TIMSS og Holmboeprisen

I november 2016 vart resultata frå TIMSS-studien (Trends in International Mathematics and Science Study) 2015 lagt fram. TIMSS testar elevar i matematikk og naturfag på 4./5. og 8./9. trinn. Norske 5. klassingar er på europatoppen i matematikk – akkurat som TIMSS 2011 viste. På 9. trinn er me på øvre halvdel. Det er signifikant framgang frå 2011, med statistikk som styrke og algebra som utfordring.

TIMSS-studiar kan gje viktig kunnskap om læring og undervising i matematikk. Samstundes er det naudsynt at me stiller oss kritisk til testar som TIMSS inneheld. Det er utfordringar knytt til at ein felles test skal fungera godt i mange land som er ulike når det gjeld historie, kultur og tradisjon. Det kan til dømes vere avgjerande for elevar å få oppgåver knytt til matematiske og sosiale kontekstar dei er kjende med. Dette kan sjåast i samanheng med poenget Sriraman lyfter fram i føreordet til boka *Critical Mathematical Education* frå 2016: TIMSS er tufta på ei oppfatning av at born i alle land har behov for den same matematikk-kunnskapen. Det er tvilsamt om det er tilfelle.

TIMSS-studiane kostar frykteleg mykje pengar. Kva kunne ein fått til viss pengane hadde blitt brukt på anna vis? TIMSS-testane er i hovudsak summative. Når så mykje ressursar vert brukt på ein test burde ein i større grad brukt han i læringsarbeidet vidare for elevane. Ein skal vera merksam på at ein testkultur kan fremja ein praksis der undervisinga har for sterkt fokus på gode testresultat.

Holmboeprisen framstår som kontrast til TIMSS-studien sine tendensar til å vera dømmande for lærarar og den jobben dei gjer. Prisen vert kvart år tildelt matematikklærarar som utmerkar seg som særleg dyktige og nytenkjande om matematikkundervising. I 2016 gjekk prisen til Ingunn Valbekmo. Leiaren i Norsk Matematikkråd, Brynjulf Owren, skriv i dette nummeret at Valbekmo har fått prisen for sitt engasjement for matematikkundervising, og for at ho har utvikla ein undervisingspraksis med positive ringverknadar for heile kollegiet ved Byåsen skule. Det er kjekt at me har ein artikkel av Valbekmo i dette nummeret der ho skriv om korleis ho brukar realistiske kontekstar med fokus på elevars utforskande læring og deira diskusjonar om og med matematikk. Me har òg ein artikkel av Birthe Vestergaard som skriv om korleis ein kan rekna med logaritmar slik at det vert forståeleg for elevar. Vestergaard var ei av dei fire som fekk heiderleg omtale av Holmboepris-nemnda.

I september har Tangenten temanummer om *berikende oppgaver*. Valbekmo og Vestergaard kan lesast som inspirasjon til det. Informasjon og oppmoding finn du på indre omslag.

Meier

Fisk som symbol

Fortellingen om familien Larsen (Meier, 2015), fortsetter med en ny episode, en tenkt situasjon der elever i 5. klasse bruker internett til utforsking i tverrfaglig undervisning med matematikk og religion og livssyn. De oppdager mye spennende, men også noe de ikke forstår. Elevene er nysgjerrige og vil vite mer. De utfordrer både læreren, foreldre og søsken til å finne svar på spørsmålene. Forklaringene går delvis langt utover 5.-klassenivå. Fortellingen er ikke ment som et undervisningsopplegg for et bestemt klassetrinn, men som en inspirasjonskilde som kan tilpasses og varieres etter eget behov.

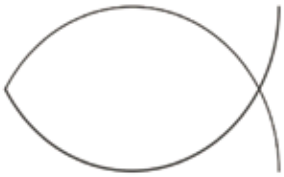
Fortellingen starter – del 1

Sommerferien er over og familien Larsen, som består av far og mor og ungene Ole (17 år), Lena (10 år) og Marius (6 år), er tilbake fra sin båtferie på Vestlandskysten. Været har vært blandet, men det ble både bading, fisking og mye lek og undring i fjøresteinene, på båtturer og i småbåthavnene.

Skolen starter og Lena begynner i 5. klasse. De har fått nye lærere, og matematikklærer Bjørk underviser også i religion og livssyn og kunst og håndverk. Hun prøver alltid å knytte formidlingen av fagstoff sammen med erfaringer fra det praktiske livet. Hun vet at mange elever har fisket i ferien og starter derfor med en fortelling om fisking fra Bibelen. Hun forteller om Simon Peters fisketur der han fikk 153 fisk (Johannes 21,11). Symbolet av en fisk ble helt fra begynnelsen av kristendommen og fram til i dag brukt av kristne som symbol for deres tro. Hun forklarer videre fiskesymbolikken, som

Antje Meier
Høgskulen i Volda
antje.meier@hivolda.no

Iota (i) er første bokstaven i det greske ordet for Jesus, Iesous.
Chi (ch) er første bokstaven i det greske ordet for Christus, Christos.
Theta (th) er første bokstaven i det greske ordet for Gud, Theou.
Upsilon (y) er første bokstaven i det greske ordet for sønn, (h)uios.
Sigja (s) er første bokstaven i det greske ordet for frelser, sote.
Ichthys står altså for «Jesus Kristus, Guds sønn og frelser».



Figur 1

ofte blir knyttet sammen med bokstavene til det greske ordet for fisk «Ichthys» (se faktaboks).

I dag er fiskesymbolet mye brukt i kristen kunst, i kirker og som klistremerker på biler. Bjørk ber elevene om å starte datamaskinen og finne bildeeksempler og informasjon om det kristne fiskesymbolet på nettet. (Elevene googler «kristen fiskesymbol».)

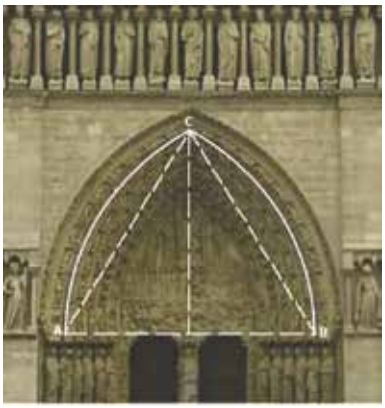
Figur 2: Hentet 3.11.2016 fra https://en.wikipedia.org/wiki/Vesica_piscis

Elevene lar seg lett engasjere og setter i gang. Birte finner dette symbolet på et bilde (figur 2) som er tatt fra et manuskript fra middelalderen. Maren finner symbolet på et jakkemerke (figur 3).

Paul oppdager halvparten av «fisken» i en buet kirkeinngang (figur 4). Bjørk forklarer at dette er en gotisk bue som er sentral i gotisk arkitektur. Hun forteller videre at dette skal de jobbe med senere i året i kunst og håndverkfaget. Det er mye geometri å finne i arkitektur, og hun planlegger et tverrfaglig prosjekt om akkurat det temaet.

Lena finner et bilde som viser geometri i fiskesymbolet (figur 5). Her er det to sirkler med

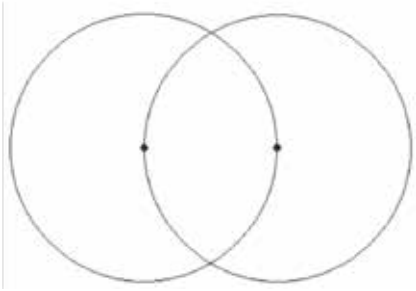
Figur 3: Symbol på et jakkemerke



Figur 4: Gotisk geometri. Hentet 20.10.2015 fra http://www.newyorkcarver.com/geometry/geometry.htm

Figur 5: Bilde hentet fra https://no.pinterest.com/pin/316096467569634853

samme radius som skjærer hverandre. Sentrum til hver sirkel ligger på perimeteren til den andre slik at det dannes en «fisk» (figur 6).

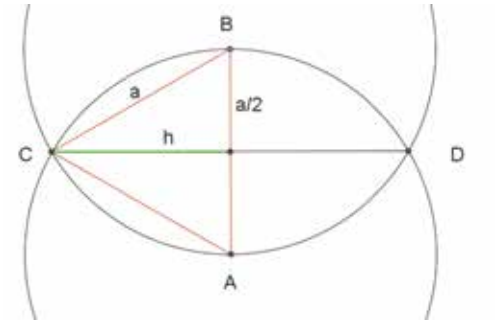


Figur 6

Hun leter videre etter mer geometri i fiskesymbolet og kommer over en nettside med overskriften «The Measure of the Fish» (Freke og Gandy, 2007).

Hun leser at forholdet mellom lengden og bredden til fisken er 265:153, som er ca. $\sqrt{3}$. Lena forstår ikke hva hun leser, men etter å ha studert sida en stund, roper hun ut: «Det er jo tallet 153, akkurat det samme som antall fisk Simon Peter fikk!» Dette virker spennende, men det er altfor vanskelig matematikk. Hun ber Bjørk om å forklare, men Bjørk har ikke sett dette før. Hun har ingen forklaring i dag, men lover å finne ut om dette.

Ved middagsbordet forteller Lena om fiskesymbolet og det hun hadde funnet, men ikke fått en forklaring på. Hun håper at storebroren Ole (17) eller foreldrene kanskje vet noe. Ole liker slike utfordringer og setter seg ned med papir, blyant og passer (figur 7).



Figur 7

Han skisserer fisken og tegner inn lengden, bredden og noen ekstra linjer. «Dette ser jo ut som en gotisk bue som ligger på siden», bemerker Lena. Hun husker bildet som ble vist i klasserommet, og som Bjørk hadde forklart. «Ja, det er mye interessant matematikk i arkitektur i kirker,» fletter faren inn.

Ole forklarer: «Lengden AB er lik radius i begge sirkler, lengden AC er lik radiusen i nederste sirkel og lengden BC er lik radiusen i øverste sirkel. Radiusen i begge sirkler er altså lik a. Alle sidene i trekant ABC har samme lengde a. Dermed er ABC en likesidet trekant.» Ole viser på arket slik at Lena forstår hva han mener. Så fortsetter han: «Bredden i fisken er AB som har lengden a. Lengden i fisken er CD som har lengden 2h, der h er høyden i trekanten ABC.

For å kunne regne på forholdet mellom bredden og lengden i «fisken» må han først finne h i trekanten.»

Ole som går første året på videregående skole har lært om Pytagoras' setning i tiende klasse. Han husker sammenhengen som gjelder i rettvinklete trekanter:

$$\text{katet}^2 + \text{katet}^2 = \text{hypotenus}^2$$

I denne sammenhengen betyr det at

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2.$$

Dette gir

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \text{ og } h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Lengden CD av fisken er $2h = a\sqrt{3}$, og forholdet i fisken blir

$$\frac{\text{lengde}}{\text{bredde}} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1}.$$

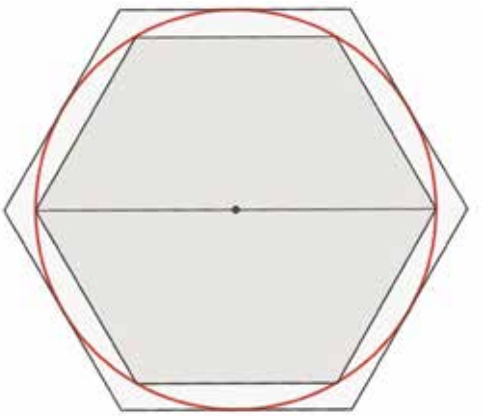
Ole er fornøyd med det han har funnet, men undrer over hva dette kan ha med 153 og antallet fisk i garnet å gjøre.

Neste dag på skolen har Lena matematikk og lærer Bjørk ønsker å gi en forklaring på sammenhengen mellom tallet 153 og $\sqrt{3}$. Hun har funnet en del interessant stoff på nettet, grublet, skissert og regnet på dette slik at hun nå kan forklare det på en enklere måte.

Arkimedes, en gresk matematiker og oppfinner som levde ca. 300 f.Kr. ville finne forholdet mellom sirkelens omkrets og diameteren, det som vi kjenner som tallet π. Han regnet omkretsen til en innskrevet og omskrevet mangekant i en sirkel (se figur 8). Ved å øke antall hjørner i mangekanten kunne han finne en tilnærming til sirkelens omkrets. I løpet av sine utregninger trengte han å vite forholdet $\sqrt{3}/1$. Fra hans notater vet vi at han må ha kjent en ganske nøyaktig tilnærming til $\sqrt{3}$, nemlig at $\sqrt{3}$ er større enn 265/153 og mindre enn 1351/780 (Katz, 2004, s. 69).

Antall fisker som Simon Peter hadde i garnet virker som et spesielt tall, forklarer Bjørk, fordi tallet 153 dukker opp i tallet $\sqrt{3}$, som er forholdet mellom lengden og bredden i fiskesymbolet. Hun fortalte historien om Arkimedes.

Elevene er fascinert! At det er matematikk i disse kristne symboler, det var en overraskelse.



Figur 8

Fortellingen fortsetter – del 2

Men Bjørk har mer å fortelle. Når vi utforsker tallet 153, finner vi flere spennende sammenhenger som tyder på at dette er et spesielt tall.

Tallet 153 faktorisert er $3 \cdot 3 \cdot 17$. Summen av alle påfølgende naturlige tall opp til 17, altså trekanttall nr. 17, er $1 + 2 + 3 + \ldots + 17 = 153$. Summen av $1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$.

I tillegg finnes det en tallkoding av greske bokstaver som dikteren Homer brukte da han skrev *Iliaden og Odysseen* (Eisler, 1921). Alle de 24 greske bokstavene tilordnes fortløpende et tall (Tabell 1), og så regner man med tallene.

Plass	1	2	3	4	5	6	7	8
Bokstav	Α, α	Β, β	Γ, γ	Δ, δ	Ε, ε	Ζ, ζ	Η, η	Θ, θ
	alfa	beta	gamma	delta	epsilon	zeta	eta	theta
Plass	9	10	11	12	13	14	15	16
Bokstav	Ι, ι	Κ, κ	Λ, λ	Μ, μ	Ν, ν	Ξ, ξ	Ο, ο	Π, π
	iota	kappa	lambda	mu	nu	xi	omikron	pi
Plass	17	18	19	20	21	22	23	24
Bokstav	Ρ	Σ, σ	Τ, τ	Υ, υ	Φ,	Χ, χ	Ψ, ψ	Ω, ω
	rho	sigma	tau	upsilon	phi	chi	psi	omega

Tabell 1: Homers tallkoding

Verdi	1	2	3	4	5	6	7	8
Bok	Α	Β, β	Γ,	Δ, δ	Εε	Ζ, ζ	Η, η	Θ, θ
	alfa	beta	gamma	delta	epsilon	zeta	eta	theta
Verdi	10	20	30	40	50	60	70	80
Bok	Ι, ι	Κ, κ	Λ, λ	Μ, μ	Ν, ν	Ξ, ξ	Ο, ο	Π, π
	iota	kappa	lambda	mu	nu	xi	omikron	pi
Verdi	100	200	300	400	500	600	700	800
Bok	Ρ	Σ, σ	Τ, τ	Υ, υ	Φ,	Χ, χ	Ψ, ψ	Ω, ω
	rho	sigma	tau	upsilon	phi	chi	psi	omega

Tabell 2: Gematri

Adderer man tallverdiene til bokstavene som danner ordet «Simon», ΣΊΜΩΝ, så blir det slik: 18 + 9 + 12 + 24 + 13 = 76. Adderer man tallverdiene til bokstavene til ordet «fisk», ΙΧθΥΣ, får vi følgende: 9 + 22 + 8 + 20 + 18 = 77.

Summen av tallverdiene til «Simon» og «fisk» er 76 + 77 = 153.

En annen tallkoding av greske bokstaver er bedre kjent og kalles «gematri». Det er en teknikk der man tilordner bokstavene bestemte sifferverdier (Tabell 2) som deretter adderes.

Ordet for fisk, (her i Lukas 9,13 i en genitiv plural form), blir addert slik: 10 + 600 + 9 + 400 + 5 + 200 = 1224 = $8 \cdot 153$, altså et multiplum av 153.

Ordet for garnet, ΤΟΔΙΚΤΥΟΝ, blir addert slik:

300 + 70 + 4 + 10 + 20 + 300 + 400 + 70 + 50 = 1224.

Ordet for fisk og for garnet får samme tallverdi og kan vise at det er en sammenheng. At tallet er et multiplum av 153, forteller oss om den store mengden fisk (Johannes 21,6).

Elevene er helt paff. Tall er jo overalt og er så spennende å utforske! De kommer ikke til å glemme dette.

Utålmodig venter Lena til skolen er slutt og hun kan fortelle broren og hele familien om forklaringene hun har hørt på skolen. Det blir livlige samtaler rundt middagsbordet i dag.

Referanser

Eisler, R. (1921). *Orpheus – The Fisher. Comparative studies in Orphic and early Christian cult symbolism*. London: J. M. Watkins.

Freke, T. & Gandy, P. (2007). *153 – The Measure of the Fish*. Hentet 20.10.2015 fra http://www.solarmythology.com/mysticnumber153.htm

Katz, V. (2003). *A history of Mathematics: brief edition*. Boston: Pearson/Addison-Wesley.

Meier, A. (2015). Matematikk på fjellet. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 26*(4), 40–44.

Tips til relevante nettressurser:

Nettbibelen: https://www.bibel.no/Nettbibelen

Gotisk geometri: http://www.newyorkcarver.com/geometry/geometry.htm

Arkimedes og kvadratrot av 3: http://mathpages.com/home/kmath038/kmath038.htm

Owren

Holmboeprisvinneren 2016

Holmboeprisen 2016 gikk til Ingunn Valbekmo ved Byåsen skole i Trondheim. Hun har undervist matematikk for elever i sjette trinn. Dette er første gang siden 2012 at prisen gis til en lærer i grunnskolen.

Valbekmo ble tildelt prisen først og fremst fordi hun som en engasjert matematikklærer har endret sin egen undervisningspraksis og vært i stand til skape ringvirkninger for til hele kollegiet ved sin skole. Valbekmo bygger opp sin undervisning rundt problemstillinger som elevene kjenner fra hverdagen, dette skaper motivasjon og gir en opplevelse av at faget er viktig. Oppgavene har stor spennvidde, og elevene bruker språk og kommunikasjon som del av problemløsningen. Det er et viktig prinsipp at elevene selv utvikler egne løsningsstrategier. De begynner gjerne med enkle, oversiktlige problemstillinger som innbyr til grunnleggende forståelse og mestring. I neste omgang blir oppgavene gjort mer krevende, gjerne via generalisering og abstraksjon. Valbekmo velger ofte å legge læreboka til side og la elevene starte med blanke ark. Dette stimulerer til refleksjon og forståelse, og står i kontrast til den puggbaserte, overfladiske læringen som dessverre er altfor utbredt. Valbekmo bruker selv kreativitet i sine undervisningsmetoder og finner ofte ukonvensjonelle undervisningsaktiviteter som gjør at elevene blir trygge på seg selv, og får utfolde seg og bruke kreativitet og lek som en del av læringen. Et eksempel er at Valbekmo etter en ferdig økt med problemløsning kan arrangere «mattekonferanser» der elevene presenterer sine resultater. Valbekmo har som grunnfilosofi at elevene skal behandles med respekt og tas på alvor. Gi alltid eleven sjansen til selv å tenke gjennom problemstillingene og få uttrykke sitt eget tankesett. Det spiller mindre rolle om framgangsmåten ikke er den mest elegante eller korrekte ved første forsøk.

Å innføre helt nye måter å drive undervisning på ved en skole kan oppfattes som risikofylt og man kan føle litt på usikkerheten. Foresatte har nok også uttrykt en viss skepsis i startfasen, og kolleger var heller ikke overbevist. Men Valbekmo har vært i stand til å snu denne usikkerheten til en trygghet og overbevisning om at hennes måte å drive undervisning på er rett vei å gå. Et viktig element i dette har vært Valbekmo sin videreutdanning ved Nord universitet og NTNU. For tiden fullfører hun en mastergrad i matematikkdidaktikk ved NTNU. Samtidig underviser Valbekmo elever i første og andre årstrinn, og selv om oppgaver og pro-

Brynjulf Owren
NTNU
brynjulf.owren@math.ntnu.no

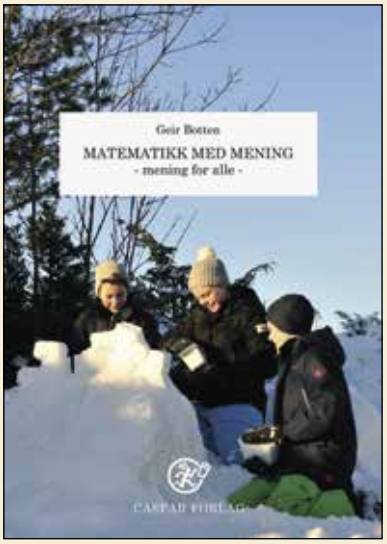
blemstillinger må skiftes ut er undervisningsprinsippene for en stor del de samme nå som for sjetteklassingene.

Ingunns engasjement og resultater blir stadig fanget opp av nye miljøer også utenfor hennes egen skole. Allerede i 2015 holdt hun foredrag ved Novemberkonferansen, og etter at hun vant Holmboeprisen har hun bidratt som foredragsholder ved en rekke arrangementer som for eksempel Holmboesymposiet og Norsk matematikkråds årsmøte i 2016.

Det var flere andre gode kandidater til Holmboeprisen 2016, og hedersomtale ble gitt til Birte Vestergaard, Karen Marie Farestveit og lærerkollegiet ved Roligheden barne- og ungdomsskole.

Geir Botten

Matematikk med mening – mening for alle



Matematikk med mening – mening for alle – er ei bevisstgjøringsbok der forfatteren drøfter matematikkfagets rolle i skole og samfunn. Gjennom eksempler illustrerer han betydningen faget har og har hatt - på godt og på vondt. Forfatteren tydeliggjør hvordan arbeidsformer reflekterer fagsyn og læringssyn og hvordan språk, kommunikasjon og samarbeid har en sentral rolle i all læring. Han gir mange ideer til hvordan en kan gjøre faget engasjerende og meningsfylt, for lærere og for alle elever, uansett bakgrunn og forutsetninger for å lære matematikk.
Boka henvender seg til alle som er opptatt av matematikk og læring (lærere, lærerstudenter, foreldre …).

262 sider · 510,– · ISBN 978-8290898-71-2

Bestill på ordre@fagbokforlaget.no

Valbekmo

Læring, utforsking og samtale

For kort tid siden spurte jeg noen av elevene mine på 7. trinn ved Byåsen skole om de husket noen matematikktimer de likte godt. Elevene nevnte flere av kontekstene vi har arbeidet med på ulike trinn. Blant annet nevnte de Muffes sjokoladebutikk, som vi arbeidet med i 3. klasse og Arkitektprosjektet, som vi hadde på 6. trinn, eller «Donald Trump-arbeidet», som eleven kalte det. Jeg spurte videre hva som var så bra med disse oppleggene, og de svarte at da vi arbeidet med Muffes sjokoladebutikk lærte de å forstå og bruke arealmodellen til multiplikasjon. Elevene fortalte meg at de brukte arealmodellen mye fortsatt, og ikke bare til multiplikasjon. Arkitektprosjektet hadde vært morsomt og spennende, og de hadde lært om areal, omkrets og volum av ulike figurer. Det hadde vært ekstra morsomt at kunden til arkitektfirmaet hadde vært Donald Trump.

Disse kontekstene er hentet fra matematikkdidaktikeren Catherine T. Fosnots «Contexts for learning Mathematics» (Fosnot mfl, 2007) og er to av mange kontekster som elevene har arbeidet med i matematikk fra de gikk i 3. klasse og fram til i dag.

I 2012 startet jeg på videreutdanning i matematikk ved Høgskolen i Nord-Trøndelag (HiNT), nå Nord Universitet. Her ble jeg presentert for en, for meg, ny arbeidsmetode i matematikkundervisning, RME. Kontekstene til Catherine T. Fosnot er inspirert av Freudenthals RME, Realistic Mathematics Education. Kontekstene som undervisningen knyttes til i denne serien, er nok mer eller mindre realistiske, men elevene opplever dem som realistiske. Elever kommer stadig bort til meg og spør: «Er dette sant?» eller «Har dette skjedd?» Vi blir som oftest enige om at det egentlig ikke er så nøye. Fosnot deler metodikken inn i kontekst, arbeidsfase/elevarbeid, minileksjoner og matematikkonferanse.

