Korden

Mestring

Dette er et mål lærere arbeider for i matematikkundervisning, uansett nivå. I dette nummeret skriver Choat om mønster og mening i barnehagematematikk. Her trekkes nettopp gleden ved å mestre, å skape og lære noe nytt, fram. Her og nå perspektivet er viktig i barns i aktiviteter, det handler ikke om at de får vist hva de kan i en test eller at de får bruk for det senere i skolen.

Barn mestrer mye som er lett å overse. De kan undre seg, diskutere og streve med matematikkrelaterte problem, sammen kan de utarbeide både en og flere løsninger. Dersom voksne da møter barn med fokus på rett eller galt svar, vil de etter hvert oppfatte et riktig svar som målet i matematikklæring.

Når skolen prøver å finne ut hva elever mestrer, handler det like mye om å avdekke hva elever ikke mestrer. Filosofien som ligger bak er at da får lærer og elev mulighet til å identifisere nye læringsmål. Barn merker at de blir testet. De vet de blir observert. De blir opptatt av å framstå som «flinke». Lærere forteller om stille matematikktimer. De forteller om elever som ikke tør avsløre hva de ikke kan i matematikksamtaler, som velger taushet.

Boaler skriver i dette nummeret om fluency i matematikk – om å være fleksibel i tenkningen – kunne bevege seg mellom ulike strukturer og tankesett, og ha innsikt i både deler og helhet. Hun fremhever betydningen av å lære gjennom fleksible strategier i stedet for gjennom memorering. Dette kan gi mer holdbar kunnskap som kan bidra til mestring. Fokus på mestring knyttet til dybdelæring er heldigvis aldri for sent. Lærere ved Hellerud videregående skole viser i sin artikkel at det nytter å fokusere på mestring hos elevene. «Vi opplever at mange elever har evne til å resonnere og forstå matematiske ideer, selv om regneferdighetene mangler.» skriver lærerne. Å verdsette det elevene evner, kan gi pågangsmot til å sysle med matematikk.

Et ønske for året 2016 er at matematikklærere fortsetter å dele av sine erfaringer med hvordan matematikk kan gjøres relevant og meningsfylt for barn og unge. Å fremme flere måter å mestre faget på, er en vei å gå. Det kan gi barn og unge mot og lyst til å ta fatt i utfordringer der matematikk er involvert. Matematikklæreren har en viktig rolle!

Hannah Ruth Choat

Om mønster og mening i barnehagematematikken

I barnehagen skal barna «utforske, oppdage og skape ulike former og mønstre», ifølge Rammeplanen, og dette kravet står under avsnittet *Antall, rom og form*. Det kunne like gjerne stått under avsnittet *Kunst, kultur og kreativitet*. Høsten 2013 leverte ei gruppe studenter ved barnehagelærerutdanningen ved HiOA en tverrfaglig eksamensbesvarelse med en rekke praksisfortelinger som illustrerer koblinger mellom mønsterforståelse, estetisk opplevelse og mestringsfølelse hos barn. I denne artikkelen gjengis deler av disse studentenes besvarelse. Eksemplene blir så kommentert i lys av en psykologisk teori som setter estetisk erfaring i sammenheng med begrepet *processing fluency*. Denne teorien til Reber, Schwarz og Winkielmann gir et grunnlag for å se arbeid med mønster i barnehagen som en samtidig utvikling av matematikkforståelse og kunstnerisk følsomhet.

En stor takk rettes til studentene – Siri Gro Skeide Nyland, Håvard Gjerde og Gro Andresen – for tillatelsen til å bruke arbeidene deres til denne artikkelen.

Hanna Ruth Choat
Høgskolen i Oslo og Akershus
h.r.choat@hioa.no

Mønster er et matematisk tema

Hva er det matematiske ved mønster? Keith Devlin kaller like godt matematikken for selve vitenskapen om mønster (Devlin, 1994). Han argumenterer for at en avgrensning av matematikken som vitenskapen om tall eller geometriske former har vært utdatert i århundrer (Devlin, 1994, s. 2).

Det er ikke lett å gi noen dekkende definisjon av begrepet mønster, selv om vi kjenner igjen et mønster når vi ser det, slik vi gjør i denne praksisfortellingen fra Siri Nyland:

> Jeg sitter sammen med 5 barn rundt bordet, vi tegner og snakker sammen. Jeg begynner å tegne et mønster av rundinger og firkanter. Etter en kort stund blir et av barna, Serine 4;6, oppmerksom på hva jeg tegner og lener seg over og ser mot arket mitt, jeg fortsetter å tegne annenhver gang runding og firkant.
>
> Serine setter fingeren på en av firkantene på arket mitt og teller sidene på firkanten «1, 2, 3, 4» sier hun mens hun flytter fingeren fra strek til strek. «Det er en firkant» sier hun videre, «hvorfor tegner du rundinger og firkanter?»
>
> Jeg svarer at jeg lager mønster, og fortsetter å tegne.
>
> Serine blir sittende og se mot arket mitt, i det jeg er nesten ferdig med en firkant sier hun «runding». Når jeg har tegnet sirke-

len sier hun «firkant» Jeg fortsetter å tegne mens hun sier hva jeg skal tegne en stund, så sier Serine etter at jeg har tegnet en sirkel «runding». Jeg tegner en sirkel til, så sier hun «firkant, firkant». Mønsteret på arket blir nå sirkel, sirkel, firkant, firkant. Jeg blir sittende og tegne det nye mønsteret en stund, så sier Serine etter sirkel nummer to «runding». Mønsteret blir nå tre sirkler etter hverandre så tre firkanter, Serine ler og ser mot meg, så begynner hun å tegne sirkler og firkanter på sitt eget ark.

Solem og Reikerås forklarer at mønster er satt sammen av ulike geometriske avbildninger av en grunnform (Solem & Reikerås, 2009, s. 230), og i eksemplet over fungerer denne definisjonen fint: Mønsteret til Serine fremkommer ved parallellforskyvning (en avbildning) av sirkler og kvadrater (grunnformene). Carlsen, Wathne og Blomgren (2011) fremhever gjentakelse og rekkefølge som viktige stikkord til forklaring av hva et mønster er (Carlsen et al., 2011, s. 217), og legger i likhet med Solem og Reikerås vekt på *geometriske* mønster. Men hva med musikk, dans og rutiner – er ikke dette også eksempler på mønster? Med et litt videre begrep om grunnformer, slik at grunnelementet også kan være lyder, bevegelser og element i fortellinger, for eksempel, kan vi mer generelt avgrense mønster som *regelstyrte gjentakelser av en grunnform*. Da ville en veksling mellom et tramp og et klapp, for eksempel, være et mønster på samme form som mønsteret til Siri over, et mønster på formen *ABAB*.

Partallene og oddetallene følger samme ABAB-mønster. Ifølge Devlin er matematikeres anliggende å studere abstrakte mønster – «numeriske mønster, mønster i former, bevegelsesmønster, handlingsmønster, og så videre» (Devlin, 1994, s. 3). Vi bruker dette mer omfattende mønsterbegrepet her, og følger Devlin i å regne utforskning av slike mønster som matematikk.

Mønstergyldighet er forutsigbarhet

I vignetten om Siri og Serine ser fireåringen ut til å ha stor glede av først å være i stand til å *forutsi* neste element i rekka, og til deretter å skape sin egen regel for gjentakelse og anvende den i skapende aktivitet. Mønsterforståelse gjør det mulig å fylle inn manglende informasjon. Mønsterforståelse lar oss trekke slutninger om ting vi ikke har direkte erfaringer med. Håvard Gjerde beskriver hvordan et barn teller brikker som ikke er der:

> En gutt på 4 år og 3 måneder sitter og pusler puslespill på gulvet. Spillet har i utgangspunktet 30 brikker, men det mangler en del av dem. Når han er ferdig med å legge de brikkene han har, ser han opp på meg og sier at det mangler noen brikker. «Vet du hvor mange som mangler?» spør jeg ham. Han begynner å telle høyt, mens han flytter fingeren fra punkt til punkt hvor det mangler brikker. Flere av brikkene som mangler hører hjemme i plasser ved siden av hverandre, så det er ikke opplagt hvor en brikke begynner, og en slutter. Likevel gjennomfører han tellingen med jevnt tempo, selv om han teller manglende brikker i en tilsynelatende vilkårlig rekkefølge. Han unngår likevel å telle samme plass flere ganger. Han kommer frem til at det mangler seks brikker, som var korrekt.Hva har dette med mønsterforståelse å gjøre? Gjerde forklarer at barnet «ser at brikkene (grunnformen) repeteres etter en gitt regel, og kan derfor konkludere med at i 'hullet' skal det være 2 brikker av samme størrelse som grunnformen, ikke 1 større brikke.» Mønsterforståelse gjør det mulig for barnet å telle brikker som ikke er der, og som ikke kan pekes på.

Mønsterforståelse gir også forståelse for tallrekka. Siri Gro Skeide Nyland forteller om en episode hvor barnegruppa skal ta t-banen, og hvor barna har fått øye på tallet 9 på lystavla.

De spør pedagogen og får bekreftet at tallet representerer antall minutter til t-banen skal gå:

> «Etter 9 kommer 10» sier Serine. 9 tallet på tavlen blir byttet ut med et 8 tall, når Serine ser dette sier hun «jammen nå står det 8» hun ser ganske overrasket ut. Hun sitter og ser mot tavlen og når 8-tallet blir byttet ut med et 7-tall utbryter hun «og nå står der 7, det står 7 der nå». Serine ser mot meg og sier «etter 7 kommer 6», jeg svarer «ja det gjør det». Serine blir sittende å telle ned, «etter 6 kommer 5», og hun ser glad ut når tallet på lystavlen skifter og tallet er det samme som hun sier. Etter en stund reiser jeg meg og sier nå kommer t-banen snart, Serine reiser seg også. Hun ser fortsatt mot tavlen. På tavlen blir 1- tallet byttet ut med «nå» og Serine utbryter «det står ikke 0, etter 1 kommer 0, hva er det det står?» «Det står nå» svarer jeg «det betyr at t-banen kommer nå.»

Nyland kommenterer at Serine «ser et mønster i tallrekka; det neste tallet øker med én», og kommenterer Serines overraskelse når hun innser at mønsteret ikke er økende likevel: «hun skjønner at mønsteret er minkende når hun forutser at etter 7 kommer 6 og når mønsteret brytes og 0-tallet ikke kommer.» Igjen er barnets glede over å ha oppdaget systemet slående. Er det mestringsglede – eller kan det også være element av estetisk opplevelse i dette?

Mønster oppleves ofte som vakre

Hvorfor er kaleidoskop vakre? Selve ordet er avledet av «kallos», 'vakkert' og «eidos», 'form' – men grunnelementene i et kaleidoskop er vanligvis enkle plast- eller glassbiter som ikke har spesielt interessante former. Det estetisk tilfredsstillende ved kaleidoskopet oppstår når disse enkle formene og fargene speiles gjentatte ganger, når de gjentas på en regelstyrt måte. Det fascinerende ved kaleidoskop henger sammen med det mønstergyldige i form og farge.

Gro Andresen forteller om hvordan hun og ei jente på fire år illustrerte ei sol på bakken ved hjelp av ovale blader. Hun forteller videre:

> Jeg kom med et forslag at ved å tegne en strek ned og tegne et par blader på streken kan det bli en blomst istedenfor, noe hun syntes var en dårlig ide og visket det vekk, slik at det ble en sol igjen. Jeg tegnet så et sett streker imellom bladene for å lage ekstra solstråler, dette likte hun og fullførte tegningen av strekene til hun kom rundt til min første strek.

I kommentaren til Andresens praksisfortelling skriver studentgruppa:

> Jentas mønsterforståelse kom til uttrykk i måten hun fullførte solstrålene på, både bladene og de hun tegnet. Vi mener at hun visste hva som skulle komme etterpå ved å se på hva som kom først (...). Det at jenta ikke ønsket å tilføre en stilk med blader kan tolkes som et uttrykk for at hun ikke ønsket å ødelegge rotasjonssymmetrien i bildet.

Igjen ser det ut til å være en sammenheng mellom mønstergyldighet og hva vi opplever som estetisk tilfredsstillende.

Hva med andre estetiske uttrykk, som musikk? I melodien «Lisa gikk til skolen» består rytmen av fire kvartnoter etterfulgt av to halvnoter, og så fire kvartnoter (gjentakelse av de første fire) etterfulgt av en helnote. Denne rytmesekvensen repeteres så i sin helhet en gang, med en liten variasjon i tonehøyde. Det er også en regelmessighet i hvor mye påfølgende toner stiger eller synker i forhold til hverandre. I et musikkstykke er det regelstyrt gjentakelse – mønster – som lar oss skjelne mellom en melodi og tilfeldig støy.

Orden og forutsigbarhet skiller også rim og regler fra prosa. I enderim er det regelstyrt gjentakelse av siste stavelse i slutten av ei linje, og i bokstavrim er det konsonanter som gjentas på mer eller mindre regelbundne måter. Slike mønstertrekk gir tekstene poetisk egenart og bidrar til at vi opplever dem som estetisk tilfredsstillende.

Mønster kan gi mål og mening i fortellinger

Sjangertrekk kan beskrives som mønstergyldige trekk ved tekster i sjangeren. Håvard Gjerde forteller hvordan han og barna sammen laget et eventyr. I prosessen hadde han først rettet barnas oppmerksomhet mot særtrekk ved eventyr som de kjente godt til, som hvordan eventyr starter («Det var en gang …») og hvordan de slutter («... og snipp, snapp, snute …»). Han hadde påpekt at en helte- og en skurkerolle skal fylles. Til slutt hadde han pekt på en spenningstopp som et fast innslag i eventyret: «Det er jo sånn at et eventyr er jo ikke et eventyr uten at det skjer noe spennende eller farlig,» sier jeg til barna. «Hva synes dere skal skje i vårt eventyr?»

Da grunnelementene i eventyret var avklart, hadde studenten og barna fortalt historien sammen. Gjerde kommenterer effekten av fokuset på mønstergyldige trekk:

> Tidligere da jeg har laget historier med barna, og vært mindre fokusert på strukturen, har jeg opplevd at barna kun sier det som faller dem inn i øyeblikket, uten å tenke at det skal passe inn i historien. De bare assosierer et eller annet de har i tankene f. eks «så kom en hai, og så kom Spiderman, og så ble alle spist og så var de levende.» Jeg opplevde at når barna fikk mer støtte til å strukturere historien, at den gav mer mening som en helhet. Barna synes nesten alltid det er moro å høre på ting de har diktet selv, men jeg opplevde at de satte enda større pris på historien da den hadde en viss sammenheng med seg selv. Den ble også spennende å høre på for de barna som ikke hadde vært med å lage den. Igjen ser mønstergyldighet, forutsigbarhet og estetisk opplevelse til å være vevd sammen i barnas erfaring.

Mønstergyldighet og kognitiv prosessering

Henger estetisk opplevelse *alltid* sammen med mønstergyldighet? Nei, ifølge Reber, Schwarz og Winkielman (2004), men mønstertrekk er ett av flere forhold som kan forenkle prosessering av en stimulus, og det siste henger generelt sammen med opplevelse av skjønnhet.

Reber m.fl. går gjennom en omfattende litteratur innen psykologi og filosofi for å gi en systematisk oversikt over hva det er som gjør at vi liker eller foretrekker en stimulus, og mener at fellesnevneren er *processing fluency*, eller med hvilken letthet vi oppfatter og begriper objektet.

De skiller mellom trekk ved objektet sjøl og trekk ved den som erfarer objektet. Trekk ved objektet sjøl, som symmetri, forhold mellom objekt og bakgrunn og objektets struktur og sammensetning, kan påvirke om vi synes det er tiltalende eller ikke. Påstanden er at objekter som har trekk som gjør at de oppfattes raskere og med større sikkerhet, også blir bedre likt. Symmetriske former, som inneholder mindre informasjon enn asymmetriske former, vil for eksempel oppfattes som vakrere. Symboler er lettere å oppfatte på grunn av bedre kontrast, og klarhet blir vurdert som penere.

Men også kjennetegn ved den som erfarer objektet, påvirker om erfaringen oppleves som positiv eller ikke. Tidligere erfaringer med et objekt, som i seg sjøl gjør at vi oppfatter et objekt raskere og med større sikkerhet, gjør også at vi liker objektet bedre. Eksempelvis foretrekkes kjente ansikter, smaker og lyder fremfor ukjente, og på mange områder er det slik at vi liker objekter bedre jo oftere vi har blitt utsatt for dem (en kjensgjerning som innen sosialpsykologien kalles *The Mere Exposure Effect*. Vi kan legge til at når økt erfaring med et område innen matematikk fører til at vi omgås det med større letthet, så liker vi det bedre, og vi kan endatil oppleve at det blir vakrere for oss.

Reber m.fl. gjør rede for en rekke unntak og betingelser, og for våre formål er kanskje betydningen av prosesseringsforventinger mest interessant. Når vi hører en veldig enkel, repetitiv melodi, regner vi med at vi prosesserer den med letthet nettopp fordi den er *enkel* – og derfor kanskje kjedelig. Men når vi hører et komplekst, sammensatt musikkstykke, og så erfarer at vi begriper melodien likevel fordi det er mønster og et system i kompleksiteten, da vil vi uten videre oppleve musikkstykket som vakkert. Det er den *uventede* lettheten vi oppfatter musikkstykket med som tolkes som skjønnhet. Siden mønstergyldige trekk ved lyder, bilder, tallfølger og fortellinger gjør at vi – kanskje til vår overraskelse – opplever at vi kan begripe objekter som i første omgang virker kompliserte, vil mønstertrekk nettopp føre til at vi tilskriver objektene estetiske kvaliteter.

Ut fra lignende betraktninger vil et matematisk bevis som er overraskende enkelt, gi en sterk opplevelse av skjønnhet. Den estetiske opplevelsen som matematikere bedyrer at de får av arbeidet med sine esoteriske objekter, gir mening innenfor dette perspektivet, og erfaringen av skjønnhet blir ikke en sær bivirkning av det matematiske arbeidet, men tett integrert med matematisk utforskning:

> Given this parallelism of beauty and truth in art and science, one may ask if both judgments involve similar psychological processes. In fact, there is growing empirical evidence that people use a common source for evaluations of both beauty and truth – processing fluency. (Reber et al., 2004, s. 17)

Mønsteroppfattelse gir mestringsglede og mening i barnehagen

Vi har lest beskrivelser av et barn som gleder seg over å kunne forutsi neste tall i en tallfølge, av et barn som foretrekker ei rotasjonssymmetrisk sol foran en ikke-symmetrisk blomst, og av ei barnegruppe som liker sitt eget eventyr bedre når det er diktet i tråd med vanlige forventinger til slike fortellinger. I lys av Reber, Schwarz og Winkielmans teori har vi en felles forklaring på barnas følelser. Gleden ved å mestre, ved å skape, ved å lære noe nytt, og ved å finne igjen sine egne element i det felles eventyret kan alle beskrives som utslag av økt «processing fluency».Ut fra et slikt perspektiv trenger arbeid med mønster ingen begrunnelse ut fra skoleforberedende hensyn. Arbeid med å gjenkjenne og skape mønster medfører riktignok utvikling av kognitive ferdigheter på mange plan og legger til rette for seinere matematisk resonnering. Men først og fremst har det verdi her og nå, som allmennmenneskelige aktiviteter som gir glede og mening i seg sjøl.

Referanser

Carlsen, M., Wathne, U., & Blomgren, G. (2011). *Matematikk for barnehagelærere.* Kristiansand: Cappelen Damm Høyskoleforlaget.

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The Science of Patterns.* New York.

Reber, R., Schwarz, N., & Winkielman, P. (2004). Processing Fluency and Aesthetic Pleasure: Is Beauty in the Perceiver's Processing Experience? *Personality and Social Psychology Review, 8*(4), 364–382.

Solem, I.H., & Reikerås, E.K.L. (2009). Det matematiske barnet. Bergen: Caspar Forlag

Hilja Lisa Huru og Anita Movik Simensen

Brøkvafler og desimalsaft

Brøk, desimaltall og størrelsesforhold er emner i matematikkfaget som lett kan arbeides med gjennom praktiske hverdagsaktiviteter, som for eksempel mat og matlaging. En slik tilnærming kan være et godt utgangspunkt for en rik forståelse av brøkbegrepet. Likevel viser forskning at elever ofte har en instrumentell forståelse av brøk der de arbeider med brøk uten å fokusere på forståelse (Siegler & Pyke, 2012).

Foto: Anita Movik Simensen

Under Forskningsdagene 2015, hvor temaet var mat, ønsket vi å bidra med aktiviteter som har som mål å motivere barn og voksne i alle aldre til å se etter brøk i hverdagen. Gjennom

Hilja Lisa Huru
UiT – Norges arktiske universitet
hilja.huru@uit.no

Anita Movik Simensen
UiT – Norges arktiske universitet
anita.m.simensen@uit.no

Foto: Anita Movik Simensen

intervjuer og en uformell brøktest ville vi undersøke hvilke holdninger barn og voksne uttrykker om brøk og desimaltall. Rammen rundt undersøkelsen var å servere brøkvafler og desimalsaft samtidig som vi intervjuet publikum om deres holdninger til brøk og desimaltall. Vi hadde også andre aktiviteter: en snor som representerte en tallinje der man kunne sette fast laminerte desimaltall og brøker med klyper, leksehjelp og vafler, målebeger og saft som hjelpemidler/konkretiseringsverktøy. Vi så på dette som en utmerket mulighet til å komme i kontakt med folk flest for samtaler rundt brøk og desimaltall. Arrangementet vårt ble et møtepunkt der både barn og voksne fikk mulighet til å snakke om brøk og sine tanker og erfaringer rundt temaet.

Foto: Anita Movik Simensen

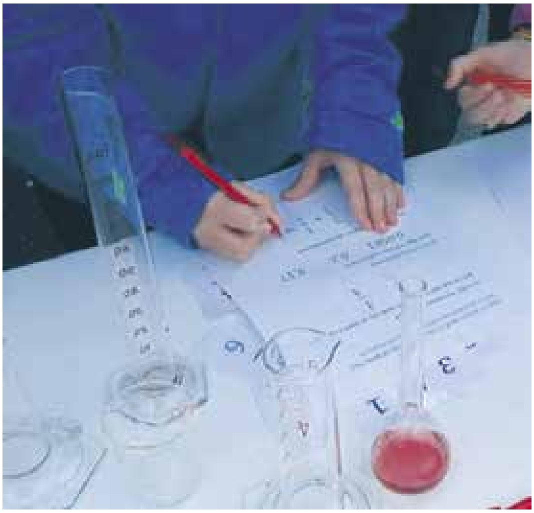


Foto: Anita Movik Simensen

Vi vil i denne artikkelen dele noen av erfaringene vi gjorde og hvilket inntrykk vi fikk gjennom brøkoppgavene, matematikksamtalene, vafler og saft. Brøk er en viktig del av et rikt tallbegrep, og de fleste barn har konkrete erfaringer med brøk før de begynner på skolen. For eksempel vet de at to halve brødskiver er like mye som en hel brødskive, og de har sett at halvparten av en liten kake er mindre enn halvparten av en stor kake. Likevel oppleves brøk som vanskelig for mange, både blant elever som føler at de lykkes med matematikk, og blant dem som strever (Siegler og Pyke, 2012). Forståelse av brøk som en størrelse, for eksempel det å kunne plassere en brøk riktig på en tallinje, har innvirkning på elevers generelle kompetanse i matematikk (Torbeyns, Schneider, Xin, & Siegler, 2015). Nettopp det at brøk er enkelt å konkretisere, samtidig som mange har en instrumentell oppfatning av brøk, gjorde at vi syntes det var et interessant omdreiningspunkt for matematikksamtaler på tvers av generasjoner.

Den uformelle brøktesten vi hadde laget, kunne løses ved hjelp av vafler og saft. Brøkoppgavene var tilpasset vaflene på henholdsvis 4, 5 og 6 hjerter som vi hadde tilgjengelig. Vi fikk inn 48 utfylte tester. Det viste seg at det å vurdere størrelser var ganske greit for de fleste, både når tallene var oppgitt som brøk og som desimaltall. Den første oppgaven var å avgjøre hva som er størst av tallene 1/5 og 1/4. Her svarte alle bortsett fra to deltakere riktig. Den andre oppgaven var å avgjøre hva som er størst av tallene 0,0501, 0,2 og 0,17. Her var det kun én feil (0,0501) og ett svar som var korrigert til 0,2 fra 0,0501. I tillegg var denne oppgaven blank i én besvarelse. Alle disse feilsvarene var fra personer i aldersgruppen 55–71 år.

Den oppgaven som stakk seg ut, var addisjon av enkle brøker. Av de 48 personene som svarte på brøkoppgavene, var det kun 31 som svarte riktig på 2/3 + 1/6. Aldersgruppa der flest hadde fått til denne addisjonen med brøk, var 9–11 år, og i denne aldersgruppa fant vi også flest svar (13). Vi går ut fra at det er to hovedgrunner til at denne gruppa gjorde det bedre enn f.eks. de som er over 40 år. For det første har de akkurat lært om brøk på skolen, og derfor har de brøkregning friskt i minne. For det andre hadde vi «leksehjelp» der det var mulig å ta med oppgaver og vafler og få hjelp til å løse oppgavene. Det var særlig elevene på mellomtrinnet som valgte å benytte seg av denne hjelpen.

Vi ble imponert over hvor interessert folk er i matematikk, og hadde mange fine samtaler

Foto: Anita Movik Simensen

rundt brøk og desimaltall. De fleste som kom innom, hadde med seg barn og var opptatt av hvordan de kan støtte barna i arbeidet med matematikk. Vi intervjuet seks personer som var innom arrangementet. Alle vi snakket med, mente at forståelse i arbeidet med brøk er viktig. «Forståelse er jo nøkkelen til alt,» uttalte Heidi 26 år. Jostein (54 år) utdypet dette med fokus på det praktiske aspektet: «Det er jo ofte ikke noe problem å lære ting på rams, mange lærer for eksempel å regne med brøk 'by heart', men det hjelper jo lite når du ikke vet hvilken sammenheng du skal bruke det i.» Alle vi intervjuet kom med eksempler på hvordan man kan inkludere brøk i hverdagen. De fleste eksemplene handlet om hvordan man kan snakke om brøk som en del av noe, hovedsakelig i forbindelse med mat og matlaging. Mina 40 år beskrev dette: «En brøk er en del av noe. Man kan bruke praktiske eksempler for å illustrere det, eple for eksempel.» Dette utsagnet er representativt for intervjuene og vår uformelle test; de fleste uttrykte et brøkbegrep der brøk ses på som en del av en helhet.


Foto: Anita Movik Simensen

En av grunnene til at vi valgte brøk som tema på årets forskningstorg, er at brøk er et område som mange synes utfordrende, og et område som fortjener større fokus også utenfor skolen. Mange elever strever med å mestre brøk, og for mange representerer det dessverre det første store hinderet i matematikken (Shin, & Bryant, 2015). Norske elever ligger under gjennomsnittet på områdene Tall og Algebra i TIMSS, henholdsvis fjerde og åttende trinn. Videre tyder studier på at svake ferdigheter i tall og aritmetikk, herunder brøk, på fjerde trinn påvirker algebratilegnelsen frem mot åttende trinn (Grønmo, Onstad, Nilsen, Hole, Aslaksen, & Borge, 2012). Samtalene og vår uformelle test tyder på at det kan være behov og interesse for brøkkurs for foreldre slik at de kan støtte sine barns fremgang. Trine 42 år ser dette som et behov for seg selv: «Vi er dårlig på å tenke brøk i hverdagen i vår familie. Det er en tankevekker. Man skulle ha oppdatert seg selv.» Kunnskapen om hva som bidrar til læring og metodene for undervisning i brøk, har endret seg mye siden Mina, Trine og Jostein gikk på

(fortsettes side 24)

Anita Valenta

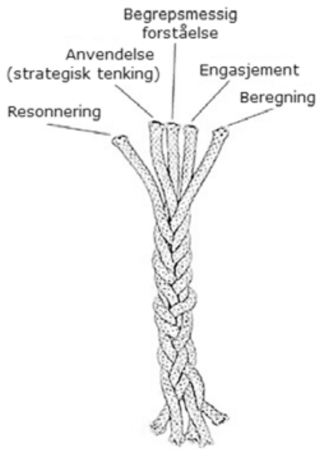
Tallforståelse – begrepsmessig forståelse

Utvikling av tallforståelse framheves i mange studier som svært viktig for elevers matematikk-læring, men det er ikke åpenbart hva tallforståelse innebærer. Case (1998, s. 1) skriver at "Number sense is difficult to define but easy to recognize", og fremhever betydning av fleksibilitet i arbeidet med tall og regneoperasjoner, bruk av ulike representasjoner, utvikling av hensiktsmessige strategier, overslagsregning, identifisering og bruk av ulike mønster, resonnering om egenskaper av tall og operasjoner. McIntosh, Reys og Reys (1992) understreker i tillegg et emosjonelt aspekt i sin beskrivelse av tallforståelse. Deres definisjon består av tre hovedelementer: 1) generell forståelse av tall og operasjoner, 2) bruk av slik forståelse i matematisk resonnering og utvikling av hensiktsmessige strategier i arbeid med tall og regneoperasjoner og 3) lyst til å gå inn i matematiske problemstillinger og bruke forståelsen i arbeid med tall.

