Korden

I denne lederen markeres et redaktørskifte. Christoph Kirfel slutter etter 13 år i redaktørstolen. Toril Eskeland Rangnes overtar som ny redaktør. Lederen handler om Tangenten som møtested for forfattere og lesere. Christoph skriver om å skrive for Tangenten, Toril utdyper betydningen av å være leser.

Å skrive for Tangenten

Å være redaktør dreier seg om å skrive. Skrive egne tekster, velge ut og vurdere andres tekster, forbedre tekster, hjelpe andre med å skrive gjennom at det gis konstruktiv kritikk . Ikke minst handler det om å oppmuntre til skriving. Hele tiden blir man drevet av spørsmålet: hva gjør en tekst god? Må teksten preges av kjente sjangre? Eller kan det ligge en kvalitet nettopp i brudd med sjangre? Og hva med innholdet: må tekstene inneholde gode historier fra klasserommet som er lett tilgjengelig for de fleste, eller er det også viktig med tekster som har teoretiske fokus, matematisk eller didaktisk?

Et kjent råd for skriving er at teksten må ha hode og hale! Her sammenliknes en tekst med et dyr eller en gestalt. Den må ha tydelige ansats og være avsluttet og danne en egen ny enhet. Hvordan er det da med åpne tekster – som gir rom for fortsettende refleksjoner? Er det nettopp et poeng at en tekst skal sette i gang prosesser som ikke avsluttes når teksten er ferdiglest? Er det mulig å skrive tekster med flere lag – slik at den både fungerer «med hode og hale» men også åpner for fortsettelse?

Det er vanskelig å gi en enkel oppskrift for «den gode teksten». Men det er nettopp kvaliteten i tekstene som er redaktørens og redaksjonens anliggende. Heldigvis har TANGENTEN hatt en stor skare av forfattere som villig har bidratt med mange tekster over år. Jeg håper at denne store dugnaden og «givergleden» fortsetter og at leserne våre setter pris på arbeidet som gjøres av forfatterne og redaksjonen.

Christoph Kirfel

Korden

Å være leser av Tangenten

Tangenten skal engasjere! I Tangenten skal matematikklærere i barnehage, grunnskole, videregående skole, og studenter som framtidas matematikklærere, kunne finne noe som kan oppfattes som spesielt rettet inn mot sitt felt.

Tangenten skal ha plass til de lette «pauseartiklene». Det kan være opplegg som læreren kan ta med seg inn i klasserommet. Eller det kan være morsomme, eller noe mer alvorspregede, betraktninger til ettertanke. Tangenten skal også ha plass til artikler av mer utfordrende karakter. Dette kan være aktuelle matematikkdidaktiske forskningsartikler og artikler som utfordrer matematisk. Artikler av den siste typen kan leses som matematiske tekster. Ofte vil det samtidig være didaktiske poeng i tekstene som kan oppfattes uavhengig av om matematikken forstås eller ikke. Som leser mener jeg det er viktig å «tåle» at jeg ikke forstår alt. Noen ganger hopper jeg over det «uforståelige». Andre ganger utfordres jeg og velger å prøve ut, undersøke og grave, for å forstå. Som lesere utfordres vi også av ulike tekster. Vi er forskjellige! Dette ser vi i redaksjonen på som en ressurs og en utfordring.

Som ny redaktør ønsker jeg at matematikklærere på alle nivå i skolen vil fortsette å lese og la seg engasjere av Tangenten. Vi i redaksjonen ønsker velkommen konstruktive tilbakemeldinger. Nye og tidligere artikkelforfattere utfordres med dette til å sende sine bidrag til Tangenten. Vi vil bidra med skrivehjelp.

Takk til Christoph Kirfel, for grunnlaget du har gitt, for måten du har utviklet tidsskriftet på. En engasjert redaksjon skal gjøre sitt for å utvikle Tangenten videre. Vi inviterer lesere og forfattere til fortsatt samarbeid!

Toril Eskeland Rangnes

Arne Kåre Topphol

Statistikk og utdanning, det er farlig, det!

Eg har i mange år irritert meg over statistikkbruk i ulike samanhengar. Journalistar ser ikkje ut til å ta det så nøye, eller kanskje dei ikkje veit betre? Folk flest har heller ikkje særleg kompetanse på området, i alle høve ikkje nok til å avsløre feilbruken. Dette har eg etter kvart lært meg å leve med. Ein må berre ta det ein les eller høyrer med ei klype salt, og prøve å ikkje la seg hisse for mykje opp. Verre har det vore med kjensla av at utdanningsforskarar heller ikkje alltid har kontroll på statistikkbruken. Sjølv ikkje alle som publiserer statistikktunge artiklar, har eg heilt våga å stole på. Mange av spørsmåla eg har fått om hjelp med statistikk, har vore for underlege og for avslørande til det. Som oftast er det vanskeleg, ja gjerne umogleg, å kontrollere statistikkbruken i publikasjonar. Detaljeringsgrada er sjeldan høg nok. Fram til for tre år sidan hadde eg ikkje noko slåande døme på publisert og blottlagd statistikkfåkunne å vise til. Tidleg på året 2011 kom gåvepakken i form av boka *Visible Learning* (Hattie, 2009). Boka vekte oppsikt. Ja, enkelte gjekk så langt som å seie «[i]t is perhaps education's equivalent to the search for the Holy Grail – or the answer to life, the universe and everything» (Mansell, 2008). Endelig, her var svaret på det meste om kva som verkar og ikkje verkar i skulen. Hattie sorterte heile 138 ulike tiltak etter den effekten dei har på elevane sitt læringsutbyte. Resultata var baserte på omfattande empiri og kvantitative analysar, ein slags kvantitativ superanalyse. Boka vart gripen med iver av skulefolk, politikarar og forskarar i mange land. Også i Noreg har boka fått mykje merksemd. Sjølvsagt måtte eg lese henne. Eg las, og eg las, men det var noko som skurra i matematikkbruken. Litt rekning avslørte at Hattie hadde rekna feil, og ikkje berre gjort éin enkelt feil, men ein systematisk feil gjennom heile boka. Ein feil som var så innlysande og lett å avsløre at eg framleis undrar meg over at han har passert uoppdaga gjennom publiseringsprosessen.

Eg publiserte ein artikkel i Norsk Pedagogisk Tidsskrift om temaet (Topphol, 2011). Der er Hatties feil statistikkbruk sett inn i ein samanheng med problematisk statistikkbruk generelt i utdanningsforsking, med eit kritisk blikk på forskar og forleggars rolle. I denne artikkelen legg eg meir vekt på den matematiske utleiinga og kor viktig matematisk kompetanse er, ikkje berre blant dei som nyttar matematiske metodar, men også blant dei som er brukarar av det som vert publisert: forskarar, politikarar, lærarar og folk flest.

Som den fulle tittelen *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement* tilseier, baserer Hatties bok

Arne Kåre Topphol
Høgskulen i Volda
arnekare.topphol@hivolda.no

seg på metaanalysar. I ein metaanalyse vert resultat frå ei rekkje enkeltgranskingar samanlikna, aggregerte og summerte opp for å få eit større og meir solid statistisk grunnlag for konklusjonane. Føremålet er å gi sikre mål for kor store effektane er, i staden for berre å seie noko om kva effekt som er statistisk signifikant eller ikkje. Hatties arbeid er ein syntese av 816 metaanalysar. Desse igjen baserer seg på 52 649 enkeltstudiar med over 83 millionar informantar. Ein super-metaanalyse som så langt er den største samla oversikta over kva som har effekt på elevar si læring.

Metoden med metaanalysar og effektstorleikar vaks fram delvis som ein reaksjon på ein langvarig kritikk av å vere for oppteken av statistisk signifikans og for lite oppteken av det ein kan kalle praktisk signifikans (Schmidt, 1992). Det har vorte ein utbreidd metode på mange fagområde, også i utdanningsforsking. Desse kritiske innvendingane mot statistisk signifikans har eg omhandla grundigare i Topphol (2011).

Effektstorleik *d* og CLE

Har ei behandling nokon effekt? Har ein gitt undervisningsmetode nokon effekt på elevane sine prestasjonar? Desse og liknande spørsmål er vanlege i forskinga. Effektstorleikar er utvikla for å kvantifisere slike effektar. Meir presist, ein effektstorleik gir eit kvantitativt mål på kor stor skilnaden er mellom to grupper, til dømes mellom ei behandlings- og ei kontrollgruppe. Avhengig av type effekt er det utvikla ulike metodar for å estimere effektstorleik (sjå t.d. Cohen, 1988).

Hattie bruker effektstorleiken Cohens *d* (Cohen, 1988, s. 20) som sitt hovudmål for effekt. Diskusjonane og konklusjonane hans er i all hovudsak baserte på utrekningar av denne effektstorleiken. Han reknar i tillegg ut, og baserer nokre av diskusjonane på, det som vert kalla «Common Language Effect Size» (CLE). Dette gjer han for å hjelpe lesaren, «[i]n all examples in this book, the CLE is provided to assist in interpreting the effect size» (Hattie, 2009, s. 9). Vidare i denne artikkelen vil eg vise at Hattie gjer ein systematisk feil i sine utrekningar av CLE. Det dømet han gir på korleis ein utrekna CLE skal tolkast i konteksten, tyder i tillegg på at han misforstår kva informasjon CLE gir. Eg har valt å legge den matematiske symbolbruken nær opp til den vi finn i Hatties bok.

Hattie definerer effektstorleiken d som den standardiserte avstanden mellom middelverdiane i test-/behandlingsgruppa og kontrollgruppa.

$$d = \frac{\overline{x}_{\text{behandling}} - \overline{x}_{\text{kontroll}}}{s_{\text{p}}}$$

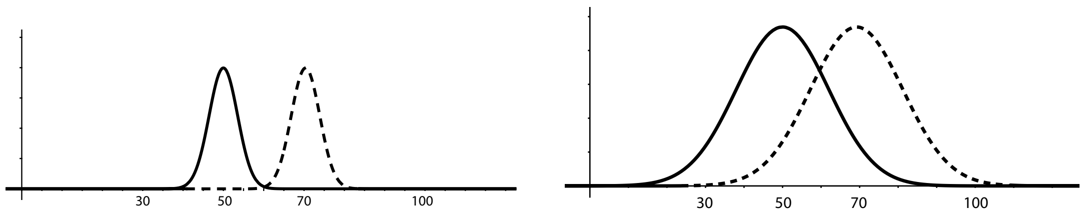
eventuelt

$$d = \frac{\overline{x}_{\text{slutt på behandling}} - \overline{x}_{\text{start av behandling}}}{s_{\text{p}}},$$

der $\overline{x}_{\text{behandling}}$ og $\overline{x}_{\text{kontroll}}$ er middelverdiane for skårane i behandlings- og kontrollgruppa, og s_{p} er det interpolerte eller samanslåtte («pooled») standardavviket. Det kan diskuterast kva standardavvik som er det «rette» å bruke her. Den diskusjonen lèt eg ligge og følgjer det valet Hattie har gjort. Som døme ser vi på to ulike tilfelle med lik avstand mellom $\overline{x}_{\text{behandling}}$ og $\overline{x}_{\text{kontroll}}$, men med ulik s_{p}, som gir ulik effektstorleik d. Dette er illustrert i figur 1.

Her vert det fornuftige i å standardisere effektstorleiken illustrert. Å estimere effekten berre som avstanden mellom middelverdiane er ikkje nok. Fordelingane i desse to tilfella har same middelverdiar, noko som gir identisk differanse $D = \overline{x}_{\text{behandling}} - \overline{x}_{\text{kontroll}}$, men dei har ulike standardavvik. Når vi dividerer D med standardavviket, vert effektstorleikane ulike, d = 4 og d = 1,18. Desse verdiane avspeglar at avstanden mellom fordelingane til venstre er relativt sett større enn i figuren til høgre. Fordelingane er nesten totalt åtskilde i det første tilfellet, men tydeleg overlappande i det andre. Det er denne siste effektstorleiken Hattie i all hovudsak bruker.

Som eit alternativ til d, som ei hjelp til å tolke effektstorleiken, reknar Hattie i alle døma også



Figur 1 I desse to tilfella er differansen mellom middelverdiane den same, D = 20 poeng. Fordelinga til kontrollgruppa er teikna med heiltrekt line, medan stipla line er brukt for behandlingsgruppa. Standardavvika er ulike, 5 til venstre og 17 til høgre. Dette gir ulike effektstorleikar, $d = 4$ og $d = 1{,}18$.

ut CLE (Hattie, 2009, s. 9). Dette effektmålet vart først foreslått av McGraw og Wong (1992). CLE mellom to fordelingar er sannsynet for at ein skår som er tilfeldig trekt frå den eine fordelinga, er større enn ein tilfeldig trekt skåre frå den andre.[1] McGraw og Wong illustrerer dette med eit døme som Hattie også bruker, om enn noko omforma. Eg gjengir dømet her, omsett til norsk, i Hattie sin versjon. Tenk deg som døme differansen i høgd mellom gjennomsnittskvinna (5' 4"/162,5 cm) og gjennomsnittsmannen (5' 10"/177,5 cm), som er ein *d* på 2,0.[2] Denne verdien av *d* svarar til ein CLE på 92 %. Det tyder at dersom vi trekkjer ein tilfeldig mann, er sannsynet om lag 92 % for at han er høgare enn ei tilfeldig trekt kvinne, eller at mannen i 92 av 100 par tilfeldig uttrekte til «blind date» er høgare enn kvinna (Hattie, 2009, s. 9; McGraw og Wong, 1992, s. 361).