Det legges vekt på at elevene bruker sine egne representasjoner og strategier for å komme fram til svar på oppgavene eller problemene som skisseres, og at de kan diskutere og argumentere for ulike løsninger i et matematisk fellesskap.

Etter tre dager på første samling ved HiNT høsten 2012, ble vi studenter sendt hjem til våre skoler med beskjed om å lage oss en egen kontekst og prøve ut med elevene våre eller prøve ut en kontekst fra arbeidet til Fosnot. Erfaringene våre var stort sett veldig positive, og vi hadde mye spennende å diskutere på neste samling.

Ingunn Valbekmo
Byåsen skole
ingunn.valbekmo@trondheim.kommune.no

Konteksten

Arkitektprosjektet hadde vi på 6. trinn på Byåsen skole våren 2016. Vi brukte Fosnots «The

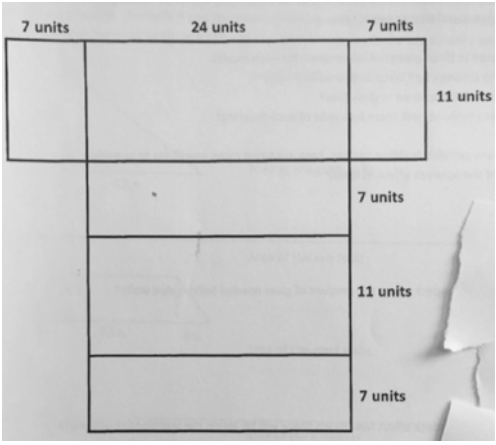
architects project» (2014) som utgangspunkt for arbeidet. Dette heftet er ikke en del av den opprinnelige samlingen «Contexts for learning Mathematics», men kan sees som forlengelse av samlingen. I starten av arbeidet med en kontekst erfarte vi at det er viktig å bruke god tid på å sette elevene inn i konteksten. Denne gangen var oppgavene knyttet til at elevene i klassen hadde et arkitektfirma. Vi snakket om hva arkitekter gjør og hva de eventuelt måtte kunne.

Arkitektprosjektets første oppgave dreide seg om at firmaet hadde fått en kunde som vurderte å bygge et hus på ei tomt han hadde. Han hadde noen klare tanker om hvordan huset skulle se ut, mens andre ting var mer uklare for ham. Kunden var bestemt på at huset skulle være dekket av kvadratiske glassplater, og han skulle ha en rektangulær takterrasse med tregulv på toppen. Han var også fast bestemt på at omkretsen av bygningen skulle være på 36 glassplater, eller enheter som vi kalte det. Høyden på bygningen skulle være på 24 glassplater. Bygningen skulle ha form som et rett prisme. Kunden ville se ulike modeller av bygningen. Han ville vite hvor mange glassplater som måtte til for å bygge de ulike bygningene, hvor store takterrassene ble og hvor stort rom det ble inni bygningene.

En plantegning som vist i figur 1 ble presentert for elevene. Vi snakket om hvilke deler på tegningen som var hvilke deler på modellen, hvilke linjer vi skulle klippe etter og hvilke linjer vi skulle brette etter. Vi brukte cm som enhet da vi lagde modellene.

Elevarbeidet

Elevene gikk i gang med å utarbeide modeller av bygninger med ulike mål på takterrassene. De arbeidet i læringspar og hvert læringspar laget to ulike modeller. Det var i løpet av dette arbeidet at Donald Trump, som kunde, ble brakt på banen. Arbeidet foregikk samtidig med nominasjonsvalgkampen i USA så vi fikk snakket om amerikansk politikk, og jeg tror jammen også hår og frisyrer var oppe som tema.



Figur 1

Samtidig med at elevene arbeidet med denne oppgaven, repeterte vi ulike strategier for multiplikasjon med flersifrede tall gjennom flere minileksjoner. I arbeidet med arkitektprosjektet består mange av minileksjonene av tallstrenger med beslektede regnestykker som elevene skal løse. En slik tallstreng er for eksempel 2·6, 2·60, 12·10, 24·5, 24·15, 24·36. I arbeidet med minileksjonene arbeidet elevene individuelt, og vi snakket om ulike strategier som kan brukes for å komme fram til svarene på de ulike regnestykkene. Det meste av arbeidet foregikk som hoderegning, men elevene hadde whiteboard tilgjengelig om de trengte å notere noe underveis.

Etter hvert som elevene ble ferdig med modellene sine, regnet de ut arealet av takterrassene, volumet av bygningene og behovet for antall glassplater. Dette ble notert på post-it-lapper som de festet på modellene. Deretter fikk elevene noen spørsmål som de skulle overveie før de gikk i gang med å finne flere mulige mål for nye bygningsmodeller:

- Hvordan påvirker formen på takterrassen arealet på takterrassen?
- Hvordan påvirker formen på takterrassen mengden av glass som trengs til sideveggene? Husk at gulvet på takterrassen er av tre.

- Hvordan påvirker formen på takterrassen hvor mye plass det blir inni bygningen (volumet)?
- Er det noe vi kan si om neste bygning før vi lager modellen?

Matematikkonferansen

De ulike modellene og svarene på spørsmålene elevene fikk mens de arbeidet med modellene, ble bakgrunn for matematikkonferansen etter dette første arbeidet med denne konteksten. I konferansen delte noen av elevene sine erfaringer og svar på oppgavene med resten av klassen. Det er læreren som velger hvilke elever som skal presentere sitt arbeid i konferansen, og det er alltid matematikk som står i fokus når elevarbeider velges ut. Jeg pleier å velge elever som har brukt ulike strategier for å løse oppgavene slik at vi kan diskutere de ulike løsningsstrategiene opp mot hverandre. Da kan vi se etter likheter og ulikheter i de forskjellige arbeidene, og vi kan se på om en løsning er mer effektiv enn en annen. Jeg pleier å begynne med en løsning som de fleste har forutsetninger for å henge med på, og så går vi over til mer avanserte løsninger etter hvert. På denne måten kan vi prøve å få med alle elevene ett steg videre i prosessen med å bli mer effektive og kompetente i matematisk arbeid.

Det som ble diskutert i matematikkonferansen etter dette første arbeidet med arkitektprosjektet var:

- Formen på topp og bunn er kongruente. Vi diskuterte innholdet i begrepet «kongruent» og sammenlignet grunnflata og takterrassen på de ulike modellene. Elevene fant også andre deler i modellene sine som var kongruente.
- Vi diskuterte en del begreper, som grunnflate, areal, overflate, volum og kongruent. Måleenheter som m^2 og m^3 ble også diskutert. I starten av arbeidet snakket elevene om enheter eller glassplater, men etter hvert brukte de begrepene m^2 og m^3.
- Overflatearealet som skal dekkes med glass er det samme, uansett form på takterrassen: 24×36 (høyde × omkretsen av takterrassen). Dette oppdaget elevene rimelig raskt når de arbeidet med modellene, og de argumenterte med at den delen av modellen som skulle dekkes av glass, ville være et rektangel med målene $24 \cdot 36$ enheter uansett hvilke mål de brukte på takterrassen. Noen av elevene brettet også ut de to modellene sine og la dem oppå hverandre for å være sikre. Elevene var ganske så sikre på at uansett hvilken form de hadde valgt på takterrassen så hadde antall glassplater blitt det samme. Så lenge omkretsen var 36 enheter kunne bygningen vært rund også, det hadde ikke spilt noen rolle. Dersom man brettet den ut ville formen vært rektangulær med målene ville være 24 og 36 hver gang.
- Når lengdene på sidene av takterrassen nærmer seg hverandre, øker arealet. Elevene fant ut at de oppnådde størst areal på takterrassen om sidene var like lange. De anslo også at arealet hadde blitt aller størst om takterrassen hadde vært sirkelformet.
- Volumet av rektangulære prismer kan beregnes ved formelen $V = l \times b \times h$. Denne formelen kom elevene fram til selv gjennom arbeidet med modellene. Det ble tydelig for dem hvorfor man kunne regne ut volumet av modellene på denne måten. Det er med på å gi elevene en trygghet på at det går an å finne fram til slike formler ved resonnering, at det er ikke noe hokuspokus som ligger bak formlene. Det er derfor ikke helt krise om man glemmer en formel.
- Overflatearealet på rektangulære prismer kan beregnes ved formelen: Overflate = høyde × omkrets av takterrasse + arealet av takterrassen × 2. Også her fikk vi en god diskusjon rundt hvorfor formelen er som den er. De elevene som strevde med å finne formelen, regnet ut arealet av hvert

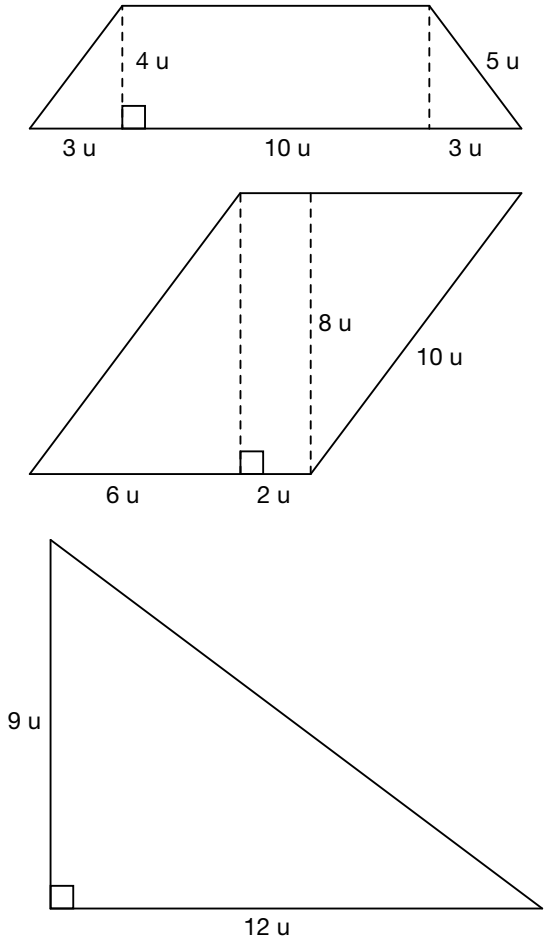
enkelt rektangel i modellen for så å addere alle delene sammen, mens de som var litt tryggere i arbeidet regnet ut arealet av det glassdekkede området og adderte dette med topp og bunn på modellen.

Ett av læringsparene hadde laget en modell med en takterrasse som var $1 \cdot 17$ enheter. Ved å se på denne modellen fikk vi en fin diskusjon rundt mer praktiske elementer ved husbygging. Elevene var enige i at det kanskje ikke var hensiktsmessig med en bygning som var så lang og smal. Det ville være vanskelig å møblere både inne i bygningen og på takterrassen. Modellen sto ikke stødig på bordet og elevene var redd for at bygningen heller ikke ville være stødig nok med en slik grunnflate.

Videre arbeid med arkitektprosjektet innebar at kunden kom med nye forespørsler, han lurte blant annet på hva som skjedde med arealet av takterrassen, overflaten dekket av glass og volumet om bygningen fikk andre former med 36 enheter som omkrets. Hva om takterrassen hadde form som en rettvinklet trekantet, form som et parallellogram eller et trapes (figur 2)?

Hva om man endret formen på takterrassen til trekanter uten rette vinkler eller til en sekskant?

Gjennom dette arbeidet fikk elevene grublet seg fram til ulike strategier for å regne ut areal av geometriske figurer. Nok en gang fikk de en erfaring med at formlene ikke er en trylleformel, men at de har en logisk forankring i figurene.



Figur 2

Hvorfor er dette er undervisningsmetode som fortjener oppmerksomhet?

For det første engasjerer arbeidsmetoden elevene, de liker å arbeide med krevende, åpne oppgaver. De syns matematikk er gøy, og de får en oppfatning av at læring er hardt arbeid. Elevene får en tro på at de kan løse oppgaver. Elevene ser at formler og strategier bygger på hverandre, ting henger sammen slik at det blir mindre å huske og lettere å hente fram kunnskap når de forstår hva de arbeider med. De «realistiske» kontekstene gjør at elevene ser hvordan matematikk kan brukes i hverdagen, og de erfarer at det er viktig å kunne matematikk i mange ulike sammenhenger. Elevene får utviklet mange ulike løsningsstrategier og framgangsmåter som de kan veksle mellom i sitt arbeid, og de blir stadig flinkere til å velge egnet løsningsstrategi. I og med at elevene velger strategier og framgangsmåter selv vil det også ligge mye tilpasning i slike arbeid. Elevene tar utgangspunkt i sitt ståsted når de går i gang med arbeidet. Elevene kan argumenter for sine løsninger, de reflekterer over svarene de har fått, og de kan resonnere rundt sammenhenger mellom ulike begreper

og prosedyrer. Alt dette er aspekter man finner igjen i Kilpatrick, Swafford og Findells (2001) trådmodell, som viser fem komponenter som sammen utgjør matematisk kompetanse. Anita Valenta (2015) ved Matematikksenteret har skrevet en god artikkel hvor hun henviser til trådmodellen.

Jeg er ikke i tvil om at elevene på 7. trinn på Byåsen skole har utviklet en god matematisk kompetanse gjennom arbeid med denne og lignende kontekster. I tillegg er det spennende å være matematikklærer gjennom et slikt arbeid, man får en helt annen innsikt i hvordan elevene tenker enn om man arbeider mer tradisjonelt i ei matematikkbok. Det engasjementet, den iveren og den gleden elevene viser i matematikktimene er inspirasjon i hverdagen. Vi ELSKER matte!!

Referanser

Fosnot, C. T. mfl. (2007). *Contexts for learning Mathematics*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Glassco, S. & Fosnot, C. T. (2014). *The architects' project. Area, volume and nets.* CreateSpace Independent Publishing Platform.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

Valenta, A. (2015). *Aspekter ved tallforståelse*. Hentet 21. november 2016, fra http://www.matematikksenteret.no/multimedia/4091/Valenta_Aspekter-ved-tallforstaelse-okt16

Redaksjonens kommentar: Valenta hadde en artikkelserie i Tangenten i 2016. Disse artiklene utdypet artiklene som er vist til over.

Toril Eskeland Rangnes, Helle Alrø (red.)

Matematikklæring for framtida

Festskrift til Marit Johnsen-Høines

Festskriftet til Marit Johnsen-Høines er en hyllest og takk til en kollega, inspirator og foregangskvinne i det nordiske forskermiljøet i matematikkdidaktikk.

Bidragsyterne er Marits kollegaer fra nordiske institusjoner, som inspirert av Marits forskning bidrar med ny kunnskap innen forskningsfeltet matematikkdidaktikk.

ISBN 978-8290898-70-5

285 sider · 400,–

Bestill på ordre@fagbokforlaget.no

Caspar Forlag AS · www.caspar.no

Vestergaard

Logaritmer for alle

Mange har fortalt meg at de har lært seg å håndtere logaritmereglene uten å bli ordentlig fortrolig med hva det egentlig er. I det følgende vil jeg gjøre rede for hvordan jeg lar elevene utvikle logaritmeregningen i et spenningsfelt mellom en aritmetisk og en geometrisk tallfølge. Min erfaring er at elevene oppnår solide ferdigheter og dyptgående forståelse med denne metoden.

Legenden om hvordan Sissi Ibn Dahir oppfant sjakkspillet og presenterte det for keiseren er velegnet til å gi elevene en opplevelse av hvor forskjellig kvaliteten av disse to vekstprinsippene er. Som kjent ble keiseren så begeistret for spillet at han ville gi Sissi en belønning. Sissi ønsket seg: 1 riskorn på 1. rute, 2 riskorn på neste rute, 4 riskorn på 3. rute og så videre. Keiseren tenkte at dette var en veldig beskjeden belønning og ba regnemesteren sin om å telle opp en sekk korn til Sissi Ibn Dahir. For å regne ut hvor mye ris som måtte være i denne sekken stiller klassen opp en tabell som viser hvor mange riskorn som måtte plasseres på sjakkspillets 64 forskjellige ruter (tabell 1). Elevene blir veldig overrasket over hvor fort dette antallet øker. Det ble keiseren også. Det viste seg at det ikke var ris nok i hele India for å utbetale belønningen. Antall riskorn på hver rute kan uttrykkes som en potens av 2 (den midterste søylen) eller som antallet i søylen til høyre. Vi legger merke til at de røde og svarte tallfølgene begge er voksende, men etter to helt forskjellige

Rute nr	Antall riskorn på ruten	
1	2^0	1
2	2^1	2
3	2^2	4
4	2^3	8
5	2^4	16
6	2^5	32
7	2^6	64
8	2^7	128
9	2^8	256
10	2^9	512
11	2^{10}	1 024
12	2^{11}	2 048
13	2^{12}	4 096
14	2^{13}	8 192
15	2^{14}	16 384
16	2^{15}	32 768
17	2^{16}	65 536
…	…	…

Tabell 1

Birte Vestergaard
Oslo by Steinerskole
Birte.Vestergaard@oslo-bysteinerskole.no

prinsipper. Vi definerer ut fra dette aritmetisk og geometrisk tallfølge. Vi skal seinere få bruk for denne tabellen.

En uløselig likning

Etter denne introduksjonen utvikler vi de forskjellige reglene for geometriske og aritmetiske rekker og følger, blant annet formelen for gjentatt prosentvis vekst:

$$K^n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Vi snakker om at denne formelen kan brukes til å fremskrive for eksempel kapitalvekst, bakterievekst og befolkningsvekst. Jeg går igjennom hvordan vi kan regne ut hvor mange mennesker det er i verden i år 2030, hvis vi anslår en vekstrate og kjenner antallet på et bestemt tidspunkt. For å bearbeide denne formelen deler jeg ut autentisk datamateriale om verdensbefolkningen for eksempel fra FNs *Demographic Yearbook* (tabell 2). Elevene blir bedt om å lage oppgaver til hverandre hvor de bruker formelen ovenfor. Det er alltid spennende for elevene å jobbe med materiale fra den virkelige verden, så de går til oppgaven med engasjement.

Hver gang skjer det samme: Etter maksimalt 10 minutter melder en elev seg med en oppgave vedkommende ikke kan løse. Det kan være: «*Hvor mange år går det før det er like mange mennesker i Asia som det er i verden i dag?*»

Eleven klarer vanligvis fint å finne de relevante tallene i tabellen (se tabell 2), den globale befolkningen i 2013 (7 162 millioner), Asias befolkning i 2013 (4 298 millioner) og vekstraten for Asias befolkning 2013 (1,01 %). De får også til å sette opp likningen:

$$7{,}162 = 4{,}298 \cdot (1{,}01)^n$$

Dette ser ut som en enkel likning. Men hvordan løser man den? Eleven starter gjerne med å dele med 4,298. Da blir uttrykket forenklet til:

$$1{,}666 = 1{,}01^n$$

Major areas and regions Régions macro géographiques et composantes	Mid-year population estimates - Estimations de population au milieu de l'année (millions)							Annual rate of increase - Taux d'accroissement annuel (%)
	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2013	
WORLD TOTAL - ENSEMBLE DU MONDE	3026.0	3691.2	4449.0	5320.8	6127.7	6916.2	7162.1	1.1
AFRICA - AFRIQUE	285.3	366.5	478.5	630.0	808.3	1031.1	1110.6	2.5
Eastern Africa - Afrique orientale	84.4	110.5	147.7	198.4	260.0	342.6	373.2	2.8
Middle Africa - Afrique centrale	31.9	40.5	52.6	70.0	93.8	125.0	135.8	2.7
Northern Africa - Afrique septentrionale	64.5	84.3	108.2	139.9	169.3	199.6	210.0	1.7
Southern Africa - Afrique méridionale	19.7	25.5	33.0	42.1	51.4	58.8	60.4	0.8
Western Africa - Afrique occidentale	84.7	105.7	137.0	179.7	233.8	305.1	331.3	2.7
LATIN AMERICA AND CARIBBEAN - AMÉRIQUE LATINE ET CARAÏBES	220.4	287.6	364.2	445.2	526.3	596.2	616.6	1.1
Caribbean - Caraïbes	20.7	25.3	29.7	34.3	38.4	41.6	42.5	0.7
Central America - Amérique centrale	51.9	70.7	93.4	115.1	139.6	160.5	167.4	1.4
South America - Amérique méridionale	147.8	191.6	241.0	295.8	348.2	394.0	406.7	1.0
NORTHERN AMERICA - AMÉRIQUE SEPTENTRIONALE	204.4	231.4	254.8	282.3	315.4	346.5	355.4	0.8
ASIA - ASIE	1694.6	2128.6	2634.2	3213.1	3717.4	4165.4	4298.7	1.0

Tabell 2: Elevene lager selv oppgaver til hverandre om gjentatt prosentvis vekst ut fra data om verdensbefolkningen fra FN (tilgjengelig på http://unstats.un.org/unsd/demographic/products/dyb/dyb2013.htm).

Kanskje prøver eleven å dele på 1,01 og får:

$$1{,}650 = 1{,}01^{n-1}$$

Da ble likningen enda mer utfordrende. I fellesskap kommer vi frem til at problemet er at det er eksponenten som er den ukjente. Ingen av våre kjente verktøyer til å løse likninger kan håndtere dette. Eleven blir bedt om å presentere problemstillingen for hele klassen ved tavlen. Klassens kloke hoder prøver seg med forskjellige grep, men etter en stund må alle melde pass. Dermed oppstår en stor trang til å få løst likningen. Jeg forteller at det går an, men at vi først må utvikle en helt ny regneart og at dette kommer til å bli slitsomt og utfordrende. Men det er elevene med på. De er nå toppmotiverte for å lære logaritmeregning.

Historisk tilnærming

Neste steg er da å definere logaritmebegrepet. Det er avgjørende *hvordan* dette steget angripes. I mange lærebøker går man rett på sak og innleder logaritmekapitlet med en eksakt definisjon i stil med

> La a være et positivt tall. Med logaritmen til a ($\log(a)$) mener vi det tallet vi må opphøye 10 i for å få a: $10^{\log(a)} = a$.

Deretter øver elevene på å bruke denne definisjonen. De forskjellige regnereglene blir introdusert og elevene lærer å løse eksponentiallikninger. Som matematikere er vi vant til å lære oss matematikk på denne måten. Den virker nok umiddelbart meget effektiv, men det er min erfaring at nye begreper lett kan virke abstrakte, uhåndgripelige eller noe som bare faller ned fra himmelen. Det er min erfaring at elevene får en dypere forståelse av matematiske begreper hvis man lar dem gå den samme oppdagelsesveien som historisk sett førte frem til begrepene og definisjonene. Slike utviklingsprosesser har ofte tatt hundrevis av år, og derfor er det lærerens oppgave å plukke ut de stegene som er avgjørende for at det nye begrepet kan danne seg hos elevene. Når det gjelder logaritmer, gjør jeg det slik:

Jeg forteller klassen om hvordan opplysningstiden førte til at kirken tapte monopol på å forklare verdens opprinnelse. Dette ble derfor et spørsmål som menneskene begynte å undersøke ved å betrakte stjernehimmelen og gjøre astronomiske målinger. Ut av dette oppsto et stort behov for å multiplisere store tall og ikke minst for å ta høyere røtter av store tall. Den gangen fantes det ingen kalkulator, så det var ganske krevende. Jeg skriver et par eksempler på tavlen:

Eksempel 1: $1\,024 \cdot 8\,192 =$
Eksempel 2: $262\,144 : 2\,048 =$
Eksempel 3: $512^3 =$
Eksempel 4: $\sqrt[4]{1\,048\,576}$

De tre første eksemplene er mulige, men svært krevende uten kalkulator. Det fjerde eksemplet kan elevene ikke regne ut med penn og papir. Astronomene på 1600-tallet var i akkurat samme situasjon. På dette tidspunktet oppdager en eller flere elever i klassen at de store tallene på tavlen alle fins på den tabellen vi utarbeidet da vi holdt på med riskorn og sjakkspill. De er alle potenser av 2 (tabell 1). Det viser seg at tabellen kan brukes til å gjennomføre utregningene enkelt og greit med tabelloppslag og helt uten kalkulator på følgende måte:

Eksempel 1:

$$1\,024 \cdot 8\,192 = 2^{10} \cdot 2^{13} = 2^{10+13} = 2^{23} = 8\,388\,608$$

Tabelloppslag Tabelloppslag

Ved å omskrive faktorene til potenser av 2, kan den tunge *multiplikasjonen reduseres til summering av eksponentene* 10 og 13. Dette skaper begeistring i klassen! Analogt kan *divisjon reduseres til subtraksjon av eksponentene*:

Eksempel 2:

$$262\,144 : 2\,048 = 2^{18} : 2^{11} = 2^{18-11} = 2^7 = 128$$

I eksempel 3 oppdager elevene at *potensregning reduseres til multiplikasjon av eksponenten med en faktor:*

Eksempel 3:

$$512^3 = (2^{10})^3 = 2^{10\cdot 3} = 2^{30} = 1\,073\,741\,824$$

Den vanskelige oppgaven med fjerderoten kan lett løses ved at *rotutdragning reduseres til å dividere eksponenten med en faktor:*

Eksempel 4:

$$\sqrt[4]{1\,048\,576} = (2^{20})^{1/4} = 2^{20\cdot 1/4} = 2^5 = 32$$

Elevene utarbeider selv en tabell med grunntall 3. De bruker den for å lage oppgaver til hverandre.

