer* og *bevis* for hypoteser.

Og ikke minst: Jeg har kanskje kunnet trøste dem av dere som forgjeves har prøvd å løse en versjon av eneboerspillet som er uløselig!

Noter

1 Argumentet med partall og oddetall fant jeg nylig på en nettside om «peg solitaire». For mange år siden holdt jeg et foredrag om eneboerspillet. Da begrunnet jeg resultatene ved hjelp av såkalt gruppeteori, slik det gjøres i McKerrell (1972). Denne tilnærmingsmåten er mer abstrakt, men svært elegant. På Tangentens nettsider har jeg lagt ut en parallellversjon til denne artikkelen som bruker gruppeteori i argumentasjonen i stedet for partall/oddetall.

2 McKerrell nevner også at *det er mulig å ende* i alle de feltene som har samme markering som starthullet.

(fortsettes side 44)

Tor Espen Kristensen

Elevenes møte med Eulers tall

I mange læreverk blir Eulers tall introdusert som grenseverdien

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,8182818$$

Selv om det ikke vises at grensen eksisterer, er det vanlig at elevene blir bedt om å regne ut verdier til $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ for ulike store verdier for n. Deretter blir funksjonen $f(x) = e^x$ studert.

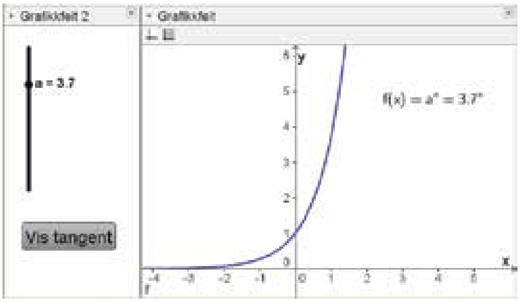
Det er min erfaring at mange elever føler at denne grenseverdien er «litt kunstig». Hvorfor se på akkurat denne grensen? I denne artikkelen vil jeg skissere en litt annen tilnærming til Eulers tall som jeg tror kan hjelpe elevene til bedre å forstå dette tallet og eksponentialfunksjonen.

Utgangspunktet: eksperimentering med eksponentialfunksjonen

Jeg pleier å starte med ulike typer eksponentialfunksjoner:

$$f(x) = 2^x$$
$$g(x) = 0,5^x$$
$$h(x) = 4^x$$
$$k(x) = 0,1^x$$

Tor Espen Kristensen
Stord vidaregåande skule
tork73@gmail.com



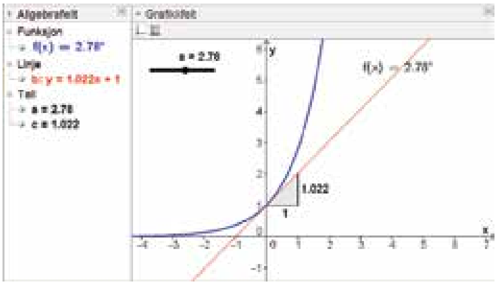
Figur 1: Utforsking av f(x) = ax for ulike verdier av a.

Til dette arbeidet kan det være greit å eksperimentere med GeoGebra. Jeg lager en glider a og ser på $f(x) = a^x$ for ulike verdier for a som vist på figur 1.

Det som er fint med en slik eksperimentering, er at elevene vil se at grafens form endres «kontinuerlig» med a. Det vil si at når a øker, så vil grafen bli brattere.

Første oppgave elevene får, er å finne ut hva a må være for at tangenten til grafen skal ha stigningstall 1 når $x = 0$.

Når elevene har fått utforsket eksponentialfunksjonen for ulike verdier av grunntallet a og fått en intuitiv oppfatning av at det er en verdi for a som er slik at stigningstallet til tangenten er 1 i punktet (0, 1), vil vi i fellesskap prøve å finne en enda mer nøyaktig verdi for dette tallet. Fordelen med å bruke et program som GeoGebra er at vi nå kan zoome inn på punktet og oppdage at tangenten er tilnærmet lik grafen



Figur 2: Grafen til $f(x) = a^x$ har stigningstall 1 i $x = 0$ når $a = 2,78$

når x er nær 0. Neste oppgave blir da å finne likningen til denne tangenten. Ettpunktformelen gir oss likningen for tangenten:

$$y = 1 + x.$$

Det vil si at $a^x \approx 1 + x$ når x er nær 0 og at denne tilnærmingen blir bedre jo nærmere x er 0. Dersom vi lar $x = \frac{1}{n}$, og setter dette inn i uttrykket får vi

$$a^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n}.$$

Denne tilnærmingen blir bedre jo større n er. Dette gir oss

$$a \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

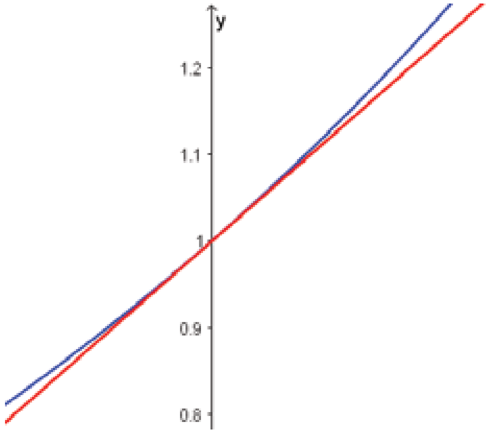
når n er stor. Mer presist kan vi skrive

$$a = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Her kan det passe seg å ta elevene med på en liten reise i matematikkens historie. Rent historisk var det Johann Bernoulli som først arbeidet med denne grensen i forbindelse med kontinuerlig forrentning. Euler (u.d.) var den første som brukte bokstaven e for dette tallet (i 1727 eller 1728). Således er nok ikke *e* en forkortelse for Euler, men det skal vi ikke henge oss opp i her. Poenget er at vi nå har kommet fram til denne grenseverdien og har en begrunnelse for å utforske hva $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ blir for ulike verdier av n.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
100	2,704813
1 000	2,716923
10 000	2,718145
100 000	2,718268
1 000 000	2,718280
1 000 000 000	2,7182820

Tabell 1:
Setter vi inn høye verdier for n, ser vi at $e \approx 2,71828$



Figur 3: Tangenten er tilnærmet lik grafen til f når x er nær 0.

Den deriverte til $f(x) = e^x$

Vi kan nå studere funksjonen $f(x) = 2,71828^x$ i for eksempel GeoGebra. Her ønsker jeg at elevene skal studere tangenten til grafen for ulike verdier for x. Tanken er at de skal oppdage at stigningstallet til tangenten er lik y-verdien til tangeringspunktet. Jeg vil med andre ord at de skal oppdage at $f'(x) = f(x)$. Vi kan også «lett» vise at dette gjelder ut fra definisjonen til den deriverte:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+\Delta x}-\mathrm{e}^{x}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}\\
&= \mathrm{e}^{x}\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{0+\Delta x}-\mathrm{e}^{0}}{\Delta x}\\
&= \mathrm{e}^{x}\cdot f'(0)\\
&= \mathrm{e}^{x}\cdot 1\\
&= \mathrm{e}^{x}
\end{aligned}
$$

Vi ser at uttrykket i femte linje over er den deriverte i $x = 0$. Dette vet vi er lik 1 siden det var slik vi bestemte tallet e. Kirfel (2011) har en tilsvarende tilnærming til den deriverte av eksponentialfunksjonen.

Den deriverte til sin(*x*)

Samme idé kan også brukes på andre funksjoner. Tegner vi for eksempel grafen til $g(x) = \sin(x)$ vil vi se at tangenten i $x = 0$ har stigningstall 1. Det vil si at

$$\sin(x) \oplus x$$

for x nær 0 (i radianer). Dermed må $\frac{\sin(x)}{x} \oplus 1$ når x er nær 0, og denne tilnærmingen blir bedre dess nærmere x er 0. Vi får faktisk at

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Dette kan skrives som

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)-\sin(0)}{\Delta x} = 1$$

siden $\sin(0) = 1$. Vi har med andre ord at den deriverte i $x = 0$ er 1. Vi kan så gå videre med å utlede den deriverte til $\sin(x)$ generelt.

Den pedagogiske ideen med en slik tilnærming er at elevene ikke bare skal få presentert utledningene av de ulike formlene, men at de først skal eksperimentere og opparbeide seg en intuitiv forståelse av resultatene før den mer formelle delen blir diskutert i klassen.

Referanser

Euler, L. (u.d.). *Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta.* www.math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E853.pdf

Kirfel, C. (2011). Derivasjon uten omveier. *Tangenten, 22*(1), 20–23.

(fortsatt fra side 6)

vist seg at både indre faglig dynamikk og ytre anvendelsesbehov har gitt matematikken avgjørende utviklingsimpulser. Mitt inntrykk er at vi noen ganger, i vår iver etter å bruke matematikken til noe praktisk, står i fare for å undertrykke og undervurdere den tiltrekningskraften som ligger i matematikkens indre liv. Ren matematikk har vært en kilde til fascinasjon og engasjement til alle tider. Selv det å beherske enkel regning kan vekke sterke positive følelser. Alle vet at læreren har en nøkkelrolle, for det er selvsagt lettere å bli fascinert når fagstoffet blir presentert med innlevelse og engasjement. Selv om det ikke er tilstrekkelig at en lærer bare er entusiastisk, tror jeg likevel at evne til faglig fascinasjon og undring vil være nyttig, ikke minst i et samfunn med et arbeidsliv som i økende grad forutsetter nysgjerrighet og utforskertrang hos arbeidstakere. Lærere og lærebokforfattere oppfordres derfor til å løfte frem flere gode og utfordrende problemstillinger, også fra områder av matematikken der vi ikke ser åpenbare umiddelbare anvendelser.

Referanser

Nordberg, G., Alseth, B. & Røsseland, M. (2007). *Multi 6*, *Oppgavebok.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Nordberg, G., Alseth, B. & Røsseland, M. (2008). *Multi 6*, *Fasit.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

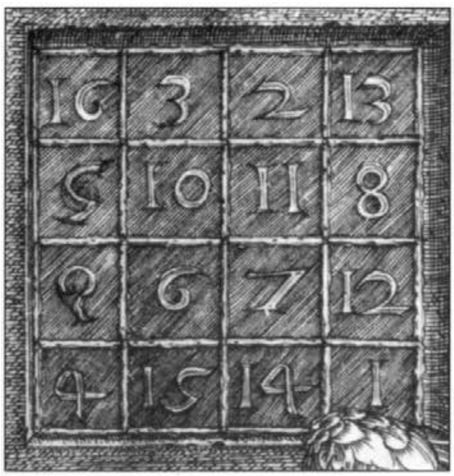
Per-Eskil Persson

Konstnärens kvadrat

Den dystra kvinnan sitter djupt försjunken i tankar. Hennes blick är fäst i fjärran och hon lutar tungt sitt huvud i ena handen. Vad tänker hon på? Kanske är det egentligen en ängel vi ser? Bakom henne skymtar ett par vingar, och det verkar nästan som om de sitter på hennes skuldror. Men vad är det för märkliga saker hon är omgiven av?

Verktyg och instrument av skilda slag ligger strödda på golvet eller är upphängda på väggen bakom henne. En sovande hund och en liten kerub är de enda andra levande varelserna i bilden. Men vad är det för en märklig geometrisk kropp som står vid sidan om henne? Och är det inte ett ansikte som skymtar i en av kroppens sidor, kanske en spegling?

Till slut fångas ändå ögat av tavlan på väggen bakom kvinnan. Vi ser lite närmre på den:



Per-Eskil Persson
Malmö högskola
per-eskil.persson@mah.se

Artikkelen har stått på trykk i det svenske tidsskriftet Nämnaren, Nr. 2, 2005.

Talen 1–16 är placerade i ett 4×4-mönster. Vi summerar första raden och får 34. Samma summa får vi i de tre andra raderna, i de fyra kolumnerna och även längs diagonalerna. Detta är alltså en äkta magisk kvadrat av 4:e ordningen! Varför finns den egentligen med i bilden?

Verket heter *Melencolia I* och är en etsning av renässanskonstnären *Albrecht Dürer,* utförd 1514. Årtalet finns faktiskt med i den magiska kvadraten! Dürer levde i Nürnberg 1471–1528 och var, liksom Lionardo da Vinci, inte bara konstnärligt och filosofiskt utbildad utan hade studerat såväl fysik och metafysik som matematik. Särskilt väl behärskade han geometrin, och gav mot slutet av sitt liv en lärobok i praktisk geometri. Han konstruerade också en anordning för exakta perspektivavbildningar av föremål, och använde sig flitigt av matematik i sina konstnärliga verk. *Melencolia I* innehåller mängder av symbolik på flera plan, och diskussionerna har varit många om betydelsen av föremålen i bilden. I en av förklaringarna spelar den magiska kvadraten en speciell roll.

De magiska kvadraterna har långt tillbaka i tiden tillskrivits ockulta egenskaper. I en tidigare artikel i Nämnaren (nr 3, 2004), har beskrivits den stora betydelsen av Loshu (3:e ordningen) i den kinesiska kulturen. Men även magiska kvadrater av högre ordning hade sin plats, och dessa spreds över världen via Indien och det arabiska Kalifatet till Europa. Cornelius Agrippa (1486–1535), som var läkare, astrolog och teolog, konstruerade magiska kvadrater av ordning 3, 4, 5, 6, 7, 8 och 9. Han förknippade dem dels med de då kända ”planeterna”: Saturnus, Jupiter, Mars, Solen, Venus, Merkurius och Månen, och dels med mänskliga åkommor, sinnesstämningar m.m. I *Melencolia I* symboliseras Saturnus av den ”himmelska världen” man ser i bakgrunden, och dit kvinnan kommer med hjälp av stegen och vingarna. Även den sovande hunden är av Saturnus och också själva melankolin.