I figur 1 har vi ein CLE på 99,8 % i dømet til venstre og 79,8 % i dømet til høgre. Det er lett å forstå at CLE vil vere 100 % dersom behandlingsgruppa har dei høgaste skårane og dei to fordelingane er fullstendig åtskilde, utan overlappingsområde. Tilsvarande vil vi ha CLE lik 0 % dersom behandlingsgruppa har lågaste skårar og åtskilde fordelingar.

CLE som funksjon av *d*

Korleis heng så dei to måla for effekt saman? Er det mogleg, dersom ein kjenner verdien for *d*, å rekne seg fram til verdien for CLE og motsett?

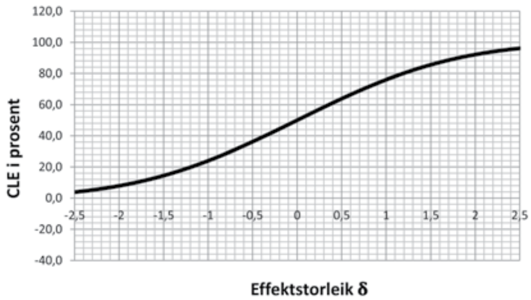
Dersom vi kjenner middelverdiane og standardavvika til to gitte fordelingar, kan vi enkelt rekne ut *d* frå formelen over. Utrekning av CLE krev derimot meir detaljkunnskap om dei involverte fordelingane, for utrekninga av sannsyn er fordelingsavhengig. Det eksisterer altså ikkje nokon universell og fordelingsuavhengig éin-til-éin-korrespondanse mellom verdiar for *d* og verdiar for CLE. For å kunne gjere ei presis omrekning frå ein gitt verdi for *d* til den tilsvarande verdien for CLE, må vi kjenne eigenskapane til dei involverte fordelingane. Nokre viktige eigenskapar ved denne samanhengen er likevel fordelingsuavhengige. Dersom $d = 0{,}0$ (ingen effekt, korkje positiv eller negativ) er CLE tilnærma lik 50 %. I mann/kvinne- dømet over vil ein CLE på 50 % svare til følgjande: Trekk to tilfeldige menn. Sannsynet er då 50 % for at den første du trekkjer, er den høgaste av dei to. Eller set at menn og kvinner i gjennomsnitt er like høge, slik at det er ein effektstorleik mellom menn og kvinner på $d = 0{,}0$. Trekkjer vi no ein tilfeldig mann og ei tilfeldig kvinne, har vi fullstendig symmetri. Sannsynet er 50 % for at mannen er høgast, og 50 % for at kvinna er det. I tilfelle med ekstremt høg positiv effekt vil CLE nærme seg 100 %. Ekstremt stor negativ effekt gir CLE som nærmar seg 0 %. Det følgjer vidare av definisjonen på sannsyn at CLE under ingen omstende kan vere negativ eller større enn 100 %; CLE vil alltid vere eit tal mellom 0 % og 100 %.

Dersom vi føreset normalfordelingar (Gaussfordelingar), er det mogleg å etablere ein meir presis korrespondanse mellom *d* og CLE. Kravet om normalfordeling kan verke tilfeldig og avgrensande; langt frå alt vi måler er normalfordelt. Like fullt, normaltilnærming er ofte «godt nok», og i dette høvet set det oss i stand til å visualisere viktige eigenskapar ved samanhengen mellom d og CLE.

Vi tenkjer oss to populasjonar der X_1 og X_2 er to statistisk uavhengige, normalfordelte variablar med middelverdiar μ_1 og μ_2, og standardavvik σ_1 og σ_2. I kompaktversjon kan dette skrivast $X_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ og $X_2 \sim \mathcal{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$. I sannsynsteori er det vanleg å bruke greske bokstavar som symbol for parametrar i ein populasjon, til dømes μ og σ i staden for $\bar{x}$ og s. Eg held meg til denne konvensjonen og bruker då δ i staden for d så lenge eg snakkar om populasjonar.

Effektstorleiken mellom desse populasjonane er etter definisjonen $\delta = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_p}$. Dette kan omformulerast til $\mu_2 - \mu_1 = \delta\sigma_p$. Dersom vi vektar dei to populasjonane likt, har vi at $\sigma_p = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}$, og dermed at $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 2\sigma_p^2$. Trekkjer vi to tilfeldige verdiar, x_1 og x_2, éin frå kvar av populasjonane, er CLE definert som sannsynet for at x_2 er større enn x_1, $\text{CLE} = P\left(x_2 > x_1\right) = P\left(x_2 - x_1 > 0\right)$. Frå sannsynsteorien har vi at differansen mellom to uavhengige, normalfordelte variablar sjølv er normalfordelt med middelverdi lik differansen mellom populasjonsmiddelverdiane og varians lik summen av populasjonsvariansane. Uttrykkjer vi dette matematisk og nyttar dei samanhengane vi har etablert over, får vi at middelverdien for differansen vert $\mu_2 - \mu_1 = \delta\sigma_p$ og standardavviket vert lik $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{2\sigma_p^2}$, eller at $(x_2 - x_1) \sim \mathcal{N}\left(\mu_2 - \mu_1, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) = \mathcal{N}\left(\delta\sigma_p, 2\sigma_p^2\right)$

CLE kan no finnast som sannsyn i ei normalfordeling



Figur 2 CLE plotta som funksjon av δ. Utrekningane er gjorde under føresetnad av normalfordeling.

$$\text{CLE} = P\left(x_2 - x_1 > 0\right) = P\left(z > \frac{0 - d\sigma_p}{\sqrt{2\sigma_p^2}}\right)$$

$$= P\left(z > -\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right) = P\left(z \le \frac{\delta}{\sqrt{2}}\right),$$

der z er ein standard normalfordelt variabel, $z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Vi har her fått uttrykt CLE som funksjon av effektstorleiken δ slik:

$$\text{CLE} = P\left(z \le \frac{\delta}{\sqrt{2}}\right).$$

Skrive med ord tyder dette at ved ein gitt effektstorleik δ er CLE lik sannsynet for at den standard normalfordelte variabelen z er mindre enn eller lik $\delta / \sqrt{2}$. Dette kan også formulerast som at CLE er lik den prosentdelen av ei standard normalfordeling som ligg til venstre for verdien $\delta / \sqrt{2}$. Vi har her fått uttrykt CLE som funksjon av effektstorleiken δ. Dei einaste føresetnadane er normalfordeling og lik vekting av dei to populasjonane. Figur 2 viser CLE plotta som funksjon av δ.

Grafen er, som venta, tydeleg ikkje-lineær. Den går gjennom punktet definert ved og CLE = 50 %. Når effektstorleiken δ blir stor, anten negativ eller positiv, går grafen mot 0 % eller 100 %. Dette er også venta sidan stor d, typisk $|\delta| > 3{,}0$, tyder at populasjonsfordelingane er nærmast fullstendig separerte. Desse karakteristiske eigenskapane vil også vere gjeldande for ikkje normalfordelte populasjonar, noko som enkelt kan verifiserast ved hjelp av Monte Carlo-simulering.

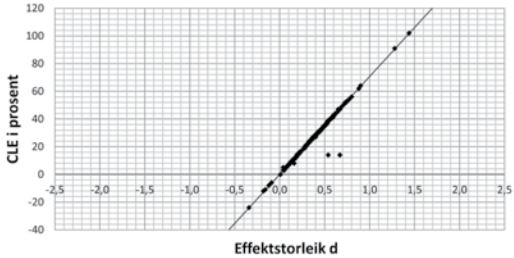
CLE som funksjon av *d* i Hattie si bok

Hattie estimerer δ ved å rekne ut *d*. Samanhengen mellom *d* og CLE er, ut frå det eg har vist over, venta å vere tilnærma lik $\text{CLE} = P\left(z \le \frac{d}{\sqrt{2}}\right)$. Korleis ser det så ut i boka til Hattie? Han viser verdiar for både *d* og CLE i så godt som alle tabellar i boka. I figur 3 er data frå desse tabellane presenterte, verdiar av CLE er plotta mot samsvarande verdiar for *d*.

Samanliknar vi med figur 2, ser vi at måten CLE avheng av d på, her er dramatisk ulik det vi skulle vente. For det første ligg alle datapunkta, med nokre få unntak, på ei rett line som går gjennom punktet *d* = 0 og CLE = 0. I tillegg har vi verdiar for CLE som er negative, og vi har verdiar som er større enn 100 %, frå –24 % til 102 %. Begge delar er umogleg så lenge det er snakk om sannsyn. Figur 3 er basert på data frå hovudtabellane i kapitla i boka, tabellar med gjennomsnittlege effektstorleikar. I Appendix A presenterer Hattie ein tabell med verdiar for alle dei 815 metaanalysane (Hattie, 2009, s. 263ff). Der er det lista opp CLE-verdiar i området frå –49 % til 219 %, langt utanfor det som er moglege verdiar for sannsyn.

Konklusjon og drøfting

Min konklusjon på dette er at CLE-verdiane som Hattie gir, er rekna ut feil. Den einaste korrekte CLE-verdien eg så langt har funne i boka, er det tidlegare omtala dømet kopiert frå artikkelen til McGraw og Wong (1992). Ingen av dei rundt 960 andre CLE-verdiane ser ut til å vere korrekte.Hattie bygger konklusjonane sine på effektstorleiken *d*. Eg har ingen indikasjonar på at denne er feil, men han kjem i kategorien vanskeleg/umogleg å kontrollere utan svært stor innsats. Det eg ovanfor har vist om bruken av CLE, rokkar dermed ikkje ved konklusjonane til Hattie. Hattie hevdar like fullt at CLE-verdiane



Figur 3 Datapunkt frå Hattie si bok, tabellane 2.1, 4.1, 5.1, 6.1, 7.1, 8.1, 9.1 og 10.1. CLE-verdiar er her plotta mot deira korresponderande verdiar for *d* saman med ei trendline.

er gitt for å hjelpe til med å tolke effektstorleikane. Den hjelpa er truleg meir forvirrande enn oppklarande.

Korleis har så Hattie rekna feil? Er det eit mønster som kan sporast tilbake til eit utgangspunkt, eller er det ikkje det? Trendlina som er lagd inn i figur 3, har funksjonsuttrykket $\text{CLE} = 100 \cdot d / \sqrt{2}$ og samsvarar svært bra med datapunkta. Denne lina er ikkje tilfeldig vald, men har sitt opphav i formelen eg utleia over, $\text{CLE} = P\left(z \le d / \sqrt{2}\right)$, CLE som sannsynet for at den standard normalfordelte *z* er mindre enn eller lik $d / \sqrt{2}$. Det kan altså sjå ut som om Hattie reknar ut den aktuelle *z*-verdien, bruker han som verdi for CLE og «gløymer» å rekne ut sannsynet. For å få resultatet i prosent multipliserer han med 100. Om dette er ein glipp eller ei meir grunnleggande feiloppfatning av sannsyn, er vanskeleg å seie noko om. Feilen burde uansett vore oppdaga ut frå dei CLE-verdiane ein fekk. Etter ei kort ordveksling mellom Hattie og meg på bloggen til Lærerprogrammets Programutvalg (UiO) vedgjekk John Hattie å ha brukt feil formel til sine utrekningar (LPU, 2012).

På side 9 har Hattie eit døme som skal hjelpe til med tolkinga av CLE. «Now, using the example above, consider the *d* = 0,29 from introducing homework […]. The CLE is 21 percent so that in 21 times out of 100, introducing homework into schools will make a positive difference, or 21 percent of students will gain in achievement compared to those not having homework». Slik denne tolkinga er formulert, er ho ikkje korrekt og ville heller ikkje vere det om prosenten var rett (rett prosent er 58). I denne konteksten ville ei korrekt tolking av ein CLE på 21 % (58 %) vere: Med eit tilfeldig valt par studentar – éin frå populasjonen med heimearbeid, den andre frå populasjonen utan (elles like populasjonar) – er sannsynet for at eleven med heimearbeid presterer høgare enn eleven utan, 21 % (58 %). Dette er ikkje ekvivalent med det Hattie skriv.

Intensjonen med å gi CLE-verdiar var altså å assistere i tolkinga av effektstorleik. Resultatet er nok ein assistanse i feil retning, dels gjennom feil i utrekningane og dels ved feilaktig tolkingsrettleiing.