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) beskriver matematisk kompetanse som sammensatt av fem komponenter: begrepsmessig forståelse,

Anita Valenta
Matematikksenteret
anita.valenta@matematikksenteret.no

Artikkelen er del 1 i en serie på fire artikler.



beregning, anvendelse (strategisk tenking), resonnering og engasjement. Disse fem komponentene ses tett sammenflettet og er avhengige av hverandre. Komponentene støtter hverandre, og det er viktig at elever får mulighet til å utvikle alle fem komponentene samtidig. Forbindelsen mellom komponentene blir da forsterket og elevene kan utvikle en matematisk kompetanse som er varig, fleksibel, nyttig og relevant. De fem komponentene finner vi igjen i beskrivelsen av tallforståelse fra Case og McIntosch m.fl, og denne definisjonen av matematisk kompetanse kan ses som et mulig utgangspunkt for nærmere drøfting av tallforståelse.

I en serie på fire artikler i Tangenten (ett for hvert nummer i 2016) vil ulike aspekter ved tallforståelse på mellomtrinnet knyttet til hver av de fem komponentene av matematisk kompetanse bli presentert og drøftet. Aspektene er basert på gjennomgang av forskning og utviklingsarbeid knyttet til matematikkdidaktiske prosjekt om arbeid med tall på mellomtrinnet. Artiklene vil vise hvordan tallforståelse kan komme til uttrykk i undervisning, dette blir eksemplifisert gjennom episoder fra 4-7.trinn.

De ulike aspektene går delvis inn i hverandre og det er ikke lett å trekke grenser mellom dem. Målet med å beskrive tallforståelse i form av noen aspekter er ikke å isolere de ulike elementene, men heller fremheve viktige elementer av tallforståelse, gi eksempler på hva de kan gå ut på og hvordan de kan arbeides med i praksis. En matematikkoppgave omhandler gjerne flere aspekter *på tvers av de fem komponentene*. For å legge til rette for utvikling av tallforståelse kan det være viktig at lærere velger hvilke aspekter de ønsker å fremheve under arbeidet med en gitt oppgave, samtidig som de er bevisste på at det bør arbeides med alle aspektene over tid.

Denne artikkelen handler om begrepsmessig forståelse.

Begrepsmessig forståelse

innebærer å bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom ulike begreper, ideer og prosedyrer. Det handler også om å tolke og benytte ulike representasjoner, oversette og veksle mellom ulike representasjoner ut fra hva som kan være nyttig for et gitt formål. Innenfor tallforståelse kan denne komponenten ses som bestående av følgende aspekter:

Ulike måter å representere tall på og overganger mellom representasjoner består i å representere positive og negative hele tall, brøk og desimaltall symbolsk, på tallinje, med ulike illustrasjoner/tegninger, konkreter og regnefortellinger. Det å kunne tolke de ulike representasjonene og veksle mellom dem er av stor betydning for utvikling av tallforståelse (se for eksempel Fosnot & Dolk, 2001; Lamon, 2006; Saxe, Diakow, & Gearhart, 2012). Figur 1 viser eksempler.

Ulike egenskaper ved tall består i å kjenne til og kunne beskrive egenskaper ved tall, identifisere tall som har egenskapene, beskrive strukturer og representere dem på ulike måter (se for eksempel Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Markovits & Sowder, 1994). Figur 2 viser eksempler.

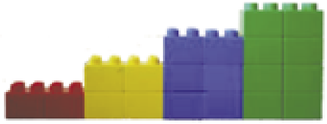
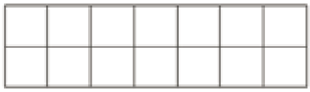
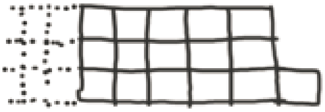
Relasjoner mellom tall består i å kjenne til og kunne beskrive ulike relasjoner mellom tall, gjenkjenne relasjonene og representere dem på ulike måter (se for eksempel: Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Markovits & Sowder, 1994; Parrish, 2010). Figur 3 viser eksempler.

Relasjoner som bygger på posisjonssystemet består i å kjenne til og kunne beskrive ulike relasjoner mellom tall som kommer av posisjonssystemet, fleksibilitet i overgang mellom symboler (tallene skrevet i 10-tallssystemet) og tallverdien (se for eksempel Anghileri, 2006; Fosnot & Dolk, 2001). Figur 4 viser eksempler.

Ulike måter å representere regneoperasjoner på og overganger mellom representasjonene innebærer å kunne representere regneoperasjoner symbolsk, med konkreter og tegninger,

Representere tallet seks som	Representere tallet tre fjerdedeler som
• en mengde på 6 objekter (som kan være delt opp på ulike måter) • kvantifisering av en fysisk størrelse (som f.eks. en lengde på 6) • et tall på tallinja som står i relasjon til andre tall (er f.eks. større enn 5 og mindre enn 6,2) • symbolet "6" • summen av 1 og 5, produktet av 2 og 3,osv	• som et tall på tallinja • som tallet vi får når vi regner ut 3 : 4 • symbolet $\frac{3}{4}$ Gjennom ulike situasjoner som f.eks. • 3 hele skal deles på 4 personer • en person får tre firedeler av en mengde

Figur 1

Partall er • tall som er delelig med 2 • er på formen $2 \cdot \boldsymbol{n}$ der n er et naturlig tall • et antall klosser som gir to like lange tårn	
14 er et produkt av tallene 2 og 7. Det betyr at vi kan representere 14 som • $2 \cdot 7$ • som antall ruter i et rutenett med 2 rader og 7 ruter i hver rad • som antall drops i to poser med 7 drops i hver pose.	
Et tall som har rest 1 når det divideres med 3 kan representeres som • $3 \cdot \boldsymbol{n} + 1$ der n er et helt tall • et antall drops som kan fordeles på 3 poser slik at det er like mye i hver og så er det ett drops til overs • som antall klosser i tre tårn der det ene har en kloss mer enn de to andre	

Figur 2

Større enn og mindre enn, som at	Tall som har samme struktur
• et tall er 5 større enn et annet, differansen mellom dem er 5 • et tall er 3 ganger større enn et annet tall • sammenligning av et gitt tall med noen "referansetall" som 10, 100, 25, 1, 1/2, osv., avhengig av tallet og situasjonen	• 29 og 139 er begge på formen $\mathbf{10} \cdot \mathbf{n} - 1$ • tall med 5 som faktor kan skrives på formen $\mathbf{5} \cdot \mathbf{n}$ og representeres også som f.eks. antall drops når det er 5 poser med samme antall drops i hver pose

Figur 3

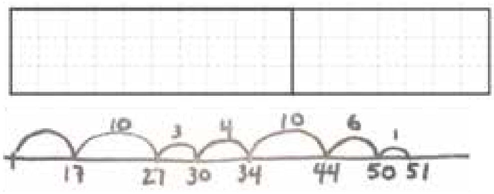
Se på 123 som	Se på 0,7 som	Se på 1,2 som
• 1 hundrer, 2 tiere og 3 enere • 12 tiere og 3 enere • 11 tiere og 13 enere • …	• 10 ganger mindre enn 7 • 10 ganger større enn 0,07 • 7 tideler • …	• 100-delen av 120 • 10 ganger større enn 0,12 • …

57 drops							
	10-pakke	0	1	2	3	4	5
	enkel	57	47	37	27	17	7

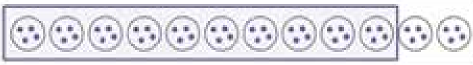
Figur 4

på ei tallinje og gjennom regnefortellinger. Det innebærer også å kunne tolke representasjonene og skifte mellom dem (se for eksempel Barmby, Harries, Higgins & Suggate, Selter, 2009; Prediger, Nuhrenborger, & Husmann, 2012). Figur 5 viser eksempler.

Grunnleggende egenskaper ved regneoperasjoner handler om kjennskap til den kommutative, asssosiative og distributive egenskapen ved regneoperasjoner, kunnskap om motsatte regneoperasjoner og identitetselementer (se for eksempel: Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Russell, Schifter, & Bastable, 2011). Det innebærer å kunne uttrykke egenskapene på ulike måter og se sammenhenger mellom dem. Figur 6 viser eksempler.

Kjenne igjen regneoperasjoner i ulike typer regnefortellinger fra hverdagen og beskrive konteksten symbolsk.	23 elever skal deles i firer-grupper 23 : 4 = 5, rest 3 Fem grupper med fire og ei gruppe med 3
Kunne presentere et gitt regnestykke i form av en regnefortelling eller en illustrasjon, for eksempel representere • et subtraksjonsstykke som en differanse på ei tallinje • et multiplikasjonsstykke som antall ruter i et rutenett eller som "hopp" på tallinjen (3 · 17)	
Kjenne til ulike typer situasjoner som svarer til en gitt regneoperasjon, kunne forklare likheter og fo mellom dem.	• "ta bort" og "differanse" i subtraksjon • multiplikasjon som "like grupper", rutenett, areal av en rektangel, forstørring

Figur 5

Kommutativ egenskap ved multiplikasjon: $a \cdot b = b \cdot a$ (Tilsvarende egenskap ved addisjon) 2 · 6  6 · 2 
Assosiativ egenskap ved addisjon $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Tilsvarende egenskap ved multiplikasjon) Når man skal legge sammen tre tall, som f.eks. 24, 11 og 9, så kan man legge sammen 11 og 9 først, så 24, eller man kan legge sammen 24 og 11 først, så 9. Det blir likt. $24 + (11 + 9) = (24 + 11) + 9.$ Det kan man se ved å tenke seg for eksempel tre sjokolader som koster 24, 11, og 9 kroner og vi skal finne prisen tilsammen. Da spiller det ingen rolle hvilke to priser vi starter med å addere før vi legger den siste, prisen blir den samme til slutt.
Den distributive egenskapen: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ $12 \cdot 4 = (10 + 2) \cdot 4$ 
Addisjon og subtraksjon er motsatte operasjoner, at $(a+5)-5=a$. Tilsvarende med multiplikasjon og divisjon: $(a : 7) \cdot 7 = a$.
0 er det tallet som er slik at $a+0=a$ for alle tall a, og tallet $-a$ er slik at $a+(-a)=0$; Tilsvarende, 1 er det tallet som er slik at $a \cdot 1 = a$, og tallet $1/a$ er slik at $a \cdot 1/a = 1$.

Figur 6

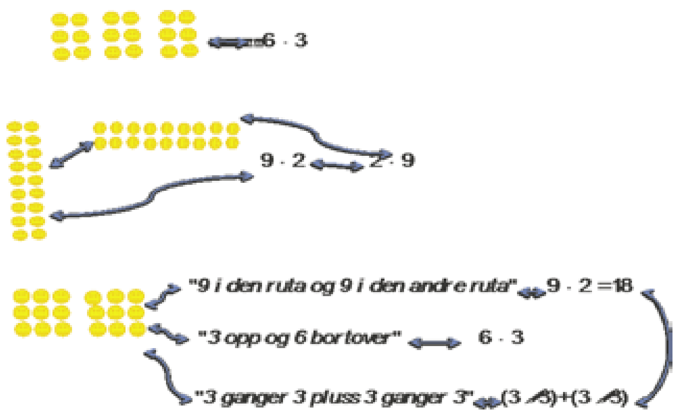
Eksempler fra undervisning

I analysen av det faglige innholdet i episodene fra praksis nedenfor[1] belyses spesielt aspektene knyttet begrepsmessig forståelse som kommer til uttrykk.

Tegne 18 prikker

En lærer på fjerde trinn deler ut ark til elevene og ber dem om å tegne 18 prikker på en måte som gjør det lett å se for andre at det er 18 uten å måtte telle dem (se figur 7). Tre av elevene presenterer sine tegninger på tavla. For hver tegning spør læreren de andre elevene hvordan eleven som har tegnet «kan ha sett tallet 18». Elevene kommer med ulike forslag muntlig, læreren skriver dem i form av symbolske uttrykk på tavla og ulike sammenhenger diskuteres.

Aspektet *ulike måter å representere tall på og overganger mellom representasjoner* kommer



Figur 7

tydelig frem i samtalen. Tallet 18 representeres i form av tegninger, muntlig og symbolsk som skissert nedenfor. De blå pilene viser koblinger mellom representasjoner som er gjort i samtalen.

Hver av tegningene knyttes til det tilhørende symbolske uttrykket, og sammenhengen mellom uttrykkene $9 \cdot 2$ og $(3 \cdot 3) + (3 \cdot 3)$ diskuteres også eksplisitt. Slike diskusjoner er egnet til å fremme utvikling av elevers forståelse i arbeid med tall, og senere algebra.

Oppgaven er utformet slik at elevene har behov for å benytte seg av *ulike egenskaper ved tall* i arbeidet med den. I den første tegningen bruker eleven at tallet 18 er et produkt av tallene 3 og 6. Når hun tegner seks prikker ser hun tallet 6 som et produkt av 2 og 3. Den andre eleven som presenterer sin tegning, tar utgangspunkt i at 18 er et produkt av 2 og 9. I den siste tegningen ses tallet 9 som et produkt av 3 og 3.

Episoden gir også et eksempel på arbeid med *ulike måter å representere regneoperasjoner og overganger mellom representasjonene.* I diskusjonen om den siste tegningen brukes addisjon til å beskrive en del-del-hel-situasjon. Den symboliseres ved $(3 \cdot 3) + (3 \cdot 3)$. Samme tegning beskrives også gjennom multiplikasjon sett som summen av like grupper: «9 i den ruta og 9 i den andre ruta», som da beskrives symbolsk som $9 \cdot 2$. En annen elev ser multiplikasjon som antall ruter i et rutenett: «3 opp og 6 bortover», symbolsk: $6 \cdot 3$.

En av *grunnleggende egenskaper ved regneoperasjoner*, kommutativitet av multiplikasjonen, diskuteres også i episoden. En av elevene foreslår å tenke tallet 18 som «$9 \cdot 2$ eller $2 \cdot 9$». Han tegner den ene som et rutenett med ni rad og to kolonner, og den andre med to rad og ni kolonner. Læreren spør om forskjell mellom de to figurene og fremhever senere i samtalen kommutativiteten ved å si at: «Ja, så her kan vi egentlig se at 2 ganger 9 og 9 ganger 2, er det samme. Det var en god måte å vise fram det på.»

Divisjon med desimaltall

I en klasse på sjuende trinn ber læreren elevene om å resonnere seg frem til svaret på $249 : 0{,}7$ når de vet at $249 : 7 = 35{,}571$. Nedenfor er det et utdrag fra samtalen:

Jakob: 249 : 7 blir 35,571, mens du, når du tar 0,7 i stedet for 7, så tar du å … Det er 10 ganger mindre enn 7. Null komma sju er 10 ganger mindre enn 7. Så da flytter du komma en lenger til høyre.

Lærer: Akkurat. Sånn at du kikker på den du? (peker på 249 : 7).

Jakob: Ja, jeg kikker på den, og så …

Lærer: … og den her (peker på 249 : 0,7; markerer 7 og 0,7 med grønt på tavla). Så sier du at 0,7, for her vi det samme tallet vi deler med. Så sier du at 0,7 er 10 ganger mindre enn 7 …

Jakob: … enn 7 for du må gange 0,7 med 10 for å få 7.

Lærer: Ja, og da blir svaret her …
Jakob: Mest sannsynlig 355,71.

Lærer: Ja, du snakker om å flytte kommaet, da? Ja, Martine?
Martine: Det blir 10 ganger større.
Lærer: 10 ganger større. Akkurat. Så du ser at i forhold til det, svaret der oppå (35,571), så ser du at det tallet her nå (355,71) har blitt 10 ganger større, fordi at det jeg deler med er 10 ganger mindre.

I arbeidet med oppgaven fremhever læreren *relasjoner som bygger på posisjonssystemet*, i dette eksemplet det at tallet 0,7 er 10 ganger mindre enn tallet 7, og at tallet 355,71 er 10 ganger større enn tallet 35,571. Disse relasjonene er viktige for å kunne begrunne regelen om «flytting av komma» som ofte brukes i divisjon med desimaltall.

Bruk av «snille tall» i multiplikasjon

På 5.trinn spør læreren hvordan man kan regne ut hvor mye $4 \cdot 49$ er når man kjenner svaret på $4 \cdot 50$. Elevene foreslår: «4 ganger 50 er jo 200, så da må jo 4 ganger 49 bare være minus 4. 196.» Strategien begrunnes gjennom bruk av en regnefortelling og illustrasjon og samtalen videre handler om hvordan man kan finne svaret på $4 \cdot 48$ og $4 \cdot 52$ ved å bruke $4 \cdot 50$ som utgangspunkt. Læreren oppsummer arbeidet med å si:

> Dette her er et regnestykke der det er lett å gå til et snillere tall, sant (ringer rundt regnestykket $4 \cdot 52 = 208$, på tavla). Nå gikk vi til et snillere tall (peker på $4 \cdot 50 = 200$ på tavla) for å finne ut svaret på det regnestykket, der. Er det andre regnestykker dere kan komme på, der det er lett, og det trenger ikke være 4-gangen heller, hvor det kan være lettere å gå til et snillere tall?

I denne episoden kommer aspektet *relasjoner mellom tall* tydelig frem ved at læreren fremhever bruk av noen referansetall («snille tall») som strategi i multiplikasjon. Strategien byggen på den distributive egenskapen, men læreren velger ikke **å** fremheve den egenskapen eksplisitt. Hun velger i stedet å diskutere hva som kan være «snille tall» i andre eksempler.

Lag det tallet

Elevene på sjuende trinn spiller «Lag det tallet»-spillet. Elevene får fem kort og skal bruke flest mulig av dem til å lage et regnestykke med et bestemt tall som svar. Følgende samtale utspiller seg etter at elevene har spilt en runde.

Miriam skriver regnestykket $12 + 13 - 13 - 6$ på tavla. Læreren spør resten av klassen om hvilket tall Miriam ønsket å få.

Tuva: 6. Du tar 12 pluss 13 minus 13, som er 12. Og så minus 6 som er 6.
Lærer: Du sa altså 12 pluss 13 minus 13, det ble fortsatt 12? Hvorfor er det slik?
Thea: De plusset jo den på tallet så tok de den bort igjen, så teknisk sett så har den jo aldri vært der. De har bare plassert den der så de skal bruke tall. De kunne jo egentlig ha brukt bare 12 minus 6.
Lærer: Men så for å få brukt opp flere kort da, så har de … Hva er 13 – 13 da? (ler). Ja, Jørgen?
Jørgen: 0.
Lærer: Det er 0. Og når vi legger til 0, så blir det ikke noe endring, ikke sant? Noen flere som vil vise et eksempel? Vil du, Jakob? Kan dere prøve å gjette hvilket tall Jakob skulle lage?

Jakob kommer opp og skriver

$$(13 + 7 - 10) \cdot (12 - 11) =$$

Tuva: 10? Jeg tenker 13 pluss 7 minus 10 som er 10. Fordi 13 pluss 7 er 20, så da blir det på en måte delt på 2. Og så 12 minus 11 er 1, så da blir det 10 ganger 1.

Lærer:	Så da blir det 10 ganger 1, så det blir 10. Hmm. Her oppe, hva var det de brukte … Hvilket tall var det de brukte her for å på en måte eee … få brukt mange kort uten at det hadde noen betydning for verdien til kortene? (peker på 13 – 13 fra forrige regnestykke). Henrik?
Henrik:	0.
Lærer:	0. Men her har vi brukt gange, hvilket tall er det vi må bruke når vi har gange, for å ikke skal få gjort noe med verdien til tallene? Magnus?
Magnus:	1.
Lærer:	1, ja! (markerer på tavla 13 – 13 = 0 i det første uttrykket og 12 – 11 = 1 på det andre)

I samtalen fremhever læreren rollen til identitetselementer, 0 for addisjon og 1 for multiplikasjon. Identitetselementene er viktige innenfor *grunnleggende egenskap ved regneoperasjoner*, og de har en sentral rolle f.eks. i arbeid med ligninger, negative tall og brøk. Rammene i spillet legger opp til at de diskuteres eksplisitt og læreren utnytter muligheten.

Aktivitetene ovenfor legger opp til arbeid med flere komponenter av matematisk kompetanse, men her er det bare den begrepsmessige forståelsen som blir diskutert. Flere eksempler tas opp i de andre artiklene i serien, og aspekter knyttet til andre komponenter av matematisk kompetanse trekkes frem.

Noter

1 Eksemplene fra praksis er utviklet innen prosjektet «Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning» ved Matematikksenteret, og filmene eksemplene er hentet fra er lagt ut på: http://www.matematikksenteret.no/content/4793/Innholdsside. Aktiviteten med 18 prikker er en del av filmen «Kvikkbilde 2·4+3·4», de øvrige aktivitetene er fra filmene med tilsvarende overskrift.

Referanser

Anghileri, J. (2006) *Teaching Number Sense*, 2nd edn. London: Continuum.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The Array Representation and Primary Children´s Understanding and Reasoning in Multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 217–241.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically : Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth: N.H., Heinemann

Case, R. (1998, April). *A psychological model of number sense and its development*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (red.)(2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Washington, National Research Council. DC: National Academy Press.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New York: Routledge 3.utg.

Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). developing Number Sense: An Intervention Study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4–29.

McIntosh, A., Reys, B. og Reys, R. (1992). A proposed framework for examining number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 25–31.

Parrish, S. (2010). *Number talks. Helping children build mental math and computation strategies*. Scholastic Inc.

(fortsettes side 35)

Jo Boaler

Fluency without fear

Etter avtale med forfatteren er artikkelen *Fluency Without Fear: Research Evidence on the Best Ways to Learn Math Facts* oversatt og bearbeidet til norsk av Geir Martinussen og James Gray (begge ved Høgskolen i Oslo og Akershus) og Tangentens redaksjon.

Den britisk politikeren, Stephen Byers, ble for noen år siden intervjuet. Han ble spurt hvor mye $7 \cdot 8$ er. Han svarte 54. Han ble latterliggjort i media, og episoden ble etterfulgt av krav om mer pugging av gangetabeller i skolen. Utdanningsministeren i England, som på den tiden kom fra det konservative partiet, og som ikke hadde matematikkutdanning, insisterte på at alle niåringer skulle pugge gangetabeller opp til $12 \cdot 12$. Nå kreves dette i Storbritannias læreplan, noe jeg frykter vil gi øket engstelse og angst for matematikk blant elever. Dette kan få som konsekvens at elever og studenter vender seg bort fra matematikk. USA beveger seg i motsatt retning. Der legges det vekt på «fluency»[1]. Det viser seg imidlertid at fluency mistolkes, læremidler utvikles med fokus på grunnleggende memorisering av tabell og faktakunnskap.

Faktakunnskap er viktig. Gjentagende pugging og tidsstyrt testing, er imidlertid unødvendig og ødeleggende. Ironisk nok utløste politikerens feil svar krav om mer memorisering, mens feilen heller kan vise hvordan faktakunnskap har begrensinger når tallforståelse ikke kobles til. Personer med tallforståelse kan behandle tall fleksibelt. Når en har tallforståelse og blir bedt om å løse $7 \cdot 8$, kan en ha automatisert 56, men en vil også kunne tenke at $7 \cdot 7$ er 49, legge til 7 og få 56. De kan også ta to sjuere mindre enn ti sjuere (70 – 14). De vil ikke være avhengige av å huske tabellen. Faktakunnskap er i seg selv er en liten del av matematikken, og de læres best gjennom å bruke tall på ulike måter og i ulike situasjoner. Mange klasserom fokuser på faktakunnskap på måter som gir elever inntrykk av at fakta er det viktige i matematikk. Kanskje er det enda verre at elever lærer at sterke matematikkelever er de som pugger faktakunnskap og jobber hurtig. Disse forestillingene er det avgjørende å fjerne. De er uriktige og de kan skape engstelse og angst for matematikk og føre til uinteresserte elever.

Jo Boaler
Stanford University

Artikkelen er skrevet med bistand fra Cathy Williams og Amanda Confer, Stanford University.

Lenke til den engelske artikkelen (som også inneholder oppgaveark) ligger på Tangentens hjemmeside www.caspar.no/tangenten.php

Det er nyttig å kunne fakta. Jeg kan for eksempel svaret på 8 pluss 4 fordi det er automatisert. Det er lært ved at fakta er brukt i ulike matematiske situasjoner, ikke ved å terping og testing. Jeg vokste opp i en periode da engelsk grunnskole fokuserte på «hele barnet». Jeg ble ikke presentert tabeller for addisjon, subtraksjon eller multiplikasjon som skulle pugges. Dette har på ingen måte holdt meg tilbake i mitt utdanningsløp. I dag er jeg professor i matematikkdidaktikk. Jeg har tallforståelse, noe som er viktigere for elever å tilegne seg enn faktakunnskaper. Dette omfatter læring av fakta sammen med en grunnleggende forståelse av tall og måter de er relatert til hverandre på.

Tallforståelse

Gray & Tall (1994) studerte elever som løste tallproblemer. Lærerne hadde karakterisert elevene (7–13 år) til å ha lav, middels eller høy oppnåelse. Forskningen deres viste at elever som hadde høy oppnåelse viste tallforståelse. Det gjorde ikke de med lav oppnåelse. De med høy oppnåelse kunne endre oppgaven litt, for eksempel 19 + 7 til 20 + 6. Ingen elever som var karakterisert med lav oppnåelse, viste tallforståelse. Disse elevene regnet «bakover» når de løste oppgaver som 21 – 16. De startet på 21 og telte ned, noe som er vanskelig å gjøre. De med høy oppnåelse benyttet strategier der de endret tallene litt, for eksempel til 21 – 16 til 20 – 15. Dette er enklere å utføre. Forskerne fant også at elever ofte er skoletapere, ikke fordi de vet mindre, men fordi de ikke bruker tall fleksibelt. De har blitt satt på feil spor, ofte fra tidlig alder, der de skal prøve å huske metoder i stedet for å kommunisere fleksibelt med tall (Boaler, 2009). Slike elever lærer matematikk på feil og vanskelige måter. Dessverre vil de kunne utvikle varige matematikkproblemer.

Tallforståelse er fundamentet for å forstå matematikk på et høyere nivå (Feikes & Schwingendorf, 2008). Når elever gjør feil i algebra, er det ofte fordi de ikke har tallforståelse. Elever som arbeider med «rike» matematikkoppgaver, som det er vist eksempler på i siste del av denne artikkelen, utvikler tallforståelse og de lærer og husker fakta. Når elevene skal memorere gangetabeller, pugger de ofte uten tallforståelse, noe som betyr at det er begrenset hva de kan gjøre, og de er tilbøyelige til å gjøre feil. Feilen som den britiske politikeren ble latterliggjort for, illustrere dette. Mangel på forståelse har ført til mer alvorlige feil, slik som at Hubble-teleskopet ikke fant stjernene som skulle fotograferes i verdensrommet. Teleskopet var på utkikk etter stjerner i ei bestemt klynge, men mislyktes på grunn av at noen gjorde en aritmetisk feil i programmeringen av teleskopet (LA Times, 1990). Tallforståelse, som er avgjørende for elevers matematiske utvikling, hemmes av overvekt på utenatlæring av fakta, hjemme og i klasserommet. Dess mer memorering som vektlegges, dess mindre villige blir elevene til å tenke på tall og relasjoner mellom dem, noe som ville virket til å utvikle tallforståelse (Boaler, 2009).