Saturnus bekämpas av Jupiter, som skyddar kvinnan med en örtakrans. Bakom henne hänger torsdagsklockan (torsdag = Jupiters dag) över den magiska Jupiterkvadraten. Kvadratens summakonstant är 34, och om man fördjupar sig i en analys av bildkonstruktionen av etsningen, finner man ett antal linjer med vinkeln 34°! Lägg t.ex. märke till stegen, som står med 17° mot lodlinjen, och som har en motlinje snett ner genom kvinnans knä. Korsningen mellan linjen längs stegens högra kant och motlinjen går rakt igenom balansvågens upphängning! Det finns ett antal andra linjepar med vinkeln 34° i bilden, men det överlåtes åt läsaren att finna dem.

Under denna tid, och även betydligt senare, tillverkades och såldes speciella Jupiter-amuletter. Dessa ansågs befrämja rikedom, frid och harmoni, och skyddade mot motsatserna: fattigdom, oro och melankoli. De innehöll magiska kvadrater av ordning 4, skrivna både i latinsk och hebreisk skrift, samt mängder med religiösa och ockulta symboler.

Dürer fyllde ofta sina verk med symboler, och den s.k. *Dürers kvadrat* hör definitivt hemma i *Melencolia I.* Men vad betyder hela verket och vem är kvinnan? Några menar att etsningen visar otillräckligheten hos mänsklig kunskap både när det gäller att uppnå himmelsk visdom och att tränga in i naturens hemligheter. Melankoli avbildades vid den här tiden ofta som en grubblande kvinna, så hon kan helt enkelt vara en allmän symbol. Men många vill också i henne se den intellektuelles (vetenskapens) frustration inför de svårigheter hon möter när hon vill undersöka den fysiska och metafysiska världen.

Det är faktiskt tämligen lätt att konstruera Dürers kvadrat. Man börjar med att skriva talen 1–16 i ordning uppifrån och ner i tabellen. Därefter ”vänder” man talen i båda diagonalerna (gråmarkerade i första figur), och slutligen byter man plats på mittenkolumnerna (grå i mittenfiguren):

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Dürers kvadrat har, vid sidan om den magiska kvadratens grundvillkor, en mängd fantastiska egenskaper. Om man delar in den i fyra kvadranter, utgående från mittpunkten, har talen i dessa kvadranter var för sig summan 34. Även 2×2-kvadraten i mitten har summan 34, liksom de fyra hörntalen (16 + 13 + 4 + 1). Det finns fyra stycken underkvadrater med 3×3 rutor, och summan av hörntalen i dem är också 34. Men det finns fler sätt att få 34 …

En spännande övning i matematikundervisningen är att låta eleverna gå på upptäcktsfärd i Dürers kvadrat för att finna summan 34 på så många olika sätt som möjligt. En ledtråd är att man kan leta efter par av tal med summan 17. Då kommer man fram till en intressant upptäckt. Dürers kvadrat är nämligen en *associativ* kvadrat. Med det menas för en kvadrat av ordning 4 att talpar, vars summa är hälften av summakonstanten, alltid ligger *symmetriskt motsatt i förhållande till mittpunkten* (spegling i punkt). Ett par är 3 och 14, och ett annat är 8 och 9. Se där! Ännu en uppsättning med fyra tal, som har summan 34! Med denna upptäckt i minnet kan många kvartetter av symmetriskt belägna tal med samma summa hittas. Vem kan hitta flest? Och vilka typer av *symmetri* finns det egentligen?

Det finns ännu en klass av magiska kvadrater med andra, lika fantastiska egenskaper, nämligen de *panmagiska* eller *diaboliska* kvadraterna. Faktiskt är den första magiska kvadrat av ordning 4 man historiskt känner till, den s.k. *Jainakvadraten*, av denna typ. Jainakvadraten hänger över porten till ett jainistiskt tempel i Khajuraho i Indien, och bedöms vara från ungefär år 1100. I en diabolisk kvadrat av ordning 4 har även de brutna diagonalerna summan 34:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Exempelvis är 16 + 13 + 1 + 4 = 34 (gråmarkerat i figuren), eftersom de bildar en bruten diagonal. Prova gärna övriga brutna diagonaler! Men diaboliska kvadrater har fler roliga egenskaper:

- Varje 2×2-kvadrat har summan 34, även ”över kanten”, eller i de fyra hörnen. Exempelvis är 7 + 12 + 9 + 6 = 34.
- Summan av hörntalen i varje 3×3-kvadrat är 34, även ”över kanten”.
- Man kan flytta över en ytterrad eller -kolumn till andra sidan.

Dessa egenskaper kommer bäst till sin rätt om man sätter samman flera stycken likadana diaboliska kvadrater. Här är fyra jainakvadrater tillsammans:

7	12	1	14	7	12	1	14
2	13	8	11	2	13	8	11
16	3	10	5	16	3	10	5
9	6	15	4	9	6	15	4
7	12	1	14	7	12	1	14
2	13	8	11	2	13	8	11
16	3	10	5	16	3	10	5
9	6	15	4	9	6	15	4

Vilken som helst 4×4-kvadrat (exempelvis den gråmarkerade i figuren) i talmönstret blir en diabolisk kvadrat. Likaså gäller egenskaperna ovan för 2×2- och 3×3-kvadrater. Vilket fantastiskt mönster att arbeta med!

En intressant fråga är hur man kan konstruera sådana kvadrater och magiska kvadrater av ordning 4 i allmänhet. Det finns många olika konstruktionssätt, och Dürers metod beskrevs ovan. Vi sak se på en annan metod, som också avslöjar ett underliggande mönster i den till synes kaotiska Jainakvadraten. Men först ett par allmänna regler för magiska kvadrater som bevarar deras magiska egenskaper:

– Man får addera, subtrahera, multiplicera eller dividera samtliga tal i kvadraten med en konstant.
– Man får addera eller subtrahera två eller flera kvadrater ruta för ruta.

Om vi subtraherar alla talen i Jainakvadraten med talet 1 får vi talen mellan 0 och 15:

6	11	0	13
1	12	7	10
15	2	9	4
8	5	14	3

Dessa kan alla skrivas som en summa av talen 1, 2, 4 och 8, dvs. man gör en binär uppdelning:

	8		8
	8		8
8		8	
8		8	

4			4
	4	4	
4			4
	4	4	

2	2		
		2	2
2	2		
		2	2

	1		1
1		1	
1		1	
	1		1

I tabellen har nollorna utelämnats för att mönstren bättre ska synas. Lägg märke till att mönstret för 8 och 2 är detsamma, fast vridet 90°. Detsamma gäller mönstret för 4 och 1. Varje mönster ger faktiskt en enkel diabolisk kvadrat (kontrollera gärna). Om man permuterar talen 1, 2, 4 och 8 mellan mönstren får man 4! = 24 olika diaboliska kvadrater. Dessutom kan det ena mönsterparet spegelvändas i förhållande till det andra, vilket ger totalt 48 möjligheter. Detta är faktiskt antalet i grunden olika diaboliska kvadrater av ordning 4, bortsett från speglingar och rotationer (8 möjligheter för varje).

Om kvadraten inte behöver vara diabolisk, finns det även andra möjliga mönster, t.ex.:

•	•		
		•	•
		•	•
•	•		

•	•		
•		•	
	•		•
		•	•

	•		•
•	•		
		•	•
•		•	

Prova gärna att bygga nya magiska kvadrater med dessa, som alla är associativa! Men tänk på att dessa grundkvadraters egenskaper följer med. Kan någon av dessa användas för att konstruera kvadrater som Dürers? Prova gärna att analysera den på detta sätt! Och finns det fler mönster som duger, t.ex. om det bara ska bli en enkel magisk kvadrat, som varken är associativ eller diabolisk? Totalt finns det 880 fundamentalt olika magiska kvadrater av ordning 4, varav 448 är enkla. Resten är associativa eller diaboliska med olika grader av magiska egenskaper. En kvadrat av ordning 4 kan inte ha båda dessa egenskaper, utan det är först med ordning 5 detta blir möjligt.

Givetvis kan man konstruera magiska kvadrater som inte innehåller talen 1–16, t.ex. genom att utgå från andra tal än 1, 2, 4 och 8 i mönstren ovan. De blir då inte s.k. *äkta*. Kvadraternas egenskaper blir dock desamma som för äkta, och man kan tänka sig roande uppgifter, i vilka man ska ”lösa” kvadraterna, utgående från olika förutsättningar. Här kommer några sådana av varierande svårighetsgrad. Fullborda kvadraterna genom att fylla i resterande tal i de tomma rutorna:

I: Talen 83–98, summa 362

89			
92	93		
	98	84	
86			

II: Talen 61–76

			66
	69		72
64			73

III: Talen 72–87, diabolisk

	73		
	78	83	72
			86

IV: Jämna tal 18–48, diabolisk

			24
	32	38	26

(Red. anm: Fasit til disse fire problemene finner du på side 44.)

Det finns också åtskilliga magiska kvadrater, som konstruerats med alldeles speciella förutsättningar. En rolig sådan är följande, som faktiskt också fungerar då man vänder upp och ner på den!

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

Slutligen kan nämnas att även de kvadrater, som bildas då man upphöjer varje tal i t.ex. Dürers kvadrat till 2 eller 3, har intressanta egenskaper. Kanske detta även gäller matrisen, som bildas av kvadraten? Men detta lämnas åt läsaren att undersöka. Mycket nöje!

Ledtrådar till kvadratproblemen

Om man inte får veta summakonstanten för kvadraten, är den lätt att beräkna om man vet att talen i kvadraten bildar en aritmetisk talföljd. Summan av en sådan är: $n(a_1 + a_2)/2$, där n är antalet termer. I en magisk kvadrat av ordning 4 är $n = 16$. Vidare ska totalsumman delas upp på exempelvis 4 rader. Detta ger formeln för summakonstanten: $2(a_1 + a_2)$.

En bra idé är också att göra en lista av alla tal, som ska ingå i kvadraten, och stryka dem efter hand.

Litteratur

Gardner, Martin. *Rolig matematik*. Natur och Kultur, 1985.

Johansen, Carl-Otto. *Magiska tal.* Forum, 1966.

Pickover, Clifford A. *The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars*. Princeton University Press, 2002.

Swetz, Frank. The Most Magical of All Magic Squares. *Mathematics Teacher Vol. 94* (September 2001): 458–463.

Christoph Kirfel

Generalisering av Arkimedes' metode

I artikkelen om «Arkimedes og parabelen» (Kirfel, 2013a) ble det vist hvordan Arkimedes klarte å finne arealet av et parabelsegment. Denne artikkelen er en fortsettelse og viser at hans metode ikke er begrenset til bare å gjelde parabler. Med få tilpasninger kan den også brukes på funksjoner av høyere grad.

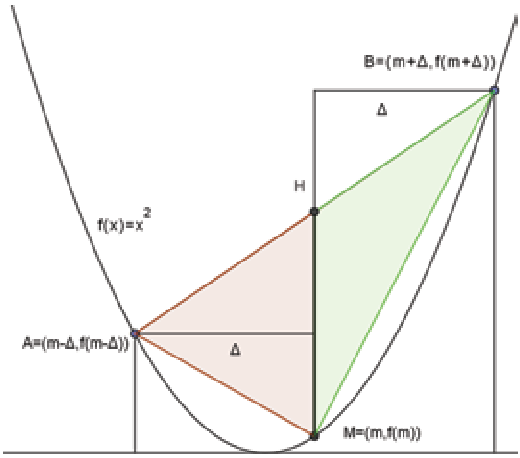
Arkimedes' metode kan beskrives med følgende trinn:

1. Velg en sekant som sammen med kurven begrenser arealet som skal beregnes.
2. Legg inn et tredje punkt «halvveis» mellom skjæringspunktene for sekanten.
3. Beregn trekantarealet som oppstår.
4. Fyll ut kurvesegmentet med stadig mindre trekanter.
5. Beregn den uendelige rekken som hører til.

Kirfel (2013a) viste at arealet av den første trekanten kan beregnes på følgende måte:

Christoph Kirfel
Universitetet i Bergen
christoph.kirfel@math.uib.no

Artikkelen i nr 4/2014 og denne har stått på trykk i *The Mathematical Gazette* som en artikkel, med tittelen «A generalisation of Archimedes' method».



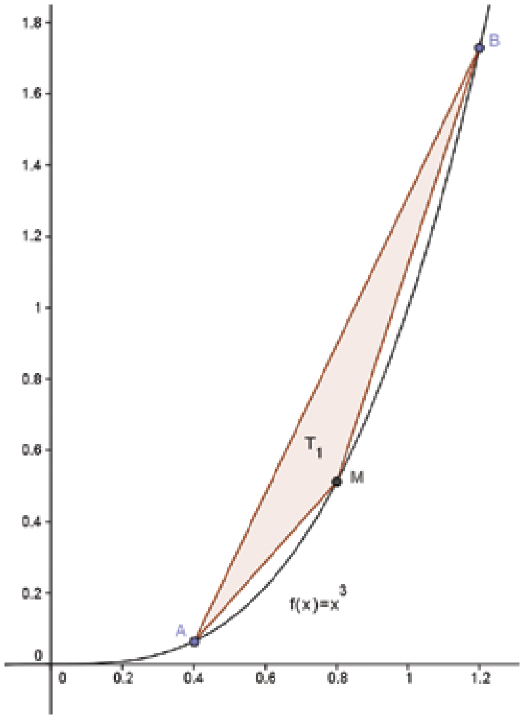
Figur 1

$$T_1 = \Delta\left(\frac{f(m+\Delta)+f(m-\Delta)}{2} - f(m)\right)$$

Her er $A = (m - \Delta, f(m - \Delta))$ og $B = (m + \Delta, f(m + \Delta))$ punktene på funksjonsgrafen som begrenser sekanten, mens $M = (m, f(m))$ er plassert «halvveis» (i x-retning) mellom dem på funksjonsgrafen.

Hvordan fungerer metoden for tredjegradskurven gitt ved $y = x^3$? For å unngå negative arealer betraktes bare segmenter som i sin helhet ligger i første kvadrant.

Arealet av trekant T_1 finner du i likning (1). Her er arealet også avhengig av m, det vil si plasseringen av A og B og ikke bare avstanden



Figur 2

mellom dem som i tilfellet med parabel. I følge beskrivelsen av Arkimedes' metode skal arealene nå beregnes for neste «generasjon» trekanter, nemlig T_2 og T_3. Disse er da plassert mellom A og M og mellom M og B, slik at det tredje punktet igjen ligger «halvveis» (i x-retning) på funksjonsgrafen.