I innleiinga av artikkelen slo eg fast at det ofte ikkje er mogleg for lesarane å kontrollere statistikkbruken i publiserte arbeid. I dette tilfellet har vi derimot med ei svært profilert bok å gjere, der det med rimeleg innsats er mogleg å kontrollere delar av statistikkbruken, som viser seg å vere feil. Ikkje nok med at han er feil, feilen er gjennomgåande, systematisk og så klar at det burde vore enkelt å avsløre han i publiseringsprosessen. Å kunne avsløre feil som negative sannsyn og sannsyn på over 100 % høyrer med til kompetansenivået i grunnskulen. Her var det ein høgt profilert forskar, eit velrenommert forlag og mange lesarar som ikkje stod til eksamen. Når dette som var så innlysande, får passere, kor mykje er då feil i det som er mindre kontrollerbart?

Mangelfulle kunnskapar i matematikk kan vere eit demokratisk problem. Dette er mellom anna drøfta i eit temanummer av Tangenten (Tangenten, 2005). Det er eit problem når skuleforskarar og politikarar ikkje har kompetanse nok til å avsløre feil bruk av statistikk i forskingsarbeid som vert brukt som grunnlag for å ta politiske og strategiske avgjerder. I dette tilfellet ser det dessverre ut til at kompetansen ikkje har vore god nok. Om vegval gjorde på bakgrunn av *Visible learning* er gjorde på sviktande grunnlag, har eg ikkje føresetnad for å seie noko eintydig om. Det er heller ikkje poenget. Det dette dømet demonstrerer, er at matematikkunnskapane og evna til kritisk vurdering av statistikken manglar hos fleire enn det som godt er. Vi ser ofte at skulepolitiske vedtak vert argumenterte fram med støtte i forsking. Dersom denne forskinga ikkje held mål grunna feil statistikkbruk, og dei som gjer vedtaka ikkje maktar å avsløre dette, vert vedtaka gjorde på feil grunnlag og med svært uvisst resultat. Det fortener ikkje skulen og elevane våre.

Referansar

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2. utg.). Hillsdale, N. J.: Laurence Erlbaum.

Hattie, J. (2009). *Visible learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London: Routledge.

LPU. (2012). *Kan vi stole på Hattie II: Kommentar fra John Hattie*. Lasta ned 23. oktober 2012, frå http://uv-net.uio.no/wpmu/lpu2/2012/02/08/kan-vi-stole-pa-hattie-ii-kommentar-fra-john-hattie/.

Mansell, W. (2008, 21. november). Research reveals teaching's Holy Grail. *The Times Educational Supplement*.

McGraw, K. O. & Wong, S. P. (1992). A common language effect size statistic. *Psychological Bulletin, 111*(2), 361–365.

Schmidt, F. L. (1992). What do data really mean? Research findings, meta-analysis, and cumulative knowledge in psychology. *American Psychologist, 47*(10), 1173–1181.

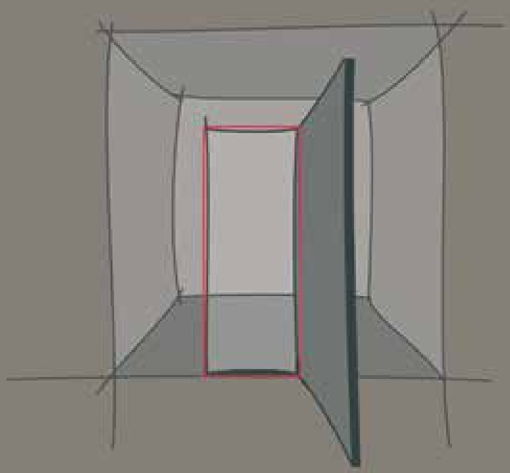
Tangenten. (2005). *Tangenten nr. 3/2005*. Bergen: Caspar.

Topphol, A. K. (2011). Kan vi stole på statistikkbruken i utdanningsforskinga? *Norsk Pedagogisk Tidsskrift,* 95(6), 460–471.

Notar

1 Eg gir CLE som prosentar, som i Hattie si bok. Alternativet vil vere som sannsyn i intervallet 0 til 1, som er meir vanleg innafor sannsynsrekning.

2 Hattie opplyser ikkje her verdiar for standardavvika.



Marianne Risholm

Studiesenteret ved Åsane videregående skole

I forbindelse med at Åsane videregående skole ble pilotskole for Ny GIV-prosjektet, ble det høsten 2011 startet opp et studiesenter ved skolen vår. Studiesenteret skulle være annerledes enn de andre klasserommene på skolen. Det ble lagt stor vekt på møblering, farger og innredning. Studiesenteret skulle være et rom for både trivsel og god læring.

Rommet ble delt inn i tre baser/stasjoner: norsk, matematikk og engelsk. På den måten kan det undervises i flere fag samtidig. Undervisningen på senteret foregår i små grupper med maks fem elever per gruppe.

Alle elever ved skolen blir kartlagt i norsk, engelsk og matematikk i løpet av de første skoleukene ved oppstarten av skoleåret. Kartleggingen og andre tester blir lagt til grunn for innsøkingen til senteret. Elevene må sammen med faglæreren skrive søknad om å få plass. De fleste elevene som får plass, står i fare for å stryke i faget det søkes om plass i. Det er viktig at elevene selv ønsker plass og er motivert for å ta imot hjelp. Ny GIV-elever får automatisk plass hvis de ønsker det. Det blir skrevet kontrakt med elevene som får plass ved senteret, der de signerer

Marianne Risholm
Åsane videregående skole
marianne.risholm@hfk.no

Ny GIV er et treårig prosjekt som har som mål å få flere ungdommer til å fullføre og bestå videregående opplæring. Ny GIV ble lansert høsten 2010, og prosjektet pågår ut 2013. Det er iverksatt både nasjonale og lokale tiltak som intensivopplæring, tett oppfølging, sommeraktiviteter, yrkesretting av fellesfag og utvikling av statistikkgrunnlag. Tiltakene har som mål å sikre at flere fullfører og består videregående opplæring.

på at de skal møte presis, være motivert og jobbe med faget. Elevene får plass for en periode på åtte uker, men perioden kan også forlenges.

Det første året var det først og fremst elever på videregående trinn 1 (Vg1) som fikk plass på senteret. Inneværende skoleår har vi utvidet tilbudet med tre grupper med påbyggselever i matematikk.

Matematikk ved studiesenteret

Jeg underviser i matematikk på studiesenteret. Vi har organisert matematikkundervisningen på følgende måte: Vg1-elever har tre timer matematikk, én dobbeltime på studiesenteret og én enkelttime i klassen. Til timen de skal være i klassen, får elevene med seg oppgaver som de skal jobbe med. Det kreves tett samarbeid med elevenes faglærer med hensyn til fremdrift, prøver og vurdering. Påbyggselevene har fem timer matematikk i uken. De er på studiesenteret i én dobbeltime og i klassen i de tre resterende timene.

Noe av det viktigste før en kan begynne å undervise på senteret, er å bygge gode relasjoner mellom elever og lærer. Det viser seg at dersom disse gode relasjonene ikke eksisterer, vil det være veldig vanskelig, i noen tilfeller umulig, å få elevene til å bli motivert for faget. Siden det aldri er mer enn fem elever i gruppene, har vi gode muligheter til relasjonsbygging. I mange tilfeller har elevene ofte behov for voksne som har tid til å se dem og prate med dem. Tid har vi på studiesenteret.

Vi har også brukt tid på å utvikle matematikkmateriell. For mange av elevene blir læreboken i matematikk uoverkommelig, og da må vi ta i bruk mer forenklede læremidler. På Åsane videregående skole har vi gått til innkjøp av Gand videregående skole (Sandnes) sine minimumshefter i matematikk. Gand har utarbeidet et hefte for hvert av emnene som er pensum på Vg1. Heftene inneholder enkel instruksjon i emnet og oppgaver, og de er bygget opp trinn for trinn og starter med det enkleste og øker i vanskelighetsgrad utover i heftet. Bakerst i

heftet finnes det en fasit til alle oppgavene. Vi bruker konkreter i undervisningen: vekt, målebeger, målebånd, brøkstaver, brøksirkel, geobrett, volummålebeger, tellebrikker og ulike geometriske figurer. Vi bruker også en del Ny GIV-materiell: snorkort, matematikkloop, plakater og spill. I tillegg har vi en del egenprodusert materiale, for eksempel den lille multiplikasjonstabellen i laminert utgave (elever som sliter med multiplikasjon, kan ha den foran seg når de jobber), tallinjen henger på veggen (både negative og positive tall), og vi har laminerte plakater med for eksempel partall, oddetall, primtall, brøkregler, prosentregler og regler for regnerekkefølge. Meningen er at elevene hele tiden skal tenke matematikk, både ved å jobbe med faget, gjennom bruk av konkreter og ved at matematikkplakater henger på veggene.

Det finnes et minimumshefte for hvert emne i læreboken. Vi jobber på den måten at vi bruker et hefte, for eksempel om ligninger, i fire timer. Når vi er ferdige med heftet, får elevene en test i det de har jobbet med. Det resulterer i at de får mange små vurderinger, og at testene kommer oftere og er mindre. Det motiverer elevene når de ser at det er mulig å fullføre en test og få et bra resultat etter at heftet er ferdig. Elevene erfarer også at testene er overkommelige på den måten at de bare inneholder ett emne om gangen. I tillegg til de små testene får elevene kapittelprøver. De får da valget mellom å gjennomføre klassens kapittelprøve (faglæreren har

(fortsettes side 29)

Christine Schütz Fløisand, Tone Bysheim

Konkretiserte abstrakter

Hvis vi tenker oss litt om, er vi omgitt av matematikk. For oss voksne er det i stor grad opplagt, men også små barn lever i en verden med spennende tall og begreper. Når en toåring viser med fingrene hvor gammel hun er, eller når femåringen spør hvor lenge det er til barne-tv og vi svarer at det er fem minutter til, er det et tegn på deres begynnende nysgjerrighet og inntog i den spennende matematiske verden. Små barn ser ut til å være naturlig tiltrukket av tall på samme måte som vi ser at barnet er opptatt av språk.

Maria Montessori (1870–1952) var Italias første kvinnelige lege. Hun var ferdigutdannet i 1894, og fikk gjennom sin første jobb kontakt med psykisk utviklingshemmede barn. Hun ønsket å stimulere barna og utviklet derfor det som skulle bli begynnelsen på hennes anerkjente materiell. Hun oppdaget at disse barna oppnådde gode, uventede resultater. Montessori ble da nysgjerrig på hva normalt utviklede barn kunne få til om de også fikk lære på en konkret måte.

Gjennom observasjoner så Maria Montessori at barn er naturlig tiltrukket av orden og struktur. De ønsker å finne ut hvordan ting henger sammen. Dette kjenner vi igjen – hvor skal denne være, hvorfor er denne større enn den? Montessori viste til Pascal, som mente at menneskets hjerne var bygget opp matematisk: «Man's mind is mathematical by nature and knowledge and progress come from accurate observation» (Montessori, 1988, s. 169). Materiellet som Montessori utviklet, er derfor bygget opp slik at barnet kan jobbe med å skape orden, organisere og forestille seg hvordan ting henger sammen.

Aldersblanding er et viktig aspekt ved montessoripedagogikken. I likhet med Vygotsky m.fl. (Imsen, 1998) mente Maria Montessori at det sosiale er en viktig del av barns læringsprosess. Når elevene arbeider i aldersblandede grupper, får de både muligheten til å hjelpe hverandre, og de vil fatte interesse for nye temaer og arbeidsområder gjennom å observere andre i arbeid. Mye av arbeidet foregår i små og store grupper, uavhengig av klassetrinn. Enkelte oppgaver jobber elevene med individuelt, men de kan gjerne sitte sammen med andre som holder på med andre oppgaver enn dem selv. Diskusjonene og samtalene som oppstår i en slik læringssituasjon, bidrar til økt nysgjerrighet og økt kunnskap.

Dersom vi tar en rask kikk inn i klasserommet på mellomtrinnet, kan det f.eks. på et fire-

Christine Schütz Fløisand
Montessoriskolen i Bergen
christinesfn@gmail.com

Tone Bysheim
Montessoriskolen i Bergen
tone@mbib.no

mannsbord sitte to elever fra sjette klasse, én fra syvende klasse og én femteklassing. Tre av dem jobber med kategorisering av geometriske legemer, og den fjerde jobber kanskje med verboppgaver i norsk. Elevene blir litt usikre på kategoriseringen av en figur, og en samtale mellom alle fire oppstår. Sammen resonnerer de seg frem til svaret. Vi observerer at dette ikke fører til at eleven som jobbet med verb, mister konsentrasjonen rundt sine egne oppgaver, men heller at det oppstår en nysgjerrighet rundt kategoriseringsmateriellet som senere inspirerer eleven til videre arbeid med dette.