Hjernen og tallforståelse

Noen elever er ikke så flinke til å huske matematikkfakta som andre. Dette er en del av mangfoldet. Det ville vært kjedelig og uinspirerende hvis lærere ga faktabaserte tester, og alle elever besvarte dem på samme måte og i samme hastighet, som om de var roboter. Nylig har hjerneforskere undersøkt elevers hjerne mens de pugget matematikkfakta. Noen elever memorerte fakta mye lettere enn andre. Dette er ikke noen overraskelse. Mange av oss ville trolig forutsett at de som husker bedre, er «mer intelligente». Men forskerne fant at elever som memorerte lettere, ikke presterte høyere, ikke hadde mer av det forskerne beskriver som grunnleggende forståelse av matematikk, og ikke hadde høyere IQ (Supekar et al, 2013). De eneste forskjellene forskerne fant, var i hippocampus, som er området i hjernen som er ansvarlig for å huske fakta (Supekar et al, 2013). Elever som ikke husker så godt, kan fortsatt ha et eksepsjonelt matematikkpotensial. Fakta er en svært liten del av matematikk. Men dessverre vil elever som har problemer med å huske fakta ofte tro at de aldri kan lykkes med matematikk og gi helt opp.

I USA og Storbritannia ber lærere elevene pugge multiplikasjonstabellen, noen ganger også addisjons- og subtraksjonstabeller. De gjør det vanligvis fordi læreplaner foreskriver at elevene trenger å være «fluent with numbers» . Parish, viser til Fosnot og Dolk (2001) og beskriver at det å ha fluency knyttet til tall innebærer «å vite hvordan et tall kan være sammensatt og oppdelt, og bruke kunnskapen om det til fleksibel og effektiv problemløsning.» (Parish 2014, s.- 159). Å utvikle denne type fluency krever mer enn å huske matematiske fakta. Den beste måten er å utvikle tallforståelse og å arbeide med tall på forskjellige måter, ikke ved at fakta memoreres uten tallforståelse.

Når lærere framhever faktakunnskap også knyttet til tester, virker det negativt for elevers læring på to måter. Omtrent en tredel av elevene starter å utvikle angst når de møter det presset tidsstyrte prøver i matematikk gir (Boaler, 2014). Beilock og hennes kolleger har studert folks arbeidsminne gjennom MR-avbildning av hjernen. De fant at når elever er stresset, for eksempel når de skal svare på matematikkspørsmål under tidspress, kan arbeidsminnet blokkeres. Elevene greier ikke å få fram fakta de egentlig behersker (Beilock, 2011; Ramirez, et al, 2013). Noen takler ikke tidsstyrte tester, de begynner å utvikle angst, og deres matematiske sikkerhet brytes ned. Blokkering av arbeidsminnet, engstelse og angst knyttet til det, oppstår blant høy presterende elever, både hos gutter og jenter. Forsiktige estimat indikerer at en tredel av elevene opplever ekstremt stress ved tidsstyrte tester. Dette er uavhengig av elevenes sosiale tilhørighet og økonomiske bakgrunn. Når de påføres en slik engstelse, går potensielle matematikkstudenter tapt.

Matematikkangst er, som tidligere nevnt, registrert blant elever helt ned i fem-årsalderen (Ramirez, et al, 2013), og tidsstyrte tester er en viktig årsak til denne hemmende, ofte livslange tilstanden. En annen, og like viktig årsak til at tidsstyrte tester ikke bør brukes, er at de fører til at mange studenter velger bort matematikk. Ved Stanford University har jeg møtt mange nye studenter som er traumatiserte når det gjelder matematikk. Dette til tross for at de er blant landets best kvalifiserte studenter. Når jeg spør dem hva som har ført til matematikkaversjon, oppgir mange tidsstyrte tester i tidlige skoleår som et viktig vendepunkt. Da bestemte de seg for at matematikk ikke var noe for dem. Noen av studentene, spesielt kvinner, snakket om behov for dybdeforståelse som er svært viktig. De erfarte at dybdeforståelse ikke ble vektlagt og verdsatt når tidsbestemte tester ble gjennomført.

De kan ha hatt gode matematikklærere, med fokus på tall og tallforståelse i undervisningen. Tidsstyrte tester gjør imidlertid at elever kan komme til å tro at det å være rask med fakta, er essensen i matematikk. Det resulterer i en misledet skole med vekt på pugging og testing, der elever faller ut av matematikken. Dette er en faktor som fører til en matematikk-krise vi er vitne til (se www.youcubed.org). Min egen datter begynte å komme gråtende hjem da de startet med å pugge gangetabell og ble testet i fem-årsalderen. Dette er ikke følelser elever skal knytte til matematikk. Fortsetter det på denne måten, kan en ikke få bukt med utbredt engstelse og aversjon for matematikk som gjennomgående utdanningsfenomen i blant annet Amerika og Storbritannia (Silva & White, 2013; National Numeracy, 2014).

Hjerneforskere har funnet at elever som løse talloppgaver best, bruker forskjellige koplinger i hjernen – én kopling som er numerisk og symbolsk og en annen som involverer mer intuitive og romlige resonnement (Park & Brannon, 2013).[2] De har også studert hvordan elever lærer matematikkfakta på to måter - gjennom strategier og memorering, og fant at de to tilnærmingene involverer ulike koplinger i hjernen. Begge koplingene kan brukes hele livet. Forskerne fant at de som lærte gjennom strategier, presterte langt høyere enn de som brukte memorering. De løste problemer med samme hastighet, og viste bedre overføring til nye problem. Hjerneforskerne konkluderte med at automatisering må nås gjennom forståelse av numeriske relasjoner, ved å bruke strategier (Delazer et al, 2005).

Hvorfor behandles matematikk forskjellig?

For å bli en flink elev i språk, slik at hun/han kan lese og forstå romaner og poesi, er det nødvendig å huske betydning til mange ord. Men ingen elev vil si eller tenke at det å lære norsk er det samme som rask utenatlæring og rask «tilbakekalling» av enkeltord. Vi lærer ord ved å bruke dem i ulike situasjoner - snakker, leser og skriver. Norsklærere gir ikke elevene hundrevis av ord å huske for deretter å gi dem tidsbestemte tester. Alle fag krever utenatlæring av fakta, men matematikk er det eneste faget der lærere mener det bør gis tester under tidsbestemte vilkår. Hvorfor behandles matematikk på denne måten?

Matematikk har et image-problem. Elever gråter sjelden over andre fag. Heller ikke tror de at andre fag handler om utenatlæring eller hastighet. Undervisning (og også kommunikasjon med foreldre) som understreker utenatlæring av fakta, er en viktig årsak til at elever kobler seg fra matematikken. Mange hevder at matematikk er forskjellig fra andre fag, og at det bare må være slik. De mener at matematikk kun handler om å få riktige svar, uten tolkning eller mening. Dette er eksempel på nok en misforståelse. Resonnement er matematikkens kjerne. Det handler om å tenke gjennom hvorfor metoder er fornuftige, å snakke om årsakene til bruk av ulike metoder (Boaler, 2013). Fakta er en liten del av matematikk og trolig den minst interessante delen. Conrad Wolfram, i Wolfram-Alpha, et av verdens ledende «matematikkselskaper», snakker offentlig om bredden i matematikk og behovet for å slutte å se matematikk som å regne regnestykker. Verken Wolfram eller jeg sier at skolen ikke skal lære å regne regnestykker. Det er balansen som må endres. Elevene trenger å lære gjennom tallforståelse, samt bruke mer tid på deler av matematikken som inneholder kritisk refleksjon, problemløsning og resonnement.

Hastighet skal ikke vektlegges når en underviser elever i tallforståelse og tallfakta. Dette gjelder for alle typer matematikk. Det er en vanlig og ødeleggende misforståelse at sterke matematikk-elever er synonymt med raske matematikk-elever. I samarbeid med matematikere, legger jeg merke til at mange ikke er spesielt raske med tall. Noen av dem er faktisk ganske trege. Dette er ikke negativt. De er trege fordi de tenker dypt og detaljert. Laurent Schwartz, en stor matematiker, skrev i en selvbiografi om hvordan han følte seg «dum» på skolen fordi han var en av de tregeste matematiske tenkere i klassen (Schwartz, 2001). I mange år slet han med en følelse av utilstrekkelighet, før han forsto at «hurtighet» ikke har et presist forhold til intelligens. Det som er viktig, er å ha dyp forståelse av ting og tingenes forhold til hverandre. Det er der intelligens ligger. Det å være rask eller treg er egentlig ikke relevant (Schwartz, 2001). Dessverre fører fart og testdrevet klasseromspraksis til at mange elever som er langsomme og dype tenkere, tror at de ikke kan være flinke i matematikk.

Matematikk – «fluency» og læreplan

Fluency, som er et mål i ny læreplan i USA, utvikles når elevene får tallforståelse, når de er matematisk trygge fordi de behersker tallbehandling. Dessverre blir ordet fluency ofte misforstått. «Engage New York» er et undervisningsopplegg som blir stadig mer populært i USA, men her er fluency feilaktig tolket:

> Fluency: Elevene forventes å kunne utføre enkle beregninger med hastighet og nøyaktighet; lærere strukturerer klassens tid og/eller lekser slik at elevene skal lære utenat, gjennom repetisjon, kjernefunksjoner som gangetabellen, slik at de blir bedre i stand til å forstå og manipulere mer komplekse funksjoner. (Engage New York)

Det er mange problem med dette direktivet. Fart og utenatlæring er det nødvendig å bevege seg bort fra, ikke fram mot. Måten det her legges opp til kopling mellom utenatlæring og forståelse er problematisk og det står i motstrid til forskning som forteller at elever forstår mer komplekse funksjoner når de har tallforståelse og dyp forståelse av numeriske prinsipper, ikke blind memorering eller «rask tilbakekalling» (Boaler, 2009). Jeg arbeider med PISA-analytikere hos OECD. PISA-teamet gir ikke bare ut internasjonale matematikktester hver 4 år. De samler også inn data om elevers matematiske strategier. Data fra 13 millioner 15-åringer over hele verden viser at elevene med lavest oppnåelse er de som fokuserer på utenatlæring og som tror at pugging er viktig når en skal studere matematikk (Boaler & Zoido, in press). De som har høyest matematisk kompetanse er de som fokuserer på store ideer og på forbindelser mellom ideer. Elever utvikler et sammenhengende syn på matematikk når de arbeider med begrepsmessig forståelse. Blind utenatlæring må erstattes med forståelse.

I Storbritannia kan lignende direktiver gjøre skade. I ny rammeplan står det at alle elever i en alder av ni år skal «memorere gangetabellen opp til og med 12 gangen». Den kan læres utenat gjennom rike og engasjerende aktiviteter, men direktivet leder lærere til kun å la elevene pugge gangetabellen for deretter å bli testet. Barnebokforfatter og poet Michael Rosen har dannet og leder ei gruppe i Storbritannia som trekker fram og markerer skolepolitiske skader. Mange barn i tidlig alder går gråtende til skolen forårsaket av stresset overtesting har ført til (Garner, The Independent, 2014).

Aktiviteter som kan utvikle fakta og tallforståelse

Lærere bør hjelpe elevene med å utvikle matematisk faktakunnskap, ikke ved ensidig å vektlegge fakta, eller ved hyppige tidsstyrte tester, men ved å oppmuntre til å bruke, arbeide med og utforske tall. Elever som jobber med meningsfulle tallaktiviteter, vil lære matematikkfakta utenat, samtidig vil de oppnå tallforståelse. De vil få glede av å lære matematikk fremfor å huske, og utvikle motstand mot matematikk.

Å snakke matematikk

En god metode for å undervise i tallforståelse og faktakunnskap samtidig, er en undervisningsstrategi som kalles «å snakke matematikk» (utviklet av Parker og Richardson). De beskriver en måte som lærere (eller foreldre) kan innlede læringsaktiviteter på. Først stiller en et abstrakt matematisk problem, som 18×5, og ber elevene løse problemet ved hoderegning. Læreren samler de ulike metodene og sammen ser de på hvorfor metodene fungerer. Læreren kan for eksempel finne ut at elevene løser problemet $18 \cdot 5$ på ulike måter (som vist i figur 1).

Elevene liker å gjøre rede for ulike strategier og vil vanligvis være engasjerte og fascinerte over de ulike metodene. De lærer hoderegning, de har muligheter til å lære fakta utenat. De vil også utvikle en konseptuell forståelse av tall og aritmetiske egenskaper som er avgjørende for å lykkes i algebra, og mer avansert matematikk. Foreldre kan bruke en lignende strategi ved å spørre om barnas metoder og diskutere metoder som kan brukes. To bøker, en av Humphreys og Parker (2015) og en av Parish (2014) illustrerer

20 x 5 = 100 2 x 5 = 10 100 - 10 = 90	10 x 5 = 50 8 x 5 = 40 50 + 40 = 90	18 x 5 = 9 x 10 9 x 10 = 90	18 x 2 = 36 2 x 36 = 72 18 + 72 = 90	9 x 5 = 45 45 x 2 = 90

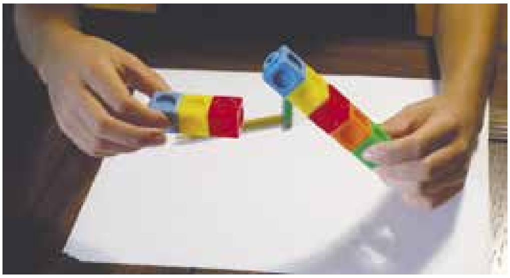
Figur 1

mange måter en kan arbeide videre på, også for elever i videregående skole.

De følgende aktivitetene er valgt for å illustrere hvordan elevene kan lære tallfakta og tallforståelse gjennom å fokusere på matematisk forståelse

Aktiviteter med addisjon

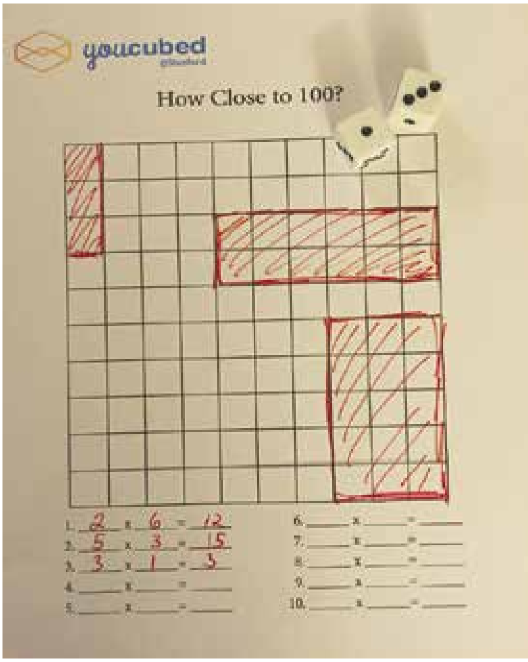
Del opp: Barna kan arbeide i grupper. Hvert barn lager et «tog» av kuber med et bestemt antall. De står i en sirkel. På signalet «del opp» bryter de «togene» sine i to deler og holder ei hånd, med den ene delen, bak ryggen sin. Barna går etter tur rundt sirkelen og viser kubene sine. De andre barna trener på hele tallkombinasjonen. Hvis jeg for eksempel har åtte kuber i toget mitt, kan jeg ha tre bak ryggen. Jeg viser gruppa de resterende fem kubene, og de bør være i stand til å si at tre mangler og at 5 og 3 blir 8.



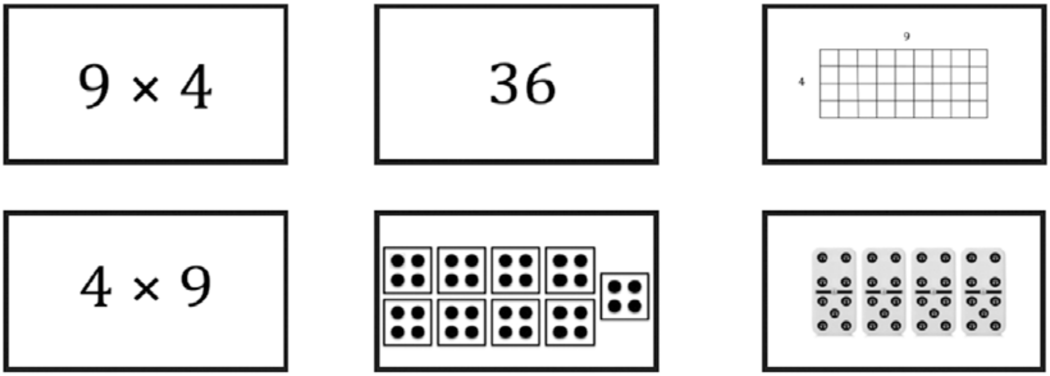
Hvor mange gjemmer seg? Hvert barn har samme antall terninger og en kopp. De gjemmer noen av terningene i koppen og viser resten. Andre barn regner ut svaret på «Hvor mange gjemmer seg?», og så kan de si hele tallkombinasjonen (tall-venner). Eksempel: Jeg har ti terninger, og velger å skjule fire. Min gruppe kan se at jeg bare har seks terninger. Elevene skal være i stand til å si at jeg gjemmer fire terninger og at 6 og 4 blir 10.

Aktiviteter med multiplikasjon

Hvor nær 100? Spillet spilles i par. To barn er sammen om et blankt 100-rutenett. Den ene kaster to terninger. Tallene som kommer opp, er tallene barnet bruker for å lage ei rekke eller kolonne i 100-rutenettet. De kan sette disse hvor som helst på nettet, men målet er å fylle opp nettet og få det så fullt som mulig. Etter at eleven har satt inn resultatet som et multiplikasjons-stykke, skriver han opp multiplikasjons-stykket i en tabell. Spillet slutter når det kommer et resultat som ikke kan settes inn i rutenettet. Hvor nær 100 kommer elevene?



Pepperoni Pizza: I dette spillet skal elevene kaste en terning to ganger. Det første kastet forteller hvor mange pizzaer de skal tegne. Det andre forteller hvor mange pepperoni de skal sette på hver pizza. Så setter de opp et regnestykke som skal hjelpe dem å svare på spørsmålet: «Hvor mange pepperoni blir det til sammen?» For eksempel har jeg kastet en terning og fått fire. Da tegner jeg fire store pizzaer. Jeg kaster igjen, og jeg får tre. Da tegner jeg tre pepperonier på hver pizza. Deretter skriver jeg $4 \cdot 3 = 12$ som forteller meg at det er 12 pepperonis til sammen.



Figur 2

Matematikk-kort

Mange foreldre bruker puggekort til å oppmuntre å lære av matematikkfakta. Disse forbindes ofte med å lære under tidspress og uten forståelse. I denne matematikk-kort-aktiviteten brukes strukturen i kortene, som barna liker, men vi flyttet fokus til bruk av fornuft og forståelse. Formålet er å matche kort med samme numeriske svar, vist gjennom forskjellige representasjoner. Kortene legges ned på et bord. Barna skal ta opp så mange de finner som gir samme svar (vist gjennom forskjellige representasjoner). For eksempel kan ni og fire bli vist ved en arealmodell, et sett av gjenstander som dominobrikker, og tallsymbolet. Når elevene matcher kortene, bør de forklare hvordan de vet at de forskjellige kortene hører sammen. Aktiviteten oppmuntrer til forståelse av multiplikasjon samt innøving av fakta.

Noter

1 Redaksjonens kommentar: Fluency innebærer å ha grunnleggende og fleksibel kunnskap, der en har innsikt i flere aspekter ved matematiske begrep, operasjoner og strukturer, og evner å bevege seg mellom disse. Fluency innebærer innsikt i detaljer og helhetlige sammenhenger. Se også Valentas artikkel i dette nummeret. På norsk snakker en om å mestre et språk «flytende». Dette kan være en parallell.

2 Denne artikkelen presenterer avslutningsvis aktiviteter som oppmuntrer til visuell forståelse av tallfakta, noe som skal fremme at forskjellige koplinger i hjernen fungerer sammen. Lenke til disse er lagt ut på www.caspar.no/tangenten.php

Referanser

Beilock, S. (2011). *Choke: What the Secrets of the Brain Reveal About Getting It Right When You Have To*. New York: Free Press.

Boaler, J. (2015). *What's Math Got To Do With It? How Teachers and Parents Can Transform Mathematics Learning and Inspire Success*. New York: Penguin.

Boaler, J. (2013, Nov 12 2013). *The Stereotypes That Distort How Americans Teach and Learn Math*. The Atlantic.

Boaler, J. & Zoido, P. (in press). *The Impact of Mathematics Learning Strategies upon Achievement: A Close Analysis of Pisa Data* .

Delazer, M., Ischebeck, A., Domahs, F., Zamarian, L., Koppelstaetter, F., Siedentopf, C.M. Kaufmann; Benke, T., & Felber, S. (2005). Learning by Strategies and Learning by Drill – evidence from an fMRI study. *NeuroImage*. 839–849

Engage New York. http://schools.nyc.gov/NR/rdonlyres/9375E046-3913-4AF5-9FE3-D21BAE-8FEE8D/0/CommonCoreInstructionalShifts_Mathematics.pdf

Feikes, D. & Schwingendorf, K. (2008). The Importance of Compression in Children's Learning of Mathematics and Teacher's Learning to Teach Mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education 7*(2).

Fosnot, C, T & Dolk, M (2001). *Young Mathematicians at Work: Constructing Multiplication and Division*. Heinemann:

Garner, R. (October 3, 2014). *The Independent*. http://www.independent.co.uk/news/education/education-news/authors-teachers-and-parents-launch-revolt-over-exam-factory-schools-9773880.html?origin=internalSearch

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116–140.

Humphreys, C., & Parker, R. (2015). *Making Number Talks Matter: Developing Mathematical Practices and Deepening Understanding, Grades 4–10*. Portland, ME: Stenhouse.

LA Times (1990) http://articles.latimes.com/1990-05-10/news/mn-1461_1_math-error

Parish, S. (2014). *Number Talks: Helping Children Build Mental Math and Computation Strategies, Grades K-5, Updated with Common Core Connections*. Math Solutions.

Park, J. & Brannon, E. (2013). Training the Approximate Number System Improves Math Proficiency. *Association for Psychological Science*, 1–7

Ramirez, G., Gunderson, E., Levine, S., and Beilock, S. (2013). Math Anxiety, Working Memory and Math Achievement in Early Elementary School. *Journal of Cognition and Development, 14*(2): 187–202.

Supekar, K.; Swigart, A., Tenison, C., Jolles, D., Rosenberg-Lee, M., Fuchs, L., & Menon, V. (2013). Neural Predictors of Individual Differences in Response to Math Tutoring in Primary-Grade School Children. *PNAS*, 110, (20) (8230-8235)

Schwartz, L. (2001). *A Mathematician Grappling with His Century*. Basel: Birkhäuser.

Silva, E., & White, T. (2013). *Pathways to Improvement: Using Psychological Strategies to help College Students Master Developmental Math*: Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching.

National Numeracy (2014). http://www.nationalnumeracy.org.uk/what-the-research-says/index.html

(fortsatt fra side 9)

skolen. Jostein hentet frem minner fra sin egen skolegang «… det var ingen praktisk tilnærming da jeg gikk på skolen … Men vi hadde ikke så mye brøk, så fort vi hadde lært om brøk, skulle vi gjøre dem om til desimaltall.» Arrangementet og historiene vi har fått høre, viser at det er stort engasjement rundt matematikk, og at mange vil lære mer. Hvis vi som forskere og lærere er flinkere til å sette fokus på matematikk i møte med «folk flest», kan vi bidra til at dette engasjementet vokser rundt kjøkkenbordene og kommer elevene til gode.

Referanser

Grønmo, L.S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., & Borge, I.C. (2012). *Framgang, men langt fram: norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika.

Shin, M., & Bryant, D.P. (2015). Fraction interventions for students struggling to learn mathematics: A research synthesis. *Remedial and Special Education, 36*(6), 374–387.

Siegler, R.S., & Pyke, A.A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology, 49*(10), 1994–2004.

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R.S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction, 37*, 5–13.

Mette Elise Valsgård Bratlie og Egil Reidar Osnes

Lærersamarbeid

– erfaringer fra Hellerud videregående skole

Våren 2015 ble vi, matematikkseksjonen ved Hellerud videregående skole, tildelt Holmboeprisen.

Det var første gang en gruppe lærere ble tildelt prisen, og i offentliggjøringen ble det sagt:

> Matematikkseksjonen ved Hellerud videregående skole tildeles Holmboeprisen 2015 først og fremst for det systematiske samarbeidet de ti matematikklærerne ved skolen praktiserer… (Holmboeprisen 2015)

Hos oss er hovedutfordringen å få elevene igjennom videregående utdanning, at de skal fullføre og bestå, og for mange er fellesfaget matematikk det avgjørende hinderet på veien mot vitnemål.

Vi opplever utfordringer både når det gjelder språkferdigheter, regneferdigheter og holdninger til faget. I denne artikkelen ønsker vi å belyse disse utfordringene vi møter i vår hverdag, og å si litt om hvordan vi prøver å løse dem gjennom systematisk samarbeid i seksjonen og bruk av egenproduserte kompendier.

Mette Elise Valsgård Bratlie
Hellerud videregående skole
mette.bratlie@osloskolen.no

Egil Reidar Osnes
Hellerud videregående skole
egil.osnes@osloskolen.no

Omtale av Holmboeprisvinnerne sto i Tangenten 3/2015.

Om skolen

Hellerud er en videregående skole i Groruddalen på Oslos østkant med omtrent 600 elever.

Skolen har et variert opplæringstilbud med blant annet studiespesialiserende, medier og kommunikasjon, bygg- og anleggsteknikk og påbygging til generell studiekompetanse.

Skolen tilbyr også forberedende vg1 og studiespesialiserende for minoritetsspråklige elever. Disse elevene har kort botid i Norge.

Blant våre elever er det ca. 45 ulike morsmål. Det er en blanding av etnisk norske elever og elever med minoritetsspråklig bakgrunn på skolen. Dette skaper et flerkulturelt skolemiljø med de gleder og utfordringer som følger med.

Språkferdigheter

Utfordringen for mange av våre elever er språk. Og når hovedtyngden av eksamensoppgavene er tekstoppgaver, ja da har også vi en utfordring. Tenk deg selv opplevelsen av å sitte på eksamen og få oppgaven i figur 1. Forstår du noe som helst? Vi kan røpe at det er en tidligere eksamensoppgave i sannsynlighetsregning (Eksamen 1P høsten 2014) som en tidligere kollega fikk oversatt til finsk.

Harjoitus 3 (5 pistettä)

Kaupungissa merkitsi 39% paikallisessa paikallislehti, kun taas 32% on paikallisessa tilata alueellisia sanomalehdessä. 41% paikallisessa ole tilannut mitään kahden sanomalehtiä.

a. Systemaattinen edellä mainittujen tietojen ystävä kartta- tai ristiintaulukointi.

Kotitalous kaupungin yhtyy alueellisen sanomalehden.

b. Määritä todennäköisyys, että tämä kotitalous myös tilata paikallisessa sanomalehdessä.

Kolme kotitaloudet kaupungin valitaan satunnaisesti.

c. Määritä todennäköisyys, että yksi kotitalouksista on paikallisessa sanomalehdessä.

Figur 1

Oppgave 3 (5 poeng)

I en by merkitä 39 % av kotitaloudet på lokalavisen, mens 32 % av kotitaloudet merkitä på regionavisen. 41 % av kotitaloudet merkitä ikke på noen av de to avisene.

a. Systematiser opplysningene ovenfor i et venndiagram eller en krysstabell.

En kotitaloudet i byen merkitä på regionavisen.

b) Bestem sannsynligheten for at denne kotitaloudet også merkitä på lokalavisen.

Tre kotitaloudet i byen velges ut tilfeldig.

c) Bestem sannsynligheten for at akkurat én av kotitaloudet merkitä på lokalavisen.

Figur 2

Hva hvis det bare er ett eller to ord du ikke forstår i teksten? Hvor mye forstyrrer da de ukjente ordene for forståelsen?

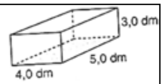
De to ordene forstyrrer ganske mye fordi de går igjen flere ganger i teksten.

Det er lett å kritisere eksamen for å ha mye tekstoppgaver og et vanskelig språk. Men elevene skal ut i en kompleks verden og må lære seg å bearbeide mye informasjon. Det er vår oppgave å forberede dem på det.