Arealene er

$$T_2 = 3\left(m - \frac{\Delta}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 \quad \text{og} \quad T_3 = 3\left(m + \frac{\Delta}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3.$$

Resultatene er forskjellige siden trekantene har hver sin midtpunktplassering. Heldigvis er bare summen av disse to avgjørende for den videre prosessen, og den er

$$T_2 + T_3 = 3\left(m - \frac{\Delta}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 + 3\left(m + \frac{\Delta}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3$$
$$= \frac{3m\Delta^3}{4} = \frac{T_1}{4}$$

Situasjonen er i grunnen den samme som for parabelen. Beregningen av den uendelige summen for arealene av alle trekantene blir nå helt lik regnestykket for parabelen fra forrige del av artikkelen:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + (T_2 + T_3) + (T_4 + T_5 + T_6 + T_7) + \\ &\quad (T_8 + T_9 + T_{10} + T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15}) + \cdots \\ &= T_1 + \left(\frac{T_1}{4}\right) + \left(\frac{T_2}{4} + \frac{T_3}{4}\right) + \\ &\quad \left(\frac{T_4}{4} + \frac{T_5}{4} + \frac{T_6}{4} + \frac{T_7}{4}\right) + \cdots \\ &= T_1 + \frac{T}{4} \end{aligned}$$

Dermed er $\frac{3T}{4} = T_1$ og $T = \frac{4}{3}T_1 = 4m\Delta^3$.

Når $m = \Delta = \frac{x}{2}$ kan dette resultatet nå sammenlignes med det som er kjent fra integralregningen:

$$T = \frac{4x^4}{16} = \frac{1}{4}x^4 \text{ og } T' = \int_0^x t^3\,dt = \frac{1}{4}x^4.$$

Til sammen fyller disse arealene trekanten som er bestemt av origo, punktet $(x, 0)$ på x-aksen og punktet (x, x^3) som har areal $x^4/2$, og Arkimedes' resultat er korrekt.

$$\begin{aligned} T_1 &= \Delta\left(\frac{f(m+\Delta) + f(m-\Delta)}{2} - f(m)\right) \\ &= \Delta\left(\frac{m^3 + 3m^2\Delta + 3m\Delta^2 + \Delta^3 + m^3 - 3m^2\Delta + 3m\Delta^2 - \Delta^3}{2} - m^3\right) = 3m\Delta^3 \end{aligned}$$

Likning (1)

Fjerdegradskurven

For en fjerdegradsfunksjon $f(x) = x^4$ fås med det samme formelverket uttrykket i (2). Her er arealet igjen avhengig av «midtpunktplasseringen» m. Beregning av arealene i neste generasjon trekanter (T_2 og T_3) gir resultatene:

$$T_2 = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 \left(6\left(m - \frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right) \text{ og}$$

$$T_3 = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 \left(6\left(m + \frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right)$$

Summen er:

$$T_2 + T_3 = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 \left(12m^2 + 3\Delta^2 + 2\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{\Delta^3}{4}(6m^2 + \frac{7}{4}\Delta^2) = \frac{\Delta^3}{4}(6m^2 + \Delta^2) + \frac{3\Delta^5}{16}$$

$$= \frac{T_1}{4} + \frac{3\Delta^5}{16}$$

Uttrykket inneholder et nytt ledd i forhold til resultatene for parabelen og tredjegradskurven, noe som kan komplisere beregningene. La F stå for arealet av segmentet for fjerdegradskurven, se (3) på neste side, der

$$Z = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 4\left(\frac{1}{4}\right)^5 + \cdots$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} + \cdots$$

$$= \frac{16}{15}$$

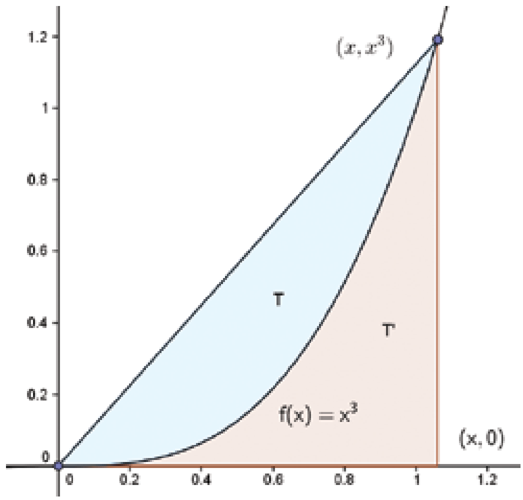
er en geometrisk rekke, se argumentasjonen nedenfor.

Dermed er $F = T_1 + \frac{F}{4} + \frac{\Delta^5}{5}$ og

$$F = \frac{4}{3}\left(T_1 + \frac{\Delta^5}{5}\right) = \frac{4}{3}\left(\Delta^3(6m^2 + \Delta^2) + \frac{\Delta^5}{5}\right)$$

$$= \frac{8\Delta^3(5m^2 + \Delta^2)}{5}$$

Sammenlikning med integralresultatet: Her er igjen $m = \Delta = \frac{x}{2}$ og $F = \frac{8\Delta^3(5m^2 + \Delta^2)}{5} = \frac{3x^5}{10}$



Figur 3

og $F' = \int_0^x t^4 dt = \frac{1}{5}x^5$. Til sammen fyller disse arealene trekanten som er bestemt av origo, punktet $(x, 0)$ og punktet (x, x^4) som har areal $x^5/2$, og Arkimedes' resultat er korrekt.

$$T_1 = \Delta\left(\frac{f(m+\Delta) + f(m-\Delta)}{2} - f(m)\right)$$

$$= \Delta\left(\frac{m^4 + 4m^3\Delta + 6m^2\Delta^2 + 4m\Delta^3 + \Delta^4 + m^4 - 4m^3\Delta + 6m^2\Delta^2 - 4m\Delta^3 + \Delta^4}{2} - m^4\right)$$

$$= \Delta^3(6m^2 + \Delta^2)$$

Likning (2)

$$F = T_1 + (T_2 + T_3) + (T_4 + T_5 + T_6 + T_7) + (T_8 + T_9 + T_{10} + T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15}) + \cdots$$
$$= T_1 + \left(\frac{T_1}{4} + \frac{3}{16}\Delta^5\right) + \left(\frac{T_2}{4} + \frac{3}{16}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^5 + \frac{T_3}{4} + \frac{3}{16}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^5\right) +$$
$$\left(\frac{T_4}{4} + \frac{3}{16}\left(\frac{\Delta}{4}\right)^5 + \frac{T_5}{4} + \frac{3}{16}\left(\frac{\Delta}{4}\right)^5 + \frac{T_6}{4} + \frac{3}{16}\left(\frac{\Delta}{4}\right)^5 + \frac{T_7}{4} + \frac{3}{16}\left(\frac{\Delta}{4}\right)^5\right) + \cdots$$
$$= T_1 + \frac{F}{4} + \frac{3\Delta^5}{16}\left(1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 4\left(\frac{1}{4}\right)^5 + \cdots\right) = T_1 + \frac{F}{4} + \frac{3\Delta^5}{16} Z$$

Likning (3)

For å beregne Z kan følgende triks brukes:

$$16Z - Z = \left(16 + 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} + \cdots\right)$$
$$- \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} + \cdots\right)$$
$$= 16$$

altså $15Z = 16$ eller $Z = 16/15$.

Femtegradsfunksjonen

$$T_1 = \frac{\Delta}{2}((f(m+\Delta) + f(m-\Delta) - 2f(m))$$
$$= \frac{\Delta}{2}(20m^3\Delta^2 + 10m\Delta^4)$$
$$= 5m\Delta^3(2m^2 + \Delta^2)$$

og dermed får vi uttrykket i (4).

Midtpunktplasseringen inngår også i summen av trekantene i neste generasjon. De neste summene er

$$T_4 + T_5 = \frac{T_2}{4} + \frac{15}{16}\left(m - \frac{\Delta}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^5$$

og

$$T_6 + T_7 = \frac{T_3}{4} + \frac{15}{16}\left(m + \frac{\Delta}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^5$$

Til sammen gir det

$$T_4 + T_5 + T_6 + T_7 = \frac{T_2}{4} + \frac{T_3}{4} + \frac{2 \cdot 15m}{16}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^5$$
$$= \frac{T_2 + T_3}{4} + \frac{15}{16} m\Delta^5 \frac{1}{16}$$

Alt i alt er nå arealet av femtegradssegmentet K gitt ved uttrykket i (5). Dermed er altså

$$K = T_1 + \frac{K}{4} + m\Delta^5$$

og

$$K = \frac{4}{3}\left(T_1 + m\Delta^5\right)$$
$$= \frac{4}{3}\left(5m\Delta^3(2m^2 + \Delta^2) + m\Delta^5\right)$$
$$= \frac{4m\Delta^3(10m^2 + 6\Delta^2)}{3}$$

$$T_2 + T_3 = 5\left(m - \frac{\Delta}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3\left(2\left(m - \frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right) + 5\left(m + \frac{\Delta}{2}\right)\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3\left(2\left(m + \frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right)$$
$$= 5m\frac{\Delta^3}{4}\left(2m^2 + \frac{7}{4}\Delta^2\right) = \frac{T_1}{4} + \frac{15m\Delta^5}{16}$$

Likning (4)

$$K = T_1 + (T_2 + T_3) + (T_4 + T_5 + T_6 + T_7) + (T_8 + T_9 + T_{10} + T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15}) + \ldots =$$

$$= T_1 + \left(\frac{T_1}{4} + \frac{15}{16} m\Delta^5\right) + \left(\frac{T_2}{4} + \frac{T_3}{4} + \frac{15}{16} m\Delta^5 \left(\frac{1}{16}\right)\right) +$$

$$\left(\frac{T_4}{4} + \frac{T_5}{4} + \frac{T_6}{4} + \frac{T_7}{4} + \frac{15}{16} m\Delta^5 \left(\frac{1}{16}\right)^2\right) + \ldots$$

$$= T_1 + \frac{K}{4} + \frac{15m\Delta^5}{16}\left(1 + \left(\frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{16}\right)^2 + \ldots\right) = T_1 + \frac{K}{4} + m\Delta^5$$

Likning (5)

Sammenlikning med integralresultatet

Her er igjen $m = \Delta = x/2$ og

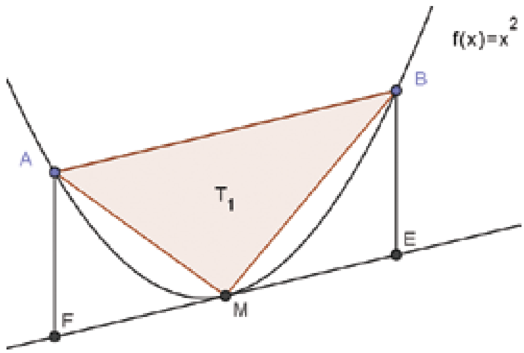
$$K = \frac{4m\Delta^3(10m^2 + 6\Delta^2)}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{10}{64} + \frac{6}{64}\right)x^6 = \frac{x^6}{3}$$

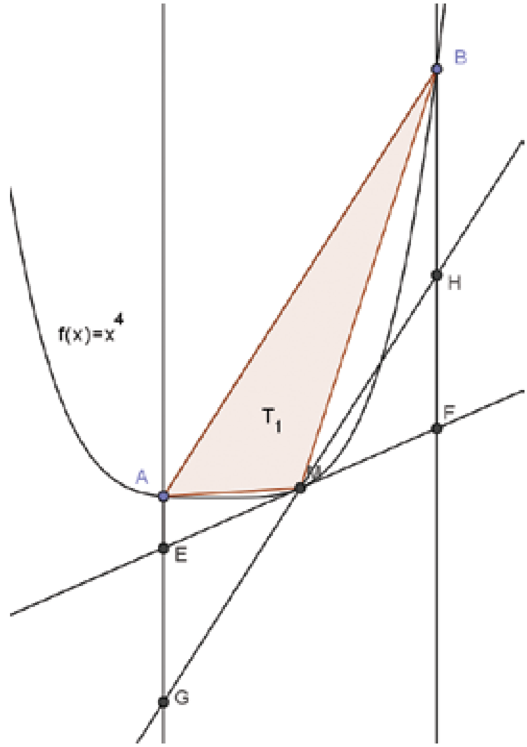
I tillegg er $K' = \int_0^x t^5 dt = \frac{1}{6}x^6$. Til sammen fyller disse arealene trekanten som er bestemt av origo, punktet $(x,0)$ på x-aksen og punktet (x, x^5) som har areal $x^6/2$, og Arkimedes' resultat er korrekt.

Bemerkning

Strengt tatt viser den foregående presentasjonen bare at de beregnede arealene er nedre grenser for arealet av segmentene. Arkimedes hadde et



Figur 4



Figur 5

eget argument som viste at uttrykket han kom frem til, også var en øvre grense for arealet. Han brukte en metode som er beskrevet i Euklids elementer, se Eves (1983).

I forveien hadde Arkimedes vist at tangenten i M var parallell med sekanten AB. Argumentet fortsatte nå slik: Parallellogrammet $AFEB$ rommer hele segmentet, ja, det er til og med noe større enn segmentet. Trekanten T_1 fyller halvparten av parallellogrammet og dermed mer enn halvparten av parabelsegmentet. Dette vil selvsagt gjelde for neste utfyllingstrinn og alle de kommende utfyllingstrinnene. Men når man under en slik prosess fyller mer enn halvparten av den gjenværende uutfylte mengden i hvert trinn, så vil resten bli så liten som man bare vil, og dermed har en funnet et argument for den øvre grensen.