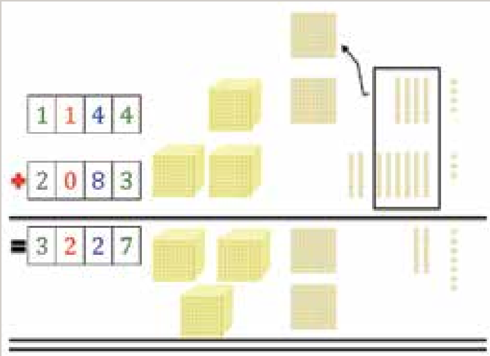
I tillegg legger denne organiseringen til rette for en fordeling av undervisningspersonell som gir god lærerdekning i klasserommet til enhver tid. Undervisningen er ikke lærerstyrt. Elevene disponerer dagen sin selv og blir hentet ut til presentasjoner av nytt materiell og nye oppgaver. Utover det bruker lærere mye tid på observasjon, og det blir rom for tett individuell oppfølging og spontane lærings- og undervisningssituasjoner som følger elevens behov og utvikling.

Som lærer kommer man tett på elevgruppen, slik at man hele tiden vet noe om elevens progresjon. Med hjelp av lærere og medelever vil eleven jobbe seg fremover mot mestring av de forskjellige målene som skal nås. God kjennskap til elevene gir også lærerne mulighet til å legge opp individuelle oppgaver ut fra elevenes interesseområder og mestringsnivå og å implementere kompetansemål i disse.

Montessori var som blant andre Dewey og Piaget knyttet til en progressiv pedagogikk. De var opptatt av «learning by doing», noe som hos Montessori er tydelig både gjennom materiell og pedagogikkens natur. Materiellet er tilpasset barnets utviklingsstadier. Barn i barnehagen jobber sensorisk med materiell, de bygger begreper og tallforståelse på en lystbetont måte som ivaretar deres nysgjerrighet samtidig som det skaper positive assosiasjoner til tall.

Barn på småtrinnet jobber fremdeles mye sensorisk (i praksis har ikke alle bakgrunn fra montessoribarnehage), men etter hvert som barnet er modent for det, vil det være naturlig at de går et skritt videre. De vil jobbe med materiellet sensorisk, de vil repetere og se sammenhenger og gradvis abstrahere en teori. Eller sagt litt enklere; eleven finner ved hjelp av materiell en regel.

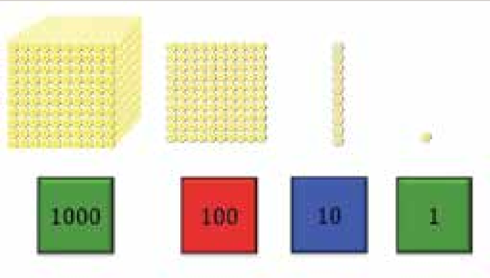
> Materials are used to help the teacher teach the concepts in a traditional school. In a Montessori school the materials *are* the teachers. The child teaches himself using the materials, and the teacher links the child to the material. (Walls, 2013.)



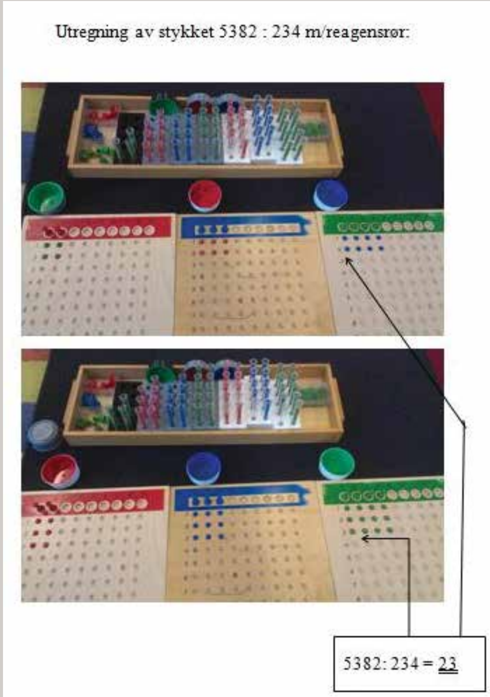
Figur 1: Gjennom arbeid med gullperlene får elevene visualisert mengden. De kan ta og føle på, kjenne hvordan 10 er 10 ganger så stor som 1 og så videre. Dette hjelper barna med å få et bevisst forhold til hva tall representerer, og forståelsen for tallmengder blir internalisert. Etter at elevene har blitt kjent med materiellet, så tar de til med å addere små mengder. De arbeider først uten veksling, men opparbeider etter hvert et naturlig forhold til vekslingsprosessen. Logikken i vekslingen, og hvordan det føres, kan elevene tidlig se og forstå.

Frimerkespillet brukes på samme måte som gullperlene, bare at det nå blir mer abstrakt.

Figur 3 viser materiellet som vi kaller reagensrør. Materiellet blir brukt til divisjon og viser tydelig at i divisjon er alltid svaret hva *én*



Figur 2: Når elevene mestrer gullperlene kommer en overgang til frimerkespillet[1]. Elevene kjenner godt til fargekodene fra annet matematikkmateriell, og overgangen mellom gullperler og frimerkespill går lett og naturlig. Frimerkespillet kan brukes til alle regnearter, i likhet med gullperlene.



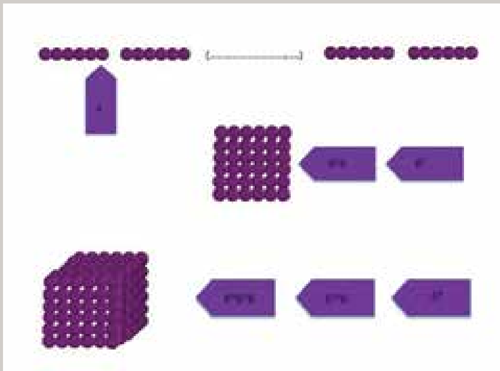
Figur 3: Divisjon forklart ved hjelp av «reagensrør».

får. Man legger perler i skåler etter fargekoder tilsvarende dividenden, og kjegler på brettene tilsvarende divisor. Sett skålen med høyest hierarki over brettet med høyest hierarki, nest høyest over neste brett og så videre. Så deles perlene ut. Man begynner med det høyeste hierarkiet. Fyll på med de neste hierarkiene/skålene, og noter hva én (grønt brett) fikk, og hva som ble brukt. Rydd brettene og del så videre på samme måte, veksle ved behov i reagensrørene øverst. Fargekodene er fremdeles de samme som elevene kjenner godt til fra alt tidligere arbeid med matematikkmateriell. Føring foregår parallelt.

Figur 4 viser en presentasjon av tredje potens. Det har selvsagt vært en oppbygging til dette i forkant. Målet med dette er å gi elevene en forståelse av potens.

På mellomtrinnet er det naturlig at materiellet etter hvert får mindre plass, men det er fremdeles sentralt – spesielt ved ny læring. Barn i den alderen utvikler gradvis en god evne til å forestille seg ting. Og med utgangspunkt i de gode grunnleggende ferdighetene som det tidligere arbeidet med materiellet har dannet, er behovet for konkreter avtagende.

Men ettersom barnet kan forestille seg ting og også i stor grad har operasjonell kunnskap, kan også materiellet brukes på en mer utfor-



Figur 4: Tredje potens.

skende måte enn tidligere. Elevene kan bruke begreper og snakke med hverandre om løsninger. Dette kan være en viktig faktor til at den nye læringen eies av eleven. Noen ganger opplever vi at ny kunnskap får mening dersom det vises muntlig til konkreter som eleven har

Sjakkbrettet blir brukt til multiplikasjon av store tall. Sjakkbrettet er litt mer abstrakt enn gullperler og frimerkespill, men det er fremdeles veldig konkret. Målet er, som med alt annet materiell, at elevene skal forstå hvorfor det blir som det blir. I arbeidet med matematikkmateriell skal også elevene få en forståelse av hvorfor matematikkstykker føres som de gjør, slik at de etter hvert kan løse samme type oppgaver abstrakt.

jobbet med tidligere.

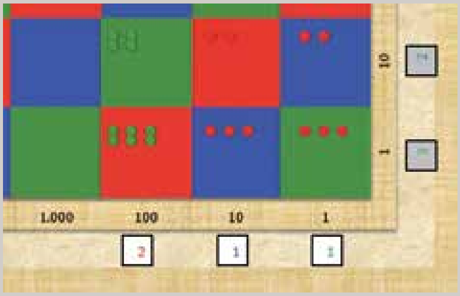
> På montessoriskolen vektlegges også betydningen av «å snakke matte», det vil si at læreren diskuterer med barna hvordan ulike matematiske problemstillinger kan løses. For at det skal fortsette å være lystbetont for barna å arbeide med matematiske problemer, er det uhyre viktig at de får oppleve at deres måte å løse matematiske problemer på duger. (Vatland/Lexow 2004:87.)

På ungdomsskolen er behovet for konkreter mindre ettersom de fleste har jobbet mye med materiell og har gode grunnkunnskaper. Det kan være enkeltelever som har behov for det, eller det kan brukes for å repetere problemstillinger som elever finner vanskelige. I tillegg kan det brukes til å introdusere nye tema. Utover det er forestillingsevnen det beste redskap for eleven.

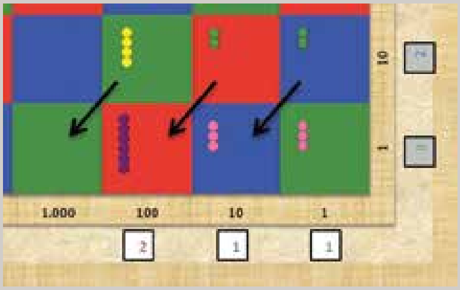
Vi som jobber med barn, ser at de trenger hjelp til å forstå nye begreper og ny kunnskap. Særlig i matematikk er dette tydelig. Forskning viser også at hjernen trenger å bygge ny kunnskap på gammel kunnskap, slik blant annet Montessori var opptatt av. Montessorimateriellet gjør matematikk tilgjengelig, interessant og konkret. Det skaper forståelse hos barnet og danner et grunnlag for å bygge nye og mer kompliserte ferdigheter.

(fortsettes side 45)

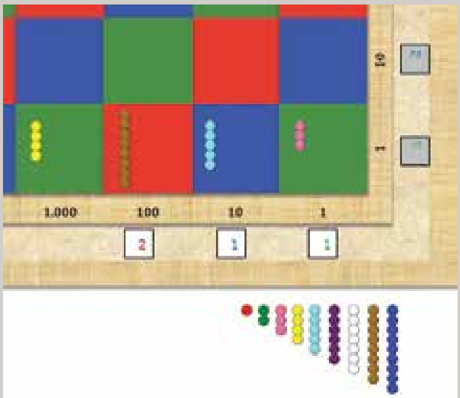
Utregning av stykket 211 * 23



1. Eleven ganger grå 3 med hvit 1, og legger ut 3 stk. enerperler. Det samme gjentas med hvit 1 på tierplass og hvit 2 på hundrerplass. Deretter ganger eleven ut rekken over, på samme måte - fra høyre mot venstre.



2. Prosessen er som over, men eleven legger her ut perlestaver i stedet for enkeltperler. Stavene trekkes deretter sammen.



3. Svaret regnes ut. Eleven begynner med å telle opp fra enerplass. Stykket føres parallelt.

Trond Ingebretsen, Frode Løbersli

Den virtuelle matematikkskolen

I lederartikkelen i siste nummer av Tangenten rettes oppmerksomheten mot behovet for tilbud til de ungdomsskoleelever som er flinke og som trives i matematikkfaget. Redaktøren uttrykker i den anledning bekymring over at det nettbaserte tilbudet «Den virtuelle matematikkskolen» (DVM) som Senter for IKT i utdanningen nå planlegger, tuftes på at elevene ikke trenger lærerstøtte for sin utvikling. Dette er feil – bekymringen er uberettiget. Vi legger tvert imot opp et tilbud med sanntidsundervisning over nett – iscenesatt og gjennomført av dyktige matematikklærere. DVM blir et unikt tilbud, hvor vi utnytter teknologien til å gi et godt supplement til den ordinære undervisningen. Et slikt e-læringstilbud for ungdomsskoleelever er ikke prøvd ut tidligere. Selv om DVM vil kunne benyttes som en læringsressurs uten direkte lærerkontakt, endres likevel ikke det faktum at lærers oppfølging er avgjørende for progresjon og et godt læringsresultat også for de flinkeste elevene.