Vi må derfor jobbe mye med begreper.

Svært mange begreper og matematiske ideer vi matematikklærere tar for gitt, viser seg å være vanskelige for elevene våre. Oppgaven i figur 3 ble gitt på en tidligere heldagsprøve.

a) Figuren viser et trestykke. Finn volumet.



Figur 3: Oppgave fra heldagsprøve 1P/2P våren 2009.

I en klasse var det flere elever som ikke hadde fått til noe på denne oppgaven. Hva kunne grunnen til det være? Oppgaven er tilsynelatende nokså rett frem. Det eneste man må beherske, er multiplikasjon og formel for volum av prismer.

Læreren spurte elevene hva som var vanskelig med denne oppgaven. Etter en liten stund var det en elev som ikke hadde fått til oppgaven, som rakk opp hånda: «Lærer, vi har ikke lært å regne volum av trestykker».

Det hadde han jo helt rett i.

Hvordan skal vi møte elever med slike forestillinger?

Regneferdigheter

Et annet eksempel er misoppfatninger elever bærer med seg fra tidligere skolegang, og som er utfordrende å rydde opp i. Under følger en oppgave som ble brukt i en prøve tidlig i skoleåret, og som er et eksempel på dette:

I en matematikktime spør læreren om tallene 2,12 og 2,012 er like store. Petter svarer ja, fordi 0 ikke har noen verdi. Har Petter rett? Begrunn svaret.

Omtrent halvparten av elevene i en klasse 1P-elever fikk til denne oppgaven etter at temaet var gjennomgått. Manglende forståelse av desimaltallsystemet viser seg å være et stadig tilbakevendende tema. I en time nylig gikk diskusjonen på om 0,4 og 0,40 er det samme tallet, og det er krevende å skulle finne stadig nye vinklinger for å finne «knagger» hos elevene dette kan henge på.

Hvordan tar vi tak i feiloppfatninger blant elever som allerede har begynt på videregående? Både eksemplet med volum av trestykke og det foregående er vanlige problemstillinger på et mye tidligere stadium av skolegangen.

Hos oss har vi forsøkt å møte dette med å tilpasse læremidler til elevenes utgangspunkt, og gjennom ukentlig samarbeidstid i matematikkseksjonen.

Egenproduserte kompendier

På begynnelsen av 2000-tallet erfarte Tore Ottinsen, som på det tidspunktet allerede hadde lang fartstid som lærer ved Hellerud, at elevene hadde merkbart dårligere bakgrunnskunnskaper når de begynte på videregående. Denne kunnskapen brakte han inn i diskusjoner om lærebøkene gav godt nok utbytte for elevene våre, og om de var nok eksamensrettet.

Som et resultat av disse diskusjonene skrev han et kompendium i funksjoner for 1P som ble brukt våren 2013 med godt resultat.

Målet med dette kompendiet var å møte majoriteten av elevene våre på deres eget nivå og bygge en grunnmur der de fikk økt forståelse for hva en funksjon egentlig er. Det ble lagt mindre vekt i starten på at lineære funksjoner kan skrives på formen $y = ax + b$, der a er stigningstall og b er konstantledd. Dette er relativt abstrakt for mange 1P-elever, derfor tok han utgangspunkt i praktiske situasjoner for å danne grunnlag for å forstå begrepet lineær vekst.

Videre ble vi enige om å erstatte lærebøkene i 1P med egenproduserte hefter, noe vi gjorde fra begynnelsen av skoleåret 2013/14. Da fikk elevene enkelthefter fortløpende til hvert tema. Disse heftene ble satt inn i en enkel plastperm som utgjorde «læreverket» dette skoleåret. På slutten av skoleåret ble enkeltheftene gjennomgått og evaluert av ulike lærere i seksjonen. Innspillene ble gitt videre til Tore Ottinsen, som hadde skrevet de aller fleste heftene, og han samlet disse sammen.

Deretter fikk vi trykket heftene som en bok som ble brukt i sin helhet skoleåret 2014/15, og da i fellesfagene 1P, 2P og 2P-Y. Hvert kapittel ble også lagt ut på nettstedet matematikk.net, som er grunnlagt og drives av tidligere kollega Kenneth Marthinsen.

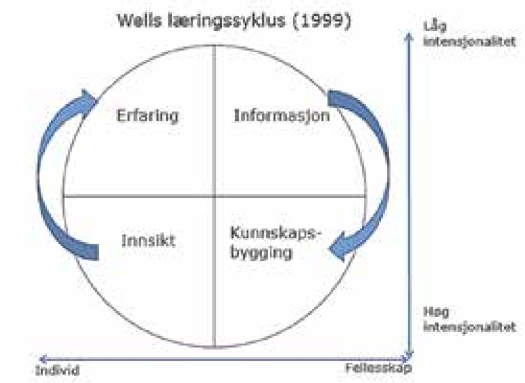
Boken ble igjen revidert av lærerne i seksjonen våren 2015, og så trykket opp på nytt til bruk skoleåret 2015/16. Disse egenproduserte lærebøkene blir nå brukt i stedet for tradisjonelle bøker.

En bieffekt egenproduserte lærebøker har gitt, har vært større fokus på faglige diskusjoner i seksjonen med deltagelse fra flere lærere. Når vi produserer lærebøkene selv, blir det kortere vei fra å kritisere læreboka til å få gjennomført de endringene vi ønsker. På denne måten bidrar arbeidet med lærebøkene til et kontinuerlig utviklingsarbeid i matematikkseksjonen.

Lærersamarbeid

I forlengelsen av dette arbeidet har samarbeidstiden i seksjonen i større grad blitt brukt til faglig utvikling, og vi har nå etablert ukentlig fagtid for hvert enkelt fellesfag. Da har vi 45 minutter hver uke som er satt av til å diskutere pedagogiske problemstillinger til de temaene vi til enhver tid underviser i.

I utgangspunktet var faglig samarbeidstid mest et resultat av behovet for å samkjøre undervisning og prøver. Etter hvert har denne tiden vi bruker sammen, utviklet seg til å få mer preg av faglig utvikling, etter ønske fra lærerne.



Figur 4: Wells' læringssyklus (Roald, 2012)

En illustrasjon som kan brukes for å beskrive det vi ønsker å få til med bruk av fagtid, er Wells læringssyklus (figur 4).

Erfaringen er unik for hver enkelt lærer og basert på det hver enkelt av oss opplever i klasserommet. Hva er det elevene får til? Hvor synes de å ha problemer?

Et eksempel kan være i temaet prosentregning, hvor elevene kan ha problemer med å se sammenhengen mellom desimaltall, brøk og prosent. Hvordan håndterer læreren disse erfaringene? Dersom vi deler erfaringene med andre, gir vi *informasjon* til våre kolleger, men dette skjer gjerne uformelt, for eksempel over kaffekoppen i lunsjpausen eller på arbeidsrommet etter en undervisningstime. Dersom erfaringsdeling forblir uformell, kan det være lett å miste målet vårt av syne; at elevene skal få større utbytte av undervisningen.

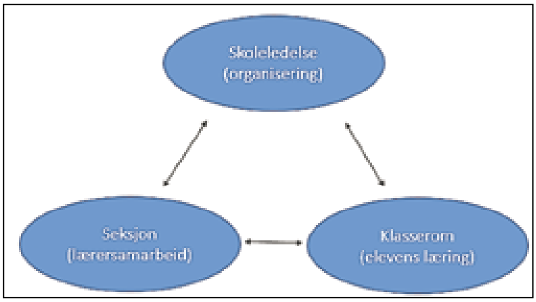
Dette ønsker vi å gjøre noe med gjennom fagtiden vi bruker sammen. Da er utfordringen og målet å gjøre om informasjonen til *kunnskapsbygging*. Det er to ting som kjennetegner kunnskapsbygging. For det første intensjonaliteten, for det andre at det skjer i fellesskap. Fagtiden vi har sammen, er et forsøk på å øke bevisstheten vår omkring elevenes læring og om at dette er et felles prosjekt. Poenget er at vi som undervisningsfellesskap forplikter oss til å øke forståelsen vår for hvordan vi kan gjøre undervisningen bedre.

En ting er imidlertid å vite hva man skal gjøre i klasserommet, en annen ting er å faktisk få gjennomført endringen i klasserommet. Det er noen ganger fristende å gjøre undervisningen enkel for oss selv, uten at elevene nødvendigvis får større utbytte av det.

Som Wells læringssyklus viser, er det et mål at vi som enkeltlærere får ny *innsikt*, slik at vi faktisk endrer undervisningen vår. Det er enklere å få til dersom vi har et forpliktende samarbeid som fagtiden vår utgjør. Da er det ikke slik at andre lærere ikke vet hva som skjer bak vår lukkede dør, og det er enklere å spørre hverandre om hvordan utprøving av ulike undervisningsopplegg eller innføring av didaktiske «triks» har fungert.

Samspill ledelse – seksjon – klasserom

Denne tilnærmingen til undervisning hadde vært vanskeligere å få til uten samspillet med ledelse og elever. Vi har opplevd dette mer som en dynamisk enn hierarkisk struktur, se figur 5.



Figur 5: Dynamisk struktur i samarbeidet mellom ledelse, seksjon og klasserom

Selv om skoleledelsen til en viss grad legger rammene for arbeidet i seksjonen, har våre innspill i stor grad blitt lyttet til og handlet på. For eksempel gjelder det bruk av egenproduserte lærebøker. Da dette var noe vi ønsket å satse på i seksjonen, ble det gitt klarsignal fra ledelsen.

Videre opplevde vi i seksjonen at organiseringen av matematikk 1P ikke gav gode nok rammer for undervisning. Som et vanlig 140-timers fag ble det organisert som tre 60-minutters timer i løpet av en uke (en dobbelttime og en enkelttime), med en fagdag (fire timer) omtrent hver femte uke. Vi ønsket heller å få mindre og jevnere «drypp» gjennom uka, slik at elevene nå har én time à 60 minutter fire dager i uka.

Videre har veldig mye av grunnlaget for de tiltakene vi har gjort i fagseksjonen, naturlig nok vært drevet av de erfaringene vi gjør i klasserommet. Måten vi arbeider på, har som tidligere nevnt vært et svar på de utfordringene som vi har møtt. Kompendiene som Tore Ottinsen skrev, var et resultat av de erfaringene elevene våre satt med. Vår fagtid har vært et svar på at vi ikke har opplevd at elevene lærer nok dersom vi bruker tiden hver for oss.

På denne måten håper vi å fortsatt kunne utvikle undervisningen vår slik at elevene lærer mer og får brukt potensiale sitt, til tross for de manglende kunnskapene noen møter videregående med. Det er det arbeidet vårt handler om. Elevene vi får hver høst, fortjener at vi går sammen for å gjøre undervisningen deres best mulig.

Andre tiltak

Vi forsøker også å møte elevene på andre måter. En kollega har tatt initiativ til og laget nettsiden delmatte.no, hvor det blant annet er laget «undrende» undervisningsopplegg innen ulike tema. De består av små videosnutter hvor elevene utfordres til å tenke matematikk og reflektere rundt oppgaven. De må prøve å gi et svar de vet er for lite, og et svar de vet er for stort, før de i det hele tatt prøver å regne. Dette for å prøve å få svaret inn i riktig størrelsesorden. Elevene blir utfordret på hva de trenger å vite for å løse oppgaven, og de får små hint underveis. Til slutt kan de sjekke om svaret de kom frem til er riktig.

På skolen har vi også et læringssenter hvor lavtpresterende elever kan få ekstra oppfølging og hjelp i matematikk i liten gruppe tilpasset sitt nivå. De er da på læringssenteret i utvalgte matematikktimer i løpet av en uke og de resterende timene sammen med klassen. Dette krever et nært samarbeid mellom faglærer og lærer på læringssenteret, slik at det blir arbeidet med «det samme» begge steder. Tilbudet gis til elever som står i fare for å stryke i matematikk, som er motiverte, og som vi tror kan stå med ekstra hjelp.

Holdninger

Men hva gjør vi når elevene tross alt dette ikke kommer i gang, og vegrer seg for å regne? Hva er det som hindrer dem?

Kanskje det er dårlige opplevelser og lite tro på egne ferdigheter: «Jeg kan ikke matte, har aldri kunnet det og kommer aldri til å lære det.» Eller manglende grunnleggende regneferdigheter. De har ikke de nødvendige matematiske verktøy i verktøykassa. Eller er det språkvansker? Kanskje det bare er én av de tre eller en kombinasjon av flere.

Så hvordan arbeider vi med elevene i timene? Eller rettere sagt, hvordan få elevene til å arbeide med faget? Vi opplever at mestringsfølelse er viktig. Vi prøver å begynne så enkelt at alle kan henge med.

Vi har opplevd at det finnes en rullegardin som heter «jeg kan ikke matte». Når den går ned, er det vanskelig å få den opp igjen. Det gjelder derfor å holde denne oppe lengst mulig. Og aller helst hele matematikkurset.

Vi må derfor være tett på elevene og ikke la dem være for mye i fred. Vi har som mål å få sett alle i løpet av en time – eller to hvis klassen er stor.

Elevene trenger mye velbegrunnet ros for å få opp selvtilliten. Vi opplever at mange elever har evne til å resonnere og forstå matematiske ideer selv om regneferdighetene mangler. Da er

(fortsettes side 38)

Ingvill Merete Stedøy-Johansen

Den ideelle matematikkøkta – finnes den?

Artikkelens innhold ble presentert i halvplenum på novemberkonferansen til Matematikksenteret 2015.

Etter å ha jobbet med matematikk og matematikkdidaktikk ved NTNU og vært leder ved Matematikksenteret i til sammen 14 år, har jeg valgt å bli lærer igjen. Jeg var med på NRK-dokumentaren «Klasse 10b» våren 2008 og har siden høsten 2008 vært lektor ved Lillestrøm videregående skole. Jeg underviser i matematikk på alle nivå, inklusive et ettårig introduksjonsprogram i matematikk for ungdom som har vært i Norge i under ett år.

I mange år på NTNU snakket jeg mye om dette til lærere og lærerstudenter:

- Undervisningen i matematikk må dreies vekk fra instruerende tavleregning med individuell oppgavedrill til *utforskende matematikkundervisning* der ***elevene** tolker oppgaver*, samarbeider, *snakker matematikkspråk* og drøfter løsningsstrategier.
- Elever og lærere må vise tålmodighet. Ting tar tid!

Ingvill Merete Stedøy-Johansen
Lillestrøm videregående skole
Ingvill.Merete.Stedoy-Johansen@lillestrom.vgs.no

Men hva betyr egentlig «utforskende matematikkundervisning»? Er det mulig for elever å utforske matematikk som det har tatt kloke hoder tusenvis av år å utvikle? Mitt svar er ja, eller i alle fall kanskje, hvis læreren er god, planlegger godt, vet hva som er målet, vet hva det betyr å forstå, ser de viktige matematiske sammenhengene, tydeliggjør det generelle.

Når en lærer skal planlegge et undervisningsopplegg, er det mange ting å tenke over og ta stilling til:

- Hvilke hjelpemidler skal brukes?
- Når skal hjelpemidlene brukes?
- På hvilken måte skal elevene forstå disse funksjonene?
- Kommer teorien eller anvendelsene først?
- Hvorfor gjør vi det på denne måten?

Utfordringen etter hver undervisningsøkt er å finne ut om elevene har lært det vi hadde som mål at de skulle lære. Det hører med til planleggingen å planlegge hvordan du skal skaffe rede på hva og hvor mye elevene har lært.

Jeg vil trekke fram tre eksempler på undervisningsopplegg.

Det første er beregnet på 1T i videregående skole, men kan med hell brukes på ungdomstrinnet også. Emnet er introduksjon til parabler. Elevene har på forhånd lært om funksjonsbegrepet og lineære funksjoner.

Oppdraget til elevene var slik:

- Hvordan ser grafen til funksjonen $f(x) = x^2$ ut?
- Hvor har dere sett slike former før?
- Hva skjer hvis vi erstatter x i funksjonsuttrykket med $(x - 6)$?
- Hva hvis vi trekker 4 fra x^2?
- Hva hvis vi multipliserer med –1, eller 3, eller 1/4?
- Hva hvis vi først erstatter x med $(x + 6)$, multipliserer med 1/2 og legger til 1?

De fikk ikke lov til å bruke hjelpemidler, bare diskutere i smågrupper og lage skisser sammen. Elevene klarte sammen å beskrive alle annengradsfunksjonene som transformasjoner, «strekkinger» og speilinger av «grunnfunksjonen» $f(x) = x^2$.

Den siste utfordringen ga dem grafen til funksjonen $f(x) = \frac{1}{2}(x + 6)^2 + 1$.

Etter læringsøkta kunne de forutsi oppførselen til funksjoner på formen $f(x) = k(x + a)^2 + b$ med en helt annen innsikt enn de ville hatt med mer tradisjonell introduksjon til andregradsfunksjoner og parabler.

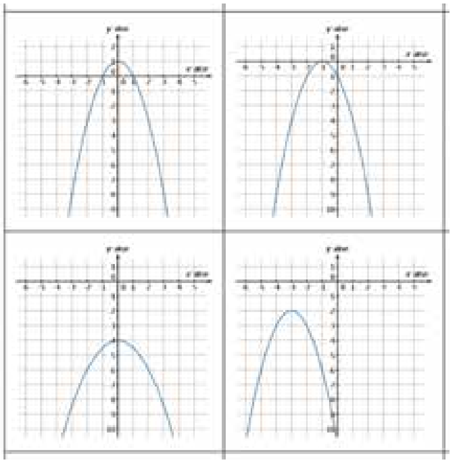
Til slutt fikk elevene bruke GeoGebra til å undersøke om det de hadde funnet ut, virkelig stemte.

Testen etterpå var å få elevene til å koble en rekke parabler sammen med de riktige funksjonsuttrykkene. Figur 1 viser et eksempel.

Det andre eksemplet ble brukt i innføringsklassen for fremmedspråklige elever, AMS. Vi arbeidet med forholdstall på ulike måter. En av tilnærmingene var forstørring og forminskning. Elevene kunne velge hver sin barbieliknende dukke. Denne skulle måles på alle mulige måter, og deretter forstørres til full høyde på 162 cm (min høyde).

Testen til slutt ble at jeg (læreren) la meg ved siden av en av tegningene. Så skulle elevene kommentere og diskutere. Var dukkene «normale» og «sunne»? Hvordan ville det gå hvis de

$f(x) = -x^2 + 1$	$f(x) = -(x + 1)^2$
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4$	$f(x) = -(x + 3)^2 - 2$



Figur 1

Figur 2: Dukkene de kunne velge.

Figur 3: Full konsentrasjon om målingene.

Figur 4: Denne eleven kunne fortelle at han hadde designet klær i Pakistan.

gjorde omvendt, nemlig forminsket meg?

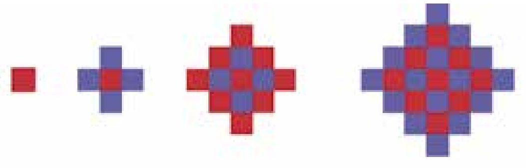
Det siste eksempelet er fra R2, fordypningsfaget i matematikk for realister. Dette opplegget kan justeres og brukes både på barnetrinnet og ungdomstrinnet. Tema var følger og rekker, algoritmer, formler og induksjonsbevis.

Elevene ble delt i toergrupper, fikk utdelt fargede runde eller kvadratiske brikker og skulle lage sine egne figurtall. De skulle finne de første tallene i de framkomne tallfølgene, en rekursiv formel, en eksplisitt formel og en formel for summen av de n første leddene i den framkomne tallrekka.

På forhånd hadde vi jobbet med aritmetiske og geometriske følger og rekker, trekanttall, kvadrattall og kubikktall. Etter første økt hadde ikke alle elevene klart å finne alle formlene. De leverte inn skisser. Jeg gikk gjennom skissene og fant fram tre eksempler som jeg ville bruke med hele klassen i neste økt. Da fikk alle elevene i oppdrag å løse oppgaven for disse figurtallene. Jeg viser ett av eksemplene her.

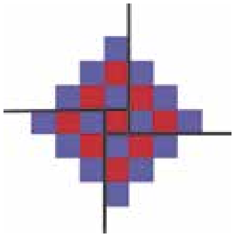
Elevene klarte bare å finne rekursiv formel for leddene i tallfølgen

$$a_0 = 1 \text{ og } a_{n+1} = a_n + 4n, \quad n \geq 1.$$



Med litt hjelp klarte elevene å kjenne igjen trekanttallene og lage en eksplisitt formel.

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 4 \cdot T_n = 1 + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 2n^2 + 2n + 1, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$



Veien var ikke så lang til å finne summen av de n første leddene i rekka når de på forhånd kjente formelen for summen av de n første trekanttallene.

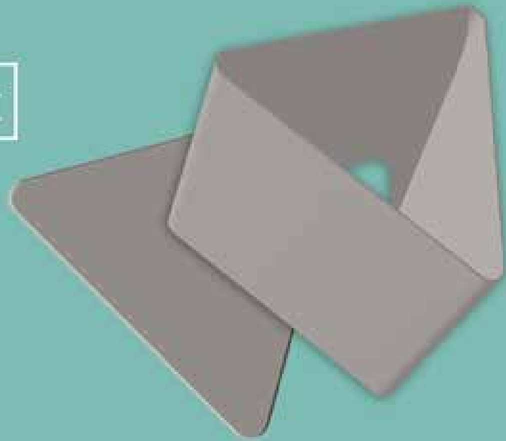
$$\begin{aligned} S_n &= n + 4 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ &= n + \frac{2}{3} n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Dette ga elevene en veldig fin mestringsfølelse. De neste eksemplene viste seg også å ha trekanttallene skjult i seg.

Mine elever kan i alle fall summen av de n første trekanttallene!

Disse eksemplene viser gode matematikkøkter der elevene viste glede, mestringsfølelse, matematisk kompetanse, samarbeidsevne, evne til å formidle resultatene sine skriftlig og muntlig, og ikke minst motivasjon.

«Den ideelle matematikkøkta» finnes nok ikke. Elever er forskjellige, klasser er forskjellige, lærere er forskjellige. MEN alle kan være med å utforske, diskutere, oppdage og lære matematikk!



Figur 1: En fem-venners håndhilsen

Mike Naylor

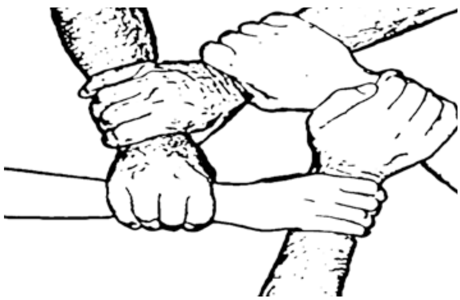
Menneskelig geometri

Det finnes mange måter å bruke hendene på når vi teller og regner. Her er noen måter å bruke kroppen på for å utforske geometriske ideer!

Håndhilsener

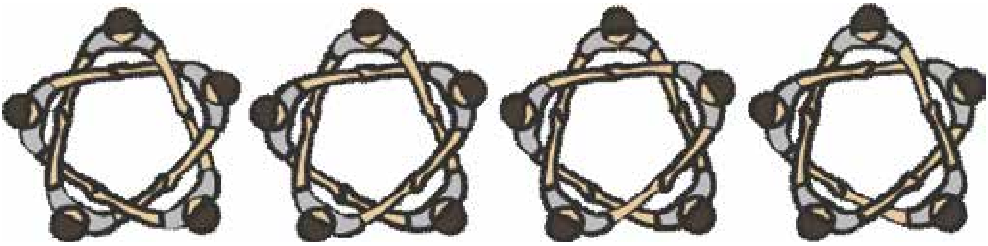
Når vi håndhilser på en venn, har vi 180° rotasjonssymmetri. Din hånd er i den samme posisjonen som hånden til din venn, rotert 180°. Kan du og en venn oppdage noen nye håndhilsener? Kan dere lage en med speilsymmetri?

Hva hvis flere venner håndhilser samtidig? En morsom aktivitet er å oppdage håndhilsener med tre eller flere venner. Hva slags symmetri bruker du? Hvis alle bruker samme hånd, er det sannsynligvis rotasjonssymmetri. En interessant måte er når alle strekker ut sin høyre hånd og alle fingertuppene møtes i ett punkt. Alle krøller fingrene sine mens fingertuppene fortsatt er sammen. Metoden kan brukes med veldig mange hender samtidig (se figur 1). En håndleddhilsen er når hver person tar tak i håndleddet til personen på sin høyre side (se figur 2).



Figur 2: En håndleddhilsen mellom flere personer

Mike Naylor
Matematikkbølgen/
Amborneset Matematikkpark
mike@matematikkbolgen.com



Figur 3: Fire unike måter å veve en stjerne med fem personer på

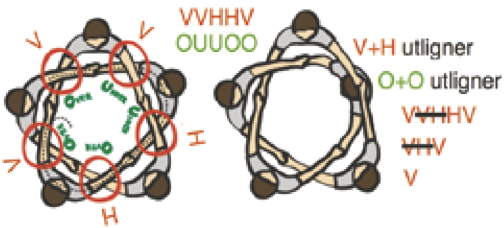
Det er mulig å få til uendelig mange håndhilsener. Noen går uavhengig av hvor mange personer som håndhilser, mens andre kun er mulige med et odde- eller partall venner.

Menneskelig-knute-teori

Samle en gruppe med fem personer i en ring og ta hendene til personene på andre siden av ringen, høyre hånd til venstre hånd og venstre hånd til høyre hånd, for å lage en stjerne (se figur 3). Kan dere vri dere løs og lage en stor ring uten å slippe hendene? Kanskje må noen klatre over eller under andres armer. Det er mulig. Det er også mulig at det er umulig! Det kan hende at når dere tar tak i hendene, lager dere en knute. Prøv forskjellige måter å veve hendene sammen på, og se om resultatene endrer seg.

Når du tar i betraktning alle symmetrier og rotasjoner, er det fire forskjellige unike måter å veve armene sammen på. To kan løses opp til en ring, og to kan ikke (se figur 3).

Kan du bestemme hvilke arrangementer som er mulige, og hvilke som er umulige, ved å se på mønsteret? For å lage et bevis kan det være nyttig å lage en slags representasjon til de forskjellige måtene armene kan veves på. Du kan for eksempel skrive V eller H i hvert krysspunkt for å betegne hvilken arm som er på toppen (se figur 4). Eller du kan bruke O eller U på hver venstre arm for å betegne om den er over eller under den andre armen i krysspunktet. Prøv å løse opp notasjonen din ved å se hvilke symboler som utligner hverandre. Denne oppgaven viser hvor nyttig og vilkårlig notasjon kan være. Notasjon er et nyttig verktøy, og det er helt greit å finne på din egen når det trengs!



Figur 4

Her er noen flere ideer:

- Konkurrere med flere lag – hvor raskt kan et lag åpne stjernen til en ring og komme tilbake til en stjerne igjen?
- Utforsk stjerner med flere enn fem personer. Hvordan kan du vite om du skal få en ring, en knute, eller flere ringer?
- Når du åpner til en ring, kan det skje at noen personer står innover og noen utover. Er det avhengig av hvordan armene veves, eller kan det skje med hvem som helst? Hvor mange står innover og utover? Kan antallene endres?