Det er jo smart, men kan bare brukes for de tallene som fins i tabellen, altså bare de som er potenser av 2. Vi ønsker å utvikle metodene så de kan brukes for alle reelle tall. Vi går i gang med å løse problemet ved å huske på at $2^1 = 2$ og at $2^2 = 4$. Dette betyr at det må finnes et tall L mellom 1 og 2 slik at $2^L = 3$. Elevene får i oppgave å finne L. De fleste gjetter på at $L = 1{,}5$. Det viser seg å være for lite. Elevene prøver seg frem på kalkulatoren og finner tilnærmelser for L, for eksempel: $L \approx 1{,}585$. Vi oppdager at det ikke er mulig å angi L som et eksakt desimaltall. Vi definerer derfor en notasjon for tallet L som uttrykker at det er det tallet man må opphøye 2 til for å få 3:

$$\log_2(3) = L$$

Vi kan nå skrive alle eksponentene fra tabell 1 som logaritmer. Her et par eksempler:

$$\log_2(2) = 1,\ \ \log_2(4) = 2 \ \text{ og } \ \log_2(1\,024) = 10$$

Dermed ble logaritmebegrepet definert. Dette arbeidet er møysommelig, men meget givende. Det fører til at logaritmebegrepet får lov å modnes hos elevene før det blir formulert. De har oppnådd dybdeforståelse av *at logaritmer er eksponenter*, og de er ikke i tvil om hva grunntallet er for noe. Dermed går det veldig lett når man senere skal innføre naturlig logaritme.

Utvikling av regneregler for logaritmer

Vi vender tilbake til eksemplene 1–4 for å utvikle logaritmereglene. Vi starter med å betrakte eksempel 1 igjen:

$$1\,024 \cdot 8\,192 = 2^{10} \cdot 2^{13} = 2^{10+13} = 2^{23} = 8\,388\,608$$

Med den nye notasjonen kan vi nå skrive dette som:

$$1\,024 \cdot 8\,192 = 2^{\log_2(1\,024)} \cdot 2^{\log_2(8\,192)}$$
$$= 2^{\log_2(1\,024) + \log_2(8\,192)} = 2^{\log_2(1\,024 \cdot 8\,192)} = 8\,388\,608$$

Hvis vi nå betrakter de to eksponentene som er markert med gult, har vi utviklet regelen:

$$\log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b)$$

På samme måte kan elevene selv utvikle de øvrige regnereglene for logaritmer ved å gjøre tilsvarende grep på eksempel 2, 3 og 4.

Den problematiske likningen kan nå løses.

Jeg forteller elevene at man vanligvis ikke bruker 2 eller 3, men 10 som grunntall. Etter dette omfattende utviklingsarbeidet er det nå tid til endelig å vende tilbake til den problematiske likningen som utløste behovet for å utvikle en ny regningsart. Vi innser hvorfor det går an å ta logaritmen på begge sider av en likning: Hvis to tall er like, vil også logaritmen til de to tallene være like.

$$\log(1{,}666) = \log(1{,}01)^n$$

$$n = \frac{\log(1{,}666)}{\log(1{,}01)} = 51{,}29 \text{ år.}$$

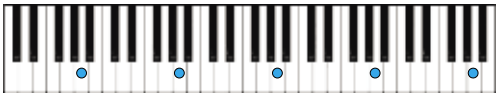
Det er en fest når eleven som fant frem til denne uløselige likningen, står ved tavlen og finner svar på spørsmålet sitt.

Det er gøy for elevene å anvende logaritme-

regningen på oppgaver om lydstyrke, styrke på jordskjelv og så videre. Dette fører oss frem til det siste poenget, nemlig våre logaritmiske sanser.

Våre logaritmiske sanser

Jeg spiller av et lydopptak av 5 pianotoner spilt etter hverandre. Alle hører at avstanden mellom tonene er like stor. Noen elever kjenner igjen at det er en oktav fra en tone til den neste. Jeg tegner et piano og viser elevene hvilke toner de har hørt (figur 1).



Figur 1: Piano med markering av de tonene som elevene hørte på lydopptaket.

Alle er enige om at sanseinntrykket forteller oss at oktavrekken vokser som en aritmetisk følge. Men hvis vi måler frekvensen for tonene, oppdager vi noe. Tonene har frekvensen 110 Hz, 220 Hz, 440 Hz, 880 Hz og 1760 Hz. Frekvensen øker altså som en geometrisk følge. Elevene opplever således at sansene opererer i et spenningsfelt mellom en aritmetisk og en geometrisk følge, akkurat som logaritmene gjør det. Det er en prinsipp som er grunnleggende for våre sanser og derfor er dypt forbundet med oss som mennesker.

Logaritmer blir vanligvis ansett som noe veldig vanskelig. Derfor er det bare elever som fordyper seg i matematikk, som får lære om dem. Slik trenger det ikke å være. Med dette opplegget blir logaritmer noe alle elever på videregående skole kan få en dyp og levende forståelse av. Derfor underviser jeg alltid logaritmer i P-klassene mine selv om det ligger utenfor læreplanen. Mange av disse elevene sliter med basale algebraiske ferdigheter som for eksempel brøkregning. Når vi er ferdige med logaritmeopplegget sier jeg gjerne til klassen: «Se dette var jo ikke så vanskelig. Men jeg kan fortelle dere at logaritmer vanligvis blir ansett som mye vanskeligere enn brøkregning. Det betyr også at når dere har blitt så flinke i logaritmer, da må det også gå an å greie brøkregningen». På den måten kan opplegget bli en løftestang for den matematiske selvtilliten.

Det er min erfaring at dette opplegget gir elevene en dyp og levende forståelse av logaritmeregningen. De kommer på innsiden av hva logaritmer egentlig er for noe, og de får en opplevelse av hvor elegante og kraftfulle logaritmer er. Det hele får dybde når de erfarer at logaritmer ikke bare er en metode for å regne med store tall eller for å løse eksponentiallikninger. Det er et prinsipp som er grunnleggende for våre sanser, og som derfor i stor grad har noe med dem selv å gjøre.

Fyhn, Harbrecht, Kristiansen

Underdeling og overtoner

Denne teksten beskriver prosjektet *Musikk og matematikk i Narvik*, MuMaNa, ved Narvik videregående skole. En av forfatterne har i noen år undervist i både matematikk og musikk ved musikklinja der og opplevd at mens engasjementet i musikkfag er stort, så kommer fellesfag ofte i andre rekke. Hun har erfart at mange elever på musikklinja viser lite motivasjon overfor matematikk og gir uttrykk for at matematikk er et vanskelig fag. Prosjektet MuMaNa gikk ut på at elevene i første klasse på musikklinja utforsket et tema knyttet til et musikkinstrument som de selv behersker. For å synliggjøre hvordan matematikk kan være relevant for denne elevgruppa, undersøkte vi hvilken matematikk elevene kommer fram til når de utforsker musikk. Elevene følger læreplanen i matematikk for 1P – Vg1 studieforberedende utdanningsprogram (Udir, 2013a). Den matematikken elevene kommer fram til gjennom prosjektet, blir sammenlignet med kompetansemålene i denne læreplanen.

Prosjektet startet med at flere av elevenes instrumentallærere hadde konkrete forslag til musikkfaglig interessante tema elevene kunne utforske i tilknytning til sine instrument. Temaene gav muligheten for å se og arbeide med forskjellige områder i matematikk. Prosjektet skulle gå over to uker og skolen satte av rikelig med tid. Etter endt prosjekt kom lærerne fram til at elleve timer ville vært tilstrekkelig. Lærerne delte elevene i grupper ut fra hvilke instrument de hadde valgt: sang, piano, slagverk, gitar eller bass. Gruppene gitar og bass ble slått sammen fordi det var få elever i hver gruppe.

Anne Birgitte Fyhn
UiT Norges arktiske universitet
anne.fyhn@uit.no

Julia Harbrecht
Narvik videregående skole
julhar@vgs.nfk.no

Johnny Kristiansen
Narvik videregående skole
johkri@vgs.nfk.no

Musikkfaglig utgangspunkt for prosjektet

Vi har valgt å fokusere på de to gruppene slagverk og gitar/bass fordi instrumentallærerne her hadde konkrete forslag til musikkfaglige tema før gruppene begynte sitt arbeid. Dette innebar at arbeidsoppgavene var utformet av instrumentallærerne og ikke av matematikklæreren. Det var i tillegg et poeng at den matematikken elevene kom fram til, skulle være av verdi for musikkfaget. Slagverkgruppa undersøkte temaet *underdeling*, mens gruppa gitar/bass undersøkte temaet *overtoner*.

Underdeling baserer seg på en periodisk inndeling av musikkforløpet. Dette kaller vi gjerne for puls, takt eller rytme. Det er i hovedsak brukt i samspill og direksjon av ensembler. Mange ganger er det slik at musikere og sangere ikke utelukkende spiller og synger på taktslagene. Når det går for lang tid mellom de impulsene musikerne støtter seg på i forhold til tempo og tid, melder det seg et behov for større presisjon i det rytmiske forløpet. Da bruker man underdeling som et grep for dette. Man teller i mindre enheter, for eksempel dobbelt så fort.

Hver tone vi hører i musikken, kan deles opp i en sum av sinussvingninger, der frekvensene er heltallige multipler av tonens frekvens. Disse kalles for tonens *overtoner*. Hele vårt tonesystem bygger på disse naturgitte overtonene. Dette kan man for eksempel se på en gitarstreng som vibrerer. Når man spiller en tone, deler strengens svingninger seg i to i midten (oktav). I tillegg får vi flere mindre svingninger med ulike bølgelengder, disse er fordelt over hele strengen. Skorpen (2004) utdyper sammenhenger mellom overtonenes frekvens og strenglengde. Den spesielle sammensettingen av overtoner gir hvert instrument sin egen klangfarge. Slik kan vi for eksempel skille gitarklangen fra pianoklangen.

Utforskende kulturbasert matematikkundervisning

Matematikk i skolen er for mange ensbetydende med å løse oppgaver. Læreboka presenterer noen eksempler, og elevene kopierer framgangsmåte fra eksemplene når de løser oppgaver. Det å lykkes med matematikk blir ensbetydende med å få god karakter på skriftlige tester der oppgavene gjerne ligner oppgavene i boka. Skovsmose (2003) innfører begrepet *undersøkelseslandskap* som kontrast til det tradisjonelle *oppgaveparadigmet*. I et undersøkelseslandskap må elevene selv enten formulere og løse matematiske problem, eller de beskriver et fenomen ved hjelp av matematikk. Matematikklæreren går inn i en ny og annerledes rolle: Læreboka er lagt bort og dessuten arbeider elevene stort sett med forskjellige matematikkfaglige fokus.

Det finnes utallige definisjoner og beskrivelser av «kultur». Ifølge Darnell og Hoëm (1996) er kultur den lagrede blandingen av kunnskap som en nasjon eller et folk har til disposisjon. Kultur utgjør grunnlaget for forståelse og mestring, både for et individ, et samfunn og for en nasjon. Vi har valgt å tilføye Eriksens (1997) perspektiv på kultur. Kultur er det som gjør kommunikasjon mulig. Musikk-kultur omfatter da alt det som gjør kommunikasjon mulig innenfor musikk, både utøvende musikk og musikkteori. Kulturbasert matematikkundervisning med utgangspunkt i musikk, tar utgangspunkt i musikk-kunnskaper som danner grunnlaget for elevenes forståelse og mestring innenfor musikk. Kriterier for slik undervisning er a) Matematikklæreren må samarbeide med lærere som har god kompetanse innenfor den aktuelle kulturen (musikklærere), b) Elevene starter med å utforske kulturen (musikken), og matematikk er ett av resultatene og c) Utforskingen skal føre fram til resultater som er relevante for, og som støtter opp om den aktuelle kulturen (musikk).

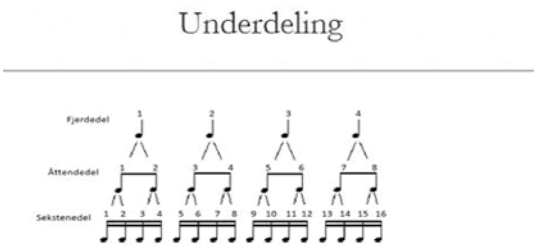
På tilsvarende vis som matematikk tidligere ble betraktet som «kultur-fri», ble den også betraktet som «verdi-fri» (Bishop, 1988). Matematikkutdanning kan ikke være utdanning uten å bidra til utvikling av verdier. Bishop spør derfor om forskjellen på matematikk-trening og matematikk-utdanning handler om utvikling av verdier. For at matematikkundervisningen på musikklinja skal være utdanning, må undervisningen ha verdi for musikkfaget.

Elevenes arbeid med trommer, gitar og bass

Slagverkelevene tok utgangspunkt i fire fjerdedels takt. Dette er en svært vanlig takt i den musikken ungdommene lytter til. Ei takt inneholder fire slag, der hvert slag eller grunnpulsen er fjerdedelsnoter. Elevene forklarte at underdeling kan uttrykkes som brøker der hvert slag har

kortere og kortere varighet. Figur 1 viser dette. Hver fjerdedel tilsvarer to åttendedeler eller fire sekstendeler. Dette demonstrerte elevene. Først slo en elev firedeler med ei stikke på et trebord, som en rekke regelmessige slag. Deretter slo hun åttendedeler med to stikker, der annet hvert slag var med høyre og annet hvert med venstre hånd. Deretter fordoblet hun frekvensen og slo 16-deler. Slik lot de publikum få innblikk i at for eksempel to åttendedeler hadde like lang varighet som en firedel.

Hvis varigheten av et slag halveres, så får du med andre ord dobbelt så mange slag i samme tidsrom. Lengden på hvert slag blir kortere og kortere, fra en halv til en fjerdedel til en åttendedel og så videre. Av praktiske grunner opererer trommeslagere med underdeling opp til 16. Finere oppdeling som 32-deler kategoriseres som regel som virvler eller trommevirvler. I enkelte tilfelle der en takt spilles svært langsomt, vil 32-deler også forekomme.



Figur 1: Oppdeling av ei takt i fjerdedeler, åttendedeler og sekstendeler (fra slagverkelevenes presentasjon i plenum).

Varigheten av et slag kan uttrykkes som $\frac{1}{2^n}$ der n representerer et helt tall. Elevene viste hvordan det gikk an å sette inn ulike verdier for n. Når n er lik null, ble uttrykket til 1. Dette tilsvarer ei hel takt, mens for eksempel $n = 4$ gir $\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 16$. Elevenes arbeid kan brukes som utgangspunkt for en videre fordyping innenfor samme tema. Andre takter vil gi andre matematiske uttrykk, for eksempel er det tre slag per takt i en vals. Tredeling i stedet for todeling ville ført til trioler.

Elevene i gitar/bass-gruppa fortalte at man kunne dele inn strengene til gitaren eller bassen i forskjellige lengder. Hvis du deler strengen i to, så får du oktaven over. På gitaren får du fram oktaven i tolvte bånd. Hvis du deler strengen i fire, så får du enten femte eller 24. bånd. Som demonstrasjon av overtoner i musikk, viste elevene et videoklipp der en av skolens lærere spiller overtoner på gitar (Clemens, 2011).

I forberedelsene til presentasjonen utforsket elevene sammenhenger mellom strenglengder og overtoner. De kom fram til systemet i figur 2. De delte strengen i stadig mindre deler. En av elevene demonstrerte dette på en kontrabass. Når hun tok på strengen lenger og lenger ned på halsen, så fikk hun fram nye overtoner. Hun startet med hel streng og spilte deretter overtoner som hadde høyere og høyere frekvens. Den første overtonen hun spilte var på oktaven. Hun måtte strekke seg lenger og lenger nedover bassen for å rekke fram til der hun skulle spille, mens den strengen hun spilte på ble stadig kortere. Elevene fant fram til punkter på strengen der den ble delt inn etter følgende system: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ og så videre. Dette kunne de uttrykke som $\frac{n}{n+1}$. Elevene kunne her ha formulert at lengden av den delen av strengen som de spilte på, kan uttrykkes som $\frac{1}{n+1}$. Det er den strenglengden som gir overtonene. I forarbeidet om overtoner var elevene på nett og fant flere videoklipp med strupesang, noe som resulterte i at de kom fram til at strupesang var et eksempel på overtoner.

Figur 2 Elevnotater fra gruppa gitar og bass.

Når strengen blir kortere, øker tonehøyden. Elevene uttrykte dette som at strenglengden er omvendt proporsjonal med frekvensen. De startet med grunntonen A i stor oktav på kontrabassen. Dette er en svært dyp tone som man ikke får fram på for eksempel en gitar. Denne dype tonen har flere overtoner som det menneskelige øret hører godt. Tonen har frekvens 110 Hz. Frekvensen til første overtone er 110 Hz · 2 = 220Hz. Denne klinger en oktav over grunntonen. Deretter fant de frekvensen til de neste overtonene ved å multiplisere 110 Hz med henholdsvis 3, 4, 5 og så videre. Kammertonen a' (enstrøken a) har en frekvens på 440 Hz og er derfor tredje overtone. Elevnotatene i figur 2 viser noe av elevenes forberedelser til dette.

Prosjektets relevans og målsetting

Læreplanen påpeker at matematikk ligger til grunn for store deler av vår kulturhistorie og for utviklinga av logisk tenking. Matematikkfaget spiller derfor en sentral rolle i allmenndanningen ved å virke inn på elevenes identitet, tenkemåte og selvforståelse. Opplæringen skal veksle mellom utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter og ferdighetstrening. Dette aspektet ved læreplanen støttes av Ludvigsenutvalgets rapport om fremtidens skole (NOU 2015:8), som vektlegger nysgjerrighet som en viktig egenskap i fremtidens samfunn. I denne forklares nysgjerrighet som evnen til undring og som evnen til å utforske, undersøke og stille spørsmål ved etablerte sannheter. Vårt prosjekt gir elevene muligheter til å se at matematikk kan være relevant for musikk, og at matematikk kan være mer enn ferdighetstrening. De allmenndannende sidene ved vårt prosjekt går ut på å virke inn på elevenes tenkemåte i forhold til musikk og matematikk. Ett mål for prosjektet er å gi elevene rom for utforskende, lekende og kreative aktiviteter.

Grunnleggende muntlige ferdigheter i matematikk (Udir, 2013a) omfatter å skape mening gjennom å lytte, tale og samtale om matematikk. Dette innebærer bruk av både uformelt språk, presis fagterminologi og begreper. Utvikling av muntlige ferdigheter i matematikk omfatter alt fra å delta i samtaler om matematikk til å presentere og drøfte komplekse matematiske emner. Vårt prosjekt tok utgangspunkt i elevenes forståelse av musikk og deres muntlige uttrykksformer i musikk. Mål nummer to ved prosjektet var at elevene skal uttrykke sine erfaringer fra musikk, først ved dagligdags språk og etter hvert ved mer eller mindre presis bruk av terminologi og begreper fra matematikkfaget. Ludvigsen mfl. (2015) definerer muntlig kompetanse som å skape mening gjennom å lytte, tale og samtale. Muntlig kompetanse omfatter å kunne formidle budskap med ulike formål til ulike mottakere. Å kunne lytte innebærer blant annet å være bevisst på mottakerens forståelse når man snakker selv. Vårt prosjekt legger vekt på at elevene skal fordype seg i musikk, et fag de selv har valgt, ut fra egen interesse. Det innebærer at matematiske diskusjoner i prosjektet vil inneholde en god del musikk, og derfor forventes medelevene å ha forutsetninger for å delta i muntlige diskusjoner underveis.

Medias fokus på nasjonale og internasjonale tester i matematikk bidrar til at fokuset på matematikk i skolen primært handler om læreplanens kompetansemål. Matematisk kompetanse har blant annet språklige aspekt som det å formidle, samtale om og resonnere omkring ideer. Eksamensfokusert arbeid med skriftlig matematikk i videregående skole kan lett få slagside ved at opplæringa fokuserer på ferdighetstrening og eksamensforberedende oppgaver. Schoenfeld (2007) påpeker at hvis undervisningen primært går ut på ferdighetstrening, så har man ingen garanti for at elevene har forstått de grunnleggende idéene som ligger bak. Det eneste som da er sikkert, er at eleven behersker oppgaver som ligner på det de har øvd på. Flere av elevene som deltok i prosjektet, uttrykte skepsis, fordi prosjektet ikke var eksamensrelevant. De fryktet at de ville lykkes dårlig på eksamen hvis de brukte tid på dette prosjektet i stedet for på eksamensforberedende oppgaver.

Matematikkfaglig innhold i elevarbeidene

Elevene tok utgangspunkt i tema som var relevante for musikkfaget. Begge gruppene beskrev og utdypet musikkbegreper ved hjelp av matematikk. De startet med noen få eksempler på underdeling og overtoner. Deretter fant de flere eksempler og sammenhenger mellom disse. Tallfølger er det mest gjennomgående temaet i elevenes arbeid, elevene brukte matematikk til å beskrive mønster. Elevene representerte ulike fenomener fra musikk på tre ulike vis: a) ved å spille toner på et musikkinstrument, b) ved å beskrive fenomenet ved noen talleksempler og c) ved å beskrive et system ved hjelp av et generelt matematisk uttrykk der variabelen n inngår. Slagverkelevene representerte et mønster innen underdeling ved a) å slå trommeslag, b) noen talleksempler på oppdeling av taktslag og c) et generelt matematisk uttrykk for underdeling. Gitar og bass-elevene hadde to eksempler på mønster i tilknytning til overtoner. Det ene eksemplet fokuserte på hvilke strenglengder som ga overtoner, det andre eksemplet fokuserte på hvilke tonefrekvenser som ga overtoner. Elevene representerte det ene mønsteret innen overtoner ved a) at de fikk fram overtoner ved å dele strengen først i to like deler og deretter ved videre oppdeling av strengen, b) brøkdeler av strengen som gir overtoner uttrykt ved tall og c) et generelt uttrykk for brøkdeler av en streng som gir overtoner. I det andre eksemplet representerte de et mønster ved a) å spille overtoner på en streng, b) noen talleksempler på overtonenes frekvens og c) et generelt uttrykk for overtoners frekvens.

Matematikken elevene kom fram til sorterer inn under kjernen i hovedområdet *Tall og algebra* i læreplanen (Udir, 2013a): «Hovedområdet tall og algebra handler om å utvikle tallforståelse og innsikt i hvordan tall og tallbehandling inngår i systemer og mønster […] Algebra i skolen generaliserer tallregning ved at bokstaver eller andre symboler representerer tall. Det gir anledning til å beskrive og analysere mønster og sammenhenger» (s. 3). Læreplanens kompetansemål for 1P er imidlertid vagt i forhold til akkurat dette, der framgår det at elevene skal kunne tolke og bruke formler som gjelder dagligliv og yrkesliv. Det står imidlertid ingen ting om utforsking og bygging av mønster i kompetansemålene. Matematikken elevene kom fram til er ikke i samsvar med kompetansemålene i læreplanen, elevene jobbet med matematikk som inngår i kompetansemål for 2P (Udir, 2013b, s. 6): «Elevene skal analysere praktiske problemstillinger […] finne mønster og struktur i ulike situasjoner og beskrive sammenhenger mellom størrelser ved hjelp av matematiske modeller.» Slagverkelevenes arbeid retter seg mot et annet kompetansemål for 2P (Udir, 2013b, s. 5), «… å regne med potenser og tall på standardform med positive og negative eksponenter, og bruke dette i praktiske sammenhenger.»