Kan Arkimedes' argumentasjon også overføres til vår situasjon, der vi ikke bare ser på parabler der tangenten i M er parallell med sekanten AB? Firkanten $AEFB$ omslutter hele arealet av det ønskete segmentet (og mere til). EF er her tangenten gjennom M, og linjene AE og BF er valgt loddrette. Man dreier nå linjen gjennom EF om M til den blir parallell med AB. De nye skjæringspunktene kaller vi G og H. Den nye firkanten $AGHB$ har samme areal som firkanten $AEFB$. Her er det viktig at M er midtpunkt på EF. Nå er det lett å se at trekanten T_1 fyller halvparten av den sistnevnte firkanten og dermed mer enn halvparten av segmentet. De videre argumentene faller sammen med Arkimedes sine. For å kunne benytte argumentasjonen ovenfor er kravet at kurvene er konkave eller konvekse, kontinuerlige og helst deriverbare. Men en ser at argumentasjonen ikke behøver å begrense seg til potensfunksjoner som ble betraktet i denne artikkelen.

Arkimedes hadde selvsagt ikke den moderne notasjonen til rådighet. Funksjonsbegrepet slik det ble benyttet i startfasen, var heller ikke utviklet i oldtiden. Funksjoner og uttrykk av grad fire eller høyere var meget vanskelige å forestille seg for personer på Arkimedes' tid siden de forventet at uttrykkene skulle representere mål på linjestykker, arealer eller volum. Likevel inneholder Arkimedes' metode en idé som ikke begrenser seg til parabler, men som, slik det fremgår, med noe regning kan brukes på nytt for høyere ordens kurver. En konsekvens av dette er at Arkimedes må tillegges en stor del av æren for utviklingen av integralregningen.

Jeg takker Bob Burn for gode og konstruktive kommentarer til teksten.

Referanser

Kirfel, C. (2013). Arkimedes og parabelen. *Tangenten, tidsskrift for matematikkundervisning, 24*(4), 46–49.

Kirfel, C. (2013). A generalisation of Archimedes' method. *The Mathematical Gazette, 97*(538).

Eves, H. (1983). *An Introduction to the History of Mathematics* (5th edition). Philadelphia: Saunders College Publishing.

(fortsatt fra side 11)

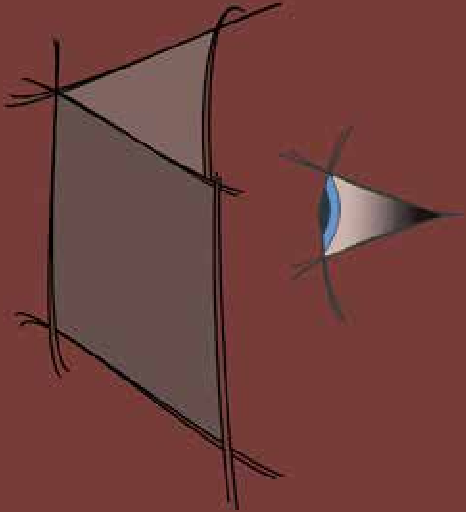
la til rette for, og korleis me utfordra eller stoppa elevane vidare i undersøkingsprosessen. Det var ei bevisstgjering av oss sjølve som lærarar i klasseromsamtalar, men òg som samtalepartnarar utanfor skulesamanhengen, i det å spørje etter utfyllande svar og opne for nye spørsmål. På bakgrunn av dette ynskte me å slutte med følgjande spørsmål til ettertanke:

– Er me for opptekne av å berre få respons frå elevane framfor å fremje elevstyrt diskusjon og undersøkjande verksemd?
– Kva er det me som lærarar søkjer frå elevane? Og kva trur elevane at me som lærarar søkjer hjå dei?

Litteratur

Johnsen-Høines, M. & Alrø, H. (red.) (2012). *Læringssamtalen i matematikkfagts praksis. Bok I*. Bergen: Caspar Forlag.

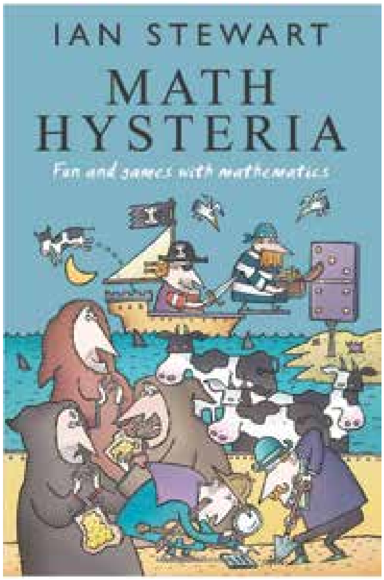
Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.), *Kan det virkelig passe? Om matematiklæring* (s. 143–158). København: L&R Uddannelse.



Bokomtaler

Ian Stewart
Math Hysteria:
Fun and Games with Mathematics.

Oxford University Press
ISBN 978-0198613367



Forfatteren av *Math Hysteria*, Ian Stewart, er professor i matematikk ved University of Warwick, England. Han er en meget anerkjent forfatter av populær-vitenskapelige bøker i både matematikk og naturvitenskap. I flere år har han vært ansvarlig for spalten «Mathematical Recreations» i *Scientific American*. Boken *Math hysteria* inneholder 20 av disse Mathematical recreations.

Jeg vet at du vet at …

Den første har tittelen «I know That You Know That …» og omhandler at det enkelte ganger ikke bare er nok å vite noe – du må også vite at en eller flere andre også vet. Eksemplifisert ved fortellingen om to munker som, mens de sover, får malt en blå flekk i pannen av en tredje munk uten at de merker dette. Når de våkner observerer de to at den andre har en blå flekk i pannen, men da de er høflige sier de intet om dette. Derimot funderer de på om de selv har en blå flekk, noe de ikke kan vite. Så dukker en fjerde munk opp på arenaen, begynner å le og utbryter «minst en av dere har en blå flekk i pannen». Før fjerdemann kom med sin bemerkning kunne de ikke vite om de hadde en blå flekk i pannen, mens etter bemerkningen visste begge to at de hadde en slik. Hvorfor? Dette forklares greit, men så utvides problemet hva om det hadde vært 3, 4, 5, … munker, der hver

Ole Einar Torkildsen
Høgskulen i Volda
oet@hivolda.no

enkelt hadde fått malt en blå flekk i pannen. Hvorledes blir det da?

Sjakkbrettet

Et kjent problem er: Ta bort, på et sjakkbrett, to hjørneruter som ligger diagonal motsatt. Kan vi dekke dette brettet ved hjelp av dominobrikker når hver dominobrikke skal dekke to ruter?

At dette ikke er mulig kan grunngis med at de to rutene som er fjernet har samme farge, og en dominobrikke vil alltid dekke to ruter med ulik farge. Hva så om vi fjerner to vilkårlige ruter på sjakkbrettet der de to rutene har ulik farge? Kan vi da dekke brettet?

Smørsida ned

Dersom vi ser på brødskiva som faller ned fra bordet, hvorfor havner den som oftest med smørsida ned? Denne påstanden blir også behandlet i boka, og det viser seg at under gitte betingelser kan påstanden være rett.

Fibonacci

Fibonaccitallene er som kjent definert ved formlene $F(0) = F(1) = 1$ og

$$F(n + 1) = F(n) + F(n - 1) \text{ når } n \geq 2.$$

Videre er det slik at forholdet mellom to påfølgende Fibonaccitall går mot det gylne snitt når vi beveger oss utover i tallrekka:

$$F(n + 1) / F(n) \rightarrow 1{,}615385\ldots \text{ når } n \rightarrow \infty.$$

Hva skjer dersom vi endrer formelen til

$$P(0) = P(1) = P(2) = 1,$$

og definerer

$$P(n + 1) = P(n - 1) + P(n - 2)?$$

Andre eksempler

At matematikk er involvert i spill er velkjent. Det kan for eksempel lønne seg å basere valget av strategier på sannsynligheter. Hvorledes er det så med *Monopol*? Er det noen felt som vi vil komme oftere til enn andre felt, eller er alle felt like sannsynlige? Spillet har 40 felt. Dersom vi tror at alle har lik sannsynlighet er sannsynligheten 1/40 = 0,025, dvs. 2,5 % for å havne på et felt. En nærmere analyse viser at det er relativt stor forskjell i sannsynlighetene. Det fins ett felt en ikke får være på, altså sannsynlighet 0, og et felt som har en sannsynlighet på nesten 6 %. Hvorfor?

Hvorledes dele en kake rettferdig? For to personer er det en grei strategi: jeg deler, du velger. Hvorledes blir det med flere personer?

Mer enn bare matematikk

Et spørsmål som har engasjert i flere tusen år er hvorledes pyramidene i Egypt ble bygd, og hvor mange arbeidere måtte engasjeres. Nå kan vi lure på hva dette spørsmålet har med matematikk å gjøre, dette er jo knyttet til historie? En av de fem grunnleggende ferdigheter i LK06 er regning. Selv om problemstillingen er hentet fra historie, så omhandler spørsmålet antall, og dette involverer matematikk. Mer konkret er utfordringen å finne et estimat på hvor mange menn som måtte arbeide for å bygge Khufu sin store pyramide i Giza. Hvorledes da angripe spørsmålet og se om det antallet som Herodot oppgir til å være 100 000 slaver kan være realistisk. Stewart tar utgangspunkt i energi, og viser på en overbevisende måte at estimatet til Herodot må skyte langt over mål.

Dette var en liten smakebit på tema eller emner som blir tatt opp i boka. For de fleste gjelder at temaet blir introdusert med et konkret og oversiktlig eksempel. Deretter blir eksempelet utvidet, og viktige egenskaper / sammenhenger blir påpekt, som til sist blir grunngitt / bevist. Strukturen er fra det spesielle til det generelle, som er en relativt vanlig undervisningspraksis i matematikkundervisningen.

Boka er skrevet på et lettlest engelsk, den anbefales.

Anne Berit Fuglestad, Simon Goodchild

MatRIC

MatRIC – et senter for fremragende utdanning i matematikk ved universitet og høgskoler i Norge – ble presentert på NOKUTs tiårs jubileumskonferanse 8. november 2013. Senteret er en god nyhet for matematikkutdanningen i Norge og gir mulighet for ny og større aktivitet og samarbeid for å styrke utdanningen på universitets- og høgskolenivå.

MatRIC – mål og ambisjoner

MatRIC har som mål å styrke kvaliteten i matematikkundervisningen ved å gjøre faget mer relevant, interessant og morsomt slik at studentene blir motivert til å følge opp utfordringer i sin læring, engasjere seg og dermed oppnå god forståelse av faget og aktuelle anvendelser for senere yrkesliv. MatRIC vil lede og oppmuntre til innovasjon, forskning og fremragende undervisning og læring i matematikk i høgere utdanning, og ønsker å samarbeide med kollegaer fra universitet og høgskoler og brukergrupper innen økonomi- og ingeniørfag, helsefag, vitenskapelig forskning og lignende.

NOKUT, *Nasjonalt organ for kvalitet i utdanningen*, arbeider spesielt overfor universitet og høgskoler (www.nokut.no)

SFU, *Senter for fremragende utdanning*, startet med ett senter i 2011 og ble utvidet med tre nye i november 2013.

De overordnede siktemålene med SFU-ordningen er

- å bidra til utvikling av fremragende kvalitet i høgere utdanning
- å synliggjøre at undervisning og forskning er likestilte oppgaver for universiteter og høgskoler
- å stimulere til fremragende FoU-basert utdanning

NOKUT (2013): Krav og retningslinjer for sentrene og kriterier for vurdering av søknader. www.nokut.no/sfu
MatRIC – The Centre for Research, Innovation and Coordination of Mathematics Teaching. (www.matric.no)

Anne Berit Fuglestad
Universitetet iAgder
abf@uia.no

Simon Goodchild
Universitetet i Agder
sg@uia.no

For å oppnå dette vil MatRIC

- bygge nettverk med universitets- og høgskolelærere i matematikk og brukere av matematikk
- koordinere forskning på innovasjon innen undervisning og læring i matematikkutdanningene
- utvikle innovative undervisningsressurser
- spre informasjon om forskning og resultater og om innovasjon for fremragende undervisning og læring i universitets- og høgskolematematikk

MatRIC ønsker å være en nasjonal ressurs for matematikkutdanning og vil bruke ressurser på å bygge nettverk av matematikklærere ved universitet og høgskoler for å utveksle kunnskaper og lære av andres eksempler på fremragende undervisning. MatRIC vil engasjere seg i forskning på effektivitet og innovasjon innen læring og undervisning i matematikk for å få bedre innsikt i hva som virker og hvorfor.

Utfordringer i matematikkutdanningen

Mange studenter forstår ikke matematikken og ser derfor ikke hvordan den kan anvendes på fagområdet de studerer og i deres framtidige yrke. Innsikt i og forståelse av sentrale begrep og matematiske sammenhenger er nødvendig for å anvende matematikken til å løse problemer. For å se hvilken relevans og nytte matematikken kan ha for framtidig arbeid, er det nødvendig å se og erfare eksempler på dette i studiet. Derfor er det viktig å utvikle innovative undervisningsmetoder og skape læringssituasjoner som viser hvordan matematikken kan anvendes og bli meningsfull og relevant.

Undervisning i store grupper, gjerne flere hundre studenter, er vanlig ved mange universitets- og høgskolekurs i matematikk. MatRIC ønsker å utvikle og teste ut bruk av eksisterende og kommende teknologi for å støtte storgruppeundervisning som kan aktivisere studentene og delvis frigjøre læreren til direkte kontakt med studentene. Teknologi kan ikke erstatte læreren, men kan brukes for å støtte læring og undervisning, og slike kombinerte løsninger bør testes og utvikles videre.

MatRIC har som ambisjon å utvikle modeller for matematikkundervisning som peker mot framtidens undervisning. Bruk av video, digitale simuleringer av matematikk, webbasert vurdering med diagnostiske tilbakemeldinger til studentene og informasjon til læreren er aktuelle anvendelser. Både progressive og tradisjonelle tilnærminger i undervisningen bør undersøkes gjennom grundig forskning. Vi trenger å vite hva som virker, hva som er effektivt og hvorfor.

Planer for MatRIC

I tillegg til å støtte et program som omfatter seminar og verksteder, vil MatRIC støtte innovasjon og forskning innen læring og undervisning i matematikk.