Håndpolyedre

Å lage polyedre med hendene er tilfredsstillende og kan hjelpe oss å forstå egenskaper og forhold hos polyedre. Polyedre er geometriske figurer med flate overflater og rette kanter.

a. Partner-håndkube: Arbeid med en partner. Plasser tuppene av tomlene sammen og tuppene av pekefingrene sammen for å lage en firkant. Roter hendene slik at du peker langfingrene mot partneren din. Du bør har 90°

vinkler på hver hånd mellom tommelen og pekefingeren, pekefingeren og langfingeren, og langfingeren og tommelen (som et hjørne til en kube). Din partner skal gjøre det samme. En av dere skal rotere kvadratet 90° slik at langfingrene er i opp-ned-stilling, mens partneren har langfingrene i venstre/høyre-posisjon. Ta rutene sammen slik at pekefingeren møter de frie hjørnene av din partners kvadrat; partneren din gjør det samme. Dere har lagd en kube!

b. Partner-håndtetraeder: Arbeid med en partner. Plasser tuppene av tommelen sammen, og utvid pekefingrene og langfingrene mot partneren din som om du peker på dem med to par sakser. Din partner gjør det samme. Dine fire utvidede tupper bør være *formet som en firkant*. Ta med firkantet arrangement av fingertuppene mot partnerens kvadratarrangement av fingertuppene. En av dere roterer kvadratet sitt 90°, og deretter berører fingertuppene sammen. Dere har laget et tetraeder!

c. Transformerings-utfordring! Kan du og din partner finne ut hvordan du kan forvandle kuben til et tetraeder og tilbake igjen?

d. Tetraeder. Et veldig fint tetraeder er mulig å lage med dine egne hender (se figur 5). Hver hånd lager tre av de seks kantene. De tre kantene består av tommelen, pekefingeren og den delen av hånden som er mellom tommelen og pekefingeren. Bøy det andre leddet på pekefingeren for å danne en 60° vinkel, og løft tommelen på siden av hånden for å foreta en ny 60° vinkel. Gjør det samme med den andre hånden. Kan du finne ut hvordan du kan sette sammen disse to stykkene for å lage et tetraeder? Hold hendene i de samme formene. Kan du finne en annen måte å sette de to halvdelene sammen på for å lage et identisk, men motsatt tetrahedron? Med litt øving kan du raskt flytte frem og tilbake mellom disse to arrangementene.

Andre håndpolyedre:

- Tommel, pekefinger og langfinger kan peke på tre ortogonale retninger (90° vinkler mellom hver) som hjørnet av en kube. Kan du lage en kube med fire par hender?
- Hver hånd har fem fingre, og hvert hjørne på et ikosaeder er møtested for fem kanter. Siden et ikosaeder har tolv hjørner, kan du lage et komplett ikosaeder med seks par hender? Vanskelig!

Figur 5: Et tohånds tetraeder

(fortsatt fra side 16)

Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). *Connecting Arithmetic to Algebra.* Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Saxe, B. G., Diakow, R., & Gearhart, M. (2013). Towards curricular coherence in integers and fractions: a study of the efficacy of a lesson sequence that uses the number line as the principal representational context. *ZDM Mathematics Education, 45*, 343–364.

Setler, C., Prediger, S., Nuhrenborger, M., & Husmann, S. (2012). Taking away and determining the difference - a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational studies in Mathematics, 79*, 389–408.

Intervju med to lærere

Denne gangen har Tangentens stafett kommet til Sør-Trøndelag der Beate Nergård har kontaktet to engasjerte barnehagelærere. Gjennom intervjuer får vi innsikt i hva matematikklærere fra barnehage til videregående er opptatt av knyttet til matematikkundervisning. Kanskje kan tema som løftes fram inspirere andre til å skrive til Tangenten? Stafettpinnen er nå sendt videre.

Les også intervjuer i tidligere nummer av Tangenten.

Lene Jensen

Hva ser du på som god tilrettelegging for matematikklæring i barnehagen?

Jeg mener at god tilrettelegging er at ting er tilgjengelige for at barna skal få utforske. Dette er kanskje lettere å utøve i praksis på en storbarnsavdeling med perler, tegnesaker og diverse spill. Men Lego, byggeklosser og puslespill synes jeg skal være lett tilgjengelig på enhver avdeling. Jeg mener også at det er viktig med synlige voksne som er til stede og legger til rette for

Maria M. Haugnes
Styrer i Jåddåren gårdsbarnehage
jaddarengardsbarnehage@gmail.com

Lene Jensen
Børsa barnehage
lenejensen83@gmail.com

barns utforskning av matematikk. For å få slike voksne bør barnehagene legge til rette for nok kompetanse innen matematikk.

På hvilken måte jobber dere med matematikk i barnehagen?

På min småbarnsavdeling hadde vi for en stund siden antall, rom og form som tema, og vi jobbet parallelt med matematikk og høst. Vi valgte å jobbe ganske isolert med fagområdet, fordi vi syns det blir lettere å være bevisste på hva det er vi skal jobbe med, og lettere å vite hva det er vi faktisk er bevisste på. I forkant av dette temaet hadde vi flere samtaler og planla nøye både hvilke aktiviteter vi ville gjennomføre, og hva som var målet vårt denne måneden. Vi hadde blant annet planlagte turer der vi plukket med oss blader i skogen som vi tørket, malte på og trykte på et sort ark. Vi limte deretter bladet ved siden av malingstrykket og fikk en tydelig speiling. Barna syntes dette var kjempespennende, og bildene hang lenge på avdelingen til stor glede for både barn og foreldre. Vi hadde også en plakat hengende på veggen i barnas høyde der vi målte oss og limte på bilde av barna som viste hvor høye de var. Morsomt å sammenligne ulike lengder.

Hva synes du er mest spennende med arbeidet rundt matematikk i barnehagen?

Det mest spennende for meg er å se hvordan barna utvikler den logiske sansen sin. Det at de undrer seg, stiller spørsmål og forsker, for så å komme fram til ett eller annet svar, er så fint å være med på. Barna har mange gode tanker rundt alt mulig, og matematikken er et ypperlig verktøy i logikkens verden. Hos de aller minste er det morsomt å følge med på når de starter den aller første tellingen, fra å kunne telleregla til å forstå at man faktisk kan sette tall på ting og dermed parkoble.

Hva synes du er den største utfordringen med å arbeide med matematikk i barnehagen?

Definitivt at det er for liten kompetanse rundt omkring i barnehagene. De aller fleste jeg har pratet med, vet ikke hva matematikk i barnehagen er eller skal være. Mange tenker på matematikk som det vanskelige faget de hadde på skolen, og klarer ikke å se all den matematikken vi bruker til vanlig, som vi bare trenger å sette ord på. Det syns jeg er dumt.

Hva kunne du tenke deg å lese om i Tangenten?

Jeg kunne tenkt meg artikler om prosjekter som har foregått i ulike barnehager, og gjerne matematikk som tema for de aller yngste i barnehagen. Vi trenger stadig inspirasjon, og det er så fint å kunne dra nytte av andres erfaringer.

Maria Myhr Haugnes

Hva ser du på som god tilrettelegging for matematikklæring i barnehagen?

For meg er god tilrettelegging for matematikklæring i barnehagen kompetente og tilstedeværende voksne som har kunnskaper om hvordan barn tilegner seg matematiske kunnskaper både i organiserte aktiviteter og i frilek, og som bruker språket til å innlære matematiske begreper på en naturlig måte. I tillegg er det nødvendig med materialer og aktiviteter som gir muligheter for å være kreative med matematikk, og hvor utforsking og nysgjerrighet blir nøkkelen til å utvikle aktiviteten/leken. Tilretteleggingen er således ganske lik for alle aldre, fordi barnas nysgjerrighet og den voksnes kompetanse legger nivået for matematikklæringen.

På hvilken måte jobber dere med matematikk i barnehagen?

Vi har Kokkeklubb med barna hvor de deltar i deler eller hele prosessen mot ferdig varmmat, noe som innebærer en god del matematikklæring i form av erfaring med måleenheter, antall, variasjon i størrelse og vekt. I tillegg har vi en del muligheter for utforsking av matematikk i lekemiljøet i barnehagen, med blant annet synlig tallrekke ved tegnekroken, spill og terninger og butikklek med utstyr. Formjakt inne i barnehagen er også en aktivitet som er spennende – finner vi mange kvadrater, sirkler eller trekanter rundt om i barnehagen?

Hva synes du er mest spennende med arbeidet rundt matematikk i barnehagen?

For meg er matematikk i barnehagen spennende fordi det gir mye rom for utforsking og nysgjerrighet - et slags mysterie som barna kan finne ut av, alene eller med støtte fra en voksen. Det kan også gi en forklaring på mye av det vi møter i hverdagen, og gir barna en større forståelse av verden og hverdagen vår.

Hva synes du er den største utfordringen med å arbeide med matematikk i barnehagen?

Tid og ressurser, i tillegg til ulike behov og vektlegging av fagområder i barnehagen utfordrer arbeidet med blant annet matematikk. Også kompetansen hos de ansatte varierer og kan sette begrensninger for arbeidet. Det hjelper ikke med nok materialer, om det ikke er voksne som kan veilede godt nok i bruk eller legge til rette for gode aktiviteter!

Hva kunne du tenke deg å lese om i Tangenten?

Praktiske tips til hvordan man kan støtte barna i deres matematikklæring, med eksempler fra barnehager som allerede jobber med det. Mye av dette arbeidet, som så mye annet i barnehagen, handler om å være kreativ å finne nye måter å jobbe på, slik at man hele tiden er engasjert og påkoblet de ulike barna og barnegruppen. Dette er krevende både med tanke på tid, ressurser og ulike behov hos barna, og praktiske eksempler på hvordan andre jobber gir mye inspirasjon til videre arbeid.

(fortsatt fra side 29)

det viktig å anerkjenne den matematikken de faktisk viser, i håp om å få snøballen til å rulle, slik at elevene begynner å få tro på at matematikk er noe de kan få til.

I den forbindelse er også behovet for raske og konkrete tilbakemeldinger viktig. Her kan vi lære av svømmetreneren. Når utøveren slår inn etter endt heat, er det rett opp til treneren for umiddelbar tilbakemelding. Hva var bra? Hva må det jobbes mere med til neste heat?

Ingen fasit

Vi er klar over at dette er kjent stoff for mange, og at dette er problemstillinger det også blir arbeidet med andre steder. Vi erfarer i samtaler med matematikklærere ved andre skoler at det ikke bare er hos oss det er utfordringer med språk- og regneferdigheter og holdninger til faget.

Vi tror at vi må jobbe parallelt med disse utfordringene. Vi har erfart at vi har størst sjanse til å lykkes hvis vi som kolleger arbeider sammen for å løse disse utfordringene.

Referanser

Holmboeprisen 2015. «Vinner av Holmboeprisen 2015 er Matematikkseksjonen ved Hellerud videregående skole.». Hentet 10.01.2016. fra http://holmboeprisen.no/

Roald, K. 2012. *Kvalitetsvurdering som organisasjonslæring.* Fagbokforlaget.

Børge Espedal og Pauline Vos

Logaritmer – en meningsfull tilnærming

Logaritmer oppleves ofte som et vanskelig emne, både for elever og studenter å lære og for lærere å undervise. Vi har testet ut en alternativ måte å introdusere logaritmer på i 1T-kurset i videregående skole. I stedet for å starte med definisjonen $x = 10^a \Leftrightarrow a = \log x$ begynner undervisningsforløpet mer induktivt og meningsfylt. Det baserer seg på metoden repetert-divisjon-inntil-du-når-1. I denne artikkelen forklarer vi metoden og undervisningsforløpet.

Introduksjon

Logaritmer er et viktig emne innen matematikk. Siden 1600-tallet har logaritmer vært til stor hjelp ved å forenkle ellers tidkrevende kalkulasjoner. Kalkulatorens ankomst endret betydningen av logaritmer. I dag de er nyttige på områder der folk arbeider med målinger som har store spenn mellom høyeste og laveste verdi. Blant annet i astronomi, i måling av lyd og vindpust og i helsesektoren ser vi ofte logaritmer. Dessuten er logaritmer viktig i ulike disipliner med eksponentialfunksjoner. Dermed er logaritmefunksjoner nyttige i modellering og har relevans som gjør at de inngår i læreplaner i matematikk i videregående skole.

Men logaritmer er vanskelig for de fleste elever. For eksempel gjør elevene mange feil fordi de anvender feilaktige regler. De bruker at $\log a \cdot \log b = \log(a \cdot b)$ eller log1=1 eller log0=0, mens de rette reglene er loga + logb = log(a·b), log1=0 og at log0 er udefinert. Disse feilene forekommer ofte fordi de ser akseptable ut. Noen elever husker matematiske regler fordi de er visuelt tilfredsstillende (Sleeman, 1986).[1] Logaritmereglene faller imidlertid ikke inn i denne kategorien. Problemet er at elevene ikke er i stand til å gi mening til begrepet logaritmer. Da kan de heller ikke vurdere om en regel er rett eller feil, og regler blir vanskelige å huske.

Repetert-divisjon-inntil-du-når-1

Sentralt i metoden er prosedyrene *repetert-divisjon- inntil- du-når-1* og deretter opptelling av antall steg du har tatt. For eksempel, hvor mange ganger kan du dele 1000 med 10 før du når 1?

Svar:

Børge Espedal
Vågsbygd videregående skole
bola1@vaf.no

Pauline Vos
Universitetet i Agder
pauline.vos@uia.no

$$
\begin{array}{c}
1000 \\
\downarrow \;\div 10 \\
100 \\
\downarrow \;\div 10 \\
10 \\
\downarrow \;\div 10 \\
1
\end{array}
$$

Det er gjennomført 3 divisjoner med 10 før du når 1. Antall steg, i dette tilfellet 3, er da antallet som skal telles. Etter noen øvelser med andre tall enn 1000, for eksempel 1 000 000 og 100, kan vi innføre en symbolsk representasjon for prosedyren. Vi skriver antall steg tatt som: log 1000 = 3, log 1 000 000 = 6 og log 100 = 2.

Metoden med *repetert-divisjon-inntil-du-når-1* er en metode som elevene kan praktisere umiddelbart. De trenger bare å dividere og telle. Derfor er denne alternative introduksjonen til logaritmer tilgjengelig for flere, og allerede fra starten gir den elevene mulighet til å resonnere og grunngi spørsmål av typen:

Hva er (grunngi svar):

a) $\log 10^n$?
b) log 10 ?
c) log 1 ?
d) log 0 ?
e) log(–300) ?

Repetert-divisjon-inntil-du-når-1 og deretter telle antall trinn gir logaritmer mening. Dermed oppleves kanskje ikke log 10 så fremmed og kan begrunnes: Du må dele med 10 kun én gang før du når tallet 1. Svaret er ett steg og log 10 = 1. Også log 1 = 0 kan begrunnes med at du ikke behøver å dele 1 noen ganger før du når tallet 1, altså null steg. Dette resonnementet gir log 1 = 0 en enkel mening.

Når elevene kan svare på «hvorfor» bak disse to reglene (log 10 = 1 og log 1 = 0), blir reglene mye lettere å huske. Reglene kan begrunnes, og elevene trenger ikke å huske reglene som separate fakta. I stedet kan de alltid rekonstruere reglene fra *repetert-divisjon-inntil-du-når-1* -metoden. Metoden reduserer faktakunnskap som må huskes. Med *repetert-divisjon-inntil-du-når-1* blir det også åpenbart at kun positive tall kan brukes. Hvordan skal du ellers kunne nå tallet 1?

En av elevene, Hilde, beskrev det slik: «Den oppgaven hvor en skulle forsøke på en måte forsøke med minus og med 0, synes jeg det var veldig greit å kunne se sammenhengen på hvorfor det ikke fungerte.» Medeleven Gard: «Jeg likte den hvor du fikk error på kalkulatoren (…) Det var egentlig de oppgavene du klarte å fatte sjøl, at enten noe var galt eller at noe ikke helt stemte eller at noe stemte … se en sammenheng – de likte jeg.» En lærerkollega som òg prøvde ut metoden i full klasse, ga uttrykk for at han syntes metoden ga en glattere overgang fra kjent til ukjent stoff: «Det er i hvert fall greit at de ser noe som de er vant til fra før fordi ofte har jeg følt at logaritmer er noe helt nytt, som de da har vanskelig med å begynne på og skjønne hvor logikken er. Men her tok de det relativt greit synes jeg.»

Bakgrunn

Matematisk baserer metoden med *repetert-divisjon-inntil-du-når-1* seg på definisjonen:

$$x = 10^{\log x}$$

Dette er ekvivalent med:

$$\frac{x}{10^{\log x}} = 1$$

På venstre side er det en kvotient. Den kan tolkes slik: «Du starter med x og dividerer gjentatte ganger med 10 inntil kvotienten er lik høyre side; 1. Antall ganger du måtte dividere med 10 er: log x.»

I følge Anna Sfard (1991) har matematiske begreper ofte en prosesside og en objektside. For eksempel har det matematiske begrepet «sirkel» en prosesside som består av å tegne en kurve med en passer. Objektsiden av begrepet «sirkel» består av mengden av punkter som har lik avstand (radius) fra et punkt (sentrum av sirkelen). Et annet eksempel er det matematiske begrepet «funksjon». Prosessiden av en funksjon er tildelingen av en ut-verdi til hver inn-verdi. I skolen blir dette ofte illustrert gjennom en tabell. Objektsiden av begrepet «funksjon» består av funksjonen skrevet med symboler (en regel) eller en graf. Ser man begrepet fra objektsiden, får man et mer holistisk syn på begrepet. Prosessiden av begrepet har ofte å gjøre med aktivitet som ikke behøver å være prosedyrer eller algoritmer. Anna Sfard beskriver at i matematikkens historie går vanligvis prosessiden av et begrep forut for objektsiden. Subtraksjon (prosess) gikk forut for negative tall (objekt) og divisjon gikk forut for rasjonale tall. Andregradslikninger ble utforsket først, og deretter ble begrepene med røtter og imaginære tall utviklet. Derfor er det kanskje mer meningsfylt at begrepet logaritmer introduseres først som prosess med repetert divisjon, og deretter som objekt.

Logaritmelikninger i første leksjon

Tidlig i den første leksjonen presenteres elevene for følgende (abstrakte) oppgaver:

Finn x.
a) $\log x = 18$
b) $\log x = 1$
c) $\log x = 0$

Ved å bruke *repetert-divisjon-inntil-du-når-1* kan elevene finne svarene. I oppgave a) skal de for eksempel finne det tallet som trenger 18 steg for å nå tallet 1. Videre presenteres logaritmelikninger som kan løses ved å bruke «cover-up-metoden». Du dekker til en del av uttrykket rundt x.

Her er noen eksempler på slike oppgaver:

a) $\log(4x + 5) = 0$
b) $\log(3x - 5) = 1$
c) $\log 1 = x^2$
d) $\log 10 = x + 4$

Elevene løste $\log(4x + 5) = 0$ ved å dekke over $(4x + 5)$ og bruke at $\log 1 = 0$. Det som var tildekket må være lik 1. Altså er $4x + 5 = 1$.

Tilnærmede verdier for logaritmer til tall

Neste skritt er å behandle tall hvor gjentatte divisjoner med 10 ikke gir nøyaktig 1. Det er likevel mulig å finne en tilnærmet verdi. For eksempel: Mellom hvilke to heltall vil log 80 000 ligge?

Løsning:

$$\begin{array}{c} 80\,000 \\ \downarrow \div 10 \\ 8000 \\ \downarrow \div 10 \\ 800 \\ \downarrow \div 10 \\ 80 \\ \downarrow \div 10 \\ 8 \\ \downarrow \div 10 \\ < 1 \end{array}$$

Vi når ikke tallet 1, men 0,8. Fire steg er for få, mens fem steg er for mange.

Dermed må:

$$4 < \log 80\,000 < 5$$

Vi kan til og med være enda mer presise i tilnærmingen. Svaret bør ligge nærmere 5 enn 4, ettersom 1 er nærmere 0,8 enn 8 er. På dette tidspunktet fikk elevene bruke lommekalkulator, og de fant da at $\log 80\,000 = 4{,}90$. Så ja, svaret er nærmere 5.

På tilsvarende måte kan man anslå logaritmen til hvilket som helst positivt tall x ved å finne hvilke to heltall logaritmen x må ligge mellom. Vi spurte også elevene om å vurdere hvilket heltall svaret måtte ligge nærmest.

Metoden med *repetert-divisjon-inntil-du-når-1* åpner for mange muligheter til å resonnere rundt logaritmereglene. Vi ba elevene se etter sammenhenger og så eventuelt generalisere. Er det for eksempel en sammenheng mellom log 8, log 800 og log 80 000? Elevene fant at

$$\log 800 = (\log 80\,000) - 2 = 4{,}90 - 2 = 2{,}90$$

og

$$\log 8 = \log 800 - 2 = 0{,}90$$

De resonnerte ved hjelp av antall steg i *repetert-divisjon-inntil-du-når-1*. Fra 80 000 må man gjennomføre to flere steg enn hvis man starter fra 800 fordi 80 000 er 100 (10^2) ganger større enn 800. Dermed er det mulig å rettferdiggjøre hvorfor for eksempel

$$\log(631/100) = \log 631 - 2 = \log 631 - \log 100.$$

log(631/100) må være 2 mindre enn log 631 fordi det allerede er dividert 2 ganger med 10 i brøken 631/100. Dette kan igjen bidra til å gi mening til logaritmeregelen for divisjon:

$$(\log(a/b) = \log a - \log b).$$

Erfaringer fra utprøvingen

I klasserommet opplevde vi at mange elever brukte fingrene til å dekke til nullene for å telle antall steg. De hadde funnet en raskere måte enn den «lange divisjonen» vi brukte på tavla. Elevene hadde få problemer med å kunne gjengi denne tolkningen av definisjonen på logaritmen til et tall. På den måten kunne de lettere begrunne verdien av logaritmen til tall og tilnærmingsverdier.

Selv om metoden gir muligheter for å rettferdiggjøre og gi mening til logaritmereglene, opplevde vi imidlertid visse problemer når vi ønsket å relatere metoden til logaritmeregelen for multiplikasjon. I en oppgave var det gitt at log 631 = 2,81 og log 20 = 1,30, og man skulle anslå verdien av log(631 · 20). Vi hadde håpet på skjematiske tegninger som viste hvordan man først dividerer 631 med 10 gjentatte ganger og deretter hvordan man dividerer 20 med 10 gjentatte ganger.

631 gir 2 steg og man står igjen med en dividend på 6,31. 20 gir 1 steg og man står igjen med en dividend på 2. Til sammen har man allerede 3 steg. Produktet av de resterende, 6,31 og 2, blir litt mer enn 12, og ville derfor ha gitt en ekstra divisjon med 10. Dermed vil log (631 · 20) bli litt mer enn 4.

Imidlertid håndterte ikke elevene oppgaven på den måten. De brukte lommeregneren til å multiplisere 631 · 20 = 1262, for deretter å estimere at svaret måtte være mer enn 4. De så ikke behovet for å relatere svaret til log 631 = 2,81 og lg 20 = 1,30.

Til tross for problemene i læringsprosessen med logaritmereglene, er vi fortsatt fornøyd med den nye tilnærmingen til undervisningen av logaritmer. Elevene presterte betydelig bedre på tester enn tidligere elever som hadde lært logaritmer basert på definisjonen ved symboler (Espedal, 2015). I en sammenligningsstudie mellom årsklasser fant Espedal (2015) at elevene som hadde lært logaritmer gjennom repetert divisjon, presterte signifikant bedre på logaritmelikninger enn sine jevnaldrende. For eksempel ga 51 % av elevene i eksperimentgruppa og 36 % i kontrollgruppa riktig svar til log1.

Senere i undervisningen så vi at metoden med *repetert-divisjon-inntil-du-når-1* var til hjelp ved eksponentiallikninger. Når likningen $3^x = 98$ skulle løses, opplevde læreren det lettere å kunne begrunne hvorfor man kunne sette $\log 3^x = \log 98$ i neste steg. Ettersom uttrykkene på hver side av likhetstegnet er like, må begge divideres like mange ganger med 10 før vi når 1.

Avslutning

I teksten over har vi gitt et inntrykk av undervisningsforløpet vi designet og prøvde ut med elever på vg1 i videregående skole i 1T-kurset. I tillegg til den beskrevne metoden forsøkte vi å berike opplæringen ved eksempler på applikasjon av logaritmer (lydnivå-målinger, jordskjelv, etc.) og logaritmisk skala. Undervisning via disse aspektene er imidlertid ikke nytt. Det nye med vår undervisning var introduksjonen av logaritmer gjennom metoden med *repetert-divisjon-inntil-du-når-1*. Det er en metode som inverterer måten de fleste lærere introduserer potensregning på. Vanligvis baseres introduksjonen av potensregning på repetert multiplikasjon. Fra nå av kan kanskje introduksjonen av logaritmer basere seg på repetert divisjon?

En måned etter vårt undervisningseksperiment hadde elevene våre en prøve hvor en av oppgavene besto i å ordne følgende tall fra størst til minst:

$$\sqrt{20} \quad \log 150 \quad 27^{1/3} \quad 1/9 - 3^{-2} \quad \text{og} \quad (1/2)^0$$

For nesten alle elevene var det uproblematisk å evaluere log 150. Dette betyr at de så på log 150 som et tall (og dermed et objekt), og de husket godt metoden med repetert divisjon for å anslå verdien av dette tallet.

Vår forskning (Espedal, 2015) viser at undervisning av logaritmer gjennom metoden med *repetert-divisjon-inntil-du-når-1* gir bedre resultater enn den mer vanlige tilnærmingen som baseres på definisjonen $x = 10^a \Leftrightarrow a = \log x$

Vi kjenner til at det finnes andre tilnærminger til undervisning av logaritmer, blant annet ved å bruke eksponentiell vekst (for eksempel av planter) hvor logaritmen er tidsvariabelen for veksten. Denne tilnærmingen er et typisk eksempel på *Realistic Mathematics Education* (Webb, Kooij, & Geist, 2011), hvor en realistisk kontekst gir mening til et matematisk begrep. Gjennom metoden med *repetert-divisjon-inntil-du-når-1* har vi en matematisk kontekst og ikke et realistisk kontekst. Uansett ser vi at på en eller annen måte er en matematisk kontekst nødvendig for å gi mening til et matematisk begrep.

Note

1 Redaksjonens oversettelse av begrepet «visually salient».

Referanser

Espedal, B. (2015). *En meningsfull tilnærming til logaritmer. En designstudie om introduksjon av logaritmer gjennom repetert divisjon*. Masteroppgave. Kristiansand, Norge: University of Agder.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1–36.

Sleeman, D. (1986). Introductory algebra: A case study of student misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior, 5*(1), 25–52.

Webb, D., Kooij, H. van der, & Geist, M.R. (2011). Design Research in the Netherlands: Introducing logarithms using Realistic Mathematics Education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 2*, 47–52.

(fortsatt fra side 55)

metri, kreves det flere uker ekstra for å gå gjennom begge temaene. Jeg tror at konsekvensene av dette blir at unødvendig antall elever får for lite tid til å få stoffet «inn under huden».

Min konkusjon blir derfor at departementet sitter med skylda for at det blir for liten tid til fordypning. Et tiltak kan være å plassere konstruksjon med passer og linjal på den historiske hylla. Der ligger fra før både regnestav og tabeller over kvadratrøtter og de trigonometriske funksjoner. Dessuten: Siste gang elevene får bruk for passer og linjal er 23. juni det året de fyller 16 år (dersom de ikke får barn som må hjelpes i matteleksene).

Per G. Østerlie

CAS og bokser

Fra våren 2015 er bruk av *Computer Algebra System* (CAS) et krav ved de fleste matematikkeksamenene i den videregående skolen. Det er første gang dette kravet stilles, og det har ført til heftige debatter blant mange matematikklærere. Debatten har vært preget av polarisering, og jeg har tenkt å holde meg unna den for å heller fokusere på hvordan CAS kan bidra til elevenes matematikkompetanse.

CAS i den videregående skolen er ikke noe nytt. Allerede fra midten av nittitallet deltok flere skoler i forsøksvirksomhet hvor verktøyet ble prøvd ut (Østerlie, 2004b). Målet med forsøksvirksomheten var å finne ut hvordan et slikt redskap kunne utnyttes i skolematematikken, og å finne fram til en eksamensform som passet for bruk av CAS. Vi som deltok, hadde et ønske om å gi skolematematikken en ny kurs hvor vi også utnyttet teknologien som et verktøy for læring (Østerlie, 1999, 2004a, 2005).

Nå når alle matematikklærere i videregående skole må forholde seg til digitale hjelpemidler, kan det være noe å hente fra tida hvor CAS var noe som preget den didaktiske diskusjonen både her hjemme og ute i Europa. I 1991 ble det kjøpt lisens til alle elever for bruk av Derive i Østerrike. Østerrikerne med sitt *Austrian Centre for Didactics of Computer Algebra* (ACDCA) ble sentrale i utviklinga av hvordan slike hjelpemiddel kunne tas i bruk på beste måte. De didaktiske prinsippene og ideene som da kom fram, kan det nå være greit å børste støvet av.

Per G. Østerlie
NTNU
per.g.osterlie@ntnu.no

CAS: Hva er nå det?