Trond Ingebretsen
Senter for IKT i utdanningen
trond.ingebretsen@iktsenteret.no

Frode Løbersli
Senter for IKT i utdanningen
frode.lobersli@iktsenteret.no

Meld.St.22 (2010-2011) *Motivasjon – Mestring – Muligheter* bereder grunn for flere tiltak rettet mot å løse utfordringene på ungdomstrinnet. Manglende motivasjon og svake resultater innen matematikkfaget er en av disse. Kunnskapsdepartementet har tatt til orde for nye tilnærminger, og har bl.a. bedt Senteret om å pilotere og utrede en *virtuell matematikkskole*. Sammen med Matematikksenteret har vi derfor i et års tid forberedt en pilot som skal gjennomføres under skoleåret 2013/2014, med ca. 1000 elever fra skoler over hele landet. Piloten skal rette seg mot to målgrupper: de aller flinkeste, som ønsker å følge kurs på videregående nivå; og de svakeste – de som av ulike grunner ikke evner å følge med i faget. Vi skal prøve ut et pedagogisk opplegg for de to målgruppene, men utprøvingen betyr også å teste en teknisk løsning for sanntidsundervisning, og vinne erfaringer med drift av en «nettskole» – med inn- og utmeldingsrutiner, timeplaner, vedlikehold og forvaltning av lærestoff, mekanismer for å sikre kvalitet i tilbudet, etc. Piloten skal gi grunnlag for å si noe om hvordan et permanent, nasjonalt tilbud innen faget matematikk kan bygges opp, hvor den lokale lærer fortsatt er ansvarlig for sine elever.

DVM blir et nettsted bygget rundt en læringsplattform, hvor elevene må autentisere seg med Feide (Felles Elektronisk IDEntitet er Kunnskapsdepartementets valgte løsning for

sikker identifisering i utdanningssektoren). Piloten integrerer mange ulike læringsressurser. Vi har fått tilgang til innhold fra de store forlagene, fra Kikora, Cyberbook og flere andre. For de svakt presterende elevene tilbyr DVM et nivåtilpasset opplegg som elevenes faste matematikklærere kan introdusere for dem. I piloten begrenser vi oss til elever på 9. trinn, og til tematikken «tall og algebra» – for ikke å gå for bredt ut i første omgang. Læringsressursene vil dekke ikke bare læreplanen for ungdomstrinnet, men også for mellomtrinnet. Vi vil ikke tilby nettbasert undervisning for denne gruppen, men vi vil ha et nettverk av faglige mentorer som etter behov kan følge opp og støtte elevene. For de flinkeste elevene i 9. og 10. trinn utvikler vi et e-læringstilbud som gjør det mulig for elever – uavhengig av geografisk tilhørighet – å ta videregående-matematikk 1T. Læringsressursene dekker alle kompetansemålene i læreplanen. Som matematikkverktøy for oppgaveløsning og gjennomgang av fagstoffet benyttes Texas Instruments N'spire og GeoGebra. For å dekke behovet for sanntidsundervisning i «klassen», benyttes Adobe Connect. Løsningen har også chat-funksjonalitet for skriftlig dialog med lærer eller mellom elevene i «klasserommet». Til å utvikle undervisningsopplegget og gjennomføre e-læringen i piloten har vi frikjøpt flere matematikklærere. De har utviklet nærmere 100 e-leksjoner som følger fagplanen til Matematikk 1T. Vi har også invitert landets fylkeskommuner om å delta med lærerkrefter som kan utnytte den infrastrukturen vi nå etablerer – slik at vi kan nå enda bredere ut med e-læringstilbudet.

DVM blir altså langt fra lærerfritt. Det blir et styrt undervisningsopplegg, basert på e-leksjoner. Eleven bruker e-leksjonene som forberedelser til undervisningstimene, i en «flipped classrom»-metodikk. E-leksjonene inneholder videoforklaringer, simuleringer, spill og oppgaveløsning. Sammen med læringsressursene og gjennom samhandling med nettlærere og medelever skapes en ny type undervisning. Den er variert, samtidig som den er målrettet. Metodikken og tilgangen til læringsressurser i forkant frigir elevtid til oppgaveløsning og refleksjoner i selve undervisningstimene.

Piloten skal evalueres fortløpende under det kommende skoleår, både med hensyn til pedagogikk, funksjonalitetskrav, teknologivalg og organiseringen av tilbudet. Piloten vil belyse mange sider ved et nettbasert skoletilbud, men den vil ikke svare på alt. Vi har derfor også igangsatt en ekstern utredning av de juridiske, organisatoriske og økonomiske sider for et eventuelt permanent tilbud. Her vurderes bl.a. de utfordringer gjeldende lovverk representerer, og hvordan et e-læringstilbud kan finansieres. Pilotgjennomføringen og utredningen vil til sammen sikre oss et grunnlag for å gi departementet de riktige anbefalinger om en permanent nasjonal tjeneste.

DVM er et viktig prosjekt for Senter for IKT i utdanningen. Vi er spent på hvordan tjenesten vil fungere for de to målgruppene – som et supplement til det ordinære skoletilbudet. Vi har all mulig ydmykhet overfor de mange problemstillingene som må håndteres. Som Tangentens redaktør er vi imidlertid helt overbevist om at gode matematikklærere er nødvendig, også som en del av et e-læringstilbud – og det har vi også lagt opp til i DVM.

Simon Spurkland

Spillrevolusjonen er her – ta den i bruk

Ved oppstart av skoleåret 2011/12 hadde jeg det én av mine kolleger kaller «de gylne fem». Kort forklart får man hver måned utdelt fem minutter med ekstremt klarsyn da alt faller på plass og man er enormt kreativ og idérik. Jeg var relativt nystudert etter å ha gjennomgått en statlig støttet videreutdanning på HiOA (Høgskolen i Oslo og Akershus) året før, og jeg hadde gjort meg mange refleksjoner som jeg gjerne ville prøve ut i praksis. Resultatet var at jeg i september 2011 skrev mitt første innlegg på en blogg jeg kalte for «mattelærer'n», der jeg formulerte følgende dogmer inspirert av von Triers dogmefilmer fra en tid tilbake:

1) Elevene skal undre seg fram til svaret. Det skal være gøy. Ikke «ha ha»- gøy, men løsrevet fra bok og tavlepredikering.
2) Elevene skal ikke bruke skolens innkjøpte lærebok hele første semester.Læringen skal oppnås gjennom erfaringer som gjør at eleven *vil* finne ut hvordan det henger sammen, eller hva som er svaret. Elevene skal lære annerledes strategier for hvordan de skal og kan tenke om faget matematikk. Matematikk er et fremmedspråk – vokabular er viktig.

Simen Spurkland
Qatar Norwegian School
simen.spurkland@gmail.com

Målet var altså å skape en skolehverdag der elevene i mine klasser skulle ankomme matematikktimene spente og uten negativ forventning, og de skulle forlate dem med en opplevelse av mestring.

Forskjellen fra mine fire foregående år som matematikklærer var følgende:

– Jeg kuttet ut tavleundervisning – tavle ble kun brukt til beskjeder og enkle instruksjoner.
– Jeg kuttet ut lærebok.
– Jeg sluttet å rette skriftlige prøver (utdypes om litt).

Tavleundervisningen forsvant selvsagt ikke helt, men følelsen av tavleundervisning forsvant fordi jeg klarte å endre elevenes fokus. Lærebok ble delt ut, men den ble ikke brukt. Tidvis brukte jeg den som ressurs og til oppgaver, men i overraskende liten grad. Skriftlige prøver ble arrangert på vanlig måte, men jeg rettet dem ikke. Vi innførte et system med egenvurdering, slik at elever som skjønte underveis eller kun hadde misforstått, fortsatt kunne få uttelling for dette på karakteren.

Midt i denne prosessen, der jeg brukte mye tid på å planlegge og lete etter nye måter å undervise i faget på, dukket «Dragonbox» opp. Den 8. mai 2012 ble spillet sluppet, og jeg hadde på skolen tilgang til åtte iPad-er. Stort bedre timing kunne jeg ikke ha drømt om.

Sammen med programmet «Siffer» på NRK og matematikkspillet «Mattekonge» var Dragonbox et glimrende supplement for meg som ønsket å skape en annerledes matematikkundervisning.

Hva er Dragonbox?

Dragonbox er et spill – et matematikkspill, eller mer spesifisert et algebraspill.

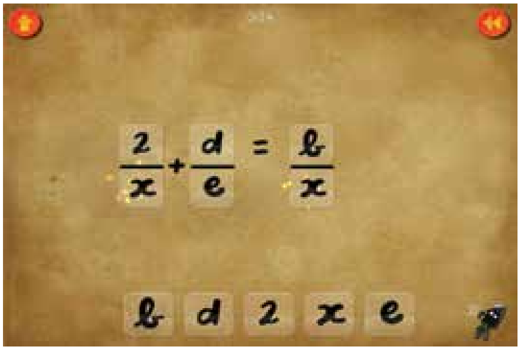
Figur 1. Oppdrag: Få boksen med stjerne alene på en side med færrest mulige trekk.

Du skal mate et dyr som sitter i en boks. Dyret mates med billedsymboler og etter hvert tall og bokstaver. Etter hvert som du mater dyret, vokser det.

Det geniale med spillet er at det gir et helt nytt sett med referanser som man seinere kan overføre til konkrete situasjoner med algebra og likningsløsing. For hver utfordring spillet gir, skal spilleren sørge for at boksen med stjerne

Figur 2 Dyret som mates med tilbakemelding etter oppdraget.

(se figur 4) står igjen alene på den ene siden. For å få bort «kort» med sommerfugler, biller eller tall- og bokstavsymboler fra den siden «stjerneboksen» er på, må spilleren følge visse regler. Reglene innføres etter hvert som spilleren avanserer. De tilsvarer regler som anvendes i algebra. Eksempelvis har hvert kort en lys og en mørk side, som representerer positivt og negativt fortegn. Legger en til et kort på én side, må en gjøre det samme på andre siden. Plasserer en et kort over (brøk)streken, kan en stryke (forkorte) dersom samme kort står under streken. Da må samme kort legges tett sammen med hvert ledd (tilsvarer å multiplisere) på begge sider. Etter hvert som nye spillebrett» kommer, innføres positive og negative tall og bokstaver, «stjerneboksen» byttes ut med X, og skilleveggen mellom rommene blir til likhetstegn. Men reglene er hele tiden de samme.



Figur 3. Bildekort blir byttet ut med bokstaver og tall.

Spillet er ambisiøst. Når du løser siste brett i siste verden, får du beskjed om at du kan mer matematikk enn de fleste. En hårete påstand som ikke blir helt sann uten videre.

Som for så mange andre alternative tilnærminger til innlæring av matematikk trenger elevene også her hjelp og veiledning for å se overføringen.

Mine første erfaringer med Dragonbox forsøkte jeg å oppsummere i slutten av mai 2012. De var litt delte, men positive i sin grunntone. De fleste elevene syntes det var morsomt å

Figur 4. En hårete påstand?

kunne spille matematikk, men jeg klarte ikke å skape overføring. Jeg opplevde likevel at alle elever mestret spillet på et høyere nivå enn matematikkarakteren skulle tilsi.

Utfordringen er hvordan man skal få elevene til å overføre det de mestrer i spillet, til en papirvariant av det samme. I spillet forkorter og utvider de brøker, balanserer sidene i en likning, snur fortegn med mer. Overføringen jeg lette etter, var altså å få elevene til å se på de samme matematiske problemene i andre kontekster, men de skulle tenke Dragonbox.

Magi oppstår

La meg kjapt spole fram til det som skal være selve essensen av denne artikkelen, nemlig at jeg klarer å skape overføring. I løpet av sommeren 2012 flytter jeg på meg, fra Norge til Qatar. Jeg og min kone har begge fått lærerjobb ved QNS, Qatar Norwegian School. Her tok vi fatt på et skoleliv som er få forunt: 15 elever i fådelte klasser, oversiktlig miljø, mer enn nok ressurser og god tid. Jeg tok selvsagt med meg prosjektet mitt, og som lærer for åtte elever i en fådelt klasse fra femte til syvende trinn så jeg for meg at jeg skulle få anledning til jobbe med noen undervisningsopplegg som jeg ellers ikke ville klart å få tid til.

Med på lasset var selvsagt Dragonbox, som nå hadde en pc-versjon på beddingen.

Da jeg lot elevene på min nye skole jobbe med spillet første gang, var utholdenheten, motivasjonen og engasjementet på topp.

Absolutt alle elevene jobbet selvstendig, tenkte seg fram til løsninger, prøvde igjen om de ikke fikk full score, hjalp hverandre med løsninger, spurte om de kunne jobbe litt lenger enn tenkt, tok med seg spillet hjem, repeterte latterlig mange ganger, turte å være den som ikke fikk til, turte å være fornøyd når de fikk til noe vanskelig, og så videre. Alt dette nesten helt utenkelig å se i sammenheng med en vanlig undervisningstime i matematikk!

Tenk deg en vanlig time der elevene sitter med oppgaver i ganging. Plutselig sier en elev halvhøyt: «Hæ?! Jeg får det ikke til!» Tre medelever iler til, vil hjelpe og får lov til det, og alle er like blide. Etterpå hever en annen elev knyttneven og roper: «Yes! Jeg fikk det til!» Medelever iler igjen til og skryter av hva eleven har klart, og lurer på hvordan denne løste det.

På slutten av timen spør alle elevene om de kan få ta med matteboka hjem og jobbe mer hjemme… Mildt sagt utopisk, men slik var det altså med Dragonbox.