Sluttord

Ett mål med prosjektet var at elevene skal få erfaring i å bruke matematikk som redskap for å uttrykke sine erfaringer med musikk. Vi vil hevde at dette målet er oppnådd. Utforsking og bygging av mønster er tema der matematikkfaget kan bygge på faglige tema fra de estetiske fagene, på de estetiske fagenes premisser. Ifølge Stortingsmelding 28 (2015–2016) er Kunnskapsdepartementet opptatt av at fellesfag som matematikk skal være relevante for de yrkesfaglige utdanningsprogrammene. Derfor vil de innføre en utdanningsprogramspesifikk del i de yrkesfaglige læreplanene i fellesfagene matematikk og naturfag. Stortingsmeldingen vektlegger at fellesfagene skal ha relevans for yrkesfagene. Prosjektet vårt viser at fellesfagene kan ha relevans også for det estetiske faget musikk.

Det andre målet var å stimulere elevenes nysgjerrighet ved å gi rom for utforskende, lekende og kreative aktiviteter. I en kaffepause noen uker etter prosjektet, fortalte gitarlæreren at etter endt prosjekt begynte gitarelevene å prøve ut overtoner langt nede på halsen av instrumentet. Elevene spurte hva som ville være overtoner

nummer ti og elleve og så videre. Instrumentallæreren var overrasket over at prosjektet hadde vekket elevenes nysgjerrighet på det viset. Nysgjerrighet er en sentral del av kreativitet (Ludvigsen mfl., 2015). «Innovasjon inkluderer sentrale sider ved kreativitet, men innebærer i tillegg å kunne ta initiativer og omsette ideer til handling» (s. 10). Prosjektet vårt har bidratt til å vekke nysgjerrighet hos gitarelevene og trolig også hos noen flere av elevene.

Referanser

Bishop, A. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics, 19*(2), 179–191.

Clemens, A. (2011). *Canço del lladre, El noi de la mare y El testament d' Amelia. Fra XIV Festival Internacional de la Guitara, Peter 2011*. Hentet fra https://www.youtube.com/watch?v=2GCSsw7tJUU

Darnell, F. & Hoëm, A. (1996). *Taken to extremes. Education in the far north*. Oslo: Scandinavian University Press.

Eriksen, T. H. (1997). Kultur, kommunikasjon og makt. I T. H. Eriksen (Red.), *Flerkulturell forståelse* (s. 53–66). Oslo: Tano Aschehoug.

Fyhn, A. B., Nutti, Y. Jannok, Eira, E. J. S., Børresen, T., Sandvik, S. O. & Hætta, O. E. (2015a). Ruvden as a basis for the teaching of mathematics: A Sámi mathematics teacher's experiences. I E. S. Huaman & B. Sriraman (Red.), *Indigenous Universalities and Peculiarities of Innovation. Advances in Innovation Education* (s. 169–186). Sense Publishers.

Fyhn, A. B., Dunfjeld, M., Dunfjeld Aagård, A., Eggen, P. & Larsen, T. M. (2015b). Utforsking av tradisjonell sørsamisk ornamentikk. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 26*(3), 9–14.

Meld. St. 28 (2015–2016). *Fag-fordyping-forståelse. En fornyelse av Kunnskapsløftet*. Oslo: Kunnskapsdepartementet.

NOU 2015:8. *Fremtidens skole. Fornyelse av fag og kompetanser*. Oslo: Kunnskapsdepartementet. Lastet ned fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/

Schoenfeld, A. H. (2007). What is mathematical proficiency and how can it be assessed? I A. H. Schoenfeld (Red.), *Assessing mathematical proficiency* (s. 59–73). Berkely, CA: Mathematical Sciences Research Institute Publications, Cambridge University Press.

Skorpen, L. B. (2004). Å uttrykke musikk ved hjelp av tal. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 15*(4), 19–25.

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (Red.), *Kan det virkelig passe? – om matematiklæring* (s. 143–157). København: L&R Uddannelse, Tjørneserien.

Utdanningsdirektoratet (2013a). *Læreplan i matematikk fellesfag*. Hentet fra http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf?lang=nob

Utdanningsdirektoratet (2013b). *Læreplan i matematikk 2T og 2P*. Hentet fra http://data.udir.no/kl06/MAT5-02.pdf?lang=nno

Bjørdal, Mjeldheim, Rashdan, Herheim

Matematikk og forsikring

En onsdag morgen, klokken fem på halv ni, gikk vi som intervjuere inn dørene til Gjensidigegården ved Sandviksbodene. Vi hadde knapt rukket å sette oss ned i de dype sofaene ved resepsjonen, før saksbehandleren vi skulle intervjue kom og møtte oss. Vi ble geleidet inn på et lite møterom og tilbudt drikke. Saksbehandleren gikk gjennom prinsippene og reglene for forsikring i Gjensidige, og trakk spesielt frem det som omhandlet forsikring for kjøretøy. Hvem som kan få forsikring, prisene og de ulike utregningene ble gjennomgått.

Vi fikk først en presentasjon av hvordan de jobber i Gjensidige og innblikk i arbeidsoppgaver hver enkelt ansatt har. Så fikk vi omvisning i lokalet før vi satt oss ned igjen med intervjuobjektet og stilte noen spørsmål.

Hva gjør du på en vanlig arbeidsdag?

Hovedsakelig arbeider jeg med å registrere nye saker til behandling, og sender biler inn på verksted. De avanserte kalkylene for å regne ut forsikringspremier er takstfolkenes oppgave.

Denne teksten er en av flere tekster som er utarbeidet av elever fra Rothaugen skole som del av prosjektet Matematikk i arbeidslivet. Tre lærere, Anne-Marit Selstø Rathke, Linn-Merethe Kibsgård og Terje Pedersen, og elevene deres fra tre 10. klasser har samarbeidet med Rune Herheim fra Høgskulen på Vestlandet. Målet har vært å identifisere hvordan matematikk i skolen blir brukt utenfor skolen. Elevene har undersøkt over tjue yrker til foreldre og bekjente – med fokus på matematikk som kreves for å utføre yrket. De fikk opplæring i å intervjue, dokumentere og gjøre forhåndsundersøkelser før de ble delt i grupper på 2–3 elever og datainnsamlingen kunne starte. Etter lange prosesser før og etter besøkene på arbeidsplassene, ting tar ofte tid i arbeidslivet, kommer nå den første elevgruppens arbeid på trykk.

Elias Seim Bjørdal, **Georg Mjeldheim og Abdallah Jamal Issa Rashdan**
10. klasse, Rothaugen skole, Bergen

Rune Herheim
Høgskulen på Vestlandet
rune.herheim@hvl.no

Har du tatt en bestemt utdanning for å jobbe hos Gjensidige?

Det er ingen formelle krav, men Gjensidige ansetter mange nyutdannede jurister. I all hovedsak er generell arbeidserfaring i relevante felt viktig. Ellers kan jeg si at gode kommunikasjonsevner og velvillighet til samarbeid er essensielt i denne jobben.

Synes du at du får brukt utdanningen i jobben? På hvilken måte?

Jeg har 20 års arbeidserfaring innenfor forsikringsfeltet, og lærer bort mye av det jeg har erfart til de nyansatte.

Vil du si at matematikk er viktig innenfor jobben din?

Som jeg sa, står takstfolkene for de avanserte utregningene, men jeg foretar selv forsikringsberegninger ut ifra utregningene jeg mottar.

Hvordan kom du dit du er i dag?

Jeg vurderte å jobbe som sykepleier, men jeg bestemte meg til slutt for å jobbe i et finansieringsselskap. Etter å ha vært der en stund, ble jeg rekruttert til det som nå heter If-forsikring, og så gikk veien videre til Gjensidige.

Hvordan har arbeidet ditt samfunnsmessig betydning?

Forsikring er en viktig økonomisk ordning for å sikre privatpersoner og bedrifter mot store økonomiske tap etter uforutsette hendelser. Vi i forsikringsbransjen fungerer som et slags sikkerhetsnett.

Forsikringsprosessen

Forsikring er en økonomisk ordning som en person (den forsikrede) bruker for å sikre at et tilfeldig tap etter en uforutsett begivenhet ikke bæres av han alene. Gjennom et forsikringsselskap overføres denne risikoen på en rekke personer som alle kan bli utsatt for den samme tilfeldige og uforutsette tapsbringende hendelsen.

Når en kjøper en bil, må en ha bilen registrert på seg og dette ordnes på Biltilsynet. Forsikringsselskapet må kontaktes for å få laget (tegnet) en forsikring. Forsikringen som blir tegnet (utstedt) er obligatorisk ansvarsforsikring hvor melding fra forsikringsselskap blir sendt til Biltilsynet. Kunden får da utstedt vognkort fra Biltilsynet. Denne forsikringen kalles ansvarsforsikring og er noe alle som eier og kjører en bil på veien må ha.

Det blir beregnet en premie (pris) på forsikringen, som kunden må betale. Denne prisen er beregnet ut ifra hvilken type bil det er, hvor langt bilen skal kjøres, hvor kunden bor og ikke minst hvor mye bonus kunden kan få. Bonus er en premiering for skadefri kjøring. Den starter alltid på 20 % og hvis en kjører skadefritt blir det følgende bonusstige: starter med 20 %, neste år 30 %, 40 %, 50 %, 60 %, 70 %, 70 %, 70 %, 70 %, 70 %, 75 %.

Dersom det blir skade, vil bonus reduseres, og kunden må betale mer i forsikring. Bonustap reduseres forskjellig alt ut ifra hvor en ligger på bonusstigen. Eksempel: dersom kunden har 70 % bonus 2. året og det skjer skade, rykker kunden ned hele 30 % og blir stående med 40 % bonus. Her vil det lages et regnestykke til kunden som viser om det vil svare seg å bruke forsikringen eller ikke, og det er kunden selv som avgjør om han vil bruke forsikringen eller betale inn til selskapet for å unngå bonustap og prisøkning på bilforsikringen.

Kunden kan velge å få med forsikring for tyveri, brann, tauing, glass-skade og kollisjonsskade når han kjøper forsikring på bilen. Det koster mer jo mer en velger å ta med i forsikringen. Dersom kunden får en kollisjonsskade, må han ha det som heter kaskoforsikring for å få dekket skaden på eget kjøretøy. Dersom kunden har fått skadet bilen av en annen bil, vil ansvarsforsikringen på den bilen som forårsaket det, betale for skaden.

Når kunden får kaskoskade på bilen sin, vil forsikringsselskapet få en takstmann til å se på bilen. Enkelte verksteder takserer selv. De setter en sum på skaden/omfanget av skaden. Enten kan bilen repareres eller så må den kondemneres. At den kondemneres, betyr at bilen er totalskadd. Da har takstmannen vurdert skaden til å være så stor at den overstiger bilens verdi og kunden får utbetalt en totalsum fra Gjensidige.

Eksempel på totalskadet kjøretøy

En eldre kunde på 84 år kolliderer med en lastebil på motorvei. Kunden husker ikke hendelsen og forsikringsselskapet må vurdere videre saksgang ut ifra politirapport, vitneuttalelser og en skademelding fra kunden. Ifølge bilder er det store skader på bilen. Den er ikke kjørbar og blir fraktet inn til Falck. Takstmann vurderer skadeomfanget og foretar beregning.

Når det er en kondemnasjon, må det tas en verdivurdering hva bilen har av verdi. Da regner en snittverdi og bruker et regneprogram som heter Rødboka (rodboka.no). Der legger en inn registreringsnummer, kjørte km samt eventuelt ekstrautstyr bilen har. Da fås bilens verdisnitt i landet. En bruker også finn.no og søker på tilsvarende biler som ligger der. I tillegg tar en kontakt med en forhandler som selger dette bilmerket og hører hva de mener bilen har av verdi.

Rødboka	= 133 970 kr
Finn	= 149 000 kr
Finn	= 156 500 kr
Forhandler	= 149 000 kr

Så regner en snitt på 4:

133 970 kr + 149 000 kr + 156 500 kr + 149 000 kr = 588 470 kr

588 470 kr/4 = 147 118 kr

Kunden skal ha en omregistreringsavgift på 3 800 kr i tillegg. Da blir det: 147 118 kr + 3 800 kr = 150 918 kr totalt til kunden.

Om bilen har skader fra tidligere, skadet dør for eksempel, trekkes det for den skaden i oppgjøret. Først må det lages et regnestykke hva reparasjon av døren koster og så trekkes det i fra totalbeløpet:

Ny dør	2 568 kr
Lakk	3 784 kr
Arbeid: 4 timer × 980 kr	3 920 kr
=	10 272 kr

Totalt 10 272 kr + mva 25 % =	12 840 kr
Verdi 150 918 kr – skade 12 840 kr =	138 078 kr

Eksempel hvor en traktor skal repareres

En kunde har maskinskade på en traktor og skal betale en egenandel på kr. 10.000,-. I tillegg kommer et bruksfradrag beregnet på antall kjørte timer. Takstmannen har sagt ok til at Gjensidige dekker skaden. Regningen kommer fra verkstedet, som har fått inn mva. og egenandel fra kunden, samt bruksfradrag. Verkstedet sender regning til Gjensidige på resten, som Gjensidige da gjør opp for og deretter avslutter skadesaken.

De sender alltid ut en erstatningsoppgave til kunden fordi han skal ha igjen mva. i sitt regnskap. En erstatningsoppgave kan se slik ut:

Faktura fra verksted netto (uten mva.)	
	48 540 kr
Bruksfradrag (maskinskade 25 %)	– 12 135 kr
= Erstatningsgrunnlag	36 405 kr
Egenandel	– 10 000 kr
Totalt	26 405 kr

De må hele tiden vite hva som skal trekkes fra ut fra hvilken dekning kunden har og gjeldende regler i henhold til vilkår i avtalen med Gjensidige.

Det foretas ellers veldig mange beregninger ut ifra hva som har skjedd og hvilke sikkerhetsforskrifter som gjelder. Eksempler på dette er når en kunde kjører for langt med bilen i forhold til det som han har betalt for i forsikringen sin. Hvis det da skjer en skade, vil Gjensidige foreta noe som heter avkortning. Det vil si at de vil måtte redusere erstatningsutbetalingen til kunden. Det gjøres en prosentvis beregning som trekkes fra i oppgjøret til kunden.

Ellers foretas det utbetaling til kundenes kontoer dersom de ikke vil ha ut leiebil. De får i stedet utbetalt en kontantkompensasjon. En finner ut hvor mange dager bilen har stått på verksted og gir kundene kr. 150,- eller 250,- pr. dag for disse dagene alt etter hvilken forsikringsdekning de har valgt.

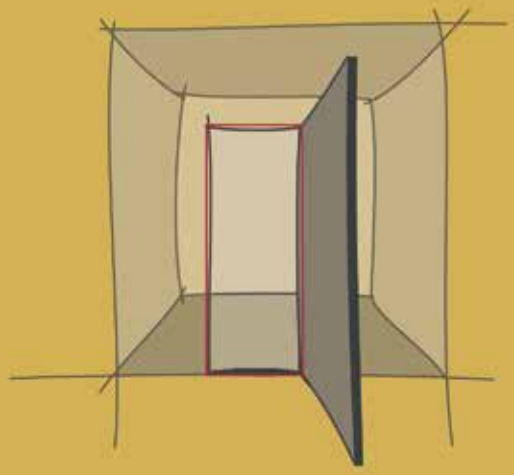
I denne teksten har vi skrevet om Gjensidige forsikring. Vi har vært på besøk i Gjensidigegården og fått presentert informasjon om forsikring og gjort intervju med en saksbehandler. Vi har skrevet om hvorfor og hvordan man bruker matematikk når man jobber i Gjensidige forsikring. Vi har også skrevet litt generelt om hva jobben innebærer. Grunnene til at matematikk er viktig når man jobber i Gjensidige er mange. I vår tekst har vi vist at man trenger å være god til å plusse, trekke fra, gange og dele med forholdsvis store tall, til å regne på ulike måter med prosent og brøk, og til å regne ut diverse gjennomsnittverdier.

Elevene har vist flere konkrete eksempler på at matematikk i kompetansemål fra både barne- og ungdomstrinn og videregående trinn er i daglig bruk i forsikringsbransjen.

I tillegg er det interessant at elevene må forholde seg til en kompleksitet de ikke i samme grad møter i skolehverdagen. Elevene får ikke oppgitt tall, slik de er vant til fra lærebøker. Her må man hele tiden finne tall som man gjør beregninger ut ifra.

Det er også interessant at det ikke alltid er ett svar som er det riktige. Saksbehandleren må for eksempel finne estimert pris på en bil fra flere ulike kilder og så ta en gjennomsnittsverdi. Et annet og kanskje sterkere eksempel er skadesaker der kunden selv må vurdere om han vil bruke forsikringen eller ikke. Da må det regnes ut hva et bonustap på for eksempel 30 % fører til av økning i forsikringspremien. Regnestykket må sammenholdes med hva det vil koste å betale reparasjonen uten å bruke forsikringen. Kanskje sitter bileier igjen med to valg: Ikke bruke forsikringen og bare reparere det som er påkrevd for at bilen skal være lovlig å kjøre, eller bruke forsikringen og få bilen reparert full ut slik den var før skaden oppstod.

Matematikk er involvert på sammensatte måter i vår hverdag. Det er ikke rett frem å vurdere om det er matematisk fornuftig å velge å inkludere tyveri, brann, tauing, glassskade og kollisjonsskade i forsikringen. Når har egentlig bilen blitt så gammel og sunket såpass i verdi at det ikke lenger er fornuftig å ha kaskoforsikring? Bilpriser synker eksponentielt, så det handler om å finne ut når bilens priskurve skjærer et prisnivå der det ikke er lønnsomt.



Nordkild

Matematikk i *lávvu*

Sammen med en forsker, Anne Birgitte Fyhn fra UiT – Norges Arktiske Universitet, så lærerne ved Kautokeino ungdomsskole muligheter for å bruke *lávvu* i matematikkundervisningen. Deler av denne undervisningen ble vist fram på Forskningsdagene på Campus Breivika i Tromsø.

Onsdag 28. september 2016 i Kautokeino pakker elever i 10. klasse og en håndfull foreldre *lávvuer*, horn, bålpanner, reinskinn, lassoer, ved, kjettinger med mer og starter sin ferd mot Tromsø. Målet med turen er undervisning for samiske elever på Prestvannet skole og for elever som besøker UiT på Forskningsdagene.

Torsdag 29. september stopper bussen utenfor Prestvannet skole, og ut kommer elevene og losser utstyr. De organiserer seg i fem grupper, og hver gruppe tar ansvar for hver sin *lávvu*. Bussen kjører av gårde, og gruppene fordeler utstyret seg imellom, noen tar med seg kjettingene og andre tar med seg veden og skinnene. Midt i dette står vi og ser på elever som frakter utstyr hit og dit. Det kan virke som et komplett kaos for en utenforstående, men dette har de øvd på, og de vet hva som trengs til sin *lávvu*. Det vi ser er noe høyst utradisjonelt, vi ser at rollene er snudd. Elevene skal undervise elever som går på Prestvannet skole, og lærerne skal være støttespillere.

De starter riggingen, og i løpet av kort tid settes det opp fem *lávvuer*. Fire blir stående mens den femte tas ned igjen, settes opp igjen og tas ned igjen. Det er slik det skal være. Denne gruppen skal undervise i hvordan en tradisjonell *lávvu* settes opp. Tradisjon er stikkordet for alt som foregår, alle gruppene underviser i noe som har med det tradisjonelle livet til samene i og rundt *lávvuen* å gjøre. Matlaging i *lávvuen* settes i sammenheng med måling. Spørsmål som: Hva gjør du når du ikke har et målebeger og du skal lage mat i en *lávvu*? Jo, du bruker neven til å måle med. En annen gruppe underviser i den rike fortellertradisjonen, om hvordan historier kan brukes i oppdragelsen av barn. Vi får en innføring i hvordan det er å vokse opp i en *lávvu*. «Det der, det e TV'n», sier en av lærerne og peker mot *árran*, ildstedet. En *lávvu* ligner på den geometriske figuren kjegle, og *árran* er da sentrumet i kjeglen. Når vi går videre til neste *lávvu*, lærer vi hvordan vi måler lengde på en lasso. Vi får kaste lasso på hornet, som ble pakket ned i Kautokeino og der-

Siv Ingrid Nordkild
UiT Norges arktiske universitet
siv.i.nordkild@uit.no

etter festet til et tre på Prestvannet skole. Før alt blir pakket i bussen igjen avsluttes dagen med å spise bidos, samisk kjøttsuppe, og drikke saft i skolegården.

Fredag 30. september: *lávvu*, horn, bålpanner, reinskinn, lassoer, ved og kjettinger er flyttet til UiT, campus Breivika. Været er ubarmhjertig. Det veksler mellom regn og opphold, og vi skal være ute hele dagen. Elevene rigger for nye gjester, i dag kommer det studenter fra UiT og elever fra andre skoler i Tromsø. Det samme opplegget blir gjort, men for at de besøkende skal få med seg alt, må undervisningen reduseres i tid. Dette var ikke helt planlagt, men med veiledning fra lærerne reduserer elevene undervisningen i tid.

Så pakkes det. Elever, lærere og foreldre skal hjem igjen. De tar en forsinket høstferie. Og vi fra UiT som har fulgt dem i tre intense dager står igjen og er mektig imponert. Tusen takk til lærere, foreldre og ikke minst elevene i 10. klasse på Kautokeino ungdomsskole. Dere har gitt oss uforglemmelige dager!

Flesvig

Intervju med to lærere

Denne gangen har Tangentens stafett kommet til Innlandet, der Sindre S. Flesvig har kontaktet to engasjerte matematikklærere i barneskolen. Gjennom intervjuer får vi innsikt i hva matematikklærere fra barnehage til videregående er opptatt av knyttet til matematikkundervisning. Kanskje kan tema som løftes fram, inspirere andre til å skrive i Tangenten? Stafettpinnen er nå sendt videre. Les også intervjuer i tidligere nummer av Tangenten.

Berit R. Bekk

Hva ser du på som god matematikkundervisning for trinnet du underviser på?

Jeg underviser i 4. klasse. Elever på dette trinnet er fortsatt glade i faget. De fleste temaene er morsomme og spennende, og det å ha tid til å sette seg inn i temaer, studere, konkretisere og finne løsninger på oppgavene er viktig. Lek og samarbeid i faget er også viktig, og det å ikke arbeide med mange ulike tema på samme tid.

Hva kunne du tenke deg å prøve ut i matematikkundervisningen på din skole?

Lære mer om økonomi, altså lage enkle personlige budsjett, planlegging av hva som er god og dårlig prioritering av personlig økonomi i det virkelige liv. Jeg opplever at det er mye sløsing i det daglige, slik at elevene kan bli mer bevisste på hva vi bør redusere i vårt forbruk. Jeg tror dette bør inn mye tidligere i skolen. Sjakk er også spennende. Her er det mye strategi å lære, og man kan for eksempel arrangere en sjakkturnering på skolen.

Hva synes du er mest spennende med arbeidet knyttet til matematikklæring/matematikkundervisning?

Det er å se elevenes glede og glød for faget.

Sindre S. Flesvig
Høgskolen i Innlandet
sindre.flesvig@inn.no

Idun Ø. Dalberg
Stange skole, Østre Toten
idun.dalberg@ostre-toten.kommune.no

Berit R. Bekk
Stange skole, Østre Toten
berit-bekk@hotmail.no

Det å se hvordan elever løser forskjellige problemer, og lytte til deres tankegang og strategi, er spennende. Her føler jeg faget har hatt en fin utvikling.

Hva synes du er den største utfordringen med å være matematikklærer?

Den største utfordringen er temaer som kanskje er på vei ut. På de 28 årene jeg har vært lærer har jeg brukt sedler og mynter som konkretiseringsmateriell. Kontanter brukes mindre, og jeg mister et viktig hjelpemiddel for de som trenger motivasjon for å skjønne og lære de fire regneartene. Det er lett å bruke mynter til å lære å låne og veksle. Om noen år vil det kanskje bare være kortbruk, og mynter og sedler vil være ukjent. Det å lære elevene å lese en klokke med visere har også forandret seg i disse årene, da barna ikke bruker klokke og ikke viser så stor interesse for å lære å bruke den.