CAS er altså en forkortelse for Computer Algebra System og er et dataprogram som kan behandle algebraiske symboler slik at uttrykk manipuleres og likninger løses. Denne programvaren regner med eksakte verdier og minner om hvordan vi mennesker tradisjonelt har arbeidet med algebra. Et CAS er bare raskere, har et bredere repertoar enn de fleste av oss og slurver aldri. Det er også vanlig at et CAS kan foreta numeriske beregninger og har muligheter til både graftegning og programmering. Typiske CAS-program er klassikere som Derive, Maple og Mupad, som var avgrensa til å være reine CAS. I seinere programvare er CAS-funksjonaliteten en integrert del av programvare for matematikk, slik vi finner det i etterkommere som Scientific Notebook, TI-Nspire, Desmos og Geogebra. Lista over tilgjengelig CAS-funksjonalitet er voksende med flere apper som nykommere. Se bare Photomath, appen hvor du bare holder smarttelefonen med kamera over matematikkoppgaven og løsningen dukker opp på skjermen (http://photomath.net).

Hvite og svarte bokser

Det er når teknologi som i eksemplene over dukker opp, at vi matematikklærere deler oss. Noen er entusiaster og andre svært skeptiske. Sjøl om vi nok finner de fleste midt mellom, virker debattene polarisert og ofte lite nyansert. Nå er det ikke vanskelig å finne historiske eksempler på samme type konflikter. Et tidlig eksempel kan hentes fra *Faidros* av Platon, hvor Sokrates framhever skrivekunsten som en teknologi som må holdes unna elevene. Slik gikk det ikke, men denne typen diskusjoner om teknologi gjentar seg.

Et CAS har ingen analytisk funksjonalitet. I likhet med annen programvare er det å gjennomføre algoritmer i høgt tempo, og med samme presisjon hver gang, som er styrken. All annen matematisk kompetanse enn den som dreier seg om ferdigheter i prosedyrer, er forbeholdt brukeren av teknologien. Diskusjonen blir da hvilke algoritmer elevene skal kunne utføre uten bruk av CAS-teknologi, og når disse algoritmene skal være mål for læringen. Eksistensen av teknologien påvirker begge svar. Da er det to ytterpunkt i argumentasjonen. Det ene er å holde dette lengst mulig unna elevene. Ny teknologi representerer en fare for matematikkulturen og fører bare til tastetrykking. Andre argumenterer for å overlate all kalkulasjon til programvaren og heller benytte tida i klasserommet til de store tankene og problemløsing. Slik var også stoda i debatten om CAS på nittitallet.

På den internasjonale konferansen for matematikkdidaktikk (ICME) i 1984 var pedagogisk bruk av CAS tema. Et resultat av konferansen var en begynnende utforming av en pedagogisk oppdeling i bruken av verktøy hvor læringsmålene til elevene omfatter ferdigheter i både bruk av digitale verktøy og bruk av papir og blyant. Tankene fikk sin form, og sitt navn, av Buchberger (1990) gjennom lanseringen av «The White Box/Black Box Principle». Å undervise etter dette prinsippet tilbyr et kompromiss mellom de to nevnte ytterpunktene i teknologidebatten. Samtidig tilbys en didaktikk for undervisningen gjennom en faseinndeling.

Figur 1: En svart boks

Bruken av metaforen svarte og hvite bokser er nok inspirert av bruken i andre fagfelt. I både fysikk, informatikk og pedagogikk er en svart boks et objekt som betraktes ut fra hva vi sender inn og hva som kommer ut. Hva som skjer inne i den svarte boksen er ikke kjent for oss. For en hvit boks, derimot, stilles det som krav at vi vet hva som skjer. I vår kontekst vil en hvit boks være en kjent matematisk prosedyre, f.eks. hvordan vi finner den deriverte til en polynomfunksjon eller løser ei likning. Erstattes dette med et tastetrykk, eller en kommando, opererer vi med det som skjer i en svart boks.

Det er disse metaforene Buchberger benytter når han deler undervisningen av matematikkferdighetene som kan erstattes av et CAS, inn i faser med de to boksene.

Fasen med hvite bokser

Et nytt tema skal innføres for en klasse. Vanligvis hører da en rekke nye begrep, definisjoner, teori og algoritmer med. Elevene arbeider med algoritmene med papir og blyant. De utgjør hvite bokser og skal læres. CAS benyttes bare som en svart boks for tidligere innlærte algoritmer eller som et didaktisk verktøy for å støtte innlæringen av de aktuelle hvite boksene for fasen. Dette kan kalles innlæringsfasen.

Fasen med svarte bokser

CAS benyttes som en svart boks for allerede innlærte, eller ukjente, algoritmer. Fokus vil være problemløsing hvor algoritmene inngår som en del. De svarte boksene vil bare omfatte det å utføre algoritmene og ikke inkludere den matematiske forståelsen. Denne fasen kan kalles anvendelsesfasen.

Buchbergers opprinnelige prinsipp (1990) holdt strengt både på å utelate CAS i fasen med hvite bokser og rekkefølgen. Undervisningen skulle ha som mål at eleven kunne utføre algoritmene med papir og blyant før de ble erstattet av en CAS-kommando. Seinere tilpassinger har omfattet en blanding av de to fasene hvor CAS kan inngå som et verktøy for å teste ut, kontrollere eller forklare algoritmene i de hvite boksene.

En annen tilnærming, «The Black Box/White Box Principle» (Heugl, 1997), er å bytte om på rekkefølgen ved å først benytte CAS-kommandoer som svarte bokser. Slik gjør teknologien det mulig å snu om på den tradisjonelle rekkefølgen. Ferdigheter i derivasjon eller likningsløsing er ikke en forutsetning for å få løst ei likning eller derivert en funksjon. CAS benyttes som svarte bokser for ukjente algoritmer, og undervisningen kan fokusere på sammenhenger og begrep. Hva som skjuler seg i de svarte boksene, kan arbeides med seinere.

Naturligvis kan det tenkes flere varianter i både rekkefølge, sammenblanding og størrelse på fasene. Her kan læreren ta egne didaktiske valg. Gjennom en fasedeling blir undervisningsvalgene bevisstgjort. Verktøyets rolle kommer klarere fram, og det avklares i hvilke faser CAS-teknologien skal benyttes. Da skapes en bevissthet om både når verktøy skal benyttes, og hva det skal benyttes til. Det kan styrke ferdighetene i regning med papir og blyant og, i tillegg, CAS. Det viktige er at det er hva matematikklæreren ønsker å oppnå med undervisningen, læringsmålene, som styrer bruken og hvordan undervisningen deles i faser.

Noen eksempler

Eksemplene er prøvd holdt så verktøynøytrale som mulig, men skjermbildene er hentet fra TI-Nspire, som har Derive innebygd. Syntaksen er i grove trekk lik den vi finner i andre CAS-verktøy.

Likninger

Et eksempel kan være løsning av likningssystem. Elevene arbeider med likningssystem som dette.

$$3x + 2y = 8 \qquad \text{(I)}$$
$$2x - y = 3 \qquad \text{(II)}$$

Læringsmålet er å kunne benytte papir og blyant til å løse likningssystemet med innsettings- og addisjonsmetoden. Et alternativ er å starte med den hvite fasen hvor algoritmene er hvite bokser.

Etter fasen med framgangsmåtene kan undervisningen gå over i en fase med problemløsing, som til slutt krever at et likningssystem løses. Slike likninger kan løses i svarte bokser. Da kreves det ikke samme hensyn til «pene» løsninger. Antall ukjente og andre likningstyper kan også inngå, slik figur 2 viser et eksempel på.

Blander vi hva vi legger i svarte og hvite bokser, kan forståelsen for algoritmene støttes ved at deler av manipulasjonene utføres av et CAS. Figur 3 viser hvordan innsettingsmetoden er utført med et CAS. Nå er ikke det et mål i seg sjøl, men metoden kan illustreres og kompleksiteten kan økes.

På samme måte kan vi få et CAS til å utføre addisjonsmetoden ved å manipulere hver enkelt likning og til slutt addere eller subtrahere likningene. En slik utnyttelse av verktøyet kan vise hvordan og hvorfor metoden fungerer. Figur 4 og 5 viser et enkelt

$$\text{solve}(x+5\cdot y-2\cdot z=5 \text{ and } 3\cdot x+2\cdot y+z=8 \text{ and } 2\cdot x-3\cdot y+5\cdot z=9,x,y,z)$$
$$x=\frac{3}{13} \text{ and } y=\frac{28}{13} \text{ and } z=3$$

Figur 2: Tre likninger med tre ukjent

Løser II med hensyn på y

$\text{solve}(2\cdot x-y=3,y) \blacktriangleright y=2\cdot x-3$

Setter inn

$3\cdot x+2\cdot y=8|y=2\cdot x-3 \blacktriangleright 7\cdot x-6=8$

Løser likning

$\text{solve}(7\cdot x-6=8,x) \blacktriangleright x=2$

Figur 3: Innsettingsmetoden

Multipliserer II med 2

$\text{expand}((2\cdot x-y=3)\cdot 2) \blacktriangleright 4\cdot x-2\cdot y=6$

Finner I+2·II

$(3\cdot x+2\cdot y=8)+(4\cdot x-2\cdot y=6) \blacktriangleright 7\cdot x=14$

Finner x

$\text{solve}(7\cdot x=14,x) \blacktriangleright x=2$

Figur 4: Addisjonsmetoden: CAS-kommandoer

$\textbf{likning1}:=3\cdot x+2\cdot y=8 \blacktriangleright 3\cdot x+2\cdot y=8$

$\textbf{likning2}:=2\cdot x-y=3 \blacktriangleright 2\cdot x-y=3$

$\textbf{likning1}+2\cdot\textbf{likning2} \blacktriangleright 7\cdot x=14$

Figur 5: Addisjonsmetoden med definerte likninger

Definerer funksjonen

$f(x):=x^6 \blacktriangleright \textit{Ferdig}$

Finner vekstfart

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \blacktriangleright 6\cdot x^5+15\cdot h\cdot x^4+20\cdot h^2\cdot x^3+15\cdot h^3\cdot x^2+6\cdot h^4\cdot x+h^5$

Grenseverdien

$\lim\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h},h,0\right) \blacktriangleright 6\cdot x^5$

Figur 6: Derivasjon ved definisjonen

eksempel, men med et CAS kan likningene være langt mer kompliserte. Da kan eleven konsentrere seg om faktorene hver likning må multipliseres med. Hva som da skjer med likningene, får eleven svar på etter et tastetrykk. Det kan gi grunnlag for fine matematikkfaglige diskusjoner.

Nå er dette eksempler for å forklare en tenking i faser og ment som inspirasjon til egne valg for undervisning. Benyttes digitale verktøy er tenkingen i faser viktig, men rekkefølge og blanding er et didaktisk valg ut fra elevgruppe og læringsmål. Flere tips kan hentes i den siste boka til Heugl (2014) for den som leser tysk.

Derivasjon

Et CAS-verktøy kan finne uttrykket til den deriverte funksjonen hvis uttrykket til den opprinnelige funksjonen gis. En typisk kommando vil være:

$$\text{deriver } (2 \cdot x3 + x2 + 3) \rightarrow 6 \cdot x2 + 2 \cdot x$$

Når et slikt verktøy er tilgjengelig, vil det ikke være en forutsetning å beherske derivasjon før analyse av funksjoner. Undervisningsrekkefølgen kan snus ved å starte med derivasjonsalgoritmen som en svart boks. Vi benytter da «The Black Box/White Box Principle». Fokus kan da rettes mot hva dette funksjonsuttrykket forteller oss, og at vi kan finne stigningstallene til tangentene i hele definisjonsområdet. Seinere, i neste fase, lar vi elevene se på hva som skjer i de svarte boksene. Fokus vil da være hvordan elevene kan finne den deriverte ved sjøl å utføre derivasjonsalgoritmene. En bonus er at elevene allerede sitter med fasiten.

Å benytte definisjonen av den deriverte er ofte utfordrende for elever. Komplekse utregninger og regnefeil kommer i veien. Ved å benytte CAS i en fase som svart boks kan vi sette fokus på den deriverte som grenseverdien av endringsraten. Figur 6 viser et eksempel. Ved å definere andre funksjoner kan vi benytte de samme kommandoene til å finne den deriverte funksjonen.

Bokser og objektifisering

Flere teoretikere identifiserer objekter og prosesser i matematikken og påpeker at læring av matematikk involverer å gjøre om prosesser til objekter (bl.a. Dubinsky & McDonald, 2001; Gray & Tall, 2001; Sfard, 1991, 2008). Teoriene er forskjellige i grunnlag og språkbruk, men som et forsøk på en altfor kort beskrivelse er det overgangen fra å betrakte noe som en prosess til å se på det som et eget objekt som er det interessante. La oss kalle det objektifisering. En funksjon, en brøk eller ei likning, kan alle betraktes som prosesser. Et funksjonsuttrykk kan vi benytte til å regne ut samhørende verdier. En brøk er å dividere telleren på nevneren. Ei likning er noe vi løser. Det er prosesser og noe vi må gjøre. En dypere forståelse av matematikken krever at disse også oppfattes som objekter. Funksjonen oppfattes som en helhet som gir sammenhengen mellom to verdier. Brøken er ikke bare en prosess, men et objekt som uttrykker en størrelse. Likninga betraktes som et uttrykk for likhet. Denne inndelinga kan vi finne igjen i de hvite og svarte boksene. I den hvite er prosessen det viktige. I den svarte behandles algoritmen som et eget objekt. Eksempler på det finner vi i figur 5, hvor hver likning er definert med denne kommandoen:

$$\text{Likning 1:} = 3 \cdot x + 2 \cdot y = 8$$

En slik definisjon kan betraktes som en objektifisering av likninga. Nå kan den behandles som en enhet ved at alle ledd kan multipliseres, eller at vi for eksempel kan addere likninger. På samme måte vil funksjonen som objekt benyttes i CAS-kommandoer for både integrasjon og derivasjon. Hele funksjonen, brøken eller likninga, vil måtte behandles som egne objekt. Det kan naturligvis utføres reint instrumentelt, men det gir også muligheter for ei undervisning som støtter en objektifisering hos eleven.

Konklusjon

CAS kan, som så mange andre redskap, benyttes på minst to måter: enten som et reint hjelpemiddel for å utføre en oppgave eller som et redskap til støtte i læringsarbeidet. Artigue (2002) kaller det en pragmatisk og en epistemisk bruk av CAS. Hverken en epistemisk eller en pragmatisk bruk krever at elevene nødvendigvis kjenner CAS-kommandoen og vet hvordan de sjøl kan manipulere uttrykk på samme måte, men i tilfeller hvor det kreves, vil en fasedeling kombinere de to bruksområdene på en god måte. Med klare læringsmål vil den profesjonelle læreren kunne foreta de riktige valgene. Da kan de hvite og svarte boksene være til hjelp når undervisninga skal planlegges.

Referanser

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245–274.

Buchberger, B. (1990). Should students learn integration rules? *ACM SIGSAM Bulletin, 24,* 10–17. ACM ID: 1095228.

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. I D. Holton (red.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICM study* (s. 273–280). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gray, E. & Tall, D.O. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics. I *Proceedings of PME25* (s. 65–72). Utrecht, Nederland: PME.

(fortsettes side 53)

Tor Hjalmar Johannessen

Hoderegning – et pedagogisk insitament?

Hoderegning kan være alt fra en lek til et nyttig verktøy, og det kan ha flere positive formål. I denne artikkelen vil jeg vise at det også kan benyttes som et pedagogisk verktøy. Mange kan ha en vegring mot matematikk pga. et egenartet formelspråk og spesielle symboler. Hoderegning unngår formler og symboler og er en ren tankevirksomhet. Metodene som her er beskrevet, kan benyttes i undervisningssammenheng både for å stimulere flinke elever som ellers kjeder seg, og som en utforskningsaktivitet for alle. Noen av strategiene gjør at det er enkelt å finne svar. Mestring er en viktig sak også i matematikk. Hvis oppgavene her kan gi en slik følelse, er mye oppnådd når det gjelder motivasjon.

Første del handler om hensiktsmessige multiplikasjonsoppgaver. Strategiene for multiplikasjonene som er valgt, bygger på at noen oppgaver kan omformuleres til addisjoner, enkle multiplikasjoner, tallplassering, kvadrering og subtraksjon mellom kvadrater. Ikke alle tall kan beregnes på disse måtene, men de som er mulige, gir ofte oppsiktsvekkende resultater. I tillegg eksemplifiserer de matematikkens mange spennende innganger. Siste del, hoderegning med «løk»-oppgaver, omfatter trinnvise mellomregninger. Her er det mange aspekter: Løkoppgaver kan gi flinke elever noe å bryne seg på, avmystifisere komplekse uttrykk og gi en alternativ metode for trening i problemløsing med tilsynelatende komplekse matematiske formler.

Tor Hjalmar Johannessen
Tidligere lektor i realfag
tor.hjalmar.johannessen@gmail.com

Multiplikasjon med tosifrede tall

Multiplikasjon med tosifrede tall kan virke vanskelig å ta i hodet. Noen, *men ikke alle* tallkombinasjoner er allikevel hoderegnbare. Med litt øvelse og fleksibel kunnskap i hensiktsmessige regnestrategier kan man mestre nokså kompliserte oppgaver som $53 \cdot 11$, $65 \cdot 65$, $37 \cdot 23$, og $78 \cdot 82$, for å nevne noen som gir tre- og firesifrede svar.

Under vises fire ulike typer problemstillinger som egner seg for tosifret multiplisering i hodet.

Type 1. Multiplikasjon med to tall som slutter på 0. Den letteste er å multiplisere to tall av typen 10, 20, 30 … 90. Med bakgrunn i den lille multiplikasjonstabell klarer man oppgaver av typen $20 \cdot 40$, $50 \cdot 70$, osv. Samtlige svar ender på 00. Metoden er å betrakte som triviell, men er tatt med pga. type 4.

Type 2. Multiplikasjon med 11. Se på følgende eksempler: $22 \cdot 11 = 242$, $33 \cdot 11 = 363$, $44 \cdot 11 = 484$, $53 \cdot 11 = 583$. Legg merke til at tverrsummen av tallet som skal ganges med 11, står i midten på svaret, de andre sifrene er uendret bortsett fra plasseringen. For 22 er tverrsummen 4. Den havner på tierplassen mellom sifrene 2 og 2, slik at svaret blir 242, osv. Slik er det med alle tall som multipliseres med 11, så lenge tverrsummen er maksimalt 9. For tverrsummer mellom 10 og 18 må man gjøre en liten ekstra beregning. For eksempel: $57 \cdot 11 = 627$, og $85 \cdot 11 = 935$. Den første tverrsummen $(5 + 7) = 12 = 10 + 2$. Vi ser at 2-eren havner i midten, mens 10 bidrar til at sifferet på 100-plassen økes med 1, som en slags «1 i mente». Mer enn «1 i mente» får man ikke med tosifrede tall. Prøv selv med $49 \cdot 11$ og $77 \cdot 11$. Merk at $99 \cdot 11 = 1089$, noe som skyldes at 9-eren på 100-plassen får «1 i mente» og blir til 10. Bevis for metoden kan du finne på nettversjonen.

Type 3. Kvadrering av tosifrede tall som slutter på 5. Se på følgende eksempler, og studer svarene på de tre første i serien: $15 \cdot 15 = 225$, $25 \cdot 25 = 625$, $35 \cdot 35 = 1225$. Merk at alle svarene slutter på 25. Hvordan man finner tallet som skal stå foran 25, er nokså enkelt. Man multipliserer 10-ersifferet med dets etterfølger i tallrekken. Altså ved $25 \cdot 25$ er 10-ersifferet 2, etterfølgeren 3, og $2 \cdot 3 = 6$. Altså $25 \cdot 25 = 625$. For regnestykket $35 \cdot 35$ er 10-ersifferet 3, etterfølgeren 4 og $3 \cdot 4 = 12$. Svaret blir 1225. Tilsvarende for $45 \cdot 45 = 2025$, osv. Bevis for metoden finnes på nettutgaven.

Type 4. Multiplikasjon ved hjelp av konjugatsetningen (også kalt tredje kvadratsetning). Setningen kan generelt skrives som $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Poenget er at en multiplikasjon kan utføres som subtraksjon mellom to kvadrater dersom faktorene er hensiktsmessig valgt. Før man ser på hvilke regnestykker som passer til denne strategien, kan det være lurt å se på hvilke tallstørrelser «*a*» og «*b*» kan ha for at man kan regne dette i hodet. Velger man «*a*» blant tall som slutter på 0, dvs. 10, 20, 30, … 90, er kvadrering enkelt (se type 1). Man får da alltid tall som slutter på 00, f.eks. $20 \cdot 20 = 400$, $50 \cdot 50 = 2500$ osv. Tallet «*b*» kan fortrinnsvis velges blant tallene 1–9. De enkleste er $b = 1$ $(1^2 = 1)$, $b = 2$ $(2^2 = 4)$, og $b = 3$ $(3^2 = 9)$. Med litt øvelse klarer man også høyere verdier for *b*. Å trekke 1, 4 eller 9 fra tall som slutter på 00, kan gjøres i hodet, f.eks. $400 - 1 = 399$, $400 - 4 = 396$ og $400 - 9 = 391$. Tilsvarende gjelder for 2500 $(50 \cdot 50)$. $2500 - 1 = 2499$, $2500 - 4 = 2496$ og $2500 - 9 = 2491$ osv.

Dette er altså bakgrunnen for oppgavetypen. Man spør simpelthen etter svaret på produkter som $21 \cdot 19$, $22 \cdot 18$ eller $23 \cdot 17$, som er henholdsvis $(20 + 1)(20 - 1)$, $(20 + 2)(20 - 2)$, og $(20 + 3)(20 - 3)$. Tilsvarende for 30, 40, 50 osv. med ±1, 2 eller 3. Følgende regnestykker kan også tas i hodet: $31 \cdot 29 = 900 - 1 = 899$, $32 \cdot 28 = 900 - 4 = 896$, $43 \cdot 37 = 1600 - 9 =1591$, $52 \cdot 48 = 2500 - 4 = 2496$, osv. Med litt øvelse kan man forsøke med b-verdier fra 4 og høyere. Da blir subtraksjonsstykkene litt mer kompliserte, og det kan være lurt å ta i bruk hensiktsmessige subtraksjonsstrategier. For eksempel at $87 \cdot 73 = 80^2 - 7^2 = 6400 - 49 = 6400 - 50 + 1 = 6351$, som kan tas i hodet. Eller $54 \cdot 26 = 40^2 - 14^2 = 1600 - 196 = 1600 - 200 + 4 = 1404$.

Med litt øvelse vil man kunne regne oppgaver av alle typene ovenfor raskere i hodet enn ved å taste inn tallene på en kalkulator.

Bevis for oppgaver av type 2 og 3

Multiplikasjon med 11

Tosifrede tall kan skrives som $X \cdot 10 + Y \cdot 1$, der X og Y er heltall fra 0 til 9. For eksempel: $27 = 2 \cdot 10 +7 \cdot 1$.

$(X \cdot 10 + Y \cdot 1) \cdot 11 = X \cdot 10 \cdot 11 + Y \cdot 1 \cdot 11 = 110X + 11Y$ som vi kan skrive som $100X + 10X + 10Y + 1Y = 100X + 10(X + Y) + 1Y$, alternativt: $X \cdot 100 + (X + Y) \cdot 10 + Y \cdot 1$.

Vi ser at X vil telle antall 100 (og stå på 100-plassen), X + Y (= tverrsummen!) vil stå på 10-plassen, men Y står på 1-plassen.

Hvis $X + Y > 9$, får vi 1 i mente, og antall 100 (X) må økes med 1, mens resten ((X + Y) modulo 10) vil telle 10-ere. Q.e.d.

Kvadrering av tall som slutter på 5

Alle tosifrede tall som slutter på 5, kan skrives som $X \cdot 10 + 5$ der X er heltall fra 0 til 9:

$$(X \cdot 10 + 5)^2 = 100X^2 + 100X + 25$$
$$= 100(X(X + 1)) + 25 = X \cdot (X + 1) \cdot 100 + 25$$

Kommentarer:

- Alle svar vil slutte på 25, siden den første delen, $X \cdot (X + 1) \cdot 100$, har betydning for de to laveste sifrene.
- $X \cdot (X + 1)$ er det samme som å multiplisere et tall med sin etterfølger. Q.e.d.

Hoderegning med trinnvise mellomregninger – løkoppgaver

Se litt på

$$\left(\sqrt{\sqrt{(2 \cdot 3) + 10} + 5} + 7\right)^2$$

Uttrykket over kan sette skrekk i noen hver. Lignende uttrykk brukes ofte for å illustrere de kaudervelske tavleskribleriene til gale professorer som lever i sin egen, lukkede verden. Skribleriet er da ofte krydret med sinuser og logaritmer for å gjøre hokuspokuset enda mer forrykt. Eksemplet illustrerer ellers noe som kan være årsaken til matematikkvegring, nemlig at man hverken kan eller vil forstå det formelle matematiske språket.

Hva om man snur på rekkefølgen? Hva hvis man i stedet tok hele oppgaven trinn for trinn i hodet uten å vise til det formelle regneuttrykket? Det vil si enkle trinn som lett kan utføres – uten å skjele til det formelle uttrykket? Hva hvis man får presentert det formelle uttrykket med beskjed om at dette er det man nettopp hadde regnet i hodet? Egen erfaring er at mange blir overrasket, ikke minst av seg selv. Kanskje en slik tilnærming kan være med på å avmystifisere det formelle matematiske språket?

Løkoppgaver kan oppfattes som et sett parenteser inni hverandre. Forståelse av hva en parentes representerer, kan dermed etableres.

$$(\ldots) \rightarrow ((\ldots)\ldots) \rightarrow (((\ldots)\ldots)\ldots) \rightarrow \text{osv.},$$

hvor hvert parentestrinn representerer en bolk (ferdigregnet ved hoderegning) som tas med til neste trinn, mens det forrige kan glemmes. Oppbyggingen viser at det er en tråd med start og slutt. Mye problemløsning innen matematikk handler om å finne slike tråder.

Lange sekvenser kan lages ved trinnvis bruk av +, –, $\cdot$, kvadrering og kvadratrot. For at en skal kunne gjøre dette i hodet, er det behov for å redusere tallstørrelsen etter hvert. Divisjon kan benyttes, men forfatterens egen erfaring er at kvadratrot faktisk er enklere når man kan noen av kvadrattallene. Subtraksjon kan selvfølgelig og brukes for å redusere tallstørrelsene, men dette blir lett trivielt. Kunnskap om kvadrattall og kvadratrot som motsatte operasjoner, samt den lille multiplikasjonstabellen, er nødvendige forutsetninger. Merk: oppgavene forholder seg kun til positive heltall (1, 2, 3, …), samt 0.

Eksempel 1

$5 \cdot 7$ (= 35)
+1 (= 36) → som er et kvadrattall
Kvadratrot (= 6)
$\cdot 8$ (= 48)
+ 1 (= 49)
Kvadratrot (= 7)
osv.

Dette kan man holde på med i mange runder. Man trenger bare å huske den siste operasjonen, som så glemmes når man fortsetter på neste. Metoden kan sammenlignes med å bygge en løk hvor hvert skall skjuler de underliggende. Egne erfaringer viser at lange iterasjoner (dvs. mer enn 20–30 operasjoner) lett kan gjennomføres siden det er bare den siste mellomregningen man trenger å huske.

Eksempel 2

2 + 3 – 1 (= 4)
kvadratroten av dette (= 2)
+ 7 (= 9)
kvadratroten av dette (= 3)
+ 7 (= 10)
i annen (= 100)

Etter en del hodeøvelser med slike trinnvise sekvensoppgaver kan det være på tide å innføre formeluttrykkene. Læreren, og etter hvert elevene, kan skrive ned uttrykket. Merk at uttrykk i en kvadratrot er å oppfatte som en parentes, så parentesen kan utelates rundt rottegnet. Eksempel 2 blir seende slik ut når formelt matematikkspråk blir brukt:

$$\left(\sqrt{\sqrt{(2+3)-1}+7}+7\right)^2=100$$

Kanskje ikke så vanskelig å forstå formelen lenger? Ting man først har regnet i hodet virker ikke lenger så avskrekkende. Slik mestring kan være en viktig ballast å ta med når man senere møter ligninger som kan virke vanskelige. Det å vite at det er en tråd i systemet kan hjelpe – det gjelder bare å finne den.