Gjennom verksteder for problemløsning og modellering vil autentiske anvendelser og problemer bli diskutert. Intensjonen er å samarbeide med fagpersoner på brukerområdene for å utvikle autentiske kontekster der studentene blir konfrontert med matematiske problem. Matematikken vil da bli anerkjent som relevant, vekke interesse og bidra til å stimulere studentenes motivasjon for å følge opp utfordringer i matematikklæringen. Anvendelser av matematikk kombinert med datamaskinbaserte representasjoner og simuleringer av matematiske sammenhenger står sentralt i MatRICs virksomhet. Forskning og utdanning kombineres slik at studentene kan anvende matematikk på autentiske situasjoner eller simuleringer som kan hjelpe dem både til å forstå og anvende matematikken.

MatRIC vil gjerne gå foran med innovasjon, forskning og utvikling. Initiativene vil gi studentene nye og stimulerende erfaringer med matematikk med relevans for senere yrkesutøvelse. I neste omgang kan dette gi en «spin-off»-effekt for skolene i form av bedre utdanning for matematikklærere. Ideer til avansert matematikkundervisning som utvikles gjennom MatRIC-aktiviteter, kan modifiseres og tilpasses til også å kunne brukes i skolen.

Samarbeid og forventede resultater

MatRIC ble initiert og utviklet av lærere og forskere i matematikk og matematikkdidaktikk ved UiA i samarbeid med Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet og Norges miljø- og biovitenskapelige universitet. Vi håper at flere institusjoner vil delta i samarbeidet om å tilby fremragende og forskningsbasert undervisning på universitet og høgskoler. Matematikkdidaktisk forskning ved UiA har hatt fokus på matematikkundervisning fra barnehage til videregående skole. MatRIC følger opp og vil bidra til utvikling av fremragende matematikkundervisning i høgere utdanning. I neste omgang kan det bidra til lignende utvikling for matematikk i skolen.

Næringslivet vil få nytte av styrket kvalitet når kandidatene fra universitet og høgskoler har utviklet bedre kompetanse i problemløsning og anvendelse av matematikk. Lærere som er godt informert om anvendelser av matematikk får bedre kompetanse til å formidle relevant og meningsfull matematikk. Samfunnet vil ha nytte av økt kompetanse i matematikk gjennom bedre og mer relevant undervisning som gir god læring og forståelse av matematikk på mange områder.

Fasit til kvadratproblemene i artikkelen «Konstnärens kvadrat» (side 33)

I: Talen 83–98, summa 362

89	88	94	91
92	93	87	90
95	98	84	85
86	83	97	96

II: Talen 61–76

71	67	70	66
74	62	75	63
65	69	68	72
64	76	61	73

III: Talen 72–87, diabolisk

76	87	74	81
82	73	84	79
85	78	83	72
75	80	77	86

IV: Jämna tal 18–48, diabolisk

46	18	44	24
36	32	38	26
22	42	20	48
28	40	30	34

(fortsatt fra side 25)

3 Gardner nevner at alle spill også kan spilles «baklengs» ved at vi hopper over et hull og setter en pinne der. Den kjente matematiker Leibniz foretrakk denne måten å spille på, for da bygde han opp en figur i stedet for å bryte den ned. Når vi spiller slik, kan vi også tenke oss at vi spiller «forlengs», men at vi betrakter hull som pinner og omvendt!

4 www.caspar.no/tangenten/2014/eneboer2.pdf

Referanser

Gardner, M. (1969). *Further Mathematical Diversions*. Penguin Books.

McKerrell, A. (1972). Solitaire. An Application of the Four-Group. *Mathematics Teaching*, 60, 38–39.

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Realfagbygget *A*4, NTNU
7491 Trondheim
Telefon: +47 73 55 11 42
Faks: +47 73 55 11 40
merete.lysberg@matematikksenteret.no

Nye ansatte ved Matematikksenteret

Kjersti Wæge

Kjersti Wæge er fra nyttår 2014 ansatt som ny leder ved Matematikksenteret. Etter fullført hovedfag i matematikk og praktisk pedagogisk utdanning arbeidet Kjersti en rekke år som lærer i videregående skole. Deretter gjennomførte hun en doktorgrad ved Matematikksenteret. Avhandlingen har tittelen «Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning». I denne perioden fikk hun også bred erfaring som kursholder.

De siste seks årene har Kjersti vært ansatt som førsteamanuensis i matematikkdidaktikk ved Program for lærerutdanning, NTNU. Hun har undervist ved den femårige lektorutdanningen ved NTNU og deltatt i flere større utviklings- og forskningsprosjekter, blant annet S-TEAM (*Science Teacher Education Advanced Methods*) og PIL-prosjektet (Praksis som integrerende element i lærerutdanningen). Kjersti har de siste to årene være tungt inne i ungdomstrinsssatsningen. Hun har vært med som forsker, koordinator og tilbyder i regning i det nasjonale prosjektet Skolebasert kompetanseutvikling på ungdomstrinnet.

Kjerstis forskningsfelt er elevenes motivasjon for å lære matematikk, undersøkende matematikkundervisning og koblingen mellom teori og praksis i utdanningen av matematikklærere. Hun har publisert flere internasjonale og nasjonale artikler som omhandler disse temaene.

Mona Nosrati

Gjennom skolegangen fikk Mona stor interesse for astronomi og astrofysikk. Etter videregående skole studerte hun matematikk og fysikk ved universitetet i Bath, England. I løpet av denne tiden ble oppmerksomheten i større og større grad trukket mot matematikken, særlig algebra, og hun ble veldig nysgjerrig på måten vi som mennesker lærer om og bearbeider matematiske strukturer. Denne interessen førte til at hun ønsket å undervise så mye som mulig i

matematikk og naturfag ved universitetet, som mentor i lokale skoler, ved sommerskolen i Oslo i flere år, og som vikar på diverse trinn.

Mona flyttet til Cambridge for å ta mastergraden «International Perspectives on Mathematics Education», og hun fikk på den måten mulighet til å lære mer om psykologiske, pedagogiske og filosofiske aspekter ved læring og undervisning i matematikkfaget. Samtidig fikk hun innblikk i hvordan man tilnærmer seg faget i andre land.

Mona fortsatte med en doktorgrad ved samme fakultet, med fokus på læring av algebra og abstraksjonsprosessen i matematisk tenking. I løpet av dette forskningsprosjektet fikk hun mulighet til å jobbe tett med norske videregående elever, både på studieforberedende og yrkesfaglige linjer. Hun fikk dermed studert en del av de hindringer som mange elever møter på sin matematiske vei, og fikk høre om elevenes egne tanker rundt dette. Ved siden av forskningen ble det også mange muligheter til å undervise både bachelorstudenter ved universitetet og internasjonale elever som deltok på lengre sommerkurs i Cambridge.

Disse erfaringene tar Mona med seg i sin jobb ved Matematikksenteret, og hun håper med det å kunne bidra til et tettere bånd mellom forskning og praksis i den videre utviklingen av matematikkfaget i norsk skole.

Revidering av læreplanen i matematikk fellesfag 2013

May Renate Settemsdal

Bakgrunn for revideringa

Vinteren og våren 2013 vart læreplanen i matematikk fellesfag revidert. Gruppa som arbeidde med dette, fekk i oppdrag å synleggjere dei fem grunnleggjande ferdigheitene og å gjere progresjonen i faget meir tydeleg. I tillegg vart det gjennomført ei høyring på læreplana i matematikk. Der fekk Utdanningsdirektoratet tydelege signal frå sektoren om at mange ønskte ei styrking av algebra i grunnskulen.

I arbeidet med å tydeleggjere dei grunnleggjande ferdigheitene brukte læreplangruppa «Rammeverk for grunnleggende ferdigheter» som støtte (www.udir.no/Lareplaner/Forsok-og-pagaende-arbeid/Lareplangrupper/Rammeverk-for-grunnleggende-ferdigheter/).

Dette rammeverket seier noko om kva det betyr å kunne rekne, og syner ein tabell der rekning er inndelt i ulike ferdigheitsområde.

Reviderte versjonar av læreplanane vart klare og lagde ut på Utdanningsdirektoratet sine heimesider til skulestart hausten 2013. Parallelt med dette arbeidet vart det nedsett ei arbeidsgruppe som reviderte rettleiinga til læreplanen i matematikk. Dette skriv vi meir om lenger ned i artikkelen.

Kva er nytt i den reviderte læreplanen i matematikk fellesfag?

Matematikksenteret har gått gjennom og samanlikna den tidlegare læreplanen med den reviderte versjonen og framstilt endringane i tabellar. På neste side viser vi eit døme.

Vi har laga slike tabellar for alle hovudområde på alle trinn i matematikk fellesfag, altså frå første klasse i grunnskulen til og med matematikk 2P og 2T i den vidaregåande opplæringa. Alle desse tabellane finn du på heimesidene til Matematikksenteret: www.matematikksenteret.no/content/2414/Kva-er-nytt-i-den-reviderte-lareplana-i-matematikk

Dei kompetansemåla som er uendra før og etter revideringa, er merka med «same som før». Nye kompetansemål som er tekne inn, er merkte med «NYTT» i tabellen, medan mål som er fjerna, er merkte med «GÅR UT».

Som tabellane syner, er det ein del språklege endringar i kompetansemåla. Dette er gjort for

Matematikk, mellomtrinn 5–7
Tal og algebra

Ny læreplan	Gammal læreplan
beskrive og bruke plassverdisystemet for desimaltal, rekne med positive og negative heile tal, desimaltal, brøkar og prosent og plassere dei ulike storleikane på tallina	beskrive plassverdisystemet for desimaltal, rekne med positive og negative heile tal, desimaltal, brøkar og prosent, og plassere dei på tallinja
finne samnemnar (bm.: fellesnevner) og utføre addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av brøkar	same som før
utvikle, bruke og diskutere metodar for hovudrekning, overslagsrekning og skriftleg rekning og bruke digitale verktøy i berekningar	utvikle og bruke metodar for hovudrekning, overslagsrekning og skriftleg rekning, og bruke lommereknar i berekningar
beskrive referansesystemet og notasjonen som blir nytta for formlar i eit rekneark, og bruke rekneark til å utføre og presentere berekningar	beskrive referansesystemet og notasjonen som blir nytta for formlar i eit rekneark, og bruke rekneark til å utføre og presentere enkle berekningar

å tydeleggjere progresjonen og for å synleggjere dei grunnleggjande ferdigheitene i kompetansemåla. Av faglege endringar i grunnskulen må ein merkje seg at *algebra* har komme inn allereie etter fjerde årstrinn. Dette var eit tydeleg ønske frå sektoren då læreplana var ute på høyring. TIMSS syner òg at norske elevar presterer svakt i algebra. Det kan komme av at algebra blir så seint innført i norsk skule. Dette er det no altså endra på i den reviderte læreplanen. I tillegg har *rekning med parentesar* komme inn etter sjuande årstrinn, og *kvadratsetningane* er eksplisitt nemnde etter tiande årstrinn. I VGO er det nokre fleire endringar. Den mest omdiskuterte er kanskje målet om talsystem i Vg2P, dette målet er no teke ut.

Revidert rettleiing til læreplanen i matematikk fellesfag

Då Kunnskapsløftet vart innført i 2006, vart det også utarbeidd ei rettleiing til læreplanen. Denne var innhaldsrik og omfattande og inneheldt både store og små døme på aktivitetar og undervisningsopplegg, i tillegg til fagtekstar om vurdering, tilpassa opplæring osv. Rettleiinga gjaldt berre for hovudområdet tal og algebra.

Ettersom det vart gjort endringar i kompetansemåla, måtte også rettleiinga til læreplanen reviderast. Utdanningsdirektoratet oppnemnde ei gruppe som arbeidde med dette parallelt med at Kunnskapsdepartementet vedtok den endelege læreplanen våren 2013. Oppdraget til gruppa var kort oppsummert å revidere rettleiinga slik at ho vart i tråd med gjeldande læreplan. Det betydde å synleggjere dei grunnleggjande ferdigheitene og få fram den faglege progresjonen. Rettleiingane i dei ulike faga skulle vere meir like og ha om lag same omfang.

Vi visste at lærebøker ikkje ville rekke å vere oppdaterte på dei nye faglege elementa som kom inn, til skulestart. Derfor prioriterte vi å vise det som var nytt i den reviderte læreplanen, i rettleiinga. Ettersom tal og talforståing er grunnlaget for det meste innanfor matematikken, valde vi framleis å lage rettleiinga innanfor dette hovuområdet.

I undervisningsopplegga har vi lagt vekt på å vise oppbryting av kompetansemål i læreplanmål, vurdering av måloppnåing og å skrive dei grunnleggjande ferdigheitene inn i undervisningsopplegga.

I tillegg til sjølve rettleiinga har vi samla fagtekstar, mindre døme og aktivitetar i eigne kapittel som vedlegg.

Alt om revidert rettleiing i læreplan i matematikk fellesfag finn du på Utdanningsdirektoratet sine heimesider: www.udir.no/Lareplaner/Veiledninger-til-lareplaner/Revidert-2013/Veiledning-til-lareplanene-i-matematikk-fellesfag/

Ungdomstrinn i utvikling

Eskil Braseth, Bård Vinje

Den nasjonale satsningen «Ungdomstrinn i utvikling» er, i tillegg til å sette fokus på klasseledelse, et forsøk på å løfte fram de grunnleggende ferdighetene å regne, lese og skrive. «Ungdomstrinn i utvikling» skal gi ungdomsskolene et kollektivt løft ved at skolene som organisasjon velger to av satsningsområdene regning, lesing, skriving og klasseledelse, ett hovedtema og ett bitema. Alle ansatte på de ulike skolene skal bidra i prosjektet, som derfor blir omtalt som en skolebasert kompetanseutvikling[1]. Ettersom skolene selv velger satsningsområder ut fra sine behov og forutsetninger, vil prosjektene være tilpasset den enkelte skole. Skolene som deltar, har derfor hver sitt prosjekt som blir ledet av skoleleder. Dette er en satsning som skal omfatte alle landets ungdomsskoler gjennom en periode på fire år, fra 2013 til 2017, og der hver skole er tilknyttet en høyskole eller et universitet i sin region. Ungdomsskolene er fordelt på fire puljer med en varighet på ett og et halvt år per pulje. Satsningens hovedmål er at elevene skal oppleve mer mestring og bli mer motiverte gjennom at opplæringen på ungdomstrinnet gjøres mer praktisk, relevant, variert og utfordrende.