Den siste utfordringen er alle kartlegginger som går på tid. Jeg synes de har tatt litt av gleden fra de som vil, men trenger ro og refleksjon på de gitte oppgavene. Det kan være viktig med tidtaking for å standardisere, men ikke for dem vi vet kan og som vil vise det de kan prestere. Matematikk er et morsomt fag for de yngste, så det er synd at så mange mister den gleden og motivasjonen oppover i skoletiden. Hva kan vi gjøre med dette?

Idun Ø. Dalberg

Hva ser du på som god matematikkundervisning for trinnet du underviser på?

Jeg synes god matematikkundervisning på 6. trinn er undervisning der elevene må snakke matematikk og diskutere oppgaver og problemstillinger i små grupper, eller i samspill med meg. At man diskuterer og forklarer framgangsmåter er sentralt for å få fram hvordan elevene tenker. Man må godta at de har ulike svar, og svaret skal ikke bestandig være i fokus.

Hva kunne du tenke deg å prøve ut i matematikkundervisningen på din skole?

Jeg kunne tenke meg å prøve ut mer systematisk jobbing med begreper innenfor matematikken.

Hva synes du er mest spennende med arbeidet knyttet til matematikklæring/matematikkundervisning?

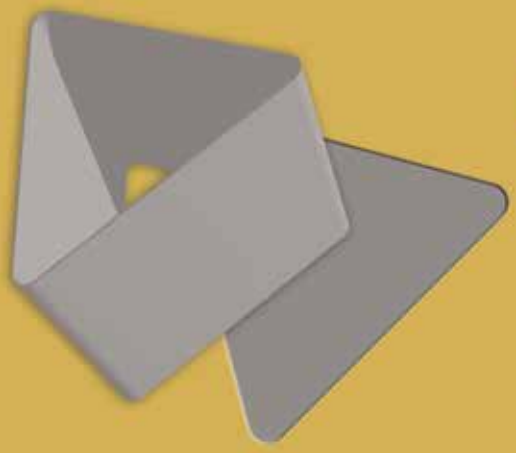
Det som er mest spennende er å jobbe med tekstoppgaver og problemløsing, og å lære elevene hvordan man kan angripe disse oppgavene. Blant annet hvordan man kan «hjelpe seg selv» i slike oppgaver, for eksempel ved å tegne enkle tegninger/modeller, og hvordan man skal vurdere om svaret man får er riktig. Det er alltid en «seier» når elevene sier at: «Da jeg fikk det svaret, skjønte jeg at det ikke kunne stemme».

Hva synes du er den største utfordringen med å være matematikklærer?

Den største utfordringen jeg har som matematikklærer er å få elevene til å forstå at matematikk er mye annet enn å regne i boka.

Hva kunne du tenke deg å lese om i «Tangenten»?

Jeg kunne tenke meg å få konkrete undervisningstips for å øve elevenes tallforståelse.



Naylor

Utforsk din «Fibonacciske» sekvens

Fibonaccisekvensen er en velkjent og fasinerende sekvens. Har du noensinne ønsket at du kunne ha funnet en sekvens som er like fasinerende? Det kan du, og dette kan være en morsom aktivitet for elevene.

Fibonacci var en av de beste matematikere i middelalderen. Han var født Leonardo Bonacci, i Pisa, Italia ca. 1175. I Europa brukte man på den tiden de romerske tallene. På en reise til Algerie lærte han de «indiske» tallene som bruker 10 symboler og et posisjonssystem for å representere tall. Da han kom tilbake til Italia, skrev han ei bok for å vise folk hvor fornuftig systemet er for all slags regning. Boka består av en beskrivelse av systemet og mange praktiske oppgaver for å overbevise folk om at systemet er veldig godt.

Mike Naylor
Matematikkbølgen/
Amborneset Matematikkpark
mike@matematikkbolgen.com

En av oppgavene handler om kaniner som får unger. Babykaninene vokser, og etter en måned begynner disse kaninene å få babyer også (etter et nærmere beskrevet mønster). Antall *par kaniner* hver måned blir med dette mønsteret 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … osv. Denne sekvensen ble senere kjent som *Fibonaccisekvensen* og har mange fantastiske egenskaper.

Sekvensen begynner med 1, 1, og deretter er hvert tall summen av de to forrige tallene. Rekken blir som følger: 1 + 1 = 2, så 1 + 2 = 3, og 2 + 3 = 5, osv. Vi kan bruke denne notasjonen for Fibonaccitallene:

$$F(1) = 1,\ F(2) = 1,\ F(n) = F(n-2) + F(n-1).$$

Før vi utforsker andre slags sekvenser du kan lage selv, skal vi kikke på noen egenskaper av Fibonaccisekvensen. Disse kan du etterpå prøve med dine egne sekvenser.

1. Faktorene til Fibonacci-tall. Hvilken Fibonaccitall er partall? Er det et mønster?

1, 1, **2**, 3, 5, **8**, 13, 21, **34**, 55, 89, **144**, 233, 377, **610**, 987, …

Det ser ut som at hvert tredje Fibonaccitall er et partall. Hvilket Fibonacitall er multiplum av 3?

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610 , 987, ...

Det ser ut som at dette blir hvert fjerde Fibonaccitall. Hva med multiplum av 4, 5, 6, osv? Hvilke mønstre kan du finne?

2. Gylne snitt. Forholdstall mellom to påfølgende Fibonaccitall er en tilnærming til det gylne snitt: $(1+\sqrt{5})/2 = 1{,}61803\ldots$ Tilnærmingen blir bedre og bedre jo lengre ut i sekvensen tallene er. For eksempel: 2:1 = 2; 3:2 = 1,5; 5:3 = 1,666…; 8:5 = 1,6: 13:8 = 1,625; … 377:233 = 1,61802…, osv.

En anvendelse av denne egenskapen er at du kan finne det neste tall i Fibonaccisekvensen ved å gange et Fibonaccitall med det gyldne snitt og avrunde resultatet. For eksempel er 34 x 1,618... = 55,013..., og 55 er det neste tallet i sekvensen.

3. Fibonaccisummer. Summene av de første n tall i sekvensen er bestandig en mindre enn et Fibonaccitall. For eksempel:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 33,$$

som er en mindre enn 34.

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 = 88,$$

som er en mindre enn 89. Vi kan skrive det som

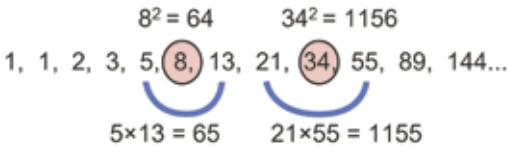
$$F(1) + F(2) + F(3) + \ldots + F(n) = F(n+2) - 1.$$

Hva med summen til hvert annet Fibonaccitall? Prøv med:

F(1)	og	F(2)
F(1) + F(3)		F(2) + F(4)
F(1) + F(3) + F(5)		F(2) + F(4) + F(6)
F(1) + F(3) + F(5) + F(7)		F(2) + F(4) + F(6) + F(8)
… osv		… osv

Hva slags mønster finnes i summene til hvert tredje Fibonaccitall? Hvert fjerde?

4. Multiplikasjon med naboer. Finn andre potens av et Fibonaccitall. Nå kan du finne produktet av de to tallene på hver side av Fibonaccitallet. Forskjellen mellom disse to tallene er alltid +1 eller –1. Se for eksempel på de tre tallene 5, 8 og 13:



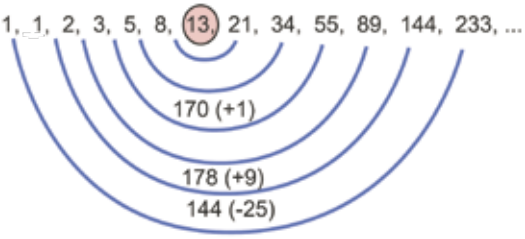
Figur 1

Vi kan skrive resultatet slik:

$$F(n)^2 = F(n-1) \cdot F(n+1) \pm 1.$$

Hvilken regel bestemmer om det blir +1 eller –1? (Det handler om hvis n er et partall eller oddetall).

Hva skjer hvis du finner produktet til tallene som er to plasser bort fra tallene i sekvensen? Tre plasser bort? Fire, osv? Et fantastisk mønster dukker opp:



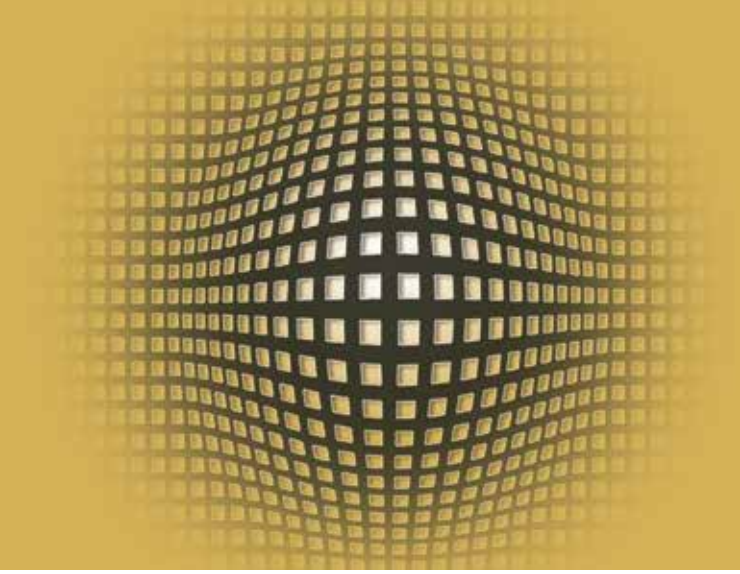
Figur 2

Forskjellene er: 1, 1, 4, 9, 25, 64, … dette er Fibonacci-sekvensen i andre potens!

Din tur!

En sekvens som starter med to tall som er noe annet enn 1 og 1 og vokser på en lignende måte på Fibonaccisekvensen heter en *generalisert Fibonaccisekvens*. Du kan lage din egen ved å starte med to tall som har en betydning for deg, kanskje din bursdag, måned og dag? Hvis du for

(fortsettes side 48)



Torkildsen

Storbyen

Anne bor i en by der gatene danner et kvadratisk rutenett der alle kvartalene er like store, se figuren.

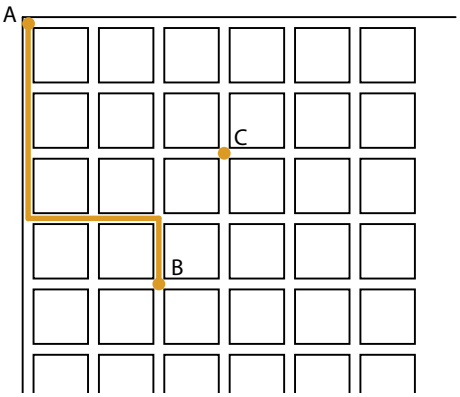
Huset hvor Anne bor, er merket med A. Hun bor i hjørnehuset. Berit, venninna, bor ved B. Hver gang Anne skal besøke Berit går hun den samme ruta. Denne er tegnet inn på kartet. En dag mens hun er på vei til Berit, langs den vanlige ruta, bestemmer hun seg for at neste gang skal hun følge en annen rute.

Finn ut hvor mange forskjellige ruter Anne kan velge, når hun alltid skal gå en rute som er kortest mulig. Ruta skal altså alltid være like lang som den vanlige.

Hvor mange korteste ruter er det fra A til C?

Finn ut hvor mange korteste ruter det er fra A til alle gatekryssene i en rimelig avstand fra A. Sett opp disse tallene på en grei og oversiktlig måte. Studer tallene, og se etter sammenhenger. Skriv ned sammenhengene som du finner.

Oppgaven kan utvides til også å trekke inn sannsynlighetsbegrepet. Vi kan tenke oss at Anne velger rute på en tilfeldig måte. Dette kan for eksempel gjøres slik: Hver gang hun kommer til et gatekryss har hun to valg; enten å gå «ned» eller «bortover» (hun vil bare ha to valg siden hun ikke skal gå «bakover»). For å avgjøre hvilken retning hun skal gå i, kaster hun en mynt og krone. Får hun mynt, går hun i en av retningene, krone i den andre. Hva er sannsynligheten for at hun kommer fram til Berit når veien velges på en tilfeldig måte?



Vi kan også komme inn på tilfeldige utvalg. Forsøk å lage *ei* setning, ikke for lang, som gir en fullstendig forklaring på en tilfeldig av de korteste veiene fra A til B. Forklaringen skal være slik at en person som skal gå fra A til B, selv skal kunne velge tilfeldig blant de korteste rutene. Forsøk så å sette dette i sammenheng med problemet om tilfeldig korteste rute.

Ole Einar Torkildsen
Høgskulen i Volda
oet@hivolda.no

Johannessen

Kondensstriper bak fly

De fleste har sett stripene etter fly som passerer i de øvre luftlag. Stripene er egentlig kondensert vanndamp, som straks blir til iskrystaller i den lave temperaturen. Men hvor langt er det stykket vi kan se før stripene forsvinner bak horisonten?

Vi antar at jordoverflaten er kulerund, og at vi som observatør befinner oss på selve jordoverflaten. Flyet flyr i en typisk flyhøyde på 10 km = 10000 m fra horisont til horisont, rett over hodene våre.

Figur 2 viser en forenklet modell hvor noen linjer og essensielle punkter er merket. Figuren viser kondensstripen (grønn) og jordoverflaten (brun) som deler av sirkler. I tillegg er horisontallinjen tegnet (stiplet i rødt). Horisontlinjen (DAE) i vår modell er en rett linje som tangerer jordoverflaten i A. Punkt A er observasjonspunktet, og posisjonen hvor vi ser flyet passere rett *over hodet*. En observatør kan bare se gjenstander som ligger over denne linjen.

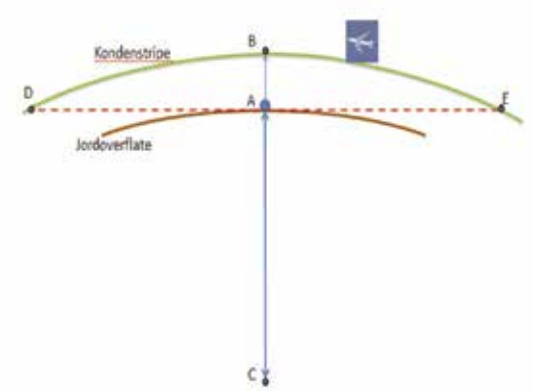
Merk: Hvis observatøren befinner seg over jordoverflaten, vil han eller hun se litt mer jord (eller hav). Punkt B er posisjonen til flyet i det det passerer rett over oss. Punkt C er jordas sentrum. Punktene D og E ligger der hvor kondensstripen «treffer» den rette horisontlinjen.

Tor Hjalmar Johannessen
Tidligere lektor i realfag
tor.hjalmar.johannessen@gmail.com

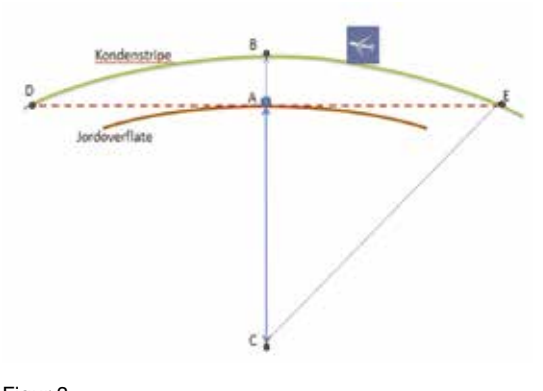
Figur 1: Kondensstriper etter fly.

Dette er en forenklet modell av virkeligheten. Avstanden AC er sterkt forkortet på figuren, og buene er ikke så krumme i virkeligheten.

Ved å bruke figur 2 kan vi nå regne ut leng-



Figur 2: Skisse med beregningsgrunnlag.



Figur 3

den av kondensstripen, dvs. sirkelbuen DBE. Vi antar at jordradien er 6 400 km og flyhøyden AB er 10 km. Kondensstripa vil derfor være 6 410 km over jordas sentrum. Jordradien og kondensstriperadien velges å være konstant i dette tilfellet.

Trekker vi en ny radius fra C til E (figur 3), blir CAE en rettvinklet trekant. Lengdene CE = CB = 6 410 km og AC = 6 400 km. Ved å bruke Pytagoras setning finner vi AE = 358 km. Hele horisontlinjen er dobbelt så lang, dvs. DE = 716 km.

Men hvor lang er egentlig BE? I virkeligheten er den nokså rett, så vi kan tilnærmet bruke AE som lengde.

Imidlertid kan vi finregne på dette. Via trigonometri finner vi vinkelen ∠ACE via cosinus. cos(∠ACE) = CA/CE = 6 400/6 410 = 0,998, som gir ACE = 3,20°. Hvis flyet hadde beveget seg rundt hele jorda i samme høyde, ville omkretsen på sirkelen vært 40 275,22 km. 3,20° utgjør 3,20/360 av denne lengden, altså 358,002 km, som blir likt for DB og BE. Med målenøyaktighet som legges til grunn her, nærmeste kilometer, blir dermed buelengden DBE 716 km, tilsvarende horisontlinjen DE.

Hvor langt er 358 eller 716 km? Ved å se på et kart finner vi at 716 km tilsvarer avstanden mellom Bergen og Stockholm (!) eller fra Namsos til Kristiansand. Shetland ligger ca. 350 km fra Bergen. Dvs. en observatør i Bergensområdet vil kunne se et fly (eller stripen fra et fly) over Shetland der stripen går under horisonten. I Oslo kan man se stripen etter amerikaflyet fra Stockholm til det er langt uti Nordsjøen. Man kan benytte Google Earth eller vanlige kart for avstandsmålinger.

Tenk deg et fly som går i 10 km høyde rundt hele jorda. Hvor mange observatører trengs for å følge hele flyets ferd? 40 275/716 er litt over 56.

Andre liknende beregninger

Beregningene over er temmelig lik de som brukes for å regne ut Mjøsas buling mellom Minnesund og Lillehammer. Sett avstanden Minnesund–Lillehammer = 90 km, og bruk jordradien gitt over.

En annen beregning er hvor langt unna horisonten er for en observatør som ser utover havet, og øyehøyden er 2 m over havnivå (6400,002 km km fra jordas sentrum)[1]. Ikke rart man kan se mastene på et skip mens selve skroget ligger under horisonten.

En annen og tilsvarende beregning gjelder avstanden mellom Larvik/Sørlandskysten og Danmark (Skagen). Haugskyer (kumulus) befinner seg hovedsakelig over land. Man ser ofte slike skyer i horisonten når man speider mot Danmark. Skybasen (underkanten) på skyene er fra 500 til 2000 m over havnivå, se rød pil på figur 4. Toppen på skyen kan være mange kilometer høyere.

Du kan selv beregne hvor langt unna slike skyer er der Sørlandskysten er kortest

Figur 4 Haugskyer (Cumulus)

fra Skagen, Danmark: 120 km. Larvik ligger 150 km unna Skagen. Kan vi se slike skyer over Skagen hvis skybasen er 1,5 km?

For ordens skyld:

I flygerkretser snakker man om «line of sight», som er avstanden til horisonten. Fra 10 000 m høyde er denne på 250 km, altså litt kortere enn 358 km. Årsaken er at horisonten på en slik avstand blir nokså obskur og dårlig mht. detaljer. En kondensstripe mot en klar, blå himmel er derimot mer distinkt og lettere å se, også mot horisonten.

Jordas radius er valgt lik 6 400 km. Egentlig varierer den fra 6 371 til 6 378km.

En flyhøyde er valgt lik 10 km. Dette er typisk for langdistansefly, og kan variere noe. Fly i lave høyder har sjelden kondensstriper.

Beregningene forutsetter glatt jordoverflate, og at observatøren er på havets nivå. Fjell og høydeforskjeller kan endre noe på forutsetningene.

Tips: En god referanse for flytrafikk er www.flightradar24.com. Her kan man studere enkeltfly som befinner seg i lufta. Man kan se på kartet hvor en kondensstripe og flyet som lager den befinner seg, og så sammenligne med aktuelle beregninger.

Note

1 Dette ser ut til å bryte med nøyaktigheten som ellers legges til grunn. Det viktigste er at den ene avstanden til jordsentrum er 0,002 km lengre enn jordradius der vi ser horisonten (6 400,000 km). En jordradius som er 10 km lengre eller kortere vil endre hele omkretsen med 31,4 km og ikke bety mye for avstanden til horisonten i dette tilfellet.

Gert Monstad Haga
Matematiske byggesteiner

Hana løfter fram fem matematiske byggesteiner – fem konstrukter – i denne boka om matematikk. Han behandler eksempel, definisjoner, bevis, modeller og oppgaver fra ulike perspektiv, fra matematikerens og lærerens ståsted. Matematikk ses her både som prosess og produkt. Byggesteinene oppfattes primært som produkt, men Hana vektlegger også prosessene knyttet til produktene – til hvordan byggesteinene utvikles og brukes. Forfatteren ivrer for å gi elever muligheter til å ta del i matematiske prosesser, til å lage eksempel, definere, resonnere, lage notasjoner, modellere og stille matematiske spørsmål. Boka er viktig fordi læreres metamatematiske innsikt gir grunnlag for slik undervisning.

ISBN 978-8290898-60-6 · 299 sider · 490,–
Caspar Forlag AS · www.caspar.no
Bestill på ordre@fagbokforlaget.no

Jahr

Funksjoner og derivasjon

Fra tid til annen hjelper jeg noen elever i videregående skole med matematikk. I den forbindelse har jeg registrert manglende forståelse for sammenhengen mellom en funksjons monotoniegenskaper og dens deriverte. Dette skyldes både undervisningen og lærebøkene. Jeg nevner ingen navn, men jeg vil gjerne meddele en liten opprydning.

Jeg kan begynne med et eksempel:

Gitt en funksjon f ved $f(x) = x^3 - 6x^2$. Oppgaven går ut på å finne ut hvor f er voksende og hvor den er avtakende. Korrekt løsning:

$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4) = 0$
når $x = 0$ og når $x = 4$.

Vi finner lett at $f'(x) > 0$ når $x < 0$ eller $x > 4$, og at $f'(x) > 0$ når $0 < x < 4$.

Einar Jahr
Pensjonert lærerutdanner
einjahr@hotmail.no

Siden f er kontinuerlig i hele $\mathbb{R}$, er f strengt avtakende i $[0, 4]$ og strengt voksende i $\langle\leftarrow, 0]$ og i $[4, \rightarrow\rangle$.

Merknader:
Mange av de lærebøkene og lærerproduserte fasitsvar jeg har sett, formulerer løsningen slik:

(1) $f(x)$ er voksende for $x \in \langle\leftarrow, 0\rangle$, avtakende for $x \in \langle 0, 4\rangle$ og voksende for $\langle 4, \rightarrow\rangle$.

Ofte ser man også som del av løsningen:

(2) $f(x)$ er voksende for $\langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 4, \rightarrow\rangle$.

Tar man dette bokstavelig, og det skal man jo i matematikk, betyr det for eksempel at $f(5)$ er voksende. Slik er det jo ikke. Monotoniegenskapene gjelder *funksjonen f*, og ikke de enkelte funksjonsverdiene. Monotoni er en egenskap som en funksjon kan ha i et *område*, ikke i punkter. Et område er i denne sammenhengen en delmengde av de reelle tallene $\mathbb{R}$ som består av ett eller flere – eventuelt ubegrenset mange – intervaller.

Definisjonene er slik:

- En funksjon f er *voksende* i området O når $x_1 < x_2$ $f(x_1) \leq f(x_2)$ for alle x_1 og x_2 i O.
- En funksjon f er *strengt voksende* i området O når $x_1 < x_2$ $f(x_1) < f(x_2)$ for alle x_1 og x_2 i O.

– En funksjon f er *avtakende* i området O når $x_1 < x_2$ $f(x_1) \geq f(x_2)$ for alle x_1 og x_2 i O.
– En funksjon f er *strengt avtakende* i området O når $x_1 < x_2$ $f(x_1) > f(x_2)$ for alle x_1 og x_2 i O.