Så slo det meg: Hvilken overføring var det jeg lette etter, og hvorfor? Svaret jeg ga meg selv, var oppløftende, men også krevende. Overføringen jeg lette etter, var noe som kunne legitimere at jeg brukte spill i undervisningen. Hvem var det jeg trengte å overbevise, egentlig? Hvem er det som avgjør om den undervisningen jeg gir, er god nok? I det norske systemet er svaret jeg, læreren, inntil noen kan bevise at jeg gjør noe galt eller ulovlig. Så lenge jeg mener at læringseffekten er god, og at elevene sitter igjen med noe de kommer til å nyte godt av, så trenger jeg ikke å finne en overføring. Hvis jeg har rett, vil overføringen komme av seg selv, og jeg skal ikke tvinge den fram.

Denne erkjennelsen gjorde at jeg senket skuldrene og lot Dragonbox være en naturlig del av skolehverdagen, både som belønning og som pålagt oppgave. I et klasserom vil man jo ha representanter for en mengde ulike utgaver av mennesketypen. Opp gjennom historien har man forsøkt å kartlegge og kategorisere disse, for så å innføre tiltak som skal skape tilpasning for de enkelte typene. Her snakker vi om læringsstilene til Dunn og Dunn, vi snakker om Gardners intelligenser, Maslows pyramide og sikkert mye mer.

En periode fikk elevene som skiftet fra barne- til ungdomsskole, med seg et egenmeldingsskjema med ulike behov de hadde kartlagt: liker gruppearbeid, må ha det kaldt, ikke for lyst, funker best på ettermiddagen osv. Interessant, men etter min mening ikke noe man kan utnytte effektivt i hverdagen. Med Dragonbox og liknende hadde jeg nå en mulighet for tilpasning som gjorde hverdagen min enklere. Elever som faktisk foretrakk å gjøre oppgaver i boka, gjorde det, mens elever som ikke fikset det enda, kunne gjøre Dragonbox, Mattekonge eller oppgaver på matematikk.org.

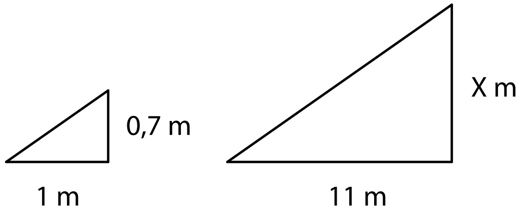
Du bare fjerner sommerfuglen…

Så kommer overføringen. Ikke planlagt, ikke forsert og ikke forutsett. Vi hadde jobbet med å måle på gamlemåten. Klassen hadde skrittet rundt, funnet avstander og skulle finne høyden på stolpe, flaggstang og høy nabobygning. Denne klassen er altså en fådelt klasse fra femte til syvende trinn. Etter det praktiske skulle jeg oppsummere det teoretiske på tavla. Med friskt mot satte jeg opp mot hverandre ulike høyder, ukjente sider, formlike trekanter og alt som hørte med. Mer konkret var det snakk om å sette opp de tre kjente verdiene for å finne den siste lengden. De hadde et metermål, avstanden fra kropp til metermål (armlengde) og avstand til flaggstangen.

Likninger som stod på tavla, var av typen:

$$\frac{11\text{ m}}{0{,}7\text{ m}} = \frac{x\text{ m}}{1\text{ m}}$$

0,7 m og 1 m er hhv. høyde og grunnlinje i den minste trekanten, mens X og 11 m er hhv. høyde og grunnlinje i den største. X er altså høyden på flaggstangen i dette tilfellet



Mens jeg holdt på, så jeg lyset slukne hos elev etter elev. Selv min siste skanse – eleven som alltid skjønner alt – strevde med å holde tråden. Jeg erkjente at ambisjonen ble for hårete, jeg fikk det ikke til. Man utvikler jo en viss radar for hva som funker og ikke, og dette funka ikke! Resignert snur jeg meg mot tavla for å se om det er noe jeg kan gjøre, om det er mulig å redde stumpene av dette stadig mer frynsete opplegget. Så ser jeg det! Jeg ser Dragonbox! Og så er lyset på igjen. Jeg snur meg mot klassen og utbryter, med ekte heurekaglede og inspirasjon: «Dette er jo Dragonbox!» Brått er lyset på hos alle elevene igjen, og de myser mot tavla. Overraskende kjapt er hendene i været, og alle er med. Tall, X-er og sider blir nå omtalt som sommerfugler, monstre og biller, og likningen løses forbilledlig raskt. At X kan kalles «boksen», er befriende, og at jeg kan instruere en elev ved å omtale et tall som en sommerfugl, er fascinerende. At eleven klarer å løse noe som er relativt avansert på grunn av et spill, er genialt.

Revolusjon? Tja…

Spill har kommet for å bli. De har potensial til å bidra til å endre hverdagen i matematikktimene, til å virke inn på vår måte å tenke på i matematikk. Jeg kommer til å fortsette med å være undersøkende og nysgjerrig på hvordan blant annet spill kan virke inn i undervisningen. Jeg deler erfaringer og opplevelser som matematikklærer videre på mattelærerbloggen min!

Trygve Breiteig

Skjulte skatter

Eventyret Kongsberg Sølvverk startet våren 1623 da gjeterbarna Helga Verp og Jakob Grosvold var ute med dyrene i åsene vest for det som er Kongsberg i dag. De hadde etter sagnet med seg en okse som stanget hornene i fjellet slik at det kom til syne noe som skinte. Dette tok barna med seg hjem til fedrene til Helga og Jakob, Arne Verp og Kristoffer Grosvold. De kunne med glede fortelle at de hadde funnet sølv!

På høsten 1623 får kong Christian 4. beskjed om sølvfunnet som er gjort i Norge og hans stattholder i Norge setter i gang Sølvverket på Kongsberg umiddelbart.

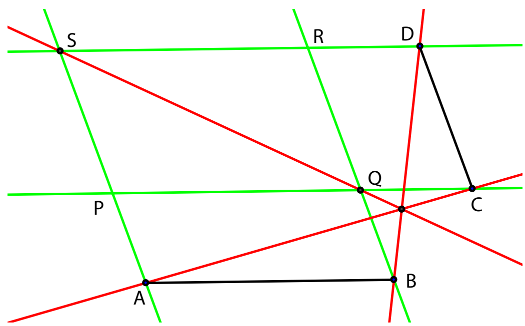
Slik heter det på nettstedet til Norsk bergverksmuseum[1]. To barn finner noe de lurer på hva kan være. Et lite spor som de tar med seg hjem for at andre, voksne, skal undersøke. Det spede funnet viser seg å skjule store verdier! De ligger i lag dypt under bakken. Kyndige mennesker kan bruke sin spesialkompetanse til å utvinne verdiene. De to barna, Helga og Jakob, kommer etter hvert i skyggen av bergverksdriften som etableres. Men det var deres undring som startet eventyret...

Trygve Breiteig
Universitetet i Agder
trygve.breiteig@uia.no

Et lite funn

Ved noen undersøkelser i matematikk hender det at vi støter på et lite resultat. En liten sammenheng, et mønster. Vi undres: Er det interessant? Kan det være en liten flik av noe mer her? Et tegn på at her ligger det noe dypere under? Kan det ligge noe mye større som hittil har vært skjult? Hvem kan avgjøre dette spørsmålet, hvem kan følge trådene og finne ut om det skulle være noe å ta tak i og undersøke mer?

Håvard Johnsbråten fra Høgskolen i Telemark presenterte 30. oktober 2009 i en personlig meddelelse et lite geometrisk funn han hadde slumpet over mens han jobbet med en artikkel til Tangenten. Se Johnsbråten (2009, 2010).[2]



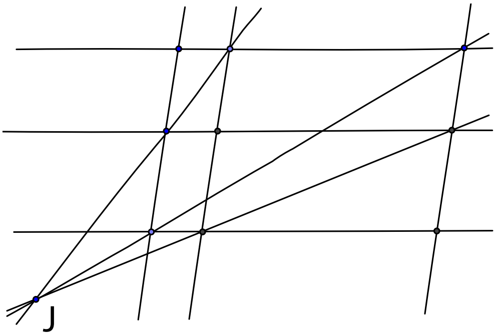
Figur 1

To vilkårlige linjestykker var gitt, *AB* og *CD*. Det ble laget to paralleller til *AB* gjennom henholdsvis *C* og *D*. Videre ble det laget to paralleller til *CD* gjennom henholdsvis *A* og *B*. Parallellene skjærer hverandre og danner et nytt parallellogram, *PQRS*.

Så kom observasjonen eller resultatet som overrasket: De tre linjene *AC*, *SQ* og *BD* går gjennom samme punkt, kalt *H* på figuren. De er med et engelsk ord *concurrent*, de er konkurrente. Er dette alltid slik? Hvis ja, er dette et resultat som er kjent fra før? Eller er det nytt? Bygger det på noen geometrisk setning? Og hvordan kan dette bevises?

Funnet granskes

Vi har to sett med tre parallelle linjer. Linjene danner skjæringspunkter. Ved å kombinere skjæringspunkter finner man nye linjer. Det ser ut til at man finner tre slike linjer som er konkurrente. Situasjonen er vist i figur 2.



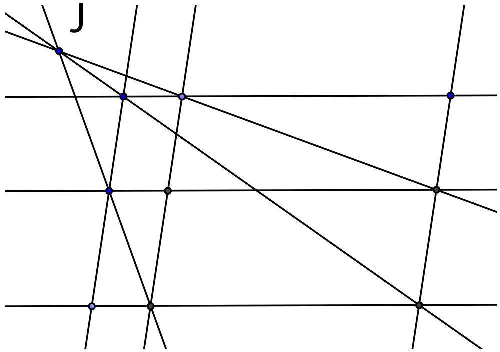
Figur 2

Figuren viser et parallellogram der figuren er utvidet med en ekstra parallell i hver av de to retningene. Da skjer følgende: Tre diagonaler møtes i ett punkt. Punktet er kalt *J* på figuren. Siden dette ble påpekt av Håvard Johnsbråten, kaller vi punktet *J* et *Håvard-punkt* for figuren.

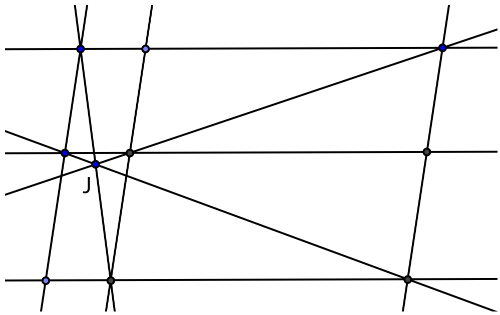
Men vent litt her! Figuren har ikke bare ett, men i alt seks Håvard-punkter! Vi tar med to slike til. Dette spesielle punktet er kalt *J* på hver av figurene 3 og 4.

Det kan være en oppgave å finne de tre siste Håvard-punktene … Et hint: Benytt nøyaktig to punkter på hver av parallellene.

Fremdeles står det store spørsmålet uløst: Hvordan kan dette resultatet bevises?



Figur 3



Figur 4

Bare punkter og linjer

Hva er det vi støter på her? Vi sier ingen ting om vinkler, kongruens, lengder eller avstander. Ingen ting om formlikhet eller forhold. Dette merker vi oss.

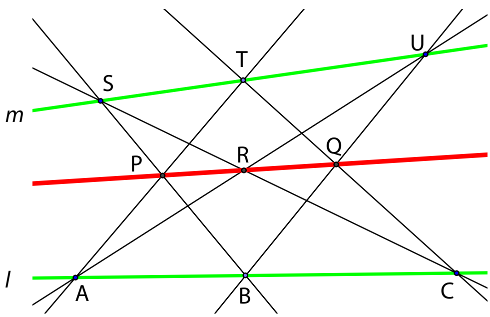
La oss først presisere noe. Hvis vi har to linjer som i vanlig euklidsk geometri er parallelle, vil vi her si at disse bestemmer et uendelig fjernt punkt. Vi kan tenke på horisonten, linjen der himmel og hav møtes, synlige punkter på figuren, men i virkeligheten uendelig langt borte. Vi inkluderer også slike i vårt studium. Vi tar med uendelig fjerne punkter og regner disse med i begrepet punkter. Da kan vi si: Parallelle linjer bestemmer ett punkt. Da blir parallellbegrepet unødvendig her. Alle par av linjer bestemmer nøyaktig ett punkt. Vi står igjen med de to grunnleggende begrepene punkter og linjer. To punkter, *A* og *B*, bestemmer nøyaktig én linje, som vi kan betegne som *AB*. Helt symmetrisk gjelder: To linjer, *l* og *m*, bestemmer nøyaktig ett punkt, som vi kan betegne som *lm*. Vi står overfor et stykke geometri som kun omhandler punkter og linjer. Det er interessant matematisk fordi det straks gir interessante resultater. Det er også interessant i undervisningen fordi det gjelder nettopp de to grunnleggende begrepene punkt og linje.