Matematikksenteret har ansvaret for det faglige innholdet i satsningsområdet regning, og har i samarbeid med personer fra landets høyskoler og universiteter laget et teoretisk bakgrunnsdokument som fungerer som rammeverk for satsningsområdet. Dette rammeverket er førende for de som velger regning som satsningsområde, og danner det teoretiske grunnlaget. Det teoretiske bakgrunnsdokumentet kan du lese på udir.no. I tillegg har matematikksenteret ansvaret for å utarbeide nettressurser som skal være til hjelp for lærerne i arbeidet med regning i alle fag. Nettressursene omhandler blant annet beskrivelser av hva det innebærer å arbeide med regning som grunnleggende ferdighet i alle fag, prinsipper for god regneopplæring, undervisningsopplegg og annet fagstoff om regning. Alle disse nettressursene ligger gratis tilgjengelig på udir.no under «Ungdomstrinn i utvikling». Det finnes også pedagogiske nettressurser som omhandler regning som grunnleggende ferdighet på Matematikksenterets hjemmesider.

Videre har Matematikksenteret ansvar for å bistå UH-sektoren (universitets- og høgskolesektoren) i deres arbeid med å hjelpe skolene slik at de har gode forutsetninger for å løse prosjektet på en god måte. Dette skjer gjennom nettverkssamlinger i regi av NTNU der flere UH-institusjoner og de nasjonale sentrene møtes, men også gjennom et direkte samarbeid mellom matematikksenteret og de ulike UH-institusjonene. Det er etablert nettverk i hver lærerutdanningsregion. Matematikksenteret har derfor ikke noe direkte samarbeid med skolene i dette prosjektet. Grunnen til det er først og fremst et spørsmål om kapasitet. I tillegg er det lagt til rette for at UH-institusjonene kan opprette et samarbeid med skolene og høste god erfaring fra praksis, som i sin tur kan være med på å bedre lærerutdanningene.

I tillegg til å bistå UH-sektoren skal Matematikksenteret og de andre nasjonale sentrene

drive opplæring av ressurslærere i de ulike satsningsområdene. Ressurslærerne skal fungere som faglige støttespillere for skolelederne i det daglige arbeidet på skolene. Alle ressurslærere får opplæring i to av de fire satsningsområdene. Ressurslærerne er ansatt av skolelederne på skolene, og skolene selv avgjør hvor stor stilling ressurslærerrollen utgjør. I tillegg kan inntil fire skoler gå sammen om å ansette en ressurslærer. Organiseringen av ressurslærere vil derfor variere. Noen vil få ansvaret for hver sin skole, mens andre vil få ansvaret for flere skoler.

De grunnleggende ferdighetene vi i dag kjenner gjennom Kunnskapsløftet (LK06), ble vedtatt av Stortinget første gang i 2004 (St.meld. nr. 30). De ble allerede da sett på som nødvendige forutsetninger for læring og utvikling både i skole, arbeid og samfunnsliv. Grunnleggende ferdigheter er ikke ferdigheter på et grunnleggende nivå, men ferdigheter som er grunnleggende for læring og utvikling uavhengig av fag eller trinn. Hvordan de grunnleggende ferdighetene er forutsetninger for utvikling av fagkompetanse, står beskrevet i læreplanen for hvert fag. I tillegg er de grunnleggende ferdighetene integrert i kompetansemålene.

Regning som grunnleggende ferdighet er å bruke matematikk som redskap til å løse praktiske utfordringer. Dette gjelder situasjoner i alle skolens fag, så vel som situasjoner i dagliglivet og arbeidslivet. Det handler om å kunne formulere, bruke og tolke matematikk i ulike kontekster. Regning som grunnleggende ferdighet gjelder derfor ikke bare for matematikkfaget, men for alle skolens fag. I det teoretiske bakgrunnsdokumentet er det utarbeidet en modell for god regning, en trådmodell som består av fem komponenter (tråder): *forståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement.* Disse komponentene skal illustrere tråder i et sammenflettet tau som er avhengige av hverandre for å gjøre tauet sterkt. Å arbeide med alle de fem komponentene vil danne en god basis for den grunnleggende ferdigheten å kunne regne. Denne trådmodellen er hentet fra et større forskningsarbeid i USA ledet av Jeremy Kilpatrick (Kilpatrick et al., 2001). Du kan lese mer om prosjektet og trådmodellen på matematikksenteret.no under «Grunnskole» og «Regning i alle fag».

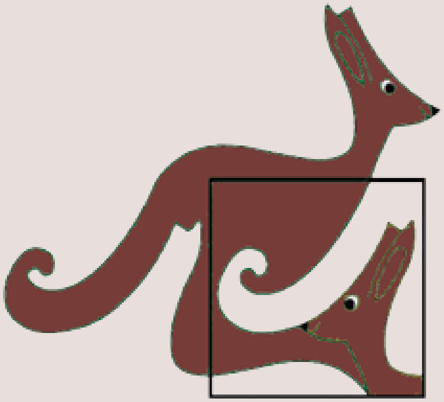
Note

1 Skolebasert kompetanseutvikling innebærer at skolen, med ledelsen og alle ansatte, deltar i en utviklingsprosess på egen arbeidsplass. Hensikten er å utvikle skolens samlede kunnskap, holdninger og ferdigheter når det gjelder læring, undervisning og samarbeid.

Referanser

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

KENGURUSIDENE



Oppgavetyper i Kengurukonkurransen

Anne-Gunn Svorkmo

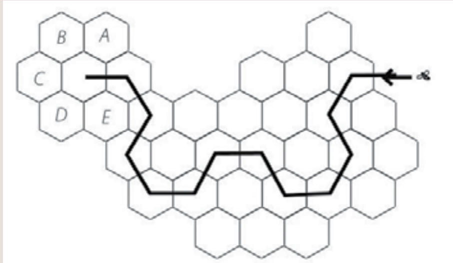
Kengurukonkurransen er satt sammen av forskjellige typer oppgaver. I de tre oppgavesettene Ecolier (4.–5. trinn), Benjamin (6.–8. trinn) og Cadet (9.–10. trinn) finnes det både tall-, geometri- og logiske oppgaver. Alle oppgavetypene er representert i hvert oppgavesett med ulik vanskegrad.

I de fleste oppgavesettene finnes det også oppgaver hvor det inngår mønster. I enkelte oppgaver er det å se mønster og sammenhenger avgjørende for å kunne løse oppgaven. Andre oppgaver kan løses uten at elevene oppdager mønsteret, men det vil da ta lengre tid å komme fram til en løsning.

Nedenfor finnes tre eksempler på oppgaver med mønstre. Kanskje disse kan brukes som en oppvarming til årets Kengurukonkurranse? Spørsmål, tips til utvidelse av hver oppgave og fasit står i rammen under svaralternativene.

Oppgave 1

En bie flytter seg rundt i bikuben etter et bestemt mønster. Så stopper den opp.

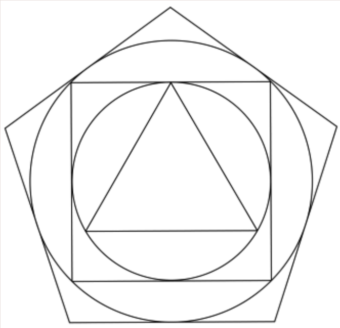


Til hvilken celle flytter bien seg etterpå?
A) A B) B C) C D) D E) E

Kommentar til Oppgave 1
La elevene tegne hvordan bien flytter seg videre. Forklar mønsteret til en annen. Biens vei gjentas etter 5 celler. Når bien har passert 13 celler, så beveger den seg på samme måte som når den går fra celle 3 til 4. Den svinger til venstre, venstre, høyre, høyre, høyre. Dette gjentas. Riktig svaralternativ er B.
Dersom det er utfordrende for elevene å se mønsteret, bruk gjerne matpapir og tegn hvordan bien flytter på det gjennomsiktige papiret. Forskyv matpapiret slik at elevene ser hvordan mønsteret forsetter fra den ruta hvor bien har stoppet opp. Hver elev kan så selv finne på et annet mønster som bien kunne ha beveget seg etter. Elevene beskriver mønsteret sitt og lager fasit. La deretter elevene løse hverandres oppgaver. Heksagonpapir kan lastes ned fra: www.printablepaper.net/category/hexagon_graph

Oppgave 2

Trine tegner en likesidet trekant. Så tegner hun den omskrevne sirkelen til trekanten. Deretter tegner hun det omskrevne kvadratet til sirkelen. Etter å ha tegnet enda en omskrevet sirkel, tegner Trine en omskrevet femkant til denne sirkelen. Hun fortsetter på samme måte med nye sirkler og nye regulære mangekanter, alle med én sidekant mer enn den forrige. Hun slutter etter at hun har tegnet en mangekant med 16 sidekanter.



Hvor mange områder er det til sammen innenfor den siste mangekanten?
A) 232 B) 240 C) 248 D) 264 E) 272

Kommentar til Oppgave 2
La elevene tegne eller konstruere figuren, og for hver figur som tegnes noteres antall områder som dannes. Etter den første sirkelen finnes det en sammenheng mellom antall områder og antall sidekanter på mangekanten. Hvilken sammenheng er det? Skriv mønsteret ned som begynnelsen på et regnestykke:
$1 + 3 + (2 \cdot 4) + (2 \cdot 5) + (2 \cdot 6) + \cdots + (2 \cdot 15) + 16.$
Bortsett fra 1, 3 og 16 er det alle de naturlige tallene fra 4 og oppover til 15 som blir multiplisert med to. Regnestykket kan omformuleres og forenkles til:
$1 + 3 + 2(4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \cdots + 15)$
$+ 16 = 20 + 2\,(6 \cdot 19) = 248.$
Alternativ C er riktig løsning.
Oppgaven kan forenkles for eksempel ved at Trine avslutter tegninga med en åttekant.

Oppgave 3

Du legger sammen de 1000 første partallene og gjør det samme med de 1000 første oddetallene. Hva blir forskjellen mellom de to summene?
A) 1 B) 200 C) 500 D) 1000 E) 2000

Kommentar til Oppgave 3
Å legge sammen 1000 partall og 1000 oddetall kan virke som en uoverkommelig oppgave for mange elever! Hensikten med å velge et så stort antall, er at elevene må velge en annen framgangsmåte enn å summere 1000 tall manuelt. En god strategi er å forenkle problemet (som er et av Polyas (1945) kjente prinsipp for problemløsing). Et enklere problem er: Hva er differansen mellom summen av de fem første partallene og summen av de fem første oddetallene?
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ og
$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$
Differansen er her fem, og det er fem oddetall og fem partall. Elevene må selv bestemme om de vil undersøke færre eller flere tall enn 5. Er det noen sammenheng mellom antall tall som legges sammen og differansen mellom de to summene? Hvis det er, hvordan forklare sammenhengen? Hvilken forskjell blir det da mellom summen av de 1000 første partallene og de 1000 første oddetallene? Riktig svaralternativ er her D.
Kanskje en enda enklere måte å komme fram til en løsning på er å resonnere seg fram til at differansen mellom et oddetall og det påfølgende tallet som er et partall, alltid vil være 1. For fire påfølgende tall vil differansen mellom summen av oddetallene og summen av partallene være 2.
Da vil differansen mellom summen av de 1000 første oddetall og de 1000 første partallene være 1000.

Flere oppgaver finnes på www.matematikksenteret.no/kengurusiden. Fordi Sverige har deltatt i Kengurukonkurransen i flere år enn Norge, finnes det enda flere oppgaver på ncm.gu.se/node/6794, men disse oppgavene er på svensk. Ideer til løsninger og hvordan det kan arbeides videre med oppgave 1 og 2, er hentet fra Gennow og Wallby (2010). De er også ansvarlige for Kengurukonkurransen i Sverige.

Lykke til med forberedelsene til årets konkurranse!

Litteratur

Gennow, S. og Wallby, K. (2010). *Geometri og rumsuppfatning – med Känguruproblem*. Göteborgs universitet, Nationelt centrum för matematikutbildning.

Polya, G. (1945). *How To Solve It.* Princeton University Press, 1957.

Kengurukonkurransen 2014

Mer informasjon finnes på www.matematikksenteret.no/kengurusiden

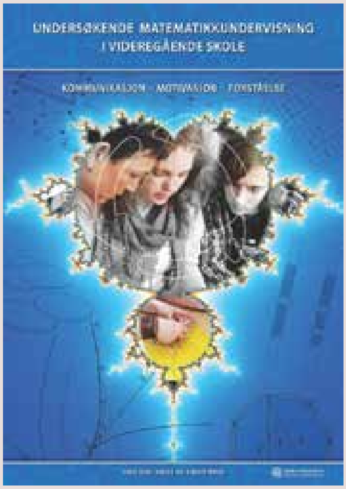
I år starter konkurransen 20. mars. Frist for å melde på elever er 15. mars.

Påmeldingen er åpnet

www.matematikksenteret.no

På Matematikksenterets nettsider får du tilgang til en rekke ressurser.
Vi har blant annet hefter både med ideer til og ferdige undervisningsopplegg.
Besøk vår nettbutikk som du finner på knappen øverst på siden vår.

Eksempler på hefter, et for barnehage og et for videregående skole.



Andre titler

Matematikk i barnehagen – Idehefte og erfaringer fra et kompetansehevingsprosjekt
Idehefte: Matematikk i Kunst og håndverk

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
v/Randi Håpnes
NTNU, Realfagbygget
7491 Trondheim

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det overordnede målet for Landslaget for matematikk i skolen er å heve kvaliteten på matematikkundervisningen i grunnskolen, den videregående skole og på universitet/høyskole.

Landslaget skal stimulere til kontakt og samarbeid mellom lærere på ulike utdanningsnivåer og mellom lærere og andre som er opptatt av matematikk.