Feilene i (1) og (2) ovenfor skyldes den misoppfatningen at *voksende* betyr positiv derivert og *avtakende* betyr negativ derivert. De områdene som nevnes der, består av nettopp de punktene x der $f(x)$ har det antydede fortegnet. Av denne grunn er tallene 0 og 4 unntatt fra løsningen. Man vil heller si at f verken er voksende eller avtakende i 0 og 4 enn å si at den er begge deler. Men ifølge definisjonene er det ikke snakk om hva f er i disse punktene, men om hvordan f opptfører seg i de angjeldende *intervallene*. Når f i eksemplet er strengt avtakende i [0, 4], betyr det at den i dette intervallet oppfyller kriterium 4 i definisjonen, selv om vi skulle velge $x_1 = 0$ eller $x_2 = 4$ eller begge deler.

Sammenhengen mellom en funksjons monotoniegenskaper og fortegnet til dens deriverte er som antydet i den korrekte løsningen. For å formulere denne sammenhengen helt presist, gir jeg først en definisjon:

Hvis O er et område, lar vi $\overline{\mathrm{O}}$ betegne *tillukningen* til O, dvs. unionen av O og mengden av eventuelle randpunkter til O (jeg regner med at begrepene randpunkt og indre punkt i et område er kjent for leseren).

Da har vi følgende setning:

La I være et intervall. Hvis en funksjon f er deriverbar i det indre av I og kontinuerlig i $\overline{\mathrm{I}}$, så gjelder følgende:

i) Hvis $f'(x) \geq 0$ for alle x i det indre av I, så er f voksende i $\overline{\mathrm{I}}$.
Hvis $f'(x) > 0$ for alle x i det indre av I, unntatt eventuelt i enkelte punkter, så er f strengt voksende i $\overline{\mathrm{I}}$.
ii) Hvis $f'(x) \leq 0$ for alle x i det indre av I, så er f avtakende i $\overline{\mathrm{I}}$.
Hvis $f'(x) < 0$ for alle x i det indre av I, unntatt eventuelt i enkelte punkter, så er f strengt avtakende i $\overline{\mathrm{I}}$.

Merknad: «unntatt eventuelt i enkelte punkter» betyr at vi kan ha $f'(x) = 0$ for noen verdier av x i I, men at det ikke skal være noe delintervall J av I der $f'(x) = 0$ i hele J.

For eksempel er funksjonen g gitt ved $g(x) = x^3$ strengt voksende i hele $\mathbb{R}$, selv om $g'(0) = 0$.

Det er viktig å merke seg at setningen over ikke gjelder dersom vi erstatter I med et vilkårlig område O. Feilen som er gjort i (2) ovenfor, skyldes at man ukritisk har slått sammen to atskilte intervaller til ett område. Ser vi på området $\langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 4, \rightarrow\rangle$, ser vi at $f'(x) > 0$ overalt her, men velger vi for eksempel $x_1 = -1$ og $x_2 = 5$, er $x_1 < x_2$, men $f(-1) = -7$ og $f(5) = -25$, og dermed er $f(x_1) > f(x_2)$, så f er ikke voksende i dette området.

Nå vil kanskje noen forsøke å forsvare oppfatningen at positiv derivert betyr voksende funksjon ved å si at om $f'(a) > 0$, så må vel f være voksende omkring a. Overraskende nok er heller ikke dette riktig. Betrakt funksjonen f gitt ved

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \text{ for } x \neq 0; f(0) = 0.$$

For $x \neq 0$ får vi .

$f'(x)$ går ikke mot noen grense når $x \to 0$, og er positiv og negativ for x vilkårlig nær 0.

Men f er deriverbar for $x = 0$!

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\Delta x + (\Delta x)^2 \sin\frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Det betyr at $f'(0) > 0$, men f er ikke voksende i noe intervall omkring 0. Da er det meningsløst å si at f er voksende i 0.

Noen vil nok bli overrasket over å se at en funksjon kan være deriverbar i hele $\mathbb{R}$, men at den deriverte kan være diskontinuerlig.

Baartman, Vos

Analyse av deleksamen for grunnskolelærerutdanningen

Verden endrer seg og dermed endes også undervisning, didaktikk og matematikkfaget. Hver dag er det nye funn i matematikk, og ny didaktisk innsikt blir utviklet. Ny innsikt endrer våre oppfatninger om hva elever, lærerstudenter og lærere bør vite og hva som må bli testet. I matematikkundervisningen er det for tiden særlig vekt på problemløsningsferdigheter, matematiske representasjoner, kreativitet og anvendelse. Disse ferdighetene blir referert til ved nøkkelordet *higher-order thinking skills* (OECD, 2013; Ananiadou & Claro, 2009). Også i didaktikken endres fokus til higher-order thinking skills, blant annet problemløsning, kreativitet, undersøkelser, eksperimentering, tverrfaglige prosjekter, diskusjon, vurdering og samarbeid.

Vi leser om en ønsket endring av undervisning i rapporten *Tett på realfag* (Kunnskapsdepartementet, 2015):

> Undervisningen preges av at læreren gjennomgår teori og viser eksempler som ligner på oppgavene i læreboka. Deretter arbeider elevene i stor grad individuelt med oppgaver som oftest er knyttet til prosedyrekunnskap. Denne formen for undervisning gir lite rom for kognitivt utfordrende og sammensatte problemstillinger.

Désiré Baartman
Discoro
desire.baartman@discoro.no

Pauline Vos
Universitetet i Agder
pauline.vos@uia.no

Kunnskapdepartementet ser at flere læringsarenaer og mer eksperimentering er nødvendig for å oppnå bedre resultater. I *Forskrift om rammeplan for grunnskolelærerutdanningene for 1.–7. trinn og 5.–10. trinn* (Kunnskapsdepartementet, 2016) leser vi at ferdigheter for lærerstudenter inkluderer at de:

> (1) har kunnskap om bruk av ulike læremidler, både digitale og andre, og muligheter og begrensninger ved slike læremidler, (2) kan analysere og vurdere elevers tenkemåter, argumentasjon og løsningsmetoder ut fra ulike perspektiv på kunnskap og læring, (3) kan legge til rette for tidlig innsats og tilpasse opplæringen til elevens ulike behov, og (4) kan planlegge, lede og kritisk vurdere varierte og differensierte læringsaktiviteter, også digitale, som fremmer dybdelæring og utvikling av de grunnleggende ferdighetene.

Disse ferdigheter peker på didaktiske higher-order thinking skills.

For tjue år siden inneholdt eksamen i stor

grad rene regneoppgaver med bare tall, operasjoner og algoritmer. GLU deleksamen 2016 (tilgjengelig fra http://www.nokut.no) er et godt eksempel på hvordan fokuset har endret seg til en eksamen som krever at lærerstudentene: (1) må forklare, begrunne sine svar og løsninger; (2) må vise sine kunnskaper om hva slags feil som oppstår blant elevene; (3) må være i stand til å vise og bruke ulike representasjoner; (4) blir spurt om hvordan de ville forklare elevene visse matematiske oppgaver eller begreper; (5) må svare på spørsmål som krever begrepsmessig kunnskap. En test som GLU deleksamen gir innsikt i *nåtidens* undervisning og i myndighetenes synspunkt, men en bør se mot *framtiden*, fordi forskning (Ball, 2008; Boaler 2015) peker på at det er flere kunnskaper og ferdigheter en lærer trenger. I tillegg har ulike organisasjoner identifisert nye kunnskaper og ferdigheter som framtidens borgere trenger (OECD, 2013; Kunnskapsdepartementet, 2015; 2016). Deleksamen kan være et styringssignal om ønskete endringer.

På dette grunnlaget analyserer vi GLU-eksamen fra to ulike perspektiver. Vi tar perspektivet 'Kunnskap for Læring' (Krathwohl, 2002; Collis & Biggs, 2014), og perspektivet 'Kunnskap for Lærere' (Ball, 2008; Koehler & Mishra, 2009). Analysen vi bruker er en praktisk gjennomføring som kan gi lektorer, lærere og lærerstudenter et klarere syn på hvordan en kan møte framtidige kunnskapskrav. Nedenfor skriver vi om hva de to perspektivene omfatter og gir en oppsummering av analysen basert på disse perspektivene. Vi gir også eksempler som kan vise en retning for framtidig GLU deleksamen, slik at den passer de eksisterende mål.

Perspektivet: Nivåer av Kunnskap for Læring (levels of knowledge for learning)

Det første perspektivet er basert på Blooms Taxonomy (Krathwohl, 2002) og SOLO Taxonomy (Collis & Biggs, 2014). Disse to taksonomier består av kategorier som brukes til å identifisere hvilke kunnskaper en oppgave krever. Kategoriene er faktakunnskap, prosedyrekunnskap, begrepsmessig kunnskap og higher-order kunnskap. Faktakunnskap handler om gjengivelse. Spørsmålet «hva er en diameter?» ber om faktakunnskap**.** Lang divisjon ber om prosedyrekunnskap. Anvendelse av ulike representasjoner er begrepsmessig kunnskap**.** Higher-order kunnskap er for eksempel å bevise, begrunne, resonnere og modellere. Disse kategoriene har læring med *retention* og *transfer* som formål. *Retention* betyr at elever husker hva de har lært over lang tid, og at de er i stand til å utføre ferdighetene i lang tid etter de har blitt undervist i dem. For eksempel hvis elever på 4. trinn fortsatt kan utføre multiplikasjonsalgoritmen etter sommerferien. *Transfer* betyr at elever er i stand til å anvende kunnskap og ferdigheter fleksibelt for eksempel i fagområder utenfor matematikk og i situasjoner utenfor skolen. For å oppnå retention og transfer trenger elever å arbeide på

Matematisk kunnskap	Didaktisk kunnskap	Begrepene på engelsk
Matematisk faktakunnskap	Didaktisk faktakunnskap	Factual and declarative knowledge
Matematisk prosedyrekunnskap	Didaktisk prosedyrekunnskap	Procedural knowledge
Matematisk begrepsmessig kunnskap	Didaktisk begrepsmessig kunnskap	Conceptual knowledge
Matematisk higher-order-kunnskap	Didaktisk higher-order-kunnskap	Higher-order knowledge

Tabell 1: Nivåer av Kunnskap for Læring

Type kunnskap	Antall spørsmål	Prosent av poeng
Matematisk		
faktakunnskap	2,5	6 %
prosedyrekunnskap	10	30 %
begrepsmessig kunnskap	7,5	26 %
higher-order kunnskap	1	5 %
Didaktisk		
faktakunnskap	0	0 %
prosedyrekunnskap	3	15 %
begrepsmessig kunnskap	6	18 %
higher-order kunnskap	0	0 %

Tabell 2: Resultat av analysen for «Nivåer av kunnskap for læring»

alle nivåer av læring og kunnskap.

Vi skiller mellom to hovednivåer av kunnskap for lærerstudenter: matematisk kunnskap og didaktisk kunnskap. Begge to kan deles opp i faktakunnskap, prosedyrekunnskap, begrepsmessig kunnskap og higher-order kunnskap. Se på tabell 1 for de ulike kategoriene. Når en kategoriserer oppgaver, bør en ta i betrakting hva studentene har lært og hvordan de ble undervist. For eksempel vil oppgaven $12 \cdot 12 = \ldots$ kreve faktakunnskap av elever på VGS, mest sannsynligvis prosedyrekunnskap av elever på mellomtrinnet og mest sannsynligvis begrepsmessig kunnskap av elever på barnetrinnet. Basert på taksonomiene kan en kategorisere både matematiske og didaktiske oppgaver.

Vi gir ett eksempel på hvordan kategoriseringen foregikk og bruker oppgave 1a fra GLU eksamen (figur 1).

Oppgave 1a (første del). *Hvilket av tallene nedenfor har samme verdi som* $\frac{3}{5}$*?*

Første del av oppgave 1a ber om omgjøring av brøk til desimaltall. Omgjøringsprosedyren er en del av GLU-læreplanen og derfor blir oppgaven kategorisert som en oppgave som krever matematisk *prosedyrekunnskap*. Men når en student husker at $\frac{3}{5} = 0{,}6$, blir det matematisk *faktakunnskap*. I slike tilfeller har vi fordelt ett poeng over to kategorier, et halvt poeng hver. Hvis oppgaven kategoriseres for elever på mellomtrinnet, blir oppgaven tildelt andre kategorier.

Oppgave 1

a) Hvilket av tallene nedenfor har samme verdi som $\frac{3}{5}$? Vis to ulike måter elever kan bruke for å resonnere seg fram til riktig svar.

- 3,5
- 0,35
- 0,6
- 0,3

Figur 1: Oppgave 1a

Oppgave 1a (andre del): *Vis to ulike måter elever kan bruke for å resonnere seg fram til riktig svar.*

Andre del av oppgave 1a krever at lærerstudentene analyserer ulike utfordringer elever stilles overfor når de blir spurt om omgjøring av brøk til desimaltall. Derfor kategoriserer vi oppgaven for lærerstuden-

ter som *didaktisk begrepsmessig* kunnskap. På samme måte ble alle oppgaver fra GLU deleksamen analysert.

Resultater basert på perspektivet «Kunnskap for læring»

GLU-eksamen inneholder fire oppgaver med i alt 30 spørsmål (i 20 deloppgaver). Vi har vurdert hvert spørsmål fordi det det finnes deloppgaver med tre ulike spørsmål som tildeles til tre ulike kategorier. Sammendrag av resultatene på analysen vises i tabell 2. Full analyse finnes på nettsiden www.discoro.no (søk på 'GLU'). Legg merke til at beregnet prosent i siste kolonne er basert på antall poeng for en deloppgave (20), og ikke basert på antall spørsmål (30) i kolonne to!

Basert på skillet mellom matematisk kunnskap og didaktisk kunnskap ser vi at eksamen har et sterkt fokus på matematisk kunnskap. 21 spørsmål ber om matematisk kunnskap mot 9 oppgaver hvor det blir spurt om didaktisk kunnskap.

Matematisk kunnskap

Ser vi på kategoriene innenfor matematisk kunnskap, er det et sterkt fokus på prosedyrekunnskap og begrepsmessig kunnskap. Det er én oppgave som ber om matematisk faktakunnskap, nemlig oppgave 2c (figur 2).

c) Hva er et irrasjonalt tall? Gi tre eksempler på irrasjonale tall.

Figur 2: Oppgave 2c

Flere oppgaver krever (implisitt) matematisk faktakunnskap, men det er ikke etterspurt eksplisitt. Én oppgave (1e) ber om higher-order matematisk kunnskap. Den er en modelleringsoppgave (figur 3).

e) I testamentet gir tante Beate halvparten av formuen til Røde Kors. Hennes tre nevøer skal dele resten. Per skal bare få to tredeler av det hver av de to andre nevøene får, fordi han besøkte henne så lite de siste årene. Hvor stor brøkdel av formuen får Per?

Figur 3: Oppgave 1e

Du får et stykke land på størrelsen 60 × 100 meter til hestene dine, som du har på stallen. Ponniene får 25 % av landet og de store hestene får resten av området. Stallen har 4 ponnier og 8 store hester.

1. Kom med en løsning hvor hver ponni og hest får sitt eget stykke land. Sørg for at hvert stykke land kan nås uten å gå gjennom en annens stykke land.
2. Tegn planen din og beskriv hvorfor du har delt opp landet som du har gjort.

Basert på vår forståelse av de målene som er satt av OECD (2013) og Kunnskapsdepartementet (2015; 2016) inneholder GLU-eksamener ikke nok oppgaver som krever higher-order kunnskap. I tillegg mener forfatterne at for å få en god balanse kunne eksamen ta opp flere oppgaver som krever faktakunnskap. Et eksempel på en oppgave som krever faktakunnskap kan være «Gi en definisjon av prosent (%).»

Med utgangspunkt i oppgave 4a gir vi et eksempel på hvordan oppgaver kan endres til å be om higher-order kunnskap (figur 4).

Oppgave 4a fra GLU-eksamen krever prosedyrekunnskap og begrepsmessig kunnskap. Når vi endrer oppgaven i en higher-order oppgave hvor både prosent og brøk må bli brukt, kan den se ut som i rammen.

Oppgave 4

a) Hvis du skraverer 25 % av $\frac{2}{3}$ av et rektangel, hvor stor brøkdel av hele rektangelet har du skravert? Forklar resonnementet ditt.

Figur 4: Oppgave 4a

Denne oppgaven krever higher-order tenkning, fordi det finnes flere riktige løsninger. Hvordan en velger å tegne 25 % av 60 × 100-rektangelet til ponnier, vil allerede gi ulike former. Selv trekanter er en mulig løsning for ponniene. Studentene må bruke forskjellige typer og nivåer av kunnskap og ferdigheter (måling, det å jobbe med deling, proporsjoner, brøk, prosenter, samt design, visualisering og resonnement). Oppgaven oppmuntrer til kreativitet og diskusjon.

Didaktisk kunnskap

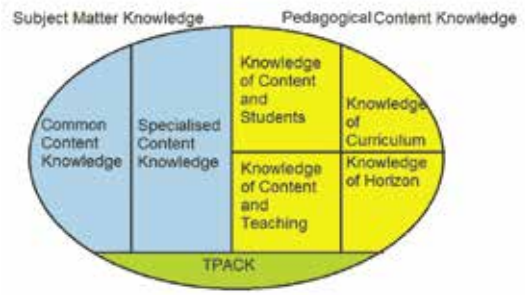
Når vi tar kategoriene for didaktisk kunnskap (tabell 2) ser vi at 3 av 30 spørsmål ber om didaktisk prosedyrekunnskap og 6 av 30 spørsmål ber om didaktisk begrepsmessig kunnskap. Det er ingen oppgaver om didaktisk faktakunnskap. Imidlertid ligger den største utelatelsen i at det er ingen oppgaver som krever higher-order kunnskap. Vi gir derfor forslag på to oppgaver som ber om didaktisk faktakunnskap, og deretter to oppgaver som ber om higher-order didaktisk kunnskap. Eksempler på oppgaver som ber om didaktisk faktakunnskap:

- Hva er 'prosess-objekt-dualiteten' for brøk?
- Gi et eksempel på en behavioristisk tilnærming for oversetting av brøk til prosent.

Begge to spørsmål handler om gjengivelse av teoretisk informasjon.

Eksempler på oppgaver som krever higher-order didaktisk kunnskap:

- Hva er forskjellen(e) mellom de to oppgavene (4a og den nye versjonen) med hensyn til kunnskap og ferdigheter elevene trenger?
- Design en (praktisk) aktivitet hvor elevene på 6. trinn bruker brøk.



Figur 5: Skjemaet 'Kunnskap for lærere' inklusive TPACK

Perspektivet: Kunnskap for lærere

Vi har tidligere i denne teksten skrevet at vi vil analysere GLU-eksamen fra to ulike perspektiver. Her ser vi på det andre perspektivet, nemlig 'Kunnskap for Lærere' som er basert på kategoriene som ble definert av Deborah Ball (Ball et. al, 2008). Vi har utvidet dem med kategorien TPACK (se figur 5 og kategori 5 under), som er basert på Koehler og Mishra (2009).

Kategoriene har fokus på hva slags kunnskap en lærer bruker og trenger i jobben sin, nemlig *Subject Matter Knowledge,* og *Pedagogical Content Knowledge*. *Subject Matter Knowledge* deles opp i *Common Content Knowledge* og *Specialized Content Knowledge*. Common Content Knowledge er matematisk kunnskap, som er den samme for lærere og ikke-lærere. Specialized Content Knowledge er fortsatt matematisk kunnskap, men går utover det som ikke-lærere bør vite. En lærer bør for eksempel være bevisst på ulike notasjoner for samme tall:

Type kunnskap	Antall spørsmål	Prosent
Subject Matter Knowledge		
Common Content Knowledge (CCK)	11	33 %
Specialized Content Knowledge (SCK)	11	38 %
Pedagogical Content Knowledge		
Knowledge of Content and Students (KCS)	5	15 %
Knowledge of Content and Teaching (KCT)	2,5	11 %
Knowledge of Curriculum (KC)	0	0 %
Knowledge of Horizon (KH)	0,5	1 %
Technology, Pedagogy and Content Knowledge (TPACK)	0	0 %

Tabell 3: Resultat av analysen for 'Kunnskap for Lærere'

$$1/4,\ \frac{1}{4},\ 0{,}25 \text{ og } 0.25$$

Specialized Content Knowledge er matematisk kunnskap: det å gjenkjenne ulike riktige strategier og løsninger, vite om riktige notasjoner og bruk av riktig, matematisk ordforråd.

Pedagogical Content Knowledge deles opp i fem kategorier:

1. Knowledge of Content and Students handler for eksempel om å vite når en elev har svart feil, hva som ligger bak tankegangen og hvordan man kan gi tilbakemeldinger og veiledning til eleven.
2. Knowledge of Content and Teaching er en kombinasjon av kunnskap om matematikk og didaktikk, for eksempel å vite hvilke eksempler egner seg for å introdusere et emne, vurdere fordeler og ulemper av ulike undervisningsrepresentasjoner og materialer som brukes for å lære en bestemt idé.
3. Knowledge of the Curriculum er kunnskap om læreplanen, hva som har blitt undervist tidligere, men også hvor visse kunnskaper og ferdigheter er nødvendig senere i skolen.
4. Knowledge of the Horizon er kunnskap om hvordan og hvor elevene trenger visse kunnskaper og ferdigheter i dagligliv, arbeidsliv og samfunnsliv.
5. Den siste kategorien er Technological Pedagogical Content Knowledge Technology (TPACK) og den omfatter både Subject matter Knowledge og Pedagogical Content Knowledge. TPACK er kunnskap om hvordan teknologi påvirker undervisning, læring og matematikkfaget.

Resultater basert på perspektivet «Kunnskap for lærere»

Vi gjentar at GLU-eksamen inneholder fire oppgaver med i alt 30 spørsmål (i 20 deloppgaver). Vi ser på hvert spørsmål fordi det finnes deloppgaver med tre ulike spørsmål som tilhører tre ulike kategorier. Resultatene av kategoriseringen vises i tabell 3. Legg merke til at beregnet prosent i siste kolonne er basert på antall poeng for en deloppgave (20), og ikke basert på antall spørsmål (30) i kolonne to!

Vi ser, ved bruk av kategoriseringen basert på perspektivet 'Kunnskap for Lærere', at eksamen har et enda sterkere fokus på matematisk kunnskap (*Subject Matter Knowledge*) nemlig 22 av 30 spørsmål, mot 8 av 30 som ber om didaktisk kunnskap (*Pedagogical Content Knowledge*). I kategoriene innenfor *Subject Matter Knowl-*

Oppgaver som krever Knowledge of Content and Teaching:
- Hvordan ville du introdusert begrepet brøk på 4. trinn?
- Når og hvorfor er det nyttig å være i stand til å bytte mellom brøk, prosent og desimaltall?

Oppgaver som krever Knowledge of the Curriculum:
- For hvilke emner etter 7. (eller 10.) trinn er kunnskap om brøk avgjørende?
- Gi tre grunner til at du bør innføre desimaler før du innfører brøk.
- Gi tre grunner til at du bør innføre brøk før du innfører desimaler.

Oppgaver som krever Knowledge of the Horizon:
- Gi eksempler på 3 arbeidsrelaterte situasjoner der brøk/prosent er brukt og som passer som et godt eksempel på problemer som kan forstås av elever på 6.trinn.

Oppgaver som krever Knowledge of Content and Technology:
- Hvilken påvirkning har bruk av en kalkulator på den måten elevene løser oppgaver om brøk?
- Vurder dataprogrammet om brøk 'Fraction Matcher' på nettsiden: https://phet.colorado.edu/sims/html/fraction-matcher/latest/fraction-matcher_en.html og analyser hvilke matematiske og tekniske kunnskaper det krever av elevene.
  Hvilket trinn passer programmet for? Begrunn.

edge er det 11 av 30 spørsmål som handler om *Common Content Knowledge*, og 11 av 30 spørsmål ber om *Specialized Content Knowledge*. I kategoriene innenfor *Pedagogical Content Knowledge* viser analysen fem spørsmål om *Knowledge of Students,* tre spørsmål om (delvis) *Knowledge of Content and Teaching* og ett spørsmål som er relatert til *Knowledge of the Horizon*. Det finnes ingen oppgave om *Knowledge of the Curriculum,* eller om *TPACK*.

Vi konkluderer med at det er sterkere fokus på matematisk kunnskap enn på nettopp den kunnskapen som skiller lærere fra andre yrkesgrupper, den kunnskap de trenger i klasserommet og i jobben sin, nemlig; didaktisk/pedagogisk kunnskap. Eksamen inneholder en del *Knowledge of Content and Students* of *Knowledge of Content and Teaching* men eksamen ber ikke om et bredere syn på matematikkutdanning (KC, KH, TPACK).