Det vi har å gjøre med her, er projektiv geometri. Johnsbråtens funn leder oss til dype sammenhenger.

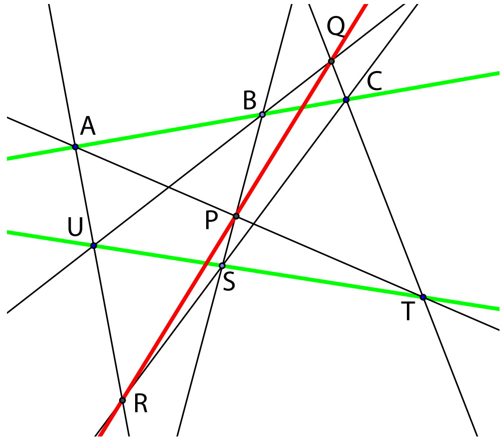
I projektiv geometri studerer man nettopp punkter og linjer og relasjoner mellom dem: Et punkt kan ligge på en linje. Og en linje kan gå gjennom et punkt. Tre punkter kan ligge på samme linje, tre linjer kan gå gjennom samme punkt. To punkter bestemmer én linje, og to linjer bestemmer ett punkt. Vi får en symmetri, en dualitet mellom de to begrepene. Har vi et resultat i projektiv geometri som omhandler punkter og linjer, gjelder det samme resultatet for linjer og punkter, altså om vi bytter om de to begrepene. Vi skal snart se et eksempel på dette som kalles *dualitetsprinsippet*.

Pappus' setning

Kanskje det tidligste resultatet i denne linje-punkt-geometrien er Pappus' setning fra det tredje århundre e.Kr. Den er helt grunnleggende i projektiv geometri. Siden setningen viser seg å være relevant i forbindelse med Håvard-punktene, og det er en så sterk, vidtfavnende og vakker setning, vil vi illustrere den her. Se figur 5 og 6.



Figur 5



Figur 6

Gitt to linjer, *l* og *m*. *A*, *B* og *C* er tre punkter på *l*, mens *S*, *T* og *U* er tre punkter på *m*. Linjene *AT* og *SB* skjærer hverandre i *P*, linjene *BU* og *TC* i *Q* og linjene *CS* og *UA* i *R*. Da ligger de tre punktene *P*, *Q* og *R* på én og samme linje. Dette er *Pappus' setning*.

En figur tegnet i GeoGebra vil overbevise oss om at setningen er riktig. Om vi på figur 5 flytter på ett eller flere av de seks punktene eller de to linjene, vil fremdeles punktene *P*, *Q* og *R* ligge på linje!

De seks punktene *A*, *B* og *C* og *S*, *T* og *U* bestemmer en linje. Vi kunne kalle den *Pappus-linjen*, eller rettere sagt *en Pappus-linje*. Men de bestemmer flere slike. Hele seks stykker fins det. Vi kan nemlig permutere de tre navnene *S*, *T* og *U* på seks måter. For eksempel om vi kaller de tre punktene henholdsvis *U*, *S*, *T* og ser på det som *da* blir de tre skjæringspunktene *P*, *Q* og *R*. Vi husker at *P* var skjæringspunktet mellom *AT* og *SB*, *Q* mellom *BU* og *TC* og *R* mellom *CS* og *UA*. De tre ligger på linje. Vi får en ny Pappus-linje. Den er vist med rødt på figur 6.

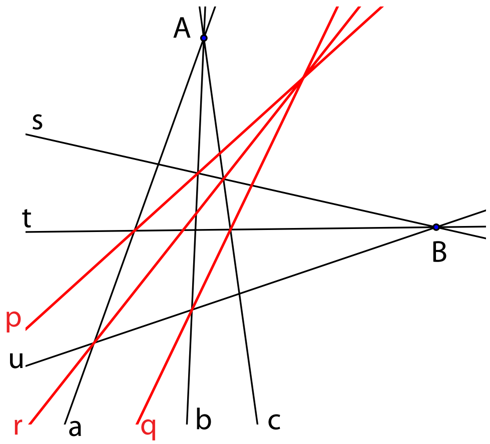
Pappus' setning i dual versjon

Det duale resultatet av Pappus' setning får man ved at man i setningen konsekvent bytter begrepet punkt med linje og linje med punkt. Den duale til Pappus' setning:

Gitt to punkter, L og M. a, b og c er tre linjer gjennom L, mens s, t og u er tre linjer gjennom M. Punktene at og sb danner (forbindelses) linjen p. Punktene bu og tc danner linjen q, og punktene cs og ua danner linjen r. Da går de tre linjene p, q og r gjennom ett og samme punkt. Dette er den duale setningen til Pappus' setning. Den er også drøftet i Breiteig (2000).

Se på figur 7. Punktet som p, q og r går gjennom, er ett av figurens Håvard-punkter.
Det er denne som beviser Håvard Johnsbråtens funn: Den duale setningen til Pappus'. Vi må bare tolke de to punktene A og B som uendelig fjerne. Da er de tre linjene a, b og c parallelle, og likeledes linjene s, t og u.

Hvordan bevises så denne setningen? Saken er ikke enkel. Pappus' setning tas faktisk ofte som et *aksiom* i projektiv geometri. Den bevises ikke. Da blir setningen en del av startgrunnlaget som geometrien bygges på. Dualitetsprinsippet derimot er enklere å begrunne ut fra aksiomene. Her viser vi til litteraturen.



Figur 7

Referanser

Breiteig, T. (2000). Kulturelle perspektiver på matematikken. I G. Gjone & T. Onstad (red.), *Mathema 2000* (s. 13–33). Oslo: NKS-forlaget.

Johnsbråten, H. (2009). En utforskingsoppgave. *Tangenten*, 20(4), 40–41.

Johnsbråten, H. (2010). En utforskingsoppgave – løsningsforslag. *Tangenten*, 21(1), 57.

Noter

1 Norsk bergverksmuseum. Opplysningene hentet 16.02.2013 fra http://www.norsk-bergverksmuseum.no/index.php?pageid=2563

2 I løsningsforlaget i Johnsbråten (2010) er ikke Håvard-punktet tegnet inn, men dette punktet er sentralt når løsningen skal forklares.

Søk i TANGENTEN

På TANGENTEN sin nettside kan du nå søke i alle utgaver av TANGENTEN fra 2000 til 2010. Du kan søke på titler, forfattere og brødtekst. Søkemotoren gir deg en liste på opptil 30 treff. Hvert treff er en lenke til en artikkel i TANGENTEN der søkeordet forekommer. Klikker du på lenken kommer hele artikkelen opp i en PDF-versjon som er identisk med den opprinnelige versjonen i bladet.

Per idag er bare artiklene fra TANGENTENs kjernesider tilgjengelig. Om noen måneder vil også artiklene fra LAMIS-sidene og sentersidene (NSMO) følge etter.

Slik går du frem:

- Gå til www.caspar.no,
- velg «tangenten» i menyen til venstre,
- velg «Søk i arkivet» i undermenyen som dukker opp.

Lykke til!

Alv Birkeland

Kreativitet i matematiske resonnement

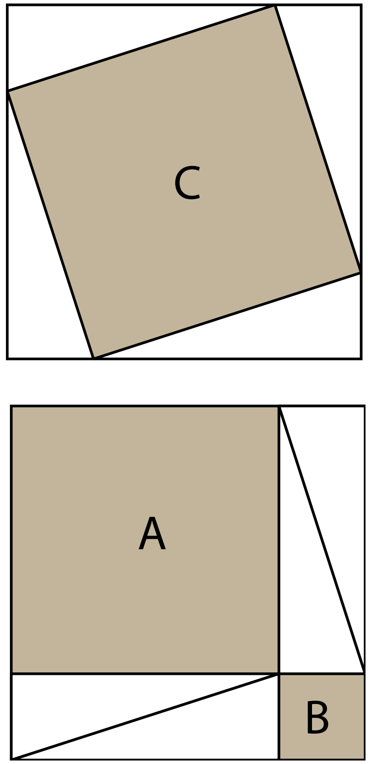
Læreplanverket for kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2010) peker blant annet på det skapende mennesket og kreativitet. I kapittelet om matematikk, under formålet for faget, blir det understreket at opplæringen skal veksle mellom utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter og ferdighetstrening. Blant de grunnleggende ferdighetene i faget nevnes det å regne, og at det handler om problemløsing og utforskende aktiviteter. Begrepet kreativitet brukes i svært mange sammenhenger i samfunnet, og kanskje ikke alltid med samme innhold. Spørsmålet er derfor hva kreativitet i en matematisk sammenheng kan bety. La oss først se litt nærmere på selve begrepet kreativitet.

Begrepet kreativitet

Før vi ser nærmere på hva kreativitet i arbeid med matematikk kan være, trenger vi en definisjon eller en presisering av begrepet kreativitet. Lithner (2008) skiller mellom imitative resonnement og kreative, matematisk funderte resonnement. Problemet med imitative resonnement er at de kan være basert på overflatiske trekk, og det begrepsmessige eller analytiske innholdet kan mangle. Med en kontekstavhengig og instrumentell forståelse av de matematiske begrepene er det vel rimelig å anta at matematiske resonnement ofte må være imitative. I Sriraman (2009) diskuteres problemet med å definere begrepet kreativitet, og konklusjonen er at kreativitet kan defineres som evnen til å produsere arbeid som er nytt (*novel*) og originalt. Beghetto og Kaufman (2008) stiller to krav. Det ene kravet er at arbeidet må være nytt (*novelty*), og det andre er at arbeidet i vid forstand må være brukbart (*useful*). Med utgangspunkt i disse to kravene kan man likevel spørre hvor mye vi skal kreve av et arbeid for å kunne kalle det et uttrykk for kreativitet. De fleste vil være enige i at Albert Einstein med sine banebrytende idéer innen moderne fysikk var kreativ, men for ikke å ha et for snevert kreativitetsbegrep er det naturlig å spørre hvem andre som kan betegnes som kreative. Vi skal se på en modell der man deler kreativitet inn i fire forskjellige nivå eller kategorier. På det øverste nivået plasserer man folk som for eksempel Albert Einstein eller matematikeren Niels Henrik Abel. Kreativitet i denne kategorien er altså på svært høyt nivå. I den neste kategorien har vi kreativitet som er knyttet til en eller annen form for profesjonalitet eller kompetanse, men som ikke behøver å være på like høyt nivå som i den første kategorien. I denne kategorien kunne man plassere for eksempel profesjonelle matematikere eller andre

Alv Birkeland
Universitetet i Tromsø
alv.birkeland@uit.no

personer med andre typer kompetanse. I den tredje kategorien plasserer vi elever og studenter som er kreative i læringsituasjonen. Vi tenker oss da at en idé er ny for eleven eller studenten, om enn ikke for resten av verden. Kravet om originalitet (*novelty*) er da oppfylt på det personlige planet. Den siste kategorien består av kreativiteten i hverdagen, som for eksempel når man lager et blomsterbed eller liknende. Dette gir fire kategorier av kreativitet, eller det Beghetto og Kaufman (2008) kaller *The Four-C Model of Creativity*. Det er vel bare et lite antall mennesker som kan være kreative på det aller øverste nivået, men til gjengjeld kan vi tenke oss at alle elever og studenter fra tid til annen kan være kreative på det personlige planet i læringssituasjonen. Det må være kreativitet på dette nivået som er interessant for lærere som underviser i matematikk på ett eller annet nivå. Etter denne klargjøringen av begrepet kreativitet er vi klar til å se på noen eksempler på hva kreativitet kan bety i matematikken.



Figur 1

Eksempel 1

I Nelsen (1993) finner vi diagrammet i figur 1. Det viser det man tror kan være Pythagoras' eget bevis for Pythagoras' setning. Dette er ikke det klassiske beviset vi finner i Euklids «Elementer». Hvis dette beviset stammer fra Pythagoras, er det jo fra før Euklids tid. Til venstre i figuren ser vi fire kopier av en gitt rettvinklet trekant lagt i et kvadrat, slik at kvadratet C på hypotenusen kommer frem i midten av kvadratet. Til høyre ser vi de fire kopiene av den samme gitte trekanten i det samme kvadratet, men nå lagt litt annerledes slik at kvadratene A og B på hver av katetene kommer frem. Det følger at summen av A og B er det samme som C, altså at $A + B = C$, som er Pythagoras' setning.

Pythagoras levde i tiden rundt 540 f.Kr. og skal ha reist ganske mye. Han kan dermed ha møtt andre kulturer og ny kunnskap, blant annet matematikk. Det er mulig at Pythagoras spurte seg selv om hva som lå til grunn for denne kunnskapen, i et forsøk på selv å forstå den. Det kan hende at han i denne prosessen fikk idéen til sitt bevis. Det er også mulig at Pythagoras oppdaget sitt bevis ved å legge en gitt rettvinklet trekant på ulike måter i sanden på Samos, omtrent som man gjør med et puslespill. Det er åpenbart noe helt nytt med beviset til Pythagoras. På Pythagoras' tid var selve idéen om et matematisk bevis helt ny. Frem til da hadde matematikken mest hatt preg av det man kanskje kunne kalle praktisk regning. Fra og med Pythagoras endret matematikken karakter og ble mer teoretisk. Pythagoras' setning er ikke bare et regnestykke, det er en generell setning om alle rettvinklede trekanter, og for at den skal kunne sies å gjelde for alle rettvinklede trekanter, trenger den et bevis. Det er dette som er Pythagoras' bidrag, og det er ikke så lite. I tillegg kommer selvsagt selve beviset, som også var nytt. Man må kunne si at dette var kreativitet på høyt nivå.