Det er viktig å poengtere at ikke alle oppgaver er løkoppgaver. I en del oppgaver er ofte sortering, flytting, å sette på samme brøkstrek etc. nødvendig, men ikke i løkoppgaver. I løkoppgaver er det lett å forstå hvor tråden er. Slik er det ikke alltid.

Eksempel 3

$$\left(\left(\sqrt{\sqrt{(X+3)-1}+7}+7\right)^2-19\right)=3$$

Eksempel 3 viser hvordan man kan fortsette en løkoppgave med å legge på flere lag. Her er utgangspunktet eksempel 2, hvor man fortsetter med å trekke fra 19 (får da 81), og tar så to ganger kvadratrot, slik at man slutter på 3. Fortsett gjerne så langt du har lyst, og skriv gjerne ut hele tavla.

Gevinster og anvendelser

Metoden kan brukes til å

- vise at selv komplekse beregninger kan være bygget opp av enkle delstykker;
- differensiere elever;
- forstå og mestre formelle uttrykk og formler.

Ved å gjenta oppgaven, for så å skrive ned det matematiske uttrykket, kommer en greit gjennom hvordan det matematiske uttrykket skal forstås. En har vært med fra starten og deretter utviklet uttrykket. Det komplekse uttrykket får en struktur som man tross alt har regnet steg for steg i hodet. Ettersom dette er en løkoppgave, er tråden og strukturen entydig med utregninger trinn for trinn.

Utvidelse: Løse ligninger ved reversering

Ligninger bygget opp som en løk kan løses ved å gå i motsatt retning, altså ta bort skall for skall, det vil si å følge tråden i motsatt retning av hvordan uttrykket ble bygget. I løkoppgaver skal man ikke ordne uttrykkene og sette på felles brøkstrek etc. – de har en enkel struktur.

Først bygger man opp et stykke med kjente tall og beregner svaret. Så erstatter man det aller første tallet med en X (som alt er kjent – i eksempel 2 var x = 2). Ved reverseringen «skreller» man løken lag for lag ved å utføre normale operasjoner på begge sider av likhetstegnet, men nå med omvendte funksjoner/operasjoner som i vanlig løsningsprosess for algebraiske ligninger, dvs. pluss for minus, divisjon for multiplikasjon, kvadrering for rotuttrekking. Det å kjenne oppbyggingsprosessen og fasitsvaret forenkler den omvendte prosessen.

Oppgaven i eksempel 2 startet med 2, som her er kalt X. Poenget er å finne X ved å utføre motsatte operasjoner i forhold til oppbyggingen (*ja, vi vet at* $X = 2$):

$$\left(\sqrt{\sqrt{(X+3)-1}+7}+7\right)^2=100$$

Her kan man imidlertid behøve papir og blyant. Forsøk gjerne med samme metode på oppgaven i eksempel 3. God fornøyelse!

Sluttkommentar

Metodene over er et supplement og ikke ment til å erstatte dagens matematikkundervisning. De kan også være et redskap for å motivere til å arbeide videre med matematikk, ikke minst ved å avmystifisere matematikk i kombinasjon med mestring.

Og ikke glem: Hoderegning kan også være gøy!

(fortsatt fra side 48)

Heugl, H. (1997). The Influence of Computer Algebra in the Teaching and Learning of Mathematics. I J. Berry & J. Monaghan (red.), *The State of Computer Algebra in Mathematics Education* (s. 32–38). Bromley: Chartwell-Bratt.

Heugl, H. (2014). *Mathematikunterricht mit Technologie*. Linz: Veritas.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1–36.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge: Cambridge University Press.

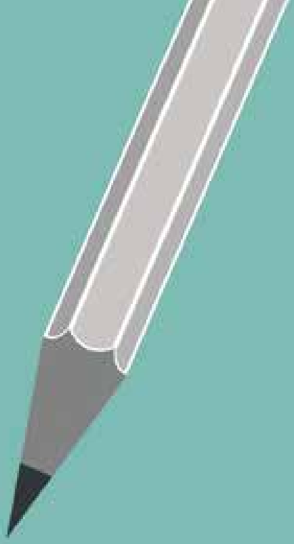
Østerlie, P.G. (1999). *CAS i videregående skole*. Presentert på NKUL. Trondheim. Hentet fra http://skole.osterlie.net/sr.pdf

Østerlie, P.G. (2004a). Om symbolregnende lommeregnere i den videregående skole. *Tangenten, 15*(1), 8–14.

Østerlie, P.G. (2004b). Rapport fra IKT-forsøk med matematikk i videregående skole. *Tangenten, 15*(1), 20–25.

Østerlie, P.G. (2005). Om symbolregnende lommeregnere i den videregående skolen. I C. Kirfel (red.), *Inspirasjonsbok for matematikklærere* (s. 52–58). Bergen: Caspar Forlag.

Leserinnlegg



For mange temaer i matematikkplanen

Sigurd Lein

Matematikk skiller seg ut fra andre skolefag ved at det er så tette sammenhenger mellom de ulike delene i faget. I naturfag, samfunnsfag, KRLE osv. er det viktig å underbygge momenter med empiriske data. I matematikk er det i større grad slik at en påstand er sann dersom påstanden kan bevises logisk. Dette momentet har betydning for hvordan planlegging og undervisning bør foregå. Læreren bør lage en progresjon (en stige) som undervisningen følger. Denne progresjonen (stigen) skal hjelpe elevene i klatringen for å nå læringsmålene. En forutsetning for at slike progresjoner skal fungere optimalt for alle elever i klassen, er at det settes av mye tid til temaet som progresjonen skal dekke. Jeg har kommet fram til at det i løpet av ungdomstiden bør være et begrenset antall temaer, og at hvert tema bør dekkes av én progresjon / én stige. Jeg mener at departementet har økt stoffmengden på en slik måte at mange elever ikke får god nok tid til å fordøye temaer slik at forståelsen kan modnes.

Lærerne bør legge fram stoffet i et tema (f.eks. algebra) i en progresjon som elevene orienteres om før gjennomgangen starter. Læreren kan godt legge lista høyt (i ungdomsskolen kan den godt gå inn i stoff fra videregående skole), men elevene må være kjent med stigen som skal bringe elevene oppover. Stegene i stigen bør være så små at alle elevene kan følge med i progresjonen. Samtidig bør elevene på hvert steg bli orientert om hvilke av de foregående stegene det aktuelle steget bygger på. Dermed kan elevene selv gå tilbake til tidligere gjennomgått kunnskap for å friske opp denne kunnskapen og finne en utdypende begrunnelse for innholdet i det aktuelle steget. Selv for elever som ikke bruker stegarkene så aktivt, er stegarkene til svært god hjelp i samtalene/underveisvurderingen jeg har med disse elevene. Og jeg har ikke møtt elever som ikke er interessert i en samtale om matematikk når de tror at de kan ha utbytte av samtalen.

Det er også av betydning hvordan stoff gjennomgås: Konkretiseringer og utfordrende «nøtter» er gode hjelpemidler. I tillegg bør en lærer bruke mye tid på sammenhenger mellom ulike temaer og kopling mellom praktisk anvendelse og teoretisk tilnærming.

Dersom en aksepterer føringene jeg har

Sigurd Lein
Borgen skole, Asker
sigurd.lein@getmail.no

introdusert over, har det betydning for hvordan en legger planer for treårsløpet i ungdomsskolen: En må bruke god tid på hvert tema. Jo fortere en går fram, jo flere elever risikerer en å «miste» på veien. Jeg mener at det neppe bør være mer enn tolv temaer for hele ungdomstrinnet. I praksis bør en bruke opp mot et par måneder på hvert stegark.

På grunnlag av tilbakemeldinger fra foreldre og elever, og på grunnlag av resultatene til elevene og engasjementet elevene viser, er mine erfaringer med slik progresjon (eller stegark, som elevene og jeg kaller dem) svært positive: Det er mange elever som på eget initiativ bruker stegarkene aktivt, først og fremst i forbindelse med forberedelse til timer, til tester (som vi har mange av; over 30 på ett skoleår) og til vanlige prøver. Noen elever har også brukt dem i forbindelse med repetisjon.

Voksne kan få «aha»-opplevelser når de går tilbake til grunnskolens matematikk-pensum. I skoleårene kan de ha opplevd at sammenhenger i faget ikke ble understreket nok. Kanskje de har følt at regler har hengt i løse luften? Når de har spurt, har de kanskje fått svaret: «Slik er det bare». Oversikten har vært preget av tåke, og stigen har manglet stegene som trengs for å se sammenhenger. I skolen har mange elever strevd med å forstå matematikk, og mange av dem har nok endt med den konklusjonen at de selv bærer skylden for miseren: «Jeg er ikke god i matte». Etter mitt syn er ikke eleven skurken i denne fortellingen.

Det er grunn til å spørre om departementet er interessert i å gi rom for at skolen kan fokusere nok på sammenhenger og progresjon i faget. To eksempler illustrerer dette. For ikke lenge siden innførte departementet to nye krav til ungdomsskolens innhold: Elevene skulle lære kvadratsetningene og få kunnskaper om dynamisk geometri. Jeg har ikke registrert at andre deler av lærestoffet skulle fjernes. Det var altså en utvidelse av kravet til lærer og elever. Hvordan gikk dette?

Kvadratsetningene var etter mitt syn ikke noe stort problem. For det første var dette en grei anvendelse av polynom-multiplikasjon. Det utfordret elevene på et høyere abstraksjonsnivå, men mange elever klarte oppgavene ved stor innsats. For det andre var det allerede innarbeidet i de stigene jeg brukte.

Dynamisk geometri var derimot noe helt annet: Riktignok ligner det å bruke GeoGebra på det å konstruere med passer og linjal. Det er mange likheter, men progresjonen i dynamisk geometri og progresjonen i konstruksjon står vindskeivt på hverandre: I dynamisk geometri kan det være smart å kunne navigere i et aksesystem. Det er ikke nødvendig i konstruksjon. I konstruksjon er det tre vinkler som kan lages med egne prosedyrer: 60°, 72° og 90°. For å konstruere 67,5° må en kombinere halvering av vinkler med f.eks. å starte med å konstruere 90°. Trekanter som inneholder denne vinkelen, er mer krevende enn trekanter med utelukkende 30°, 45°, 60° eller 90°-vinkler. Disse to trekanttypene er derfor på to forskjellige nivåer i vanskelighetsgrad i konstruksjon med passer og linjal. I dynamisk geometri er det ikke vanskeligere å tegne en 60°-vinkel enn en 67,5°-vinkel. Nevnte trekanter er på samme nivå innen dynamisk geometri. Det er flere eksempler på at det som er krevende i konstruksjon, er mindre krevende i dynamisk geometri.

Jeg mener at det derfor er behov for to ulike progresjoner/stiger (eller «stegark»): Ett for konstruksjon og ett for dynamisk geometri.

Et annet moment er at konstruksjon har et tak som en ikke kan komme forbi: Det lar seg ikke gjøre å konstruere ellipser, parabler eller hyperbler med passer og linjal. Tilsvarende «tak» gjelder ikke for dynamisk geometri. Der er det en egen kommando til å tegne disse kjeglesnittene. Men dette forholdet alene utløser ikke behovet for to «stiger».

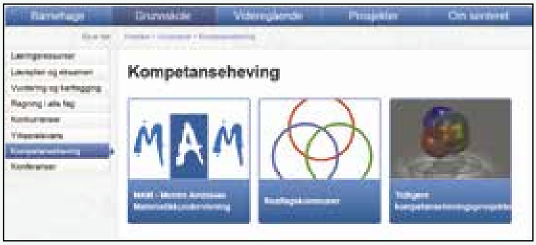
Siden departementet vil beholde både konstruksjon med passer og linjal og dynamisk geo-

(fortsettes side 43)

Realfagbygget A4, NTNU · 7491 Trondheim · +47 73 55 11 42 · ms@matematikksenteret.no

Mestre ambisiøs matematikkundervisning

Svein H. Torkildsen



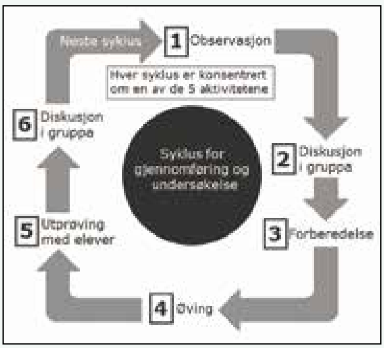
I Tangenten 3/2015 publiserte vi en artikkel om prosjektet «Mestre ambisiøs matematikkundervisning» (MAM). Målet med prosjektet er å utvikle en modell med tilhørende ressurser for skolebasert etterutdanning av matematikklærere på mellomtrinnet. Modellen og ressursene vil også kunne brukes innen lærerutdanning og videreutdanning av lærere. Vi ser også for oss at enkeltlærere, en gruppe lærere eller et helt kollegium kan bruke ressursene i et utviklingsarbeid de selv tar initiativ til. Gjennom bruk av ressursene skal lærerne få hjelp til å utvikle en undervisningspraksis hvor de kan engasjere seg i elevens tenkning, stille spørsmål, observere og vurdere elevenes resonnement, språk og argumentasjon og fremme forståelse, læring og økt motivasjon hos elevene. En slik praksis kaller vi *ambisiøs matematikkundervisning*.

Skoleåret 2014/2015 ble brukt til å utarbeide en prosjektbeskrivelse og ressurser i form av artikler, filmer med transkripsjoner og refleksjonsspørsmål samt plandokumenter for de fem aktivitetene vi tar utgangspunkt i. I fortsettelsen vil vi også utvikle forslag til hvordan ulike aktører kan utnytte ressursene. Disse ressursene tar utgangspunkt i de to utviklingsprosjektene[1] i USA som MAM-prosjektet bygger på, men justeres ut fra de erfaringene vi gjør i piloteringen inneværende skoleår.

På nettsiden *www.matematikksenteret.no* finner du mer informasjon om prosjektet.

Syklus av gjennomføring og undersøkelse

Lærerne skal utvikle rutiner og kompetanse i ambisiøs matematikkundervisning gjennom å arbeide med aktivitetene i en «syklus av gjennomføring og undersøkelse» (Lampert, Franke,



Kazemi, Ghousseini, Tottou, Beasley, Cunard og Crowe, 2013).

1. Observasjon: lærerne observerer en veileder/lærerutdanner som gjennomfører en gitt aktivitet med elevene
2. Diskusjon i gruppa (lærere/lærerutdannere/veiledere)
3. Lærerne planlegger/forbereder en lignende aktivitet med elever
4. Lærerne øver på aktiviteten i gruppa – medlærere spiller rollen som elever, lærerutdannere stopper opp og diskuterer valg læreren gjør
5. Lærerne prøver ut aktivitetene (individuelt eller i par) med en elevgruppe, lærere observerer og tar videoopptak av undervisningen
6. Diskusjon i gruppa (lærere/lærerutdannere/veiledere).

Lampert et al. (2013) fremhever spesielt betydningen av øvinger. Øvingene gir mulighet til å gå i dybden på det faglige innholdet i aktiviteten og på læringsmålet for aktiviteten. Øvingene legger også opp til diskusjoner knyttet til samtaletrekk og representasjoner som kan brukes for å fremme elevenes læring.

Dette skoleåret har vi et samarbeid med tre skoler i Trondheim om en tilpasset utgave av denne syklusen. Etterutdanningsmodellen forutsetter at vi får gjennomført denne syklusen et visst antall ganger, og vi må ha en viss tid til disposisjon hver gang vi møtes. Rektorene ved de tre skolene – Berg, Nidarvoll og Nardo – har klart å frigjøre til sammen 13 lærere fra klokken 1200 til 1600 sju torsdager dette skoleåret. Ideelt sett bør det nok være 10–15 samlinger hvis en skal få mulighet til å arbeide grundig med det teoretiske grunnlaget og få mange nok erfaringer sammen med kolleger og veiledere som «kritiske venner».

Program for en samling

Mellom samlingene får lærerne en artikkel å lese sammen med ett eller flere refleksjonsspørsmål. I tillegg skal kolleger ved samme skole parvis planlegge den aktiviteten syklusen den dagen er knyttet til. Under selve samlingen er lærerne delt i tre grupper, hver med to eller tre lærere fra to forskjellige skoler. Av praktiske grunner kan vi ikke følge syklusen nøyaktig som beskrevet over. Tiden på en samling disponeres i regelen slik som vist i tabellen på neste side.

Erfaringer

Så langt kan vi konstatere at det er mulig for en rektor å få på plass en så pass omfattende etterutdanning for en gruppe lærere innenfor det handlingsrommet rektor har. Alle tre rektorene var også til stede på flere av samlingene, noe både lærerne og vi fra Matematikksenteret setter stor pris på. Selv i en travel hverdag finner de 13 lærerne tid til å forberede seg godt til samlingene. Det er svært inspirerende for alle aktørene å få være sammen om utvikling av matematikkundervisningen.

Både veilederne og de fleste lærerne har lang undervisningserfaring. Likevel må vi erkjenne at det er krevende å leve opp til de ambisiøse målene for denne type undervisning. Det kjenner vi på kroppen mens vi leder elevene i aktivitetene, og det blir også tydelig når vi gjenopplever undervisningen gjennom videoopptakene. Spesielt krevende er det å velge et fornuftig samtaletrekk på riktig tidspunkt slik at elevene får rettet oppmerksomheten både mot hverandres tanker og ideer og mot målet for aktiviteten. Men vi kan glede oss over at både veiledere og lærere kan diskutere episoder fra undervisningen i en støttende atmosfære. Det er et godt grunnlag for videre utvikling av profesjonaliteten.

1200–1215	Samtale om artikkelen i lærergruppene, som så trekker fram noe de har merket seg spesielt, og som de vil dele med fellesskapet.
1215–1300	Arbeid i de tre gruppene sammen med veileder(e) fra MAM-prosjektet. I hver gruppe skal lærerne fra en av skolene gjennomføre aktiviteten de har forberedt, med resten av gruppa og veilederne som «elever». Tilsvarer punkt 4 i syklusen til Lampert et al.
1300–1400 låner vi en femteklasse på vertsskolen, Nidarvoll. Tiden med elevene er todelt:	
1300–1325	En av veilederne fra MAM-prosjektet gjennomfører dagens aktivitet med alle elevene i klassen. Lærerne er observatører og konsentrerer seg om hver sine elever. Tilsvarer punkt 1 i syklusen.
1325–1335	Lærerne som skal gjennomføre opplegget sitt med ei gruppe elever, får anledning til en siste justering ut fra de observasjonene de gjorde i klassen. Justeringene kan drøftes med resten av gruppa.
1335–1400	Klassen deles i tre grupper med åtte elever i hver gruppe. De tre lærergruppene får hver sin elevgruppe og gjennomfører som beskrevet i punkt 5 i syklusen.
1400–1425	Pause
1425–1445	Lærergruppene diskuterer gjennomføringen av aktiviteten med elevene, både i hel klasse og i gruppe. Hver lærer ser på egne notater fra undervisningen og trekker fram noe de synes er verd å diskutere. Gruppa velger så ett eller to momenter de ønsker å presentere for fellesskapet.
1445–1500	Felles diskusjon og oppsummering av erfaringer med utprøving av aktiviteten.
1500–1550	Faglig innslag og forberedelse av aktiviteten som skal ligge til grunn for neste samling.
1550–1600	Avslutning og vurdering.

For skoler som ønsker å benytte ressursene og arbeide med kompetanseutvikling på egen hånd, vil vi utarbeide et forslag til organisering og progresjon. Dette kommer vi tilbake til i neste nummer av Tangenten.

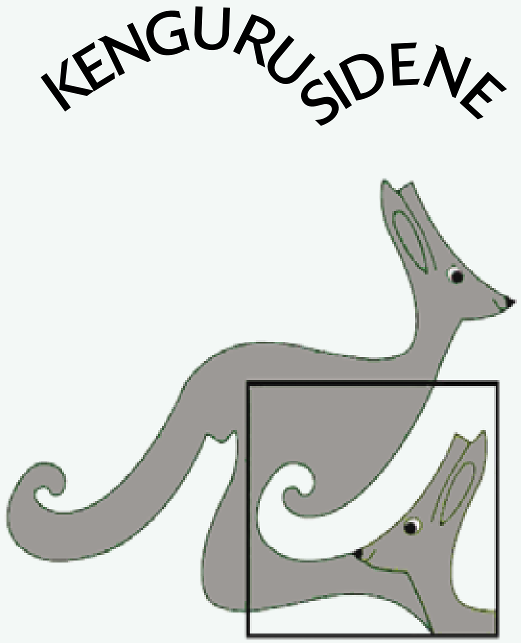
Note

1 ”Learning in, from, and for teaching practice (LTP)”, http://sitemaker.umich.edu/ltp/home, og ”Supporting ambitious instruction in elementary mathematics through school-wide professional learning”, https://education.uw.edu/people/faculty/ekazemi

Referanser

Lampert, M., Franke, M.L., Kazemi, E., Ghousseini, H., Turrou, A.C., Beasley, H., Cunard, A. og Crowe, K. (2013). Keeping it Complex: Using Rehearsals to Support Novice Teacher Learning of Ambitious Teaching. *Journal of Teacher Education, 64*(3) 226–243.

Vi beklager
I Tangenten 4/2015 var Jens Arne Meistad forfatter av artikkelen «Er vi klare for yrkesretting?». Vi beklager at hans navn falt ut.



Halvparten og litt til

Morten Svorkmo

I en av oppgavene fra Kengurukonkurransen 2015 skal man finne hvor mange penger Magnus hadde før han kjøpte tre leketøy til ulik pris. Det er ganske mange opplysninger i teksten, men opplysningene følger et system. Han betaler hele tida halvparten av det beløpet han har, pluss 1, 2 eller 3 euro i tillegg.

Dette var en krevende oppgave i settet, og det som gjør den utfordrende, er kanskje at elever ikke vet hvordan de skal angripe den. Oppgaven kan løses på ulike måter og med ulike strategier, og den kan forenkles og utvides. Jeg skal her se på noen av mulighetene en slik oppgave kan gi.

Benjamin 2015 oppgave 19

Magnus kjøpte tre leketøy. For det første leketøyet betalte han halvparten av det han hadde pluss 1 euro. For det neste betalte han halvparten av det han nå hadde igjen pluss 2 euro. For det siste leketøyet betalte han halvparten av det han hadde igjen etter å ha kjøpt de to første leketøyene pluss 3 euro. Da hadde han brukt alle pengene sine. Hvor mange penger hadde Magnus før han kjøpte leketøyene?

(A) 100 euro (B) 65 (C) 45 euro
(D) 36 euro (E) 34 euro

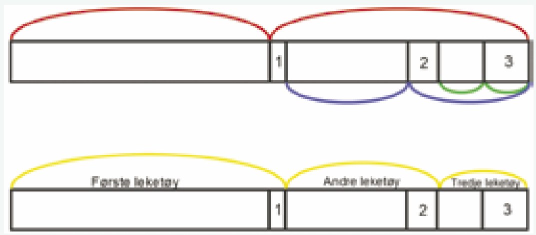
I og med at dette er en flervalgsoppgave med fem alternativer, er det mulig å bruke alternativene som utgangspunkt, dvs. prøve de ulike alternativene for å se hvilket av dem som kan gi riktig svar.

Jeg skal først vise to strategier uten å bruke svaralternativene, og deretter et eksempel på hvordan det er mulig å utnytte tallkunnskap til relativt raskt å finne riktig svar ved å bruke svaralternativene som utgangspunkt.

Tegning eller modell

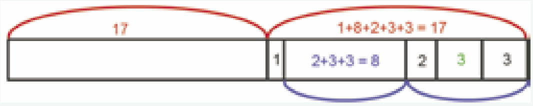
Å modellere en slik oppgave ved hjelp av en skisse, for eksempel en barmodell, kan være en egnet strategi. En slik modellering egner seg godt til å løse oppgaver med brøk og prosent. I denne oppgaven er det kun snakk om halvparten, men i og med at utgangspunktet for halvparten hele tida endrer seg, vil en tegning kunne være til hjelp for å forstå problemet.

Den første barmodellen i figur 1 viser hvordan halveringa foregår, mens den neste viser prisen for hvert enkelt leketøy.



Figur 1

Sett deretter inn tallene slik de vil komme fram ved å bruke halvparten. Mest hensiktsmessig er det her å begynne med det tredje leketøyet. Ved hjelp av en slik modell kan elever oppleve at det i denne sammenhengen kan være gunstig å tenke baklengs, dvs. å regne fra det man har igjen til slutt, for å finne ut hvor mye Magnus hadde i starten.



Figur 2

Algebraisk løsning

x er det beløpet han (Magnus) hadde før han kjøpte tre leketøy. Pris for det første leketøyet: Halvparten av beløpet pluss 1 euro: $0{,}5x + 1$.

Pris for det andre leketøyet: Halvparten av det han hadde igjen pluss 2 euro:

$$(x - (0{,}5x + 1))/2 + 2 = 0{,}25x + 1{,}5.$$

Pris for det tredje leketøyet: Halvparten av det han hadde igjen pluss 3 euro, noe som da medfører at det tredje leketøyet må ha kostet 6 euro i og med at halvparten er 3 euro.

Dette gir:

$$\begin{aligned}(0{,}5x + 1) + (0{,}25x + 1{,}5) + 6 &= x\\ 0{,}75x + 8{,}5 &= x\\ 8{,}5 &= 0{,}25x\\ x &= 34\end{aligned}$$

Bruk av svaralternativ

Elever som bruker svaralternativene, og som samtidig greier å se at oppgaven kan løses ved å vurdere delelighet der du må finne halvparten av hele tall, kan forenkle resonnementet sitt og finne riktig løsning nokså raskt:

(A) 100 euro (100 : 2) – 1 = 49, ikke delelig med 2
(B) 65 euro ikke delelig med 2
(C) 45 euro ikke delelig med 2
(D) 36 euro (36 : 2) – 1 = 17, ikke delelig med 2
(E) 34 euro (34 : 2) – 1 = 16, delelig med 2 og dermed eneste mulige svaralternativ

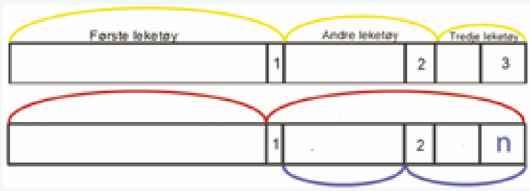
Eksempel på utvidelser av oppgaven

– Hvor mye kostet hvert av de tre leketøyene?
– Hva hvis han hadde igjen 1 €, 2 € osv.? Bruk regneark til å lage en oversikt.

Beløp igjen	1 €	2 €	3 €	4 €	5 €	*n* €
Leketøy 1	10	14	18	22	26	
Leketøy 2	6	8	10	12	14	
Leketøy 3	2	4	6	8	10	
Totalbeløp	18	26	34	42	50	

– Lag algebraiske uttrykk for de tre leketøyene dersom den siste opplysningen hadde vært n euro. Hvor mange penger ville da Magnus hatt før han kjøpte de tre leketøyene?

Å bruke to av modellene som ble brukt til modelleringen av problemet, kan også være til god hjelp når man skal lage algebraiske uttrykk.



Figur 3

Ungdomstrinn i utvikling – nye ressurser tilknyttet satsingsområdet regning

Eskil Braseth og Bård Vinje

Matematikksenteret skal kontinuerlig utarbeide nye ressurser tilknyttet satsingsområdet regning i det nasjonale prosjektet *Ungdomstrinn i utvikling*. Høsten 2015 ferdigstilte vi tre nye filmer i samarbeid med Snøball Film. All filming er gjort ved Atlanten ungdomsskole i Kristiansund, og vi vil benytte anledningen til å takke alle ansatte og elever ved skolen for en strålende innsats! Filmene er publisert flere plasser, men i denne sammenheng vil vi trekke frem prosjektets egen nettside http://www.udir.no/Utvikling/Ungdomstrinnet/Regning/ og Matematikksenterets nettsider http://matematikksenteret.no/content/5499/Filmer.

Tittelen på den første filmen er «Regning i alle fag». Dette er den korteste filmen, og målet vårt med denne filmen er å vise hva den grunnleggende ferdigheten å regne kan være i ulike fag. Her finner du små klipp fra undervisningssituasjoner i ulike fag, og i tillegg prøver vi å få frem viktige perspektiv gjennom lærerintervju og en fortellerstemme. Vi synes det er viktig at arbeidet med den grunnleggende ferdigheten å regne foregår på de ulike fagenes premisser, og da er det helt avgjørende at fagets formål, den fagspesifikke beskrivelsen av den grunnleggende ferdigheten og kompetansemål i faget blir sett i sammenheng.