Vi gir noen eksempler på oppgaver som kunne bli inkludert i GLU-eksamen, og som krever *Pedagogical Content Knowledge:* KCS, KCT, KC, KH og TPACK. (Faktarute neste side.)

Mulige endringer for framtiden

Det er interessant å kombinere perspektivet om 'Kunnskap for Læring' og perspektivet 'Kunnskap for Lærere' på eksamensoppgaver, slik at lærerstudenter ved neste GLU-eksamen kan få higher-order-oppgaver om pedagogisk/didaktisk kunnskap. Higher-order-didaktiske spørsmål vil være oppgaver som krever problemløsningsferdigheter og kreativitet fra lærerstudentene. Lærerstudenter kan bli spurt om å lage oppgaver selv. For eksempel å lage en oppgave for trinn x, innenfor emnet y, om faktakunnskap, om prosedyre-kunnskap, begrepsmessig kunnskap og higher-order-kunnskap. Dermed rettes fokuset mot mål som Kunnskapsdepartementet har satt, og gapet mellom hva lærerstudenter lærer og hva de trenger i jobben deres kan reduseres. Når en anvender perspektivene 'Kunnskap for læring' og 'Kunnskap for lærere' til å lage eksamensoppgaver, kan eksamen bli mer yrkesspesifikk, og den kan få et sterkere fokus på hva lærere trenger i utøvelsen av yrket. Den vil inneholde mer higher-order thinking skills – både matematiske og didaktiske.

Referanser

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Boaler, J. (2015). *Mathematical Mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Collis, K., & Biggs, J. (2014). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy (Structure of the observed learning outcome)*. New York: Academic Press.

Krathwohl, D. R. (2002). A revision of Bloom's Taxonomy: an overview. *Theory into Practice, 41*(4), 212–218.

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9*(1), 60–70.

Kunnskapsdepartementet (2016). *Forskrift om rammeplan for grunnskolelærerutdanning 1–7 og 5–10*. Hentet fra: www.regjeringen.no/dokumenter

Kunnskapsdepartementet (2015). *Tett på realfag. Nasjonal strategi for realfag i barnehagen og grunnopplæringen (2015–2019).* Hentet fra: www.regjeringen.no

OECD (2013). *The skills needed for the 21st century*. Paris: OECD Publishing.

Ananiadou, K., & Claro, M. (2009). *21st century skills and competences for new millennium learners in OECD countries*. Hentet fra: www.oecd-ilibrary.org/

(fortsatt fra side 34)

eksempel er født 5. juli kan du lage en sekvens slik:

5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131, 212, 343, 555, …

Lek med ideene i artikkelen og prøv lignende utforsking med sekvensen din. Se hva slags egenskaper, sammenhenger og mønster som finnes. Du skal finne mye … garantert!

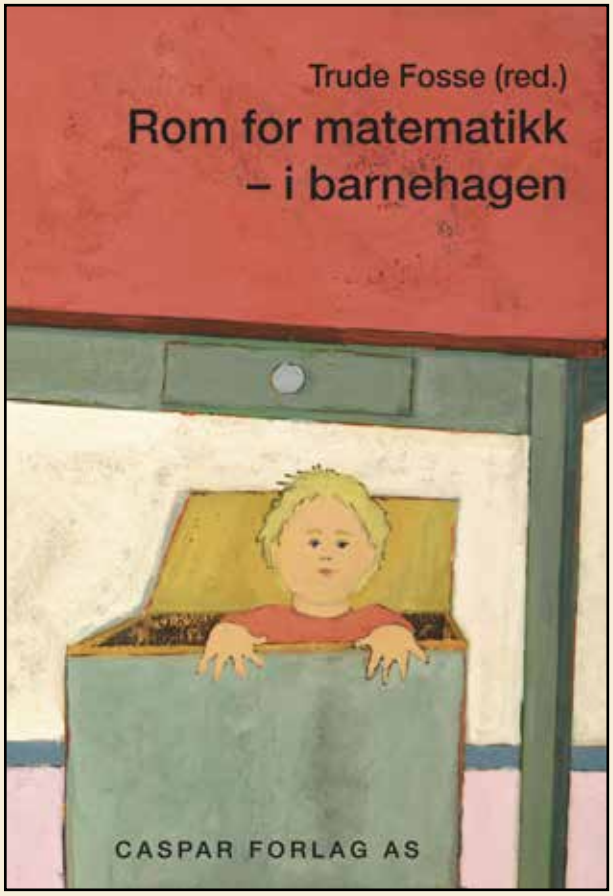
Hana og Hansen: *Matematiske horisonter I*

Hana og Hansen gir i denne boka en fortellingsbasert innføring i sentrale tema innenfor matematisk analyse. Den legger opp til at lesere møter boka for å lære matematisk analyse og for å få innsikt som fremtidige lærere. Leserne får derfor anledning til å ta del i matematiske tankeganger og prosesser, de erfarer generell matematisk aktivitet, og får metaperspektiv på egen og andres læring. Det oppfordres til matematisk utforsking – til å utvikle egne spørsmål og eksempel. Boka er skrevet ut ifra Nasjonale retningslinjer for grunnskolelærerutdanningen 5. – 10. trinn, Matematikk 2. Den er rettet mot lærerstudenter, lærere og andre som ønsker en alternativ tilnærming til matematisk analyse.

ISBN 978-8290898-67-5
191 sider · 385,–
Caspar Forlag AS · www.caspar.no
Bestill på ordre@fagbokforlaget.no

Trude Fosse (red.)
Rom for matematikk – i barnehagen

Rom for matematikk – i barnehagen er en nødvendig bok for arbeid med matematikk i barnehagelærerutdanningen. Forfatterne viser ulike matematikkdidaktiske innfallsvinkler til fagområdet matematikk og barn. Fagstoffet blir presentert med nærhet til praksisfeltet samtidig som det blir satt inn i faglige og historiske sammenhenger. Boka utfordrer og bevisstgjør leserne til å se muligheter i barns matematiske verden.



Bidragsytere:
Magni Hope Lossius:
Bildenes betydning – for små barn

Gert Monstad Hana:
Varians og invarians

Leif Bjørn Skorpen:
Utforskande tenking og samtale

Line I. Rønning Føsker:
Grip rommet!

Vigdis Flottorp og Torgunn Wøien:
Barns klassifisering og pedagogens muligheter

Elena Bøhler:
Matematikk i barnehagen: en historie

ISBN 978-8290898-57-6

137 sider · 365,–

Caspar Forlag AS · www.caspar.no ·
Bestill på ordre@fagbokforlaget.no

Realfagbygget *A*4, NTNU · 7491 Trondheim · +47 73 55 11 42 · ms@matematikksenteret.no

Bedre matematikk for yrkesfagene

I fire år har Matematikksenteret jobbet med et prosjekt om yrkesretting og relevans i matematikkundervisningen på de yrkesfaglige utdanningsprogrammene i den videregående skolen. En ny stortingsmelding ser ut til å ende med læreplaner som viderefører tankegangen fra prosjektet.

– Prosjektet «Fellesfag, yrkesretting og relevans» (FYR) begynte egentlig som et prosjekt for å utvikle relevante ressurser i fire fellesfag, deriblant matematikk, innen yrkesfagene. Etter hvert har det blitt mer og mer et skoleutviklingsprosjekt, der fellesfagene på de yrkesfaglige utdanningsprogrammene ses i sammenheng med programfagene, forklarer Jens Arne Meistad. Han har vært Matematikksenterets prosjektleder og har hatt ansvar for et FYR-nettverk med 19 koordinatorer over hele landet. Meistad har sett en positiv utvikling de siste fire årene.

Mer yrkesrelevant matematikk

FYR-prosjektet ble avsluttet ved årsskiftet. Tankegangen i FYR-prosjektet har vært at de ulike retningene innen yrkesfag har behov for mer relevant matematikkundervisning enn de tradisjonelt har hatt.

– Det å bruke oppgaver og faglig innhold som er relevant for en bransje eller et framtidig yrke er viktig, både for kunnskapen og motivasjonen sin del. En som skal bli elektriker har andre behov enn en som skal bli kokk. Derfor er det viktig at elektroeleven får oppgaver som er relevante for sitt fag, mens eleven på kokkelinja får utfordringer som er relevante for sitt fag, sier Meistad.

Skolelederen er avgjørende

Dette krever tett samarbeid mellom matematikklæreren og programfaglæreren på skolen. Skoleledere har en avgjørende rolle for å legge til rette for dette samarbeidet. Fysisk tilrettelegging kan handle om at lærere får samlokaliserte

arbeidsplasser, og et godt eksempel på faglig samarbeid er at mange skoler har utviklet årshjul som viser hvordan et fag som matematikk kan være et godt redskapsfag for å kunne forstå programfagene. Et slikt årshjul sikrer at rekkefølgen på matematikkemnene blir korrekt i forhold til emnene i programfaget.

– Tydelige strukturer på skolen er et viktig utgangspunkt. Mange matematikklærere mangler kunnskap om programfagene. Skal undervisningen oppleves relevant for elevene, må det legges til rette for samarbeid mellom de ulike lærerne. Derfor har FYR-prosjektet fått mer fokus på skoleutvikling i den siste delen av prosjektet, sier Meistad.

Ressursutvikling har det blitt uansett – nesten 2.000 ressurser i form av oppgaver, ideer og forslag til opplegg er gjort tilgjengelig for skolene i de årene prosjektet har gått.

Ulikt, men likeverdig

Stortingsmelding 28 ble vedtatt av Stortinget i midten av oktober. Meldingen legger opp til mer yrkesrelevant innhold i læreplanene, i første omgang i de to fellesfagene matematikk og naturfag. Senere skal det vurderes om det samme skal skje med de andre fellesfagene. Om lag 30 prosent av matematikken skal være programspesifikk.

– Læreplanene som skal utarbeides de kommende årene skal tilpasses hvert enkelt yrkesfag i større grad enn de er i dag. Det må skje i samarbeid med de ulike bransjene. Så skal det tas hensyn til at alle elever skal ha gått et løp som gir mulighet til generell studiekompetanse. Ulik undervisning skal ende opp med likeverdig kompetanse. Det blir spennende, sier Jens Arne Meistad.

Hva med FYR nå, da?

– FYR som prosjekt har gått over i historien. Men arbeidet fortsetter ved alle skoler, for alle videregående skoler er pålagt å jobbe med yrkesretting og relevans. Når det gjelder nettverket med FYR-koordinatorer er de spredt litt utover. Noen gikk av i august 2016, noen gikk av ved årsskiftet og noen sitter i funksjonen ut dette skoleåret, forklarer Jens Arne Meistad.

Hver fylkeskommune vil ha en person som er ansvarlig for FYR-arbeidet. Utdanningsdirektoratet har sagt at de vil bruke det beløpet de har til disposisjon til å styrke mellomledernivået ved de videregående skolene.

– I tillegg blir det spennende å se om yrkesretting og relevans blir nevnt og får en plass inn i andre kommende tiltak framover. Det kommer en ny Stortingsmelding i løpet av 2017 om en ny nasjonal kompetansepolitikk, det skal lages nye læreplaner, vi har Yrkesfaglærerløftet og vi har arbeidet med Lærerspesialister. Så mulighetene er der etter min mening. Ellers håper vi også at fylkene og NDLA (Nasjonal digital læringsarena) får til en avtale slik at alle ressursene som er laget blir tatt vare på og ajourført, sier Meistad.

Matematikksenteret vil sannsynligvis også spille en rolle videre framover knyttet til yrkesfagene, selv om det ikke er noe konkret per i dag. De nasjonale sentrene som har deltatt skal bidra til å sikre videre «bærekraft» i arbeidet som er gjort gjennom FYR-prosjektet.

– Det som uansett er helt sikkert er at FYR-koordinatorene fortjener ros. De har gjort en kjempeinnsats i sine respektive fylker. Og det som er så flott er at flere av de har fått seg jobb innen UH-systemet, som gjør at de kan påvirke de studentene som en dag kommer ut som nye lærere, avslutter Jens Arne Meistad.

Flere lærerspesialister i matematikk

Matematikksenteret er med på et prøveprosjekt med å utdanne lærerspesialister i matematikk. Sammen med Program for lærerutdanning, Fakultet for lærer- og tolkeutdanning og Institutt for matematiske fag ved NTNU, videreutdannes om lag 20 lærere til å bli spesialister.

Kunnskapsdepartementet varslet at prosjektet blir utvidet fra høsten 2017. Det betyr flere lærerspesialister de kommende årene.

Lærerne som er med på denne videreutdanningen får en tredelt spesialisering: De skal tilegne seg kunnskap om matematikk og matematikkdidaktikk. De skal ta i bruk denne kunnskapen som lærere. Og ikke minst skal de spre kunnskapen til sine kolleger.

Utdanningen strekker seg over to år og tilsvarer et år med heltidsstudier. Det er masternivå på utdanningen og den kan bygges ut til å være del av et fullverdig masterstudium.

Matematikksenteret i sosiale medier

Møter mellom mennesker foregår på flere plan. Matematikksenteret ønsker å være til stede der folk er. Det betyr å være i direktekontakt med lærere, skole- og barnehageledere og andre vi er til for. Men det betyr også å møte de samme menneskene – og mange nye – i sosiale medier.

Facebook

Er du en av oss på facebook? Her finner du nytt og nyttig fra matematikkens verden. Vi deler saker vi synes er interessante og relevante, nye undervisningsopplegg og annet som vi tror du er interessert i. Den enkleste måten å holde deg oppdatert på det vi gjør og tilbyr, er å følge oss på facebook. Gjør som nesten 4 000 andre – følg oss på www.facebook.com/matematikksenteret

Twitter

Twitter er en annen sosial kanal der vi møter våre brukere. Korte meldinger på inntil 140 tegn med tips og lenker fra oss på Matematikksenteret. Følg oss her: www.twitter.com/nsmo_matematikk

Youtube

Alle våre filmsnutter ligger på vår kanal på Youtube. Mange ser filmene våre direkte på Youtube, men mange av filmene finnes også på ulike sider på nettstedet vårt. Søk oss gjerne opp på www.youtube.com

Er oppgaven ferdig når svaret er funnet?

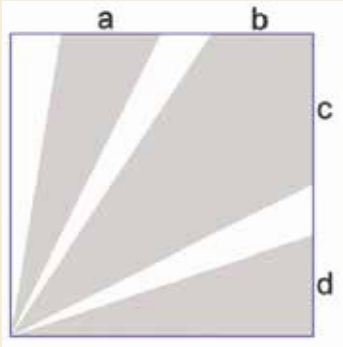
Morten Svorkmo, Matematikksenteret

I Cadet 2016 var en av oppgavene å finne summen av lengder i en figur bestående av et kvadrat, to trekanter og en firkant. Hvilke matematiske muligheter kan en slik oppgave gi, og hvordan kan en arbeide med oppgaven på en slik måte at elevene utfordres på viktige matematiske ideer?

Her er det i første rekke en forståelse av egenskaper til kvadrat og trekanter, og hvordan arealet til disse figurene endrer seg i forhold til sider, grunnlinjer og høyder.

I denne oppgaven kan forholdet (proporsjonaliteten) mellom grunnlinjen i trekantene og det tilhørende arealet være et spesifikt matematisk mål å arbeide mot. Hvilke spørsmål kan en stille til elevene og hvordan kan en jobbe for å bygge opp en forståelse for denne sammenhengen?

20) Kvadratet på figuren har areal 36 cm^2. Arealet til de grå områdene inne i kvadratet er til sammen 27 cm^2.

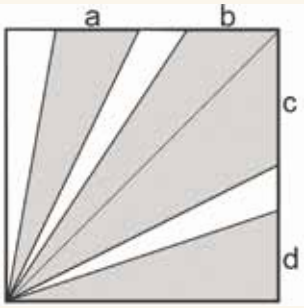


Hvor lang er a + b + c + d?
A) 4 cm B) 6 cm C) 8 cm D) 9 cm E) 10 cm

I en arbeidsprosess slik jeg skisserer her, foreslår jeg å gi oppgaven uten å oppgi svaralternativer.

Forslag til innledende spørsmål til elevene

- Hva vet vi om kvadratet i oppgaven?
- Hvor lang er siden i kvadratet?
- Hvilke geometriske former har de grå områdene, og kan de deles i andre og mer hensiktsmessige figurer?
- Hva kan være grunnlinje og tilhørende høyde i trekantene?



Tanken med spørsmålene er å få fram viktige opplysninger i oppgaveteksten og et fokus mot det man ønsker å legge vekt på. Ut fra egenskaper til kvadratet kan også elevene finne side-

lengden ettersom arealet er kjent. Samtidig er det gunstig at alle de grå områdene i kvadratet er trekanter, for da kan alle betraktes som trekanter med samme høyde.

Dersom en kommer fram til en deling i fire trekanter ved å tegne inn ei hjelpelinje, kan en se på grunnlinje og høyde i de fire grå trekantene. Det finnes mange andre muligheter til å dele figurene også, men det spørs hvor hensiktsmessige de er hvis målet er å finne en sammenheng mellom grunnlinje og areal. Her er det viktig å få elevene delaktige i en matematisk samtale slik at man får fram elevtenking og resonnement og kan bygge en forståelse ut fra dette.

Forslag til spørsmål til elevene

Se rammen øverst på siden.

- Dersom vi betrakter a, b, c, d som grunnlinjer i hver sin trekant, er det mulig å finne høyder i de fire trekantene?
- Kan vi lage algebraiske uttrykk for arealet til de fire grå trekantene?
- Hvordan kan vi bruke de algebraiske uttrykkene til å finne lengden a + b + c + d?
- Er det andre måter å finne lengden av a + b + c + d på?

Ved å bruke forholdsregning får vi

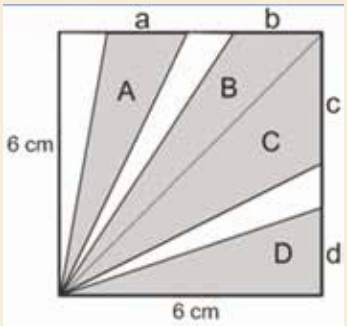
$$\frac{a+b+c+d}{12} = \frac{27}{36} \Rightarrow a+b+c+d = 9$$

Forslag til videre spørsmål til elevene

- Hvilket forhold er det mellom summen av arealene til de grå trekantene og arealet til hele kvadratet?
- Hvilket forhold er det mellom summen av grunnlinjene a, b, c og d og lengden av to sider i kvadratet?
- Sammenlign de to forholdene.

Forslag til en utvidelse av oppgaven

- Hva om arealet til kvadratet er 64 cm^2 og summen av lengdene a + b + c + d fortsatt er 9 cm? Hvor stor er da summen (S) av de grå arealene?



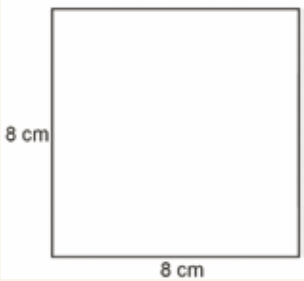
$$A = \frac{6a}{2}, \quad B = \frac{6b}{2}, \quad C = \frac{6c}{2}, \quad D = \frac{6d}{2}$$

$$\frac{6a}{2} + \frac{6b}{2} + \frac{6c}{2} + \frac{6d}{2} = 27$$

$$\frac{6(a+b+c+d)}{2} = 27$$

$$a+b+c+d = 9$$

- Hvor lange kan a, b, c og d være? Har innbyrdes lengde betydning for resultatet?
- Tegn et forslag hvordan figuren kan se ut og la elevene lage en hypotese før de begynner å regne.



$$\frac{8a}{2} + \frac{8b}{2} + \frac{8c}{2} + \frac{8d}{2}$$

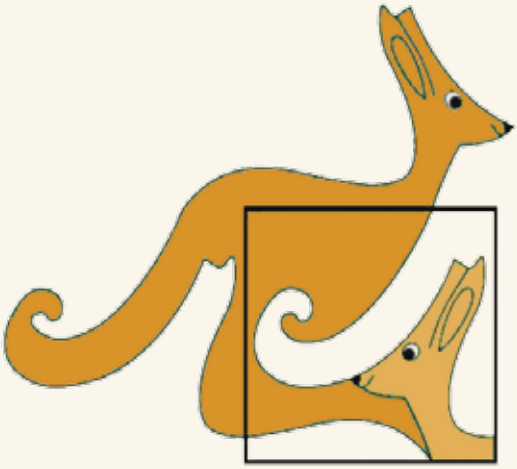
$$S = 4(a+b+c+d) = 36$$

$$\text{dersom } (a+b+c+d) = 9$$

Til slutt

Hvor lang må sidene i kvadratet være dersom arealet av det grå feltet skal være nøyaktig halvparten av arealet til hele kvadratet? (a + b + c + d = 9 cm fremdeles)

Påmelding til Kengurukonkurransen 2017



Frist for påmelding er 15. mars. Konkurransen starter i år 16. mars og kan gjennomføres fram til 14. april. Elevenes resultater må registreres på nett seinest 14. april. For mer informasjon gå inn på www.matematikksenteret.no/kengurusiden.

Nytt av året er at Ecolier er utvidet fra 18 oppgaver til 24 oppgaver. Inneværende år er oppgavesettene for første gang også tilgjengelig på engelsk.

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
Matematisk institutt UiO
Postboks 1053 Blindern
0316 OSLO

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det er en demokratisk rett å få en matematikkundervisning som setter en i stand til å delta aktivt som borger i et demokrati. Derfor vil Landslaget for matematikk i skolen (Lamis) sette fokus på matematikk for alle.

Styret for LAMIS

Leder
Tone Skori, Akershus
Barnetrinnet
Henrik Kirkegaard, Møre og Romsdal
Mellomtrinnet
Renate Jensen, Hordaland
Ungdomstrinnet
Gerd Nilsen, Hedmark
Videregående skole
Torgeir Nilsen, Nordland
Høgskole/universitet
Marianne Maugesten, Østfold
Varamedlem
1 Kari-Anne Bjørnø Karlsen, Østfold
2 Odd-Bjørn Lunde, Rogaland

Medlemskontingent 2015

450 kr for enkeltmedlem m/Tangenten
200 kr for husstands-medlemmer
300 kr for studenter m/Tangenten
975 kr for skoler/institusjoner m/Tangenten

Organisasjonssekretær

Gro Berg
gro@lamis.no
41562324

Forebygging av matematikkvansker

Gratis kurs om forebygging av matematikkvansker i regi av LAMIS på Gardermoen 25. april.
Følg med på www.lamis.no for oppdatert informasjon og påmelding.

Lederen har ordet

Tone Skori

Ønsker alle et godt nytt år, selv om kalenderen har kommet litt inn året 2017.

I skrivende stund er det desember 2016, og da kan jeg ikke unngå å nevne PISA og TIMSS resultatene. PISA måler 15-åringenes kompetanse i lesing, matematikk og naturfag. Fra Norge var det ca 5 500 elever fra 229 skoler som deltok. I matematikk så har 15-åringen en framgang fra 2012, som sist det var PISA måling, og det er første gang norske elever presterer høyere enn OECD-gjennomsnittet i matematikk.

TIMSS måler elevenes kompetanse i matematikk og naturfag på 4./5. og 8./9. trinn. Denne undersøkelsen gjennomføres hvert fjerde år. Hovedfunnene i matematikk er at elever på 5. trinn presterer veldig godt. De plasserer seg blant de beste i Europa. Når det gjelder 9. trinns elever, så presterer de på et middels nivå i et europeisk perspektiv. Området som er svakt er algebra, men det var vel ingen bombe, for det er dette temaet norske elever har slitt med lenge. Statistikk er det området elevene på 5. og 9. trinn presterer best på. Dette er heller ikke noe nytt, for det viser også resultatene vi har på nasjonale prøver i regning. Når det gjelder resultatene på 4. og 8. trinn, så er det ingen signifikant endring fra sist måling i 2011, til 2015 for 4. trinn, men elevene på 8. trinn har hatt en signifikant framgang i denne perioden. Dette er resultater vi må være stolte av, og det viser at å satse på noe over tid gir resultater, så tusen takk til alle de flinke og engasjerte lærerne vi har rundt omkring i Norge! Men vi må ikke hvile på vår laurbær, for husk at vi alltid kan utvikle oss, det gjelder både elever og lærere.