Styret for LAMIS

Leder
Tone Skori, Akershus
Barnehage/førskole
Else H. Devold, Oslo
Barnetrinnet
Åge Rygsether, Nedre-Eiker
Ungdomstrinnet
Gerd Nilsen, Hedmark
Videregående skole
Per Gunnar Østerlie, Sør-Trøndelag
Høgskole/universitet
Marianne Maugesten, Østfold
Varamedlemmer
1. Grete Tofteberg, Østfold
2. Tor Espen Kristensen, Hordaland

Medlemskontingent

400 kr for enkeltmedlem m/Tangenten
200 kr for husstandsmedlemmer
200 kr for studenter m/Tangenten
800 kr for skoler/institusjoner m/Tangenten

Organisasjonssekretær

Gro Berg
gro@lamis.no
41562324

Sommerkurset 2014

6.–8. august i Fredrikstad

Følg med på www.lamis.no
for oppdatert informasjon

Lederen har ordet

Tone Skori

Jeg ønsker dere alle et nytt godt matematisk år, selv om vi har kommet langt ut i januar.

UngeAbel, som har over 6000 påmeldte, pågår nå for fullt for elever på niende trinn rundt omkring i vårt langstrakte land. I skrivende stund er elevene ferdige med første runde, og når dette nummeret av Tangenten foreligger, holder de akkurat på å avslutte andre runde. Da har de igjen prosjektarbeid, som denne gangen er nært knyttet til demografi i de nordiske landene. Frist for innlevering av prosjektarbeid er 14. mars, og da gjenstår det semifinale og finale, som skal foregå på Eidsvoll i slutten av april. Jeg gleder meg veldig til å møte disse niendeklassingene der.

Tidligere år har LAMIS oppfordret barnehager og skoler til å arrangere Matematikkens dag i uke 6. Nytt i år er at LAMIS har flyttet denne oppfordringen om en Matematikkens dag til uke 11. Dette på grunn av endringer i faktureringsrutiner som gjør at heftet blir sendt ut til medlemmene noe senere enn tidligere år. Info om dette har ligget ute på LAMIS sin hjemmeside siden tidlig i høst, men hvis du ikke har fått med deg denne endringen og har planlagt Matematikkens dag i uke 6, er det ingen grunn til å la være. Du kan bruke opplegg og ideer fra tidligere hefter. Til dem av dere som ikke synes uke 11 passer på deres skole, går det selvsagt fint å arrangere Matematikkens dag på et annet tidspunkt også.

Vi i LAMIS jobber hele tiden for at medlemslistene våre skal være oppdatert. For å få til dette er vi avhengige av at dere medlemmer gir oss beskjed når dere endrer e-postadresse, postadresse og skoleslag, så vær snill å gi oss beskjed om dette på www.lamis.no under «Medlem – Oppdatere medlemsopplysninger».

Jeg minner om at sommerkurset i år vil foregå i Fredrikstad 6.–8. august. Jeg håper at jeg ser mange av dere der.

Sommerkurset 2014

Velkommen til Fredrikstad 6.8–8.8

Matematikk – selve livet

For mange elever er det vanskelig å se praktisk nytteverdi av matematikkundervisningen. Dette ønsker vi i Østfold lokallag av LAMIS å gjøre noe med. Vi ønsker å rette fokus mot overgangene mellom ulike faser i livet, og vil ivareta den praktiske tilnærmingen til matematikken vi anvender gjennom livet. Et mål er å få skape forståelse gjennom å vise nytteverdi av det elevene skal lære, og vi ønsker å styrke dette gjennom å tilby varierte verksteder og aktuelle plenumsforelesere som bidrar til faglig utvikling for lærere i ulike skoleslag.

Spennende forelesere

For å ivareta overganger mellom de ulike fasene i livet, har vi valgt å inngå avtaler med spennende forelesere. Vi er fortsatt i forhandlingsposisjon med to av plenumsforeleserne våre, og ønsker ikke å røpe detaljer knyttet til disse riktig enda. En av plenumsforeleserne er i orden, og vi får besøk av Gitte Drage fra Vitensenteret Sørlandet. Gitte vil snakke om de minste barna, og gjennom foredraget Pytagoras i tareskogen vil fokuset rettes mot romforståelse, romoppfattelse og den voksnes rolle i dialog med barna.

Vi kan røpe såpass at de andre plenumsforeleserne vi forhandler med vil ha fokus på overganger mellom de ulike skoletrinnene (barnetrinn, ungdomstrinn og videregående skole), og vi kommer også til å utforske overgangen fra skoleelev til samfunnsborger i arbeidslivet.

Varierte verksteder

Sommerkurset 2014 vil ha fem ulike parallellsesjoner, og vi kan love mange spennende verksteder. Her vil vi ha noe for alle skoleslag, og det er viktig for oss at alle sommerkursets deltagere skal finne verksteder av interesse. Vi har booket flere verkstedholdere allerede, men vi har fortsatt plass til flere gode alternativer. Har du lyst til å delta på sommerkurset 2014 som verkstedholder, så send forslaget ditt til karikarl@online.no innen **28. februar**.

Følg med på www.lamis.no

Program og annen informasjon blir lagt ut etter hvert som ting faller på plass. Påmeldingen åpner i slutten av mars / begynnelsen av april. Deltagere bestiller hotellovernatting selv, og vi har forhandlet fram gode priser med Quality Hotel Fredrikstad. Informasjon om bestilling legges ut på hjemmesiden så fort den er på plass. Vi sees i Fredrikstad august 2014!

LAMIS
SOMMERKURS 2014
MATEMATIKK - SELVE LIVET

UngeAbel
en landsomfattende konkurranse for elevgrupper/klasser på 9. trinn

Tidlig i høst ble det sendt ut informasjon til alle kommuner i Norge der LAMIS inviterte alle elever på niende trinn skoleåret 2013–2014 til å delta i UngeAbel. UngeAbel er en matematikkonkurranse for elevgrupper/klasser på niende trinn og er ment å være en årlig konkurranse slik at alle elever i Norge kan delta det året de går niendetrinn.

LAMIS fikk våren 2013 en henvendelse fra Vitenskapsakademiet, som spurte om vi kunne tenke oss å arrangere en konkurranse for niende trinns elever siden KappAbel, som tidligere dekket dette behovet, hadde besluttet å legge ned driften. LAMIS takket ja til dette, men vi fikk ikke fortsette under det gamle navnet KappAbel, som vi egentlig likte svært godt. Vi valgte navnet UngeAbel. «Abel» fordi det henviser til Nils Henrik Abel og «Unge» fordi det allerede finnes en Abelkonkurranse for elever i videregående opplæring. Nils Henrik Abel ble født i 1802 og døde i 1829, og han regnes som en av Norges fremste matematikere. LAMIS innledet et samarbeid med NMCC, *Nordic Math Class Competition*, som allerede har en konkurranse som foregår i Danmark, Sverige, Finland og Island. NMCC er et samarbeid mellom fagmiljøer i Norge, Danmark, Sverige, Finland og Island. Vi får nå tilgang til oppgaver fra deres oppgavebank gjennom dette samarbeidet, og vi er derfor svært trygge på at det faglige innholdet er av høy standard. Alle elevene i de nordiske landene vil få de samme oppgavene med noen nasjonale tilpasninger.

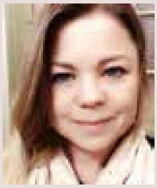
Vi har valgt å legge opp konkurransen slik at den blir mest mulig lik i alle de nordiske landene. Runde én og to er innledende runder der vi sender ut oppgaver som skal løses i løpet av 80 minutter. Disse skal besvares på Internett, og vi tar ikke hensyn til løsningsbeskrivelser, bare rett/feil svar. Dette kan selvsagt diskuteres, da gode løsningsbeskrivelser kunne gitt delpoeng. Siden dette er en landsdekkende konkurranse med potensielt mange deltakere, velger vi å bedømme runde én og to uten forklaringer, men løsningsbegrunnelsen vil bli tillagt vekt i semifinale og finale samt i prosjektarbeidet.

I oppdraget vi fikk fra Vitenskapsakademiet og Abelprisen, ligger det noen premisser for gjennomføringen. Blant annet skal konkurransen være landsdekkende, og alle fylkene skal være representert i semifinalen. Grunnlaget for deltakelse i semifinale og eventuelt finale er at runde én og to er gjennomført og prosjektarbeid er innlevert. Vår jury består av Elise Klaveness, Gerd Nilsen, Marianne Maugesten og Monica Nordbakke. De skal etter grundig overveielse av prosjektarbeid samt sammenlagt poengsum for innledende runder velge den elevgruppen/klassen fra hvert fylke som inviteres til å sende fire deltakere til Eidsvoll for semifinale- og finalearrangement 23.–24. april 2014. Vi fikk dette skoleåret 227 påmeldte elevgrupper/klasser fra alle fylker i Norge. Av disse har omtrent 180 levert inn svar i runde én. Vi ser at noen fylker er svært dårlig representert, og håper alle klarer å kvalifisere seg for deltakelse i semifinale og eventuelt finale.

Presentasjon av juryen skoleåret 2013–2014

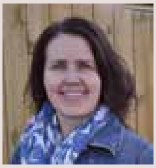
I arbeidet med å sette sammen juryen har vi spesielt lagt vekt på god faglig innsikt og kjennskap til skoleslaget.

Elise Klaveness er høgskolelektor ved Høgskolen i Vestfold. Hun er utdannet ved NTNU, UC Berkeley, Københavns Universitet

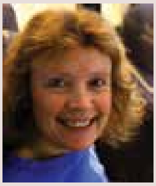


og Brown University innenfor matematikk og fysikk. Elise har undervist ved NTNU og er nå ved lærerutdanningen på Høgskolen i Vestfold. Hun brenner for å gjøre matematikken forståelig for alle og driver spesielt med forskning innenfor feltet matematikkvansker.

Gerd Nilsen er lærer ved Furnes ungdomsskole i Hedmark og ressursperson ved Matematikksenteret. Hun har treårig utdanning ved matematikklinje på Høgskolen i Hedmark. Gerd har tilleggsutdanning i juss, kroppsøving og biologi samt en master i grunnskoledidaktikk med hovedemne matematikk.



Monica Nordbakke er høgskolelektor ved lærerutdanningen på Høgskolen i Østfold. Der underviser hun på grunnskolelærerutdanningen 5–10 og holder kurs for lærere i grunnskolen. Hun er utdannet allmennlærer, har tatt master i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Agder og er spesielt opptatt av en problemløsende og tilpasset opplæring i matematikkfaget. Monica er styremedlem i LAMIS Østfold og har vært med på å skrive matematikkdagheftet for 2013.



Marianne Maugesten er førstelektor ved lærerutdanningen ved Høgskolen i Østfold. Hun har lang erfaring både som lærer i ungdomsskolen og i lærerutdanningen. Hun underviser på grunnskolelærerutdanningen 1–7 og holder kurs for lærere på 5.–10. trinn. Marianne har skrevet læreverk for ungdomstrinnet og bok og kapittel i bok til bruk i lærerutdanningen. Hun kjenner godt til ungdomsskolen gjennom arbeid for Utdanningsdirektoratet. Marianne er styremedlem i LAMIS og har vært med i lokallagsstyret i Østfold i mange år. Hun har skrevet matematikkdaghefte og arrangert LAMIS sommerkurs.

Mer informasjon om UngeAbel finner du på vår hjemmeside www.lamis.no, der all informasjon legges ut under arkfanen «UngeAbel».

Vi i LAMIS ser dette året som et slags pilotår for konkurransen. Antall påmeldte er relativt stort, men vi håper på enda flere neste skoleår når det blir bedre kjent at vi arrangerer UngeAbel. For å takle et enda større antall påmeldte deltakere neste skoleår har vi kontaktet vår hjemmesideleverandør, som forhåpentligvis kan hjelpe oss å utvikle et automatisert system for konkurransen. Vi har stor tro på at vårt konsept er et positivt tiltak siden det involverer mange og knytter matematikken opp mot relevans. Vi tror det vil kunne gi mange elever en positiv opplevelse av matematikken. Oppgavene våre favoriserer ikke bare de flinke elevene. Vi har også praktiske oppgaver som favoriserer de elevene som tenker litt annerledes. Som en lærer sa til sine elever: «Dere skal ikke stole på at 'Eva' har den beste løsningen selv om hun er flink». Læreren så at «Ola» hadde den rette løsningen, men «Ola» klarte ikke å formidle den til resten av elevgruppa uten å få litt hjelp. Hans matematiske ordforråd var ikke fullt utviklet, men han var en god oppgaveløser. Dette kan gi elever en mestringsfølelse i et fag de ikke alltid opplever like positivt. DA har vi oppnådd det vi vil! Mestring er viktig for å oppleve matematikkglede. Vi håper vi kan være med på å spre matematikkglede gjennom UngeAbel.

Vi takker våre støttespillere Abelprisen, Matematikksenteret, Renatesenteret og Danske Bank for økonomisk støtte til gjennomføring av konkurransen.

Matematikknettverk i Rødøy, Meløy og Gildeskål

Anne-Mari Jensen

Skoleåret 2009–2010 etablerte vi et matematikknettverk for matematikklærere på ungdomstrinnet og i videregående skole. Utgangspunktet er Meløy videregående skole med sine tre avdelinger i Glomfjord (yrkesfag), Ørnes (studieforberedende) og Inndyr (naturbruk). Skolen tar inn elever fra ungdomsskolene i de tre kommunene Rødøy, Meløy og Gildeskål, og matematikklærere fra alle ungdomsskolene i inntaksområdet er invitert. I disse kommunene har vi noen store ungdomsskoler, men også mange små, fådelte skoler med ungdomstrinn.

Vi samles på kommunestyresalen på Ørnes, alle de gamle ordførerne ser ned på oss i kaffepausen!

Målet for nettverket er todelt:

- Det skal skape kontakt «over grensene» mellom ungdomsskole og videregående skole med utveksling av informasjon og erfaringer for å gjøre overgangen mellom skoleslagene så god som mulig for elevene.
- Det skal gi matematikklærere i de to skoleslagene et forum for erfaringsutveksling og gjensidig refleksjon rundt undervisning og undervisningspraksis og for utprøving av arbeidsformer som skaper motivasjon og god læring.