Den andre filmen har tittelen «Regning i praktisk-estetiske fag». I denne filmen ser vi grundigere på regning i fagene mat og helse, musikk, kunst og håndverk og kroppsøving.

Vi har valgt å trekke frem disse fagene fordi vi mener dette er fag der regning har en naturlig rolle. Samtidig er dette fag hvor arbeidet med regning fort kan gå på bekostning av fagenes formål hvis man ikke har en god forståelse av læreplanen. I alle disse fagene er det kjempeviktig at den praktiske undervisningen blir ivaretatt, og at arbeid med regning ikke medfører at elevene sitter på klasserommet og gjør matematiske regnestykker. Vi håper at vi gjennom denne filmen viser at arbeid med den grunnleggende ferdigheten å regne også kan gjøres i praktiske sammenhenger.

«Regning som satsningsområde» er tittelen på den tredje og siste filmen. I denne filmen ligger fokuset på arbeid i en personalgruppe, og målet med filmen er å vise hvilke prosesser vi ved Matematikksenteret mener at en skole må gjennom dersom de velger satsningsområdet. Det er selvsagt helt opp til den enkelte skole hvilke utviklingsprosesser man velger å gjennomføre, men filmen viser hvilke innholdselementer vi synes er naturlige. I filmen starter man med å skape en felles forståelse for den grunnleggende ferdigheten å kunne regne, og ender opp med å fokusere på det som skjer i klasserommet i form av kollegaveiledning.

Erfaringene fra *Ungdomstrinn i utvikling* er at regning kan være et utfordrende satsningsområde, og derfor håper vi at mange lærere og skoler finner god hjelp i filmene. Man kan naturligvis ikke vise alt i slike korte filmer, men forhåpentligvis kan de være en inspirasjonskilde og et diskusjonsgrunnlag rundt omkring på den enkelte skole.

Vi er også godt i gang med å legge ut ressursene som ligger på prosjektets hjemmesider, på Matematikksenterets hjemmesider. Alle ressursene vil da bli liggende på http://matematikksenteret.no/content/2029/Regning-i-alle-fag. I den forbindelse har vi organisert ressursene som omhandler regning i skolebasert kompetanseutvikling på en slik måte at det skal bli lettere å finne fram til de ressursene som passer skolens utvikling best. Vi har bevisst unngått å skissere en mulig fremdriftsplan fordi skolene har ulikt fokus og er på ulike steder i sin utvikling. Vi har i stedet bygget opp ressursene slik at de ikke er avhengige av hverandre, men fungerer som selvstendige og fullverdige aktiviteter med forslag til forarbeid og etterarbeid. På den måten kan skolene selv velge ressurser ut fra egne utviklingsplaner og behov. Forarbeidet og etterarbeidet kan også fungere som mellomarbeid og kan knytte ressursene sammen hvis man ønsker det. Denne organiseringen håper vi kan bidra til å gjøre planleggingen og utførelsen av utviklingsarbeidet lettere.

Det er også laget en ny ressurs om hvordan en skole kan følge opp resultatene av de nasjonale prøvene i personalet. Flere skoleledere har gitt uttrykk for at skolen har valgt regning som satsningsområdet på bakgrunn av svake resultater på regneprøven. Ressursen skal gjøre lærerne bevisste på hvilke utfordringer elevene har i ulike fag knyttet til arbeidet med den grunnleggende ferdigheten å regne. Videre er ressursen lagt opp slik at lærerne skal se på hvilke fag som arbeider med den type matematisk kompetanse som elevene har behov for, og integrere den i undervisningen på en naturlig måte slik at det blir regning på fagets premisser.

Det er viktig å understreke at resultatene på de nasjonale prøvene i regning ikke er noe godt mål på hvor vellykket prosjektet *Ungdomstrinn i utvikling* er, men et grundig arbeid med analyseredskapene som følger med prøven, kan bidra til å styrke den matematiske kompetansen elevene trenger for å kunne regne i de ulike fagene.

Ny struktur på heimesidene til Matematikksenteret

Hausten 2015 gjennomførte vi ei omstrukturering og ansiktsløfting på heimesidene til Matematikksenteret, www.matematikksenteret.no. Bakgrunnen for dette arbeidet var at vi ønska å rydde opp litt på sidene våre og samstundes gjere dei lettare å manøvrere i.

Den største skilnaden er at vi har gått over frå ein lang venstremeny til ein navigasjon med knappar, lagt i matrisestruktur. Dette gjer det også enklare å lese sidene våre på nettbrett.

Her er sida der vi har samla læringssressursane vi har utvikla for grunnskulen:

Her er ei oversikt over prosjekt ved Matematikksenteret.

Sjå meir på www.matematikksenteret.no:

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
Matematisk institutt UiO
Postboks 1053 Blindern
0316 OSLO

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det overordnede målet for Landslaget for matematikk i skolen er å heve kvaliteten på matematikkundervisningen i grunnskolen, den videregående skole og på universitet/høyskole.

Landslaget skal stimulere til kontakt og samarbeid mellom lærere på ulike utdanningsnivåer og mellom lærere og andre som er opptatt av matematikk.

Styret for LAMIS

Leder
Tone Skori, Akershus
Barnetrinnet
Renate Jensen, Hordaland
Ungdomstrinnet
Kari-Anne Bjørnø Karlsen, Østfold
Gerd Nilsen, Hedmark
Videregående skole
Torgeir Nilsen, Nordland
Høgskole/universitet
Marianne Maugesten, Østfold
Varamedlem
Hege Fjærvoll, Nordland

Medlemskontingent 2015

450 kr for enkeltmedlem m/Tangenten
200 kr for husstandsmedlemmer
300 kr for studenter m/Tangenten
975 kr for skoler/institusjoner m/Tangenten

Organisasjonssekretær

Gro Berg
gro@lamis.no
41562324

Husk sommerkurset i Ålesund: 5.–7. august 2016

ÅLESUND 2016 · MATEMATIKK MELLOM FJORD OG FJELL ·

Lederen har ordet
Tone Skori

Jeg ønsker alle et godt nytt år, selv om kalenderen har kommet litt inn i det nye året.

Dette skoleåret er den tredje gangen LAMIS arrangerer matematikkonkurransen UngeAbel for klasser på 9. trinn. Alle de 19 fylkene er representert, men fra noen fylker er det veldig få deltakere. LAMIS ønsker at mange 9.-klasser skal delta på denne konkurransen, så det er fint om dere kan være med og gjøre konkurranse kjent for ungdomsskolene rundt omkring i vårt langstrakte land. Slik som konkurransen er lagt opp, er dette en forsmak på hva Ludvigsen-utvalget vil at elevene skal jobbe med i den fremtidige skolen, for her må elevene fordype seg i et matematisk problem. Én vinner fra hvert fylke kommer til Gardermoen i april til semifinale og finale. Skolen som vinner finalen, får være med til den nordiske finalen på Island i begynnelsen av juni.

Matematikkdagheftet 2016 kommer i digital form i år. Alle medlemmene har fått informasjon om hvordan de skal få tilgang til årets hefte. På www.lamis.no kan du lese mer om hvordan du skal logge inn for å få tilgang til heftet. LAMIS oppfordret barnehager og skoler til å arrangere matematikkens dag i år som tidligere. Vi ønsker en felles matematikkdag eller matematikkuke, så LAMIS vil gjerne at dagen blir lagt til uke 11. Passer ikke det, så ta matematikkdagen i en annen uke når det passer for skolen. Inviter gjerne lokal presse som kan få et innblikk i hvordan vi i skoler og barnehager også jobber med praktisk matematikk. I årets matematikkdaghefte har det blitt lagt vekt på temaet tall og algebra.

Til vårens eksamen i matematikk er det i år som i fjor obligatorisk bruk av digitale verktøy for alle eksamenskoder i grunnskolen og videregående. I programfag og teoretisk matematikk på videregående opplæring er kravet CAS (Computer Algebra Systems) og graftegner. For elever som har praktisk matematikk på videregående skole og grunnskole, er kravet til digitale verktøy regneark og graftegner. Resultatene på eksamen i matematikk har falt jevnt de siste årene, og våren 2015 er det dårligste resultatet på lenge. Snittet var på under 3, og ca. 42 prosent av elevene fikk karakteren 1 eller 2. Hva kan være årsaken til dette? Det er ingen som har kommet med noen klare årsaker, men i Klassekampen i november 2015 sto det en artikkel med overskriften «Mattefall skyldes eksamen». Fagfolk mener at endringer i eksamenene kan være årsaken til de dårlige resultatene, ikke dårligere elever. Fra og med 2009 ble eksamensformen endret slik at elevene ikke lengre kunne velge mellom en enkel oppgave som ga noen poeng, og en vanskeligere oppgave som ga full uttelling. På eksamen i dag gjenstår bare den vanskelige oppgaven, og det sier seg selv at det rammer den svakeste gruppa. Jeg og LAMIS ønsker at eksamen skal stå i forhold til det elevene lærer på skolen, og det er også ett av punktene Ludvigsen-utvalget trekker fram i sin rapport om den fremtidige skolen. Imens får Udir

(fortsettes side 72)

Sommer kommer, sol og regn og matematikk

Henrik Kirkegaard

Ute faller snøen lett og fint. Ungene boltrer seg med snowboard og kjelker. Inne lukter det gløgg og hjemmebakt. Sju smilende ansikter gestikulerer ivrig og forteller om den siste utviklingen med foredragsholdere, festmiddag og diverse programpunkter som må på plass til årets sommerkurs i Ålesund.

Hvorfor i all verden syns sju personer at det er flott å jobbe med sommerkurs for LAMIS?

Første gang vi møttes var på våren 2015. «Vi» er Elisabeth og Sissel, som jobber i barnehage; Hanne, Marit og Henrik fra barneskolen; Odd Helge, som tar seg en periode i videregående; og Hilde, som er på høgskolen. Vi fant hurtig ut at vi hadde det kjekt sammen. Praten gikk lett, og vi hadde lyst til å få dette til sammen. De fleste syns kanskje det var mange ukjente utfordringer vi hadde foran oss. Vi var likevel rimelig sikre på at dette skulle vi klare sammen. Oppgavene og ansvaret ble fordelt mellom oss. Ikke at vi måtte jobbe med hver vårt «departement» alene, men vi hadde hver især ansvaret for å holde fremdriften oppe og få trykt på de riktige knappene. Det var i grunnen ikke så vanskelig, fant vi ut. Dessuten hadde vi jo hele tiden hverandre å spørre.

På sommerkurset er vi så heldige å ha fått tre inspirerende plenumsforelesere.

Du kan lese mer om dem på lamis.no og facebook.com (søk på LAMIS sommerkurs og bli medlem!

Mona Røsseland har bakgrunn som allmennlærer med undervisningserfaring fra alle trinn i grunnskolen og er medforfatter av læreverket Multi. Hun har arbeidet i mange år ved Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen ved NTNU i Trondheim. Hun har mastergrad i undervisningsvitenskap med vekt på matematikk og holder nå på med en doktorgrad i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Agder.

Arne Kåre Topphol er førsteamanuensis og leder ved Institutt for realfag, HVO. Han er utdanna cand.scient. frå Universitetet i Bergen og dr.scient. frå same universitet på ei avhandling innanfor eksperimentell partikkelfysikk. Han har arbeidd ved HVO sidan 1990, der han i hovudsak har undervist i matematikk i lærarutdanningane og forskingsmetode/statistikk i masterutdanning i spesialpedagogikk. Arne Kåre har gitt ut fleire artiklar om matematikkopplæring og bruk av statistisk metode. Sidan 2012 har han vore med i eit stort forskingsprosjekt, The function of special education (SPEED), leia av professor Peder Haug (Høgskulen i Volda) og Thomas Nordahl (Høgskolen i Hedmark). Sjå meir på hivolda.no/speed. Arne Kåre har elles i samband med eit matematikkprosjekt i Sjustjerna kjørt Sunnmøre tynn vinterstid i open kabriolet saman med meg (Henrik Kirkegaard).

Peter Weng har vært lektor ved Det Samfundsfaglige og Pædagogiske Fakultet, Institut for Skole og Læring / Læreruddannelsen siden 1996. Før det var han forsker ved DPU (Danmarks pædagogiske universitet) i seks år. Han begynte sin lærerkarriere på Sankt Annæ skole i København. Der var han en svært flink kollega av meg (Henrik Kirkegaard). Da Peter dro til DPU i 1990, gikk det bare et par år før jeg flyttet til Ålesund. Det er derfor ekstra kjekt å kunne ønske Peter velkommen på sommerkurset – vi ses så altfor sjelden.

Peter har vært medforfatter av en rekke bøker. Disse er skrevet sammen med blant andre Michael Wahl Andersen og Lena Lindenskov, navn som mange vil nikke gjenkjennende til.

Læreverket KonteXt, Matematik i læreruddannelsen, Matematik-vanskeligheder – tidlig intervention, Håndbog om matematik i grundskolen, Matematikdidaktiske refleksioner, Matematik leksikon, fysik og kemi leksikon og Matematik og naturvidenskab i folkeskolen.

Disse plenumsforelesere må du ikke gå glipp av. Vi ses på sommerkurs i Ålesund 5.–7. august 2016

Oppsummering 1: mestringsfølelse overfor nye, ukjente oppgaver.

Vi hadde en koselig hyttetur hvor vi gikk tur, spiste sammen og fikk hele «sommerkursskjelettet» opp og stå. Da var det i grunnen gjort. Nå gjenstår å få alle delene til å falle på plass.

Oppsummering 2: samholdsfølelse – vi er i samme båt.

Du som leser dette, lurer kanskje på om sommerkurs er noe for deg. Jeg er ikke i tvil. Hvis ferieplanene og sommerkurset ellers passer med familien, da må du gjøre som meg og bare dra. Det er en stor fornøyelse å delta på sommerkurset. Først og fremst er det utrolig lærerikt. Innholdet på de verkstedene jeg har vært på, har gjort det mye lettere for meg å få til en variert undervisning. Det er praktiske ideer som kan brukes her og nå i klassen min. Dette gjelder ikke bare for barnetrinnet, for uansett om du jobber i barnehagen eller videre oppover, vil du alltid finne et verksted for deg. Plenumsforedragene gir meg et viktig innblikk i hva undervisere på andre nivå er opptatt av.

Sist, men ikke minst er det felleskapet blant deltakerne. Om du er deltaker for første gang eller syvende gang, blir du mottatt med åpne armer. Du finner andre helt vanlige undervisere som også syns at det er verd å gi matematikken et ekstra løft. Du får kontakt med andre likesinnede fra hele Norge.

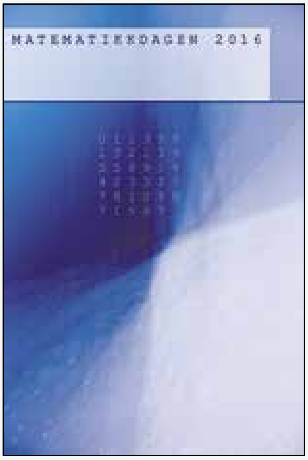
Oppsummering 3: lærerikt, avslappende og moro – kan du forlange mer?

Det ville være en stor glede å se nettopp deg til sommeren.

Vi ses på LAMIS sommerkurs 5.–7. august 2016 i Ålesund.

LAMIS matematikkdaghefte 2016

Tove Nortvedt Branæs



Årets matematikkdaghefte er laget av Oslo og Akershus lokallag med hjelp fra Hugo Christensen og Thor-Erik Rødland. Heftet er satt sammen av nye og gamle ideer til et digitalt format. Det har vært viktig for oss å få frem de gode oppleggene med tanke på LK06 og å knytte dem til kompetansemålene. Samtidig har vi tatt med inspirasjon fra egen undervisning og gode ideer fra «Et ess i ermet» av Svein Torkildsen.

Vi har lagt opp aktiviteter for barneskole, ungdomsskole og videregående. Oppleggene er knyttet til klassetrinn, men dette fleksibelt og ment som en anbefaling. På barnetrinnet har vi tatt med en del kortspill og andre opplegg som skal trene opp kunnskaper på området tall og algebra.

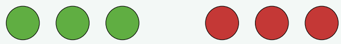
Fra våren 2015 ble graftegner obligatorisk til eksamen. Derfor har vi tatt med noen eksempler på hvordan vi kan bruke GeoGebra til å løse oppgaver. Det er vist noen praktiske oppgaver og eksempler på hvordan vi kan løse oppgaver med figurtall som er gitt til eksamen.

Her viser vi noen eksempler fra årets hefte.

Froskehopp

Denne rike oppgaven kan brukes på alle nivå, fra første årstrinn til videregående opplæring. Hvis elevene utfordres til å bevise de sammenhengene de finner, vil dette også egne seg i R2. En rik oppgaver har enkel inngang, alle får til noe, og oppgaven kan utvides til å ende i en matematisk formel. Slike problemløsningsoppgaver åpner for diskusjoner og refleksjoner om løsningsideer og forståelse av matematiske begreper.

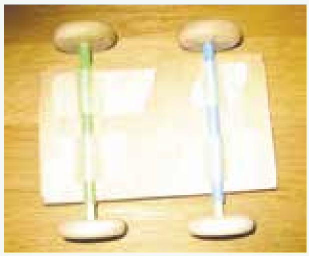
To froskefamilier sitter på vannliljeblader. Hver familie består av tre frosker. De er plassert på vannliljebladene på denne måten:



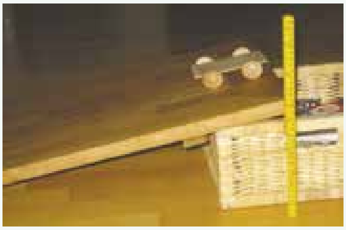
Hensikten med denne oppgaven er å øve opp evnen til å jobbe logisk og systematisk. De to froskefamiliene skal bytte plass etter et bestemt system og mønster. Man kan se på sammenhengen mellom antall frosker på hver side og antall trekk som er nødvendig, og systematisere dette i en tabell samt komme frem til en formel.

Lineær regresjon med biler

For ungdomstrinnet.Lag én enkel bil per gruppe ved hjelp av en plate, sugerør, blomsterpinner og tape.



Fest sugerørene med tape under plata. Tre gjennom blomsterpinnene og sett på hjulene. Blomsterpinner på 4 mm passer bra til hjulene, som man kan kjøpe flere steder. Det finnes hjul i plast og tre.



Lag en rampe av en plate av tre eller papp. Mål høyden dere slipper bilen fra, og mål rullelengen til bilen for hver gang.

Legg dataene inn i GeoGebra. Hent ned regneark. Legg inn høydene langs x-aksen og rullelengden langs y-aksen.

Eksempel på hvordan det kan se ut i GeoGebra ser dere nederst på siden..

Resten av opplegget finnes i matematikkdagheftet for 2016.

Praktisk med likninger

Mange lærere strever med å få elvene til å forstå likninger. «Praktisk med likninger» er en kile inn i den instrumentelle læringen som foregår rundt temaet. Her får elevene se at de kan foreta like operasjoner på hver side, og at de kan nulle ut verdier på én og samme side. De lærer å sette prøve på likningen, og de lærer å tegne modeller av likningen de fysisk har lagt opp. Ikke minst lærer de at de kan bytte ut en negativ X med en stjerne. Her har vi laget et opplegg med en vektstang der elever legger opp et likningsuttrykk for deretter å utføre lovlige trekk. Lovlige trekk er selvfølgelig å utføre like handlinger på begge sider av vektstangen.

Opplegget bør brukes så mye at elevene forstår likhetsprinsippet, altså at de kan utføre like handlinger på begge sider av likhetstegnet. Elevene bør også bli vant til at motsatte verdier på samme side av likningen nuller ut hverandre. At motsatte verdier nuller ut hverandre, arbeides det altfor lite med i norsk matematikk, og her er en gyllen anledning til å inkludere dette (–4 + (+4) = 0).

Det er laget korte, enkle instruksjonsfilmer til stegene i løsningen, og disse bør ses først. Se film 1 først – https://vimneo.com/139792444

Steg 1: Legg opp uttrykket. Her er fire x-er og tolv positive tallverdier lagt opp.

Steg 2: Utfør *lovlige trekk*. Her er det trukket fra like mengder på begge sider.

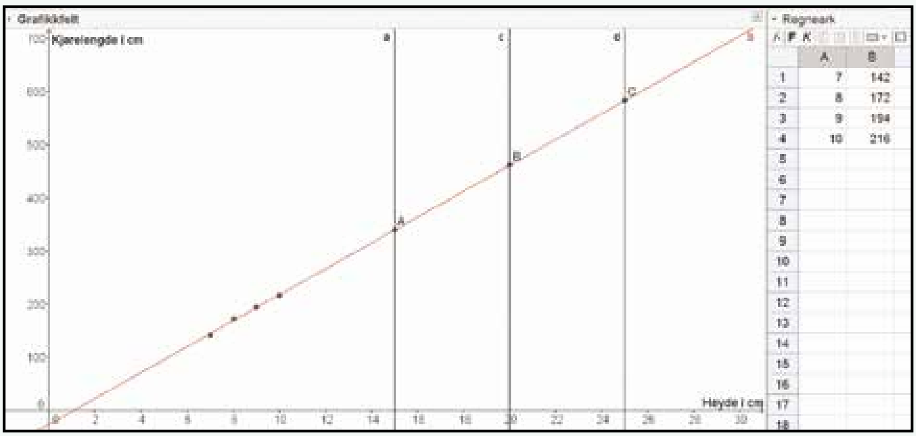
Vi står igjen med 2 x = 8, og 1 x må da være 4.

Steg 3: Utfør sjekk av løsningen:

Legg opp uttrykket slik det var i utgangspunktet, og tell sammen på hver side med x-verdien du har fått.

Hovedkilden er www.borenson.com. Se videoene som ligger her, så får du en god oversikt over tenkingen.

Det er mye annet spennende å finne i det digitale heftet som vi håper dere vil kunne bruke i gjennomføringen av Matematikkdagen og i undervisningen for øvrig. Vi ønsker alle lykke til med gjennomføringen av Matematikkdagen 2016.



LAMIS for norske skoler i utlandet

Ninnette Skaftnes

Den norske skolen i Rojales, Spania

Styret i det nye lokallaget i Europa består av følgende:

Styreleder: Ninnette Skaftnes fra Den norske skolen i Rojales, Spania (videregående)
Nestleder: Hege Vareide Augestad fra Den norske skolen Costa Blanca, Spania
Sekretær: Birthe Bjelleland fra Den norske skolen SHAPE, Belgia (barnetrinnet og ungdomstrinnet)
Kasserer: Ivan David Pedersen fra Den norske skolen i Rojales, Spania (ungdomstrinnet)
Styremedlem: Hanne Zimmermann fra Den norske skolen Costa Blanca, Spania

Hvert år arrangeres Europaseminar for norske skoler i utlandet. I år var det Den norske skolen i Rojales som var arrangør. Den Norske Skolen I Rojales er en 1.–13.-skole med 140 elever på grunnskolen og plass til 75 elever på videregående. De norske skolene i Europa består av både grunnskoler og videregående skoler. Hvert år møtes assistenter, lærere og ledelse fra de ulike europaskolene til felles seminar som går over tre dager. I den forbindelse hadde vi lenge hatt lyst til å forsøke å få dannet et LAMIS lokallag i utlandet her i Rojales, selv om avstandene er store. Bakgrunnen for det er at vi ser hvor viktig det er å ha en felles arena hvor vi kan dele og utveksle erfaringer, og samtidig få nye innspill og ideer fra andre. Og hva var vel mer nærliggende enn å sende en e-post til styret i LAMIS og søke om deltakelse? Det tok ikke lang tid før generalsekretær Gro Berg ga oss et positivt svar, og vi var i gang. Ikke nok med det, hun tok turen ned til Spania i forbindelse med Europaseminaret for å hjelpe

Etablering av lokallaget under Europaseminaret 2015

Mona Røsseland Europaseminaret 2015

oss i gang. Takk Gro!

Under seminaret, som blant annet hadde fokus på regning i alle fag, var vi så heldige å ha foredragsholder Mona Røsseland sammen med oss en hel dag. Foredragene til Mona var som vanlig populære, og det var mange som deltok.

Fra Den norske skolen i Rojales!

DNSR er en 1.–13.-skole og tilbyr på videregående studiespesialisering med programfagene entreprenørskap og bedriftsutvikling, markedsføring og ledelse samt medie- og informasjonskunnskap. På vg1 og vg2 kan elevene velge mellom P- og T-matematikk. I tillegg tilbyr vi elevene på videregående matematikkurs én gang i uken. Dette som viser seg å være populært, særlig rett før eksamener og heldagsprøver. Matematikkurset foregår i midttimene og inneholder grunnleggende temaer som de fire regneartene, funksjoner, algebra, regneark, tekstoppgaver, GeoGebra og bruk av digitale hjelpemidler. Flere av elevene på DNSR studerer ved siden av som privatister og tar for eksempel R- eller S-matematikk ved siden av.

Praktiske oppgaver er alltid populære, og på bildet ser vi at det jobbes med brobyggeroppgave med kriterier.

Brobyggeroppgave høsten 2015.

Fra Malaga!

Det står matematikk på timeplanen. Embla er avgangselev og skal jobbe med repetisjon før tentamen. Lærer Idun Östgård har planen klar og starter med å be eleven åpne nettstedet «Campus Inkrement». Der finnes det introduksjonsvideoer til alle kapitlene i Faktor for ungdomstrinnet, og Embla får starte timen med å se en liten videosnutt om akkurat det temaet hun trenger å kikke litt ekstra på. Alle elevene på ungdomstrinnet bruker iPad.

Arbeidsmetoden Idun og kollegaene hennes ved Den norske skolen, Malaga, jobber etter, kalles «omvendt undervisning». Når et nytt tema skal belyses, starter elevene alltid med å se en video som hjemmelekse. Videoene er laget av erfarne lektorer, som forklarer temaene på en grundig og vel gjennomtenkt måte. Alle elevene i klassen er registrert inn, slik at Idun kan følge med på hvem som har sett på hjemmeleksene. Videre skal elevene gi tilbakemelding til

Idun om hva de synes er vanskelig. Slik kan hun ligge i forkant og vite akkurat hva hun skal legge ekstra vekt på når hun tilpasser neste undervisningstime.

– Opplegget erstatter ingen lærer, men det er et fint hjelpemiddel for læreren, som kan bruke timene mer effektivt, forteller Idun, som begynte å bruke denne undervisningsmetoden allerede i løpet av fjoråret. – Det er for tidlig å si noe om resultater, for vi er fortsatt i startfasen. Men vi merker at elevene virker mer motiverte, og de opplever det som positivt at de nå får mer mengdetrening og hjelp med oppgavene i skoletida. Det blir også mindre frustrasjon rundt lekser, sier hun.

– Spesielt nå som vi jobber med repetisjon i 10. trinn, er dette gull verdt, forteller Idun. – Det finnes videoer som belyser alt i pensum for alle tre ungdomstrinnene, så uansett hva elevene trenger å repetere, så ligger det der. De kan se videoen så mange ganger de vil, helt til stoffet sitter, avslutter Idun.

Embla er ferdig med introduksjonsvideoen og svarer korrekt på oppfølgingsspørsmålene fra Idun. – Nå kan du hoppe videre til oppgavedelen, sier hun. Embla nynner lavt på en julesang mens hun tar fatt på mattestykkene. Det nærmer seg tentamen, men det er ingen tegn til frustrasjon å spore.

Idun Östgård og Petter Tryggestad ved Den norske skolen, Malaga, var med på stiftelsesmøtet for LAMIS utland (Landslaget for matematikk i skolen) og ser frem til å samarbeide med utenlandsskolene.

Takk for oss, vi ser frem til å samarbeide.

(fortsatt fra side 65)

evaluere eksamener sammen med Nasjonalt sentrer for matematikk i opplæringen, NSMO.

Sommerkurset, som er LAMIS' store arrangement, blir avviklet i Ålesund 5.–7. august 2016. Jeg håper jeg ser mange nye og gamle medlemmer der.

Til slutt vil jeg utfordrer lærerne til å få elevene til å bli mønstersniffere: være på utkikk etter skjulte mønstre, beskrive, utforske og finne opp. Dette sa Svein Torkildsen under åpningsforedraget på Novemberkonferansen i Trondheim 2015.