I år er den fjerde gangen LAMIS arrangerer UngeAbel, matematikkonkurranse for klasser på 9. trinn. Oppgavene i denne konkurransen går ut på at elevene må fordype seg i et matematisk problem, så denne konkurransen ligger litt i forkant av hva Ludvigsenutvalget mener er viktig i fremtiden skole. LAMIS ønsker enda større deltakelse fra 9.-klasser rundt omkring i Norges land, så det er bare å spre dette budskapet rundt til alle landets ungdomsskoler. Påmeldingen er alltid på høsten, så følg med på www.lamis.no. Der blir det lagt ut informasjon om konkurransen.

Som tidligere år, så blir det laget nytt matematikkdaghefte i år også. Det er lokallaget i Tromsø som har laget årets hefte. I følge noen gode kilder så er visst dette et fantastisk hefte, så følg med på hjemmesiden til LAMIS, www.lamis.no, for der blir det lagt ut informasjon om hvordan du får tilgang til heftet. I år, som i fjor, så er heftet digitalt.

Sommerkurs er LAMIS sitt store høydepunkt. I år blir det arrangert på Kongsberg fra 11. til 13. august. Det er lokallaget Kongsberg og Notodden som arrangerer. Tittelen på årets sommerkurs er Carpe Matematica. Dette er en tittel som er optimistisk og spenner vidt og favner mye og mange. Aktivitetene på årets kurs vil gå fra jordnære klasseromsrelaterte aktiviteter til de dyptgående utviklende matematiske ideer. Mer om årets sommerkurs finner du på hjemmesiden til LAMIS.

Carpe matematica
Lamis sommerkurs 2017 – Kongsberg

Dagene har blitt lengre og det går mot lysere tider og varmere dager. Jazzbyen Kongsberg er stedet for årets sommerkurs i matematikk.

Sommerkurset til Lamis arrangeres for 20. gang i år og det skal feires.

Alle med interesse for matematikk er velkommen enten du jobber i barnehage, barneskole, ungdomsskole, videregående skole, høyskole, universitet eller i en av landets andre læringsinstitusjoner.

Sommerkursene er årets høydepunkt for mange. Her treffes gamle kjente og gamle kjente treffer nye og ferske. Her finner vi ny inspirasjon til å lage nye læringsaktiviteter, her finner vi sosial glede og meningsutveksling med andre matematikkinteresserte og her finner vi en langtidsvarende vitamininnsprøytning for den daglige undervisning.

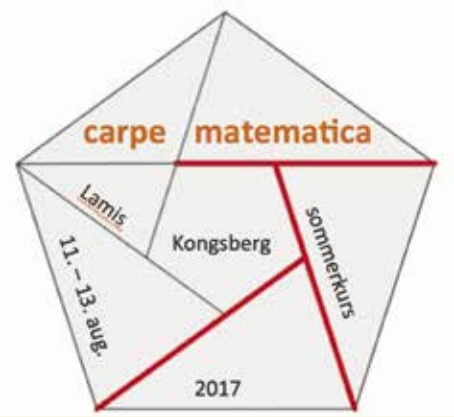
20-års jubileum

I 2017 er det tjuende gangen Lamis arrangerer sommerkurs. **Svein H. Torkildsen** er den eneste som har deltatt på alle. Han har derfor fått oppdraget med å holde åpningsforedraget under konferansen. Det ser vi frem til med forventning, Svein leverer alltid gode varer og temaet han vil behandle går under tittelen *Hva vil det si å være en god matematikklærer?*

Svein beskriver videre;

«Med utgangspunkt i min egen praksis som matematikklærer vil jeg trekke fram noen sentrale kjennetegn ved en god matematikklærer. Gjennom et årelangt og tett samarbeid med matematikkmiljøet ved Universitetet i Agder ble jeg på 90-tallet inspirert til å prøve ut nye ideer. Med utgangspunkt i noen eksempler på gjennomføring av opplegg med egne elever vil jeg trekke fram og vurdere praksisen i lys av hva nyere forskning beskriver som effektfull matematikkundervisning.»

Tittel på årets sommerkurs er **Carpe Matematica**. En tittel som er optimistisk og spenner vidt og favner mye. Her skal det virkelig være plass til alle. Fra de jordnære klasseromsrelaterte aktivitetene til de dyptgående utviklende matematiske ideer.



Vi håper vi har satt sammen et program som alle setter pris på. Vi kan allerede her presentere plenumsholderne. I tillegg til Svein har vi fått **Mona Røsseland**. Hun er en engasjert og inspirerende foredragsholder. Mona har hatt utallige verv i LAMIS og matematikksenteret, er lærebokforfatter og doktorgradsstipendiat.

Sigbjørn Hals er lektor ved Måløy vidaregående skole, der han underviser i matematikk og fysikk. Han har tidligere vært ressursperson for Matematikksenteret og har lang erfaring som kursholder rundt om i landet. Sigbjørn er hovedpersonen bak Geogebra i Norge og han ble tildelt Holmboeprisen i 2011.

Av verkstedholdere nevnes; Kristian Ranestad, Sigbjørn Hals, Grete Tofteberg, Peer Sverre Andersen, Else Havnevik Devold, Thor Erik Rødland, Gabriella Axelsson fra Inspiria og Astrid Bondø, Anita Valenta og Anne Nakken fra Matematikksenteret.

Har du innspill eller ønsker du å bidra til sommerkurset? Skriv til Siv Svendsen (siv.svendsen@hit.no) eller Hugo Christensen (hugchri@online.no)

Følg med på www.lamis.no. Program og annen informasjon blir lagt ut her. Påmelding åpner i slutten av mars/begynnelsen av april. Da er det bare å sikre seg en plass før kurset er fulltegnet.

Vel møtt på Grand hotell, Kongsberg, 11.–13. august.

LAMIS 20 år

Svein H. Torkildsen

Stedet var Fjordane Folkehøgskule, Nordfjordeid, og foranledningen var Nordisk Matematikklærerkonferanse med matematikkseksjonen ved Høgskolen i Bergen som vertskap. En bredt sammensatt lærergruppe reiste fra Bergen til Nordfjordeid med den gamle frakteskuta *Helt* og ble vel tatt imot av Bjørg Kristin Selvik og Marit Johnsen-Høines idet båten klappet til kai.

Arrangørene av konferansen tenkte at dette var anledningen for å starte en matematikklærerforening i Norge etter mønster fra Danmark og Sverige. På konferansens nest siste dag, 9. august 1997, ble «Landslaget for matematikk i skolen» stiftet av 60 entusiastiske lærere fra fra grunnskole til universitet. Hensikten med å ha en felles forening – ulikt det de for eksempel har i Danmark – var et ønske om å bygge opp en felles identitet blant lærere som underviser i matematikk. Dette var tre år etter Reform -94 i videregående skole og kun et par uker før undervisningen etter L97 startet opp. De nye planene viste vei for en endring av måten å tenke matematikkundervisning på, og på stiftelsesmøtet ble behovet for en «kulturrevolusjon» i matematikkfaget fremhevet. Foreningen tok mål av seg til å stå vakt om matematikkfaget i skolen og være tuftet på et «matematikk for alle»-perspektiv.

Det ble valgt et interimstyre med ti personer fra alle deler av landet: sør, vest, øst, midt og nord. *Bente Hansen*, Landås skole i Bergen, ble valgt til leder. Representantene fra Bergen og Kristiansand, fem i alt, ble valgt som arbeidsutvalg, og dermed var vi i gang. Styret fikk to år på seg til ordne med statutter og alt det organisatoriske, men satte seg som mål å klare det på ett år. I august 1998 var det klart for første sommerkurs i Trondheim med 76 deltakere. Tema: *Matematikk med mening*. Ole Skovsmose holdt foredrag om «Undersøgelseslandskaber», Janne Fauskanger om «Matematikk i lekens verden», Ingvill M. Stedøy om matematikkens historie, kunst og kultur, Annie Selle om mennesket i matematikken og Christoph Kirfel om «Matematikk for alle». I tillegg bød kurset på 14 forskjellige verksted. Tone Dalvang (Kristiansand) og Vetle Rohde (Bergen) hadde lagt lista og funnet en form som har vist

seg slitesterk gjennom de 20 årene landslaget har eksistert. Kun ett, i utgangspunktet viktig, innslag på sommerkursene har visnet bort: Deltakernes egne dikteriske og musikalske innslag. De første sommerkursrapportene inneholder tidsaktuelle sanger, laget av kursdeltakerne etter dagens små og store hendelser, faglig så vel som sosialt. Gamle og nye vers ble fremført som allsang ved oppstart på en ny dag, og slik ble det sanger på 10–15 vers fra kursdagene. Som denne fra Trondheim 1998: *Vi har lært å lage/hver vår fine drage/Vi tok fatt i snora/løp oss varm og svett/Han som stod og så på/syntes det var fett/Ja det kan vi kalle/Mat'matikk for alle*. (Synges til *Kjerringa med staven*). Og så koret da, som ble etablert straks vi var samlet, øvde i alle ledige stunder og holdt konsert under festmiddagen! Økonomien tillot ikke innleide underholdningskrefter. Det ble vel først et tema da Per Inge Torkildsen fikk forsamlingen til å hyle av latter under sommerkurset i Sandnes 2008.

Hvordan holde kontakt med de etter hvert hundrevis av medlemmene som meldte sin interesse? Et eget medlemsblad ble vurdert. Men samarbeid er i noen sammenhenger bedre enn konkurranse, så vi fikk på plass en samarbeidsavtale med Tangenten slik at vi fikk disponere noen sider der i hvert nummer, og alle medlemmene i LAMIS fikk Tangenten inkludert i medlemsavgiften. Ut over det da? Hvordan få LAMIS kjent ut over det ganske land? Prosjekter var en mulighet. Annie Selle tok initiativ til å utvikle et matematikkrom på Hovinhøgda skole i Akershus med god støtte fra Helge Flakstad og NIF (Norsk Ingeniørforening). Rommet ble åpnet 21. september 2000 med god pressedekning. Utstyrslistene ble lagt på LAMIS sine nettsider som Grete Tofteberg hadde brukt kveldene sine på å bygge opp.

Før det hadde vi et samarbeid med foreningen *Kunstfagene i skolen* der målet var å få fram muligheter for tverrfaglig arbeid. Tverrfaglighet var nå en het potet etter at L97 pekte på det som et obligatorisk innslag i undervisningen. Gunnar Nordberg og Ida Heiberg representerte LAMIS i forberedelsene. Med økonomisk støtte fra departementet arrangerte vi i fellesskap konferansen «Riv ned gjerdene» der skoler som hadde fått tildelt prosjektmidler presenterte arbeidet sitt. Mer enn 400 deltakere ga oss en flott arena for å presentere LAMIS. Vi hadde fått nok profileringsutstyr til opprette en stand på konferansen, og som styreleder tilbrakte jeg noe tid med å prate med lærere for å rekruttere dem til LAMIS. Men Mona Røsseland var der også og tilbød seg å stå på standen en stund. Da var det gjort!

Fra da av gjorde Mona en fremragende jobb for LAMIS. Og da Matematikksenteret ble opprettet med Ingvill M. Stedøy som leder hadde vi fått et tospann med skikkelig trøkk i. Medlemstallet skjøt i været og vi fikk flere lokallag enn de tre som var med fra starten: Bergen, Kristiansand og Trondheim. Mye takket være det omtalte tospannet. Først Ingvill og siden Mona som leder. Mona ble ansatt ved Matematikksenteret og skulle holde kurs over hele landet. Samtidig var hun vår fremste ambassadør gjennom varm omtale av LAMIS og støttespiller for de som ville starte lokallag. Etter få år passerte medlemstallet 4000! I 2006 var arbeidet med å drifte LAMIS blitt så omfattende at det ble behov for en egen organisasjonssekretær i 50 % stilling.

Etter inspirasjon fra Danmark ble det bestemt å lage et hefte med opplegg for en matematikkdag på skolene i Norge. Ingvill var drivkraften bak og det første heftet kom i 2002. Heftet var et godt argument for medlemskap i LAMIS: Det kostet mer å kjøpe det enn det kontingenten i LAMIS utgjorde! Siden har arbeidet med heftet gått på rundgang blant lokallagene, og mange lærere og skoler har fått ideer til hvordan matematikkundervisningen kan bli mer inspirerende for elevene. Men dette var et kostbart tiltak med trykkeutgifter og porto. Det hadde aldri gått uten at noen med penger så verdien av alt det frivillige arbeidet som blir utført. Her nevnes spesielt NTNU som i årevis dekket portoutgiftene våre, en betydelig utgiftspost! Og så plutselig en dag stod FOKUS bank (nå Danske bank) på døra og lurte på om vi kunne samarbeide. De skulle ha hjelp til en norsk utgave av dataspillet

Pengeby og la 200 000 kr per år i potten mot at de kunne profilere seg som samarbeidspartnere med LAMIS og sende ut informasjonsmateriell om dataspillet sammen med matematikkdagheftet. Snakk og vinn-vinn!

Noe mer fra disse første ti årene? Vi kommer vel ikke utenom KappAbel-konkurransen som ble etablert av en stiftelse i Froland kommune. De trengte en faglig samarbeidspartner, og etter noen runder med diskusjon om den faglige retningen på konkurransen gikk LAMIS inn som samarbeidspartner, igjen med Ingvills ustoppelige energi som drivkraft. Og så har diverse hendelser ført til at LAMIS nå har ansvaret for konkurransen som er døpt om til Unge Abel.

LAMIS ble godt tatt imot av departementet. Vi ble invitert på rådslaginger om matematikkfaget i skolen i ulike sammenhenger og vi ble registrert som høringsinstans. En funksjon LAMIS fortsatt har.

Og så må vi også ta med forsøket på å få til en leirskole med matematisk innhold i Nordfjordeid. Vi klarte det en gang. I 2000 var t. klasse ved Kirkebygden skole, Våler i Østfold, på Nordfjordeid sammen med læreren sin, Turid Nørving. De var strålende fornøyde med oppholdet, men det ble med den ene klassen det ene året, av ulike årsaker. Også forsøket på å etablere en sommerskole for 15–17 år gamle ungdommer stoppet opp før noen hadde fått testet det ut.

Det har vært en fornøyelse å se at det som startet for 20 år siden med en flokk ivrige entusiaster uten penger, har vokst seg til en livskraftig forening med god økonomi, og som fortsatt klarer å samle medlemmer og andre interesserte til det årlige sommerkurset. Da gjenstår bare spørsmålet om dette er det 20. sommerkurset? Året 2000 skaper usikkerheten. De første årene fikk vi støtte fra Statens Lærerkurs til å arrangere sommerkurs. Men i år 2000 var det på ny Nordisk Matematikklærerkonferanse, dette året i Island. Vi så det vanskelig både å få lærere til å delta i Island og i tillegg på et sommerkurs i en og samme sommerferie. Løsningen ble at LAMIS søkte Statens Lærerkurs om støtte til lærere som ville delta på konferansen i Island. 70 norske lærere deltok, omtrent halvdelen av deltakerne! Vi liker å tro at det i høy grad var på grunn av initiativet fra LAMIS. Om vi nå ikke har gjort det før, så sier vi det nå: Det var «vårt» kurs og gleder oss nå til det 20. i rekken som er lagt til Kongsberg. Og da har vi en flott geografisk dekning av steder der sommerkurset har vært: Trondheim, Nesna, Borgarnes (Island), Kristiansand, Nordfjordeid, Asker, Tromsø, Sandnes, Bodø, Bergen, Fredrikstad, Hafjell, Sandefjord, Ålesund. Velkommen i LAMIS og på årets jubileums-sommerkurs.

Matematikkdagen 2017

Hvilke mangekanter får du når du tegner en stjerne med utgangspunkt i et linjestykke og mange punkt rundt dette? Og hvor mange kvadrater må du ha når du skal brette små kuber som til sammen har samme volum som en større kube, når kantene på de små kvadratene er halvparten av de som brukes til å lage den store?

Ideheftet til Matematikkdagen 2017 har aktiviteter som både kan brukes som korte aktiviteter og aktiviteter hvor elevene jobber over lengre tid. Hvor lang tid som brukes er opp til den enkelte skole/lærer. Det er også muligheter for å tilpasse oppgavene etter elevenes nivå.

Tegning av stjerna ut fra et linjestykke og mange punkter, byr på utfordringer på mange nivå:

- Tegning av stjerna
- Fargelegging – skal fargene velges tilfeldig eller systematisk? Kan det brukes fire farger når to mangekanter som har felles kant ikke kan ha samme farge? Kan det brukes færre farger?
- Hvilke typer mangekanter finnes i stjerna?
- Hvor mange er det av hver type?
- Er det noen sammenheng mellom hvor mange spisser stjerna har på en side av linjestykket og hvor mange mangekanter det er av hver type?

Vanskegradene her spenner fra håndtering av blyant og linjal, (en utfordring for de yngste) til mønster, tallrekker og algebra for de eldste.

Med kuben er det geometri i brettingen, og de yngste vil nok trenge hjelp til å sette kubene sammen. Alle trinnene kan finne ut hvor mange små kvadrater som trengs ved å jobbe sammen og prøve ut, mens større elever kan regne ut svaret.

En tur i nærområdet til barnehagen kan innby til samtale om plassering og orientering. Å finne (og ta bilder av) holdepunkter langs en rute kan være utgangspunkt for å lage et kart der det er rekkefølge og innbyrdes plassering som er vesentlig. Kan man etterpå følge kartet på neste tur? Stemmer kartet med terrenget? Er bildene i samme rekkefølge som turruta vår? Hvis ikke, hvorfor? Dette er en aktivitet som egner seg godt for elever i grunnskolen også.

Matematikkdagen 2017 er den 15. i rekken og det finnes nå like mange hefter med ideer til aktiviteter som kan gjennomføres. Årets hefte er skrevet av styret i LAMIS Tromsø, og vi har med aktiviteter som dere kan bruke under matematikkdagen for klassen, hele skolen eller barnehagen. Oppleggene kan også brukes ellers i skoleåret.

Aktivitetene fordeles rundt på skolen slik at elevene kan gå mellom de ulike stasjonene etter interesse og motivasjon. På for

eksempel en 1–7-skole kan det passe med like mange stasjoner som trinn, hvor hvert trinn har ansvar for sine emner. 1. trinn: geometri, 2. trinn: måling, 3. trinn: digital kompetanse, 4. trinn: brøk osv. Det er viktig at hver stasjon har utfordringer tilpasset flere faglige nivå.

Ved enkelte stasjoner kan det bli litt venting. Et rebusløp med matematiske nøtter til bruk i ventetiden kan derfor anbefales. Heftet inneholder et registreringsskjema for rebusløpet og stasjoner. En motivasjonsfaktor for å få elevene til å oppsøke flere stasjoner/løse rebusoppgaver kan det konkurreres om hvem/hvilke klasser som har vært innom flest aktiviteter. Når dagen er slutt kan registreringsskjemaene legges i «hatten» og det trekkes premier. Kortene gir også informasjon om hva som har vært interessant på dagen.

Hva gjør en matematikkdag vellykket?

- God planlegging
- Tilpasset organisering til egen skole
- Motiverende, engasjerende voksne som vet hva de holder på med
- Et mangfold av aktiviteter som inspirerer barna og elevene til matematisk tenkning

Vi håper at årets og tidligere års hefter inspirerer til å skape engasjement og motivasjon til en skoledag i matematikkens verden.

Månedens styremedlem

Av og med Henrik Kirkegaard

Hei og velkommen her i sofakroken. Kjekt du kunne komme midt i den travle førjulstid.

Mange takk. Ja det går mye i julematematikk for tiden; men jeg kunne jo ikke si nei til gløgg og julesjokolade.

Jasså – julematematikk, det skal vi vende tilbake til hvis jeg husker det. Grunnen til du sitter her i sofakroken er, at du er valgt til månedens styremedlem.

Ja, det er jo ikke så verst å bli sånn på tampen av året.

Hva betyr det for deg at du ble månedens styremedlem?

Det betyr en veldig mye. Dels er jeg stolt over at jeg i det hele tatt ble foreslått, da det i grunnen ikke er så mange som forstår hva jeg sier. Dels er det kjekt fordi jeg er representant for barneskolene i styret.

Jeg bemerker jo at jeg må følge godt med for å henge med i samtalen. Men det er nå noe kjent over dialekten din. Hvor kommer du fra?

Jeg er fra den Københavnske delen av Ama'r eller Amager som alle andre sier. Jeg tok min lærereksamen i Danmark med matematikk og idrett. Siden har jeg også lest geografi, fysikk og kjemi og ikke minst norsk grunnfag i Volda.

Men du flyttet altså til Norge?

Først var jeg sykkelvikar i Københavns kommune; men etter ett års tid ble jeg tilsatt på en katolsk privatskole i København. Der fikk jeg snart mine egne klasser mens jeg leste på lærerskolen

(seminarium) om kvelden. 13 år i fast lærerstilling før jeg flyttet til Ålesund.

Jøss – Ålesund. Hvorfor nettopp Ålesund?

Tja si det. Vi tok fergen til Oslo og deretter E6 (den strakast vei'n) mot Trondheim; men da vi kom til Dombås kjørte vi rett frem, hvilket er naturlig for å komme til Trondheim. Vi stoppet ikke før vi holdt i Ålesund og veien tok slutt. Det er en fantastisk flott by med et utrolig vakkert landskap rundt seg. Vi ble helt fortapt. Fjord og fjell og skjøn forening.

Vi?

Med i bilen var min kone og vores datter, som dengang var to år. Siden er familien utvidet med nok en datter og en portugisisk vannhund – Valentina von Fine (i daglig tale bare Ronja).

Du har ikke angret på å reise til Ålesund?

Til sommeren har vi vært her i 25 år – og vi storkoser oss.

Hvorfor ble du med i LAMIS?

Jeg meldte meg inn i Danmarks matematiklærerforening da jeg leste på lærerskolen. Leser du matematikk der, blir du oppfordret til å bli medlem. I mange år deltok jeg på sommerkurs på Brandbjerg, hvor vi hadde sommerkurs hver eneste år. Jeg var også en aktiv deltaker i lokallaget i København.

Da LAMIS ble stiftet i Nordfjordeid var jeg på sommerkurs i Danmark og visste ikke om LAMIS. Men det gikk bare et par måneder før jeg meldte meg inn.

Har du hatt noen verv i LAMIS før?

Jeg satt i styret for mange år siden sammen med blant annet Svein, som var leder og Gerd som igjen er med i styret. Kristian Ranestad var også med. Sammen arrangerte vi sommerkurs to ganger i Nordfjordeid. Jeg var også med å arrangere LAMIS' første, siste og eneste leirskole i Nordfjordeid. Det var veldig moro.

Hvordan står det til med LAMIS i Ålesund?

Vi har et lokallag – LAMIS Sunnmøre – som jeg er leder av. Her har vi skrevet matematikkens dag hefte i 2011 og i 2016 arrangerte vi sommerkurs her i Ålesund. Det var stor stas. Vi har brukt mye tid til dette og har helt sikkert vært lite synlige overfor medlemmene i lokallaget; men det må vi gjøre noe med i 2017.

Du nevnte julematematikk i innledningen. Er det noe å holde på med?

Jeg har 7. klasse i år og har hatt den glede å ha dem siden 1. klasse. Jeg er ikke et sekund i tvil om at forståelse i og for matematikken er utrolig viktig. Jeg er ofte ute med elevene og jeg jobber veldig konkret for å fremme forståelsen. Julematematikk er mitt i blinken for å jobbe med praktisk forståelse. Sidegevinstene er heller ikke å forakte – matematikkglede, bedre motorikk og positiv mestringsfølelser.

Du blir aldri lei matematikk?

Nei da. Jeg har vært ressursperson for matematikksenteret, har holdt et utall av kurs og verksteder for LAMIS, vært med i oppstarten av nasjonale prøver og ikke minst stolt medforfatter av MULTI. Bare det å hjelpe en kollega – nær eller fjern - som kommer for å få litt hjelp til matematikkundervisningen er en daglig glede. Men matematikk er ikke det eneste jeg underviser i. Jeg stortrives også med mine andre fagområder.

Hva ligger hjertet ditt nærmest?

Det må være de minste elevene. Gode lærere i innskolingen som får alle elevene til å syns at matematikk er helt topp bevirker at vi får langt færre elever med behov for spesialundervisning.

Tusen takk. Det var en fornøyelse at få besøk av deg her i sofakroken. Held og lykke videre.

Selv takk, det var godt med litt gløgg og julesjokolade. Heller ikke verst å se Premier League i bakgrunnen.