Vi har fire dagsamlinger hvert skoleår, to om høsten og to om våren. På samlingene har vi ofte noen kortere kurs om emner som elevaktiv matematikk, undersøkende arbeidsformer i undervisningen, algebra, sannsynlighet, geometri, funksjonslære, GeoGebra, vurdering, grunnleggende ferdigheter, tilrettelegging for svake elever osv. Dessuten er det rom for erfaringsdeling, og mange av deltakerne har presentert undervisningsopplegg eller ideer som de synes

Vi forbereder oss på at GeoGebra skal bli et verktøy også på ungdomstrinnet.

har vært nyttige for å skape god læring. Iblant oppstår det også diskusjon om ting som ikke fungerer, eller som er vanskelige. Vi holder oss oppdatert på læreplaner og ordninger rundt eksamen og eksamensformer, og spesielt har ordningene for muntlig eksamen vært diskutert. Dessuten har vi sett på hverandres læreverk, hvordan stoffet presenteres i de ulike verkene, og hva det legges vekt på. Vi har også blitt litt kjent med hverandres undervisning. Vi delte oss i grupper og dro på besøk og observerte hverandres undervisning med påfølgende refleksjon og diskusjon.

Et par ganger har vi fått noen ekstra kroner å rutte med. Én gang brukte vi pengene til å kjøpe inn konkretiseringsmateriell til matematikkundervisningen som vi delte oss i mellom. Og i april fikk vi Olav Lunde til å komme og holde kurs om matematikkvansker og matematikkmestring. Da inviterte vi lærere fra alle klassetrinn og fra PPT. Det ble svært populært og vellykket.

I år er vi ca. 20 lærere i nettverket. Flere kommer fra så små skoler at de ikke har kolleger i faget. De setter stor pris på denne muligheten til faglig utvikling. Vi som kommer fra videregående skole, føler at kontakten er nyttig, både fordi vi nå vet mer om den faglige bakgrunnen til elevene vi tar imot, og fordi vi får fortalt om hva som venter elevene i faget videre. Med årene blir vi godt kjent og føler at dette er en satsning som er til nytte både for oss lærere og for elevene våre.

Sveriges MatematikLärarförening, SMaL

Per Berggren, ordförande

Sveriges MatematikLärarförening, SMaL firar sitt 20-årsjubileum i samband med den kommande biennalen i Umeå i februari 2014.

Syftet med föreningen är att höja kvaliteten och stimulera matematikundervisningen på alla nivåer. Matematiklärarföreningens strävan är att alla som undervisar i matematik ska vara medlemmar i föreningen. Vi är sedan länge Sveriges största förening för lärare som undervisar i matematik.

SMaL är en aktiv remissinstans som arbetar för att påverka såväl nationella styrdokument och matematiksatsningar som vad som händer på lokal nivå ute i skolorna. Som medlem i SMaL är man med och stöttar oss i detta arbete. Samtidigt får man del av SMaL:s arbete genom Medlemsbladet, möjlighet att delta i SMaL:s 50-tal lokalavdelningarnas verksamhet, mycket förmånligt pris på sommarkursen i Mullsjö.

Sedan några år tillbaka fungerar SMaL som nationell samlingsorganisation för aktiviteter runt Pi-dagen den 14 mars i Sverige. Hur du och dina kollegor kan fira den högtidsdag för matematik finner du inspiration och idéer till på www.smal-matte.com. I samband med biennalen i Umeå kommer även ett specialnummer av Medlemsbladet ut som helt är tillägnat Pi-dagen.

En ny verksamhet inom föreningen är satsningen på lärare i förskolan. Det startade som ett upprop i Malmö där Annika Palmgren från SMaL:s styrelse bjöd in lärare och förskolechefer till fortbildning. Intresset blev fantastiskt, långt över vad vi hade kunnat hoppas. Den satsningen håller nu på att sprida sig över hela landet.

Kontakt ordförande Per Berggren på Per.Berggren@edu.botkyrka.se eller www.smal-matte.com

matematikk.org
Et nettsted for alle matematikkinteresserte!

Hvem er vi, og hva er målet?

matematikk.org er et samarbeid mellom matematikkmiljøene ved universitetene i Agder, Bergen, Oslo, Tromsø og Trondheim, Høgskolen i Oslo og Akershus og Matematikksenteret. Hovedsponsorer er oljeselskapet BP Norge AS, seismikkselskapet Petroleum Geo-Services (PGS) og Abelprisen. Målet er å bidra til at stadig flere opplever matematikk som et spennende og nyttig fag. Vi ønsker å være et inspirasjonssenter for matematikklærere, et verktøy som vekker nysgjerrighet og interesse hos elever og et opplysningssenter for foreldre med barn i skolen.

Hvordan kan du bruke matematikk.org i undervisningen?

Siden vi er et nettsted med levende matematikk for alle, tilbyr vi ulike typer oppgaver, (mini)undervisningsopplegg, spill, plakater, matematiske historier, lynkurs, matematikktivoli og foreldrekurs. Hvordan finner du stoff til bruk i undervisningen? Start med å gå inn på ønsket trinngruppe. Deretter velger du *læreruglen* i banneret (til høyre). Den tar deg til stoff tilpasset undervisningen.

Timeplanlegging – gjennomgang av nytt stoff eller repetisjon?

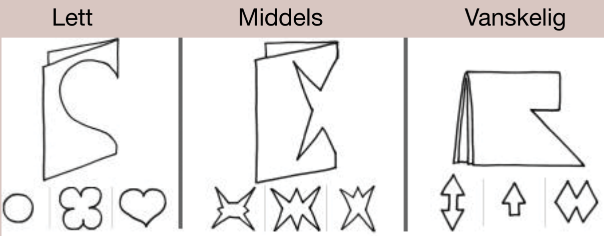
Vi mener at det ikke er nødvendig å finne opp kruttet på nytt hver gang. Du kan bygge på velfungerende (mini-) undervisningsopplegg, aktiviteter, historier og plakater. Med utgangspunkt i ønsket kompetansemål kan du for eksempel søke blant nettstedets 400 undervisningsopplegg. Et opplegg kan raskt tas i bruk fordi det er beskrevet i detalj (når, hvor og hvordan), og du finner også eventuelle arbeidsark vedlagt. Miniundervisningsopplegg tar ca. 15 minutter å gjennomføre og fungerer som et avbrekk i timen eller repetisjon av et emne. Hvis du trenger et lite supplement til eget opplegg, kan du for eksempel velge blant 20 ulike aktiviteter i matematikktivoliet eller 55 ulike historier om Mia og Marius.

Mengdetrening og tilpasset opplæring

I oppgavedatabasen *Treningsleir* er det over 27 000 oppgaver fordelt på 1.–13. trinn. Du kan velge et sett med oppgaver etter ønsket antall, vanskegrad og kompetansemål eller stikkord fra *fagtre*. Oppgavesettet kan du

Julekalender, 1.-4. trinn

Hvilken figur passer til hullet i arket?



«bokmerke», og dermed finner du lett tilbake til det ved en senere anledning. Ønsker du oppgaver for samarbeid, se i tidligere julekalendre eller tekstnøtter.

Tekstnøtt, 5.-7. trinn

Måle vann.
Hvordan måle opp 4 liter vann med et 3-liters spann og et 5-liters spann?

Automatisering av regneferdigheter krever øving, som fort blir en lang liste med like oppgaver. Ved hjelp av matematikk.org kan du motivere elevene til å løse mange oppgaver uten å kjede seg. I spillet *Gangetesteren* kan elevene øve på multiplikasjon opp til og med 20-gangen. I *Regneregn* kan de øve på de fire regneartene, og i *Brøkreser* kan de få trening i brøkregning med utvidelser, forkorting med mer. Spillet *Regnemesteren* tester regneferdigheter så vel som bruk av ulike løsningsstrategier. Til sammen tilbyr vi elleve ulike spill. Beskrivelsene av spillene finnes på lærersiden under *Om spillene*.

Faglig påfyll

Det er også utviklet temahefter for lærere i grunn- og videregående skole. De fleste heftene inneholder både fagstoff, undervisningsopplegg og forslag til hvordan en kan bruke de forskjellige temaene i skolen. Fagstoffet spenner fra hemme-

lige koder og feilrettingskoder, platonske legemer, grafteori og optimering til sannsynlighet og bruk av spill og spillteori i matematikkundervisningen. Heftene er fritt tilgjengelige og kan lastes ned fra lærersiden.

Tips elevene om Lynkurs 8.–10. trinn, Orakelet og Karriereguiden

Det er utviklet over ti lynkurs tilpasset ungdomsskoleelevene. Kursene består av forklaringer, eksempler og videoer i blant annet prosentregning, algebra og geometri. Elevene kan stille spørsmål til *Orakelet* eller finne gode forklaringer på tidligere stilte spørsmål i Orakelets *Ofte stilte spørsmål*. I *Karriereguiden* kan de finne svar på hvor og hvordan matematikk brukes i samfunnet, samt hvem de kan spørre om råd for videre utdanning.

Ønsker du å få tilsendt et klassesett av våre matematikkpennaler?

Dersom du ønsker å dele egne, velfungerende (mini-) undervisningsopplegg, så ta kontakt med oss og få tilsendt et innsendingsskjema. Ved publisering av undervisningsopplegg får du tilsendt et klassesett (30 stk.) av våre matematikkpennaler. Disse kan for eksempel brukes som premie i en matematikkquiz.

Matematikkdagen 2014 – vinn premier!

matematikk.org og LAMIS oppfordrer alle skolene til å gjennomføre *Matematikkdagen* i uke 11. Deler du dine egne opplegg og erfaringer, kan du være med i trekningen av et gavekort til en verdi av kr 2000. Se under *Nyheter* på matematikk.org for mer informasjon. *Ikke nøl med å ta kontakt – vi er her for dere!*

Matematikkinteressen skal stimuleres

Anne-Marie Astad

Abelstyret bevilger hvert år rundt 1,5 millioner kroner til tiltak som skal øke interessen for matematikk blant barn og unge. Det nyeste tilskuddet er den interaktive matematikk-utstillingen IMAGINARY som vises på Vitenskapsmuseet i Trondheim fram til 30. mars. UngeAbel, en matematikkonkurranse for 9. trinn som LAMIS arrangerer, er blant de nye tiltakene som støttes i 2014. På Vitenfabrikken i Sandnes blir det aktivitetsdag for elever i 8. klasse når Abelprisvinneren kommer på besøk 22. mai.

Foreningen Norske Vitensentre får 500.000 kroner som skal fordeles på en rekke tiltak. I tillegg går 50.000 kroner til vitensenteret INSPIRIA i Østfold som skal utvikle et helsefremmende matematikk-konsept med fysisk aktivitet som pedagogisk metode. Smarte, matteglade og aktive barn er målet.

LAMIS støttes med 250.000 kroner som skal gå til å arrangere sommerkurset og til produksjon av matematikkdagheftet. Abelstyret gir også en årlig bevilgning til Holmboeprisen som deles ut av Norsk matematikkråd. Prisen er på 100.000 kroner og deles ut 19. mai på Oslo katedralskole.

Foto: NTNU/Kai T. Dragland

Petroleum Geo-Services (PGS) samarbeider med Det Norske Videnskaps-Akademi om å stimulere matematikkinteressen blant barn og unge gjennom støtte til Abelkonkuransen for elever i videregående skole og til nettstedet www.matematikk.org/

Foto: NTNU/Kai T. Dragland

Barne- og ungdomsutvalget

For å stimulere interessen for matematikk blant barn og unge har Abelstyret oppnevnt et eget utvalg. Utvalget, som ledes av Anne Borg, har et hovedansvar for tiltak rettet mot skole, barn og unge. Utvalget er bredt sammensatt med medlemmer som har erfaring og kunnskap om matematikk, skole og formidling av faget til barn og unge. De skal stimulere og støtte relevante miljøer og pågående aktiviteter, men utvalget kan også selv initiere tiltak.

Det er en årlig søknadsfrist 1. oktober. Det er utarbeidet et eget søknadsskjema som skal brukes. Skjema kan lastes ned fra www.abelprisen.no.

Abelprisens barne- og ungdomsutvalg har over flere år bygd opp en tiltakskjede der de ulike elementene bygger på og utfyller hverandre. Utstillingen «Pythagoras i tareskogen» ved Vitensenteret Sørlandet er et tilbud til de aller minste barna. I den andre enden av aldersskalaen støttes Abelkonkurransen for elever i videregående skole. Det nyeste tilskuddet er den interaktive matematikkutstillingen IMAGENARY.

Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) og Foreningen norske vitensentre har vært viktige samarbeidspartnere gjennom mange år. Støtten til LAMIS har vært kanalisert gjennom to hovedtiltak, matematikkdagene på skolene i februar og det årlige sommerkurset for matematikklærere. Når det gjelder vitensentrene kom de først på banen gjennom støtte til enkelttiltak. De har nå gått sammen om en felles matematikksatsing som får støtte gjennom dette programmet. Abelstyret gir også støtte til enkeltprosjekter.

Det er barne- og ungdomsutvalget som prioriterer søknadene før de behandles i Abelstyret. Støtten til barne- og ungdomstiltak er direkte forankret i Abelprisens statutter: «Hovedformålet med å opprette Niels Henrik Abels minnefond er å tildele en internasjonal pris for fremragende vitenskapelig arbeid i matematikk. Prisen skal bidra til å heve matematikkfagets status i samfunnet og stimulere barn og unge til å bli interessert i matematikk.»

Abelprisarrangementer i 2014

26. mars
Vinneren av Abelprisen kunngjøres

19. mai
Utdeling av Holmboeprisen på Oslo katedralskole
Holmboesymposium på Høgskolen i Oslo
Kransenedlegging ved Abelmonumentet i Slottsparken
Abelmiddag på Det Norske Videnskaps-Akademi

20. mai
Abelprisutdeling i Universitetets Aula. Etter prisutdelingen blir det en mottakelse på Det Norske Teatret der Tonje Steinsland intervjuer Abelprisvinneren.
Bankett på Akershus slott

21. mai
Abelforelesninger på Universitet i Oslo
Abelfest på Det Norske Videnskaps-Akademi

22. mai
Abelprisvinneren holder forelesning på Universitetet i Stavanger
Aktivitetsdag på Vitenfabrikken i Sandnes med besøk av Abelprisvinnere

For mer informasjon om arrangementene og påmelding se www.abelprisen.no/