Eksempel 2

En måte å arbeide med tallbegrepet på er å se på sammenhengen mellom brøker og desimaltall. En brøk med en heltallig teller og en nevner som er forskjellig fra null, kalles et rasjonalt tall og kan skrives som et endelig eller periodisk desimaltall. Dette kan vi vise ved ganske enkelt å dele teller på nevner. La oss som eksempel velge brøken 3/11. Den vanlige divisjonsalgoritmen gir at

$$\frac{3}{11} = 0{,}272727\ldots$$

De samme to desimalene gjentar seg i det uendelige fordi divisjonen aldri går opp. Det ene vi kan legge merke til, er at vi faktisk trenger desimaltall med uendelig mange desimaler. Hvis vi bare tar med endelig mange desimaler, får vi noe annet enn 3/11. Vi får en verdi som er nær 3/11, men vi får en annen verdi. Skal vi kunne uttrykke brøken 3/11 som et desimaltall, må vi ha uendelig mange desimaler. Det andre vi kan legge merke til, er at sifrene repeteres periodisk. Når vi deler et helt tall på et annet helt tall som er forskjellig fra null, må de restene vi får nedover i divisjonen, være mindre enn det tallet vi deler på. Det betyr at det bare fins et endelig antall rester å velge mellom, og før eller siden vil den samme resten derfor dukke opp igjen. Vi får et periodisk desimaltall som svar på divisjonen. Når vi deler 3 med 11, får vi bare restene 3 og 8 nedover i divisjonen. Da vil vi få en periode på to desimaler. Siden divisjonsalgoritmen er en fast algoritme, kan vi utføre og innse alt dette uten noen form for kreativitet. Hvis vi derimot starter med et uendelig desimaltall som for eksempel 0,121212… og spør om dette desimaltallet kan skrives som en brøk med heltallig teller og nevner, så finnes det i utgangspunktet ingen fast algoritme som gjør dette for oss. Det åpner muligheten for å resonnere kreativt. Vi kan la x være dette desimaltallet og skrive

$$x = 0{,}121212\ldots$$

Dersom vi nå ganger x med hundre, får vi $100x = 12{,}121212\ldots$ Her er idéen at hvis vi trekker 0,121212… fra 12,121212…, faller desimalene bak komma mot hverandre. Etter subtraksjonen vil vi derfor stå igjen med et helt tall, nemlig 12. Vi får følgelig at $99x = 12$. Her kan vi forkorte med 3 og få at

$$33x = 4$$

som betyr at

$$x = \frac{4}{33}$$

Desimaltallet 0,121212 … med uendelig mange desimaler, kan altså skrives som en brøk ved

$$0{,}121212\ldots = \frac{4}{33}$$

Hvis man skal omskrive en brøk med heltallig teller og nevner til et desimaltall, kan det være et poeng å unngå bruk av lommeregner og heller utføre divisjonen for hånd ved hjelp av den vanlige divisjonsalgoritmen. Da ser man hvordan brøken blir et periodisk desimaltall. Hvis man omvendt skal omskrive et uendelig og periodisk desimaltall til en brøk med heltallig teller og nevner, får man mulighet til å resonnere på det vi må kunne kalle en kreativ, matematisk fundert måte (Lithner, 2008). Dersom vi følger opp med å spørre hvordan et uendelig desimaltall uten periode kunne se ut, gir vi ytterligere muligheter for matematisk kreativ resonnering. Et uendelig desimaltall uten noen periode kan ikke være rasjonalt og kalles et irrasjonalt tall. Et eksempel kan være desimaltallet

$$0{,}121122112221122221\ldots$$

Vi gjør sekvensen av totall lengre og lengre og får et uendelig desimaltall som ikke kan ha noen periode. Men det fins naturligvis andre svar på dette spørsmålet.

Eksempel 3

Et problem jeg av og til har gitt mine studenter, er å spørre om det fins irrasjonale tall som er slik at summen av dem er rasjonal. Siden irrasjonale tall kan skrives som desimaltall med uendelig mange desimaler, men uten noen periode, kan man spørre om det er mulig at summen av to irrasjonale tall likevel kan bli et rasjonalt tall, altså et uendelig desimaltall med en periode. Når man legger sammen to uendelige desimaltall uten periode, er det kanskje vanskelig å tenke seg at summen kan bli et desimaltall med en periode. Men at det ser vanskelig ut, er jo ikke det samme som at det er umulig. At det fins irrasjonale tall som er slik at summen av dem er rasjonal, kan man se for eksempel ved å la det ene tallet være $\sqrt{2}$ og det andre $1-\sqrt{2}$. Begge disse tallene er irrasjonale, og summen av dem blir 1, som er et rasjonalt tall. Denne løsningen krever ingen særlige regneferdigheter, men problemet kan likevel oppfattes som ganske krevende. Det kreves i alle fall at man vet hva rasjonale og irrasjonale tall er. Det kreves altså litt innsikt i tallbegrepet for å kunne forstå dette problemet. Løsningen kan vel også karakteriseres som et kreativt, matematisk fundert resonnement. Vi finner ingen løsning ved hjelp av én eller annen form for algoritme eller metode, vi må rett og slett finne på noe.

Det neste problemet er også hentet fra egen undervisning.

Eksempel 4

Dette eksempelet er hentet fra Bunt, Jones og Bedient (1976). Oppgaven stammer opprinnelig fra «Arithmetika» av Diofant:

Problem. Finn to tall som er slik at summen av dem er 20, og summen av deres kvadrater er 208.

Denne oppgaven har jeg gitt til mine lærerstudenter. Diofants idé er å bruke en ukjent og uttrykke de to tallene ved

$$10 - x \quad \text{og} \quad 10 + x$$

skrevet med moderne notasjon. Jeg ga dette som et hint eller tips til mine studenter, og tenkte at de måtte likevel forstå hintet for å kunne bruke det. Siden summen av deres kvadrater skal være 208, får vi at

$$(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208.$$

Kvadrerer vi ut på venstre side av likningen, får vi

$$100 + 20x + x^2 + 100 - 20x + x^2 = 208.$$

Trekker vi sammen og forkorter får vi likningen

$$x^2 = 4$$

med løsningene $x = 2$ og $x = -2$. De to søkte tallene blir dermed 8 og 12. Summen av 12 og 8 er 20, og summen av 12^2 og 8^2 er 208. Selvfølgelig måtte ikke mine studenter følge det hintet jeg hadde gitt dem, og én av dem ville følge sitt eget resonnement. Dette kan tolkes som en viss selvstendighet hos denne studenten, en vilje til å ta egne valg som åpenbart er en forutsetning for kreativitet. Denne formen for selvstendighet hos elever og studenter er jo absolutt ønskelig. Studenten valgte i stedet å sette opp likningen

$$x^2 + (20 - x)^2 = 208.$$

Kvadrerer vi ut på venstre side her, får vi likningen

$$x^2 + 400 - 40x + x^2 = 208.$$

Trekker vi sammen og forkorter, får vi denne gang likningen

$$x^2 - 20x + 96 = 0.$$

For denne studenten var det ikke noe problem å løse andregradslikninger, og studenten fant dermed de rette løsningene. Men man kan løse denne likningen ved å bruke et variabelbytte. La

$$u = 10 - x.$$

Det gir at

$$\begin{aligned} x^2 - 20x + 96 &= (10 - u)^2 - 20(10 - u) + 96 \\ &= u^2 - 4. \end{aligned}$$

som gjør at likningen kan skrives på formen

$$u^2 = 4.$$

Da får vi den samme likningen som med Diofants metode, og selvfølgelig med de samme løsningene. Selv om løsningen til denne studenten ikke er en helt annen enn den jeg hadde lagt opp til ved å gi dem et hint, så er den likevel annerledes. Denne studenten formulerte en litt annen likning basert på en litt annen idé enn det jeg hadde lagt opp til. Det betyr at resonnementet til denne studenten er noe annerledes, og at det derfor ikke kan være et imitativt resonnement. Det må da kunne kalles et kreativt, matematisk fundert resonnement. Dette må vi kunne si er kreativitet av den typen vi ønsker at elever og studenter skal vise i læringssituasjonen.

Konklusjon

I denne artikkelen har jeg gitt en presisering av hva kreativitet i en matematisk sammenheng kan være. Det dreier seg ofte om kreative matematiske resonnement. De eksemplene jeg har nevnt, er på ingen måte uttømmende, men de kan kanskje ha en viss relevans til matematikken i skolen. I Polya (1945) finner man flere gode eksempler på hva problemløsing og kreativitet kan være i matematikk. Det å følge opp intensjonene i læreplanverket for Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet; 2010) må naturligvis skje i grunnskolen, men man må også kunne gjøre noe i utdanningen av nye lærere.

Referanser

Beghetto, R. A. & Kaufman, J. C. (2008). Do we all have multicreative potential? *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* (41), 39–44

Bunt, L. N. H., Jones, P. S. & Bedient, J. D. (1976). *The Historical Roots of Elementary Mathematics.* Dover.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educ Stud Math* (67), 255–276.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words.* New York: The Mathematical Association of America.

Polya, G. (1945). *How to Solve It.* Princeton: Princeton University Press.

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, (41), 13–27, doi: 10.1007/s11858-008-0114-z.

Utdanningsdirektoratet. (2010). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet* [LK06]. Hentet fra http://www.udir.no

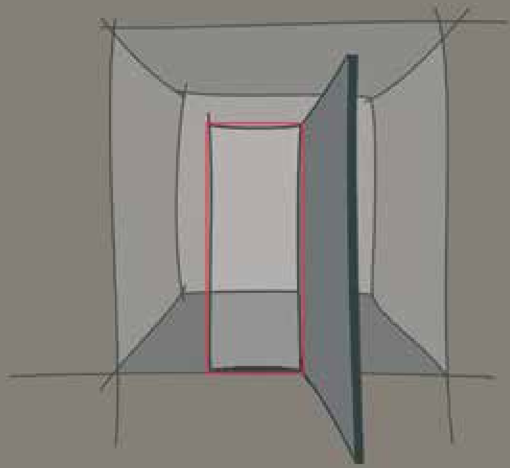
(fortsatt fra side 10)

laget den) eller en forenklet kapittelprøve som jeg har laget. Høyeste karakter både på emnetester og forenklet/tilrettelagt kapittelprøve er karakteren 3.

Vi bruker mye tid på gjennomgang av nytt stoff. Vi velger ut det viktigste innen hvert emne. Det vanskeligste blir normalt ikke vektlagt. Elevene får på denne måten en tilpasset undervisning. De fleste får etter hvert en mestringsfølelse i matematikkfaget, og det er noe mange av elevene sjelden eller aldri har hatt før. Dette påvirker igjen selvtilliten positivt og motiverer til videre jobbing med faget.

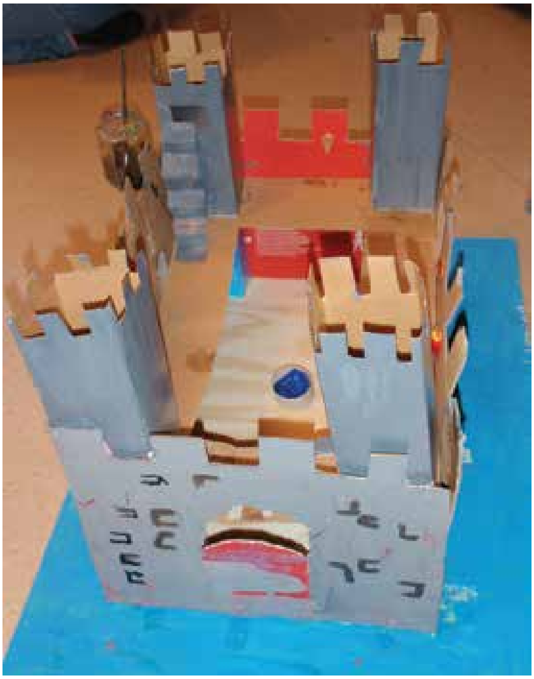
Målet er at eleven skal klare å få ståkarakter (2) i faget. Elevene selv er veldig ærlige og åpne når det gjelder problemene/utfordringene de har i faget. De forteller om hvordan de har slitt og strevet i alle år, og om hvordan de til slutt nesten har gitt opp faget. Mange av elevene har hatt flere nederlag i matematikk. De sier de aldri har skjønt matematikk, og derfor har faget blitt kjedelig. Dette har ført til at de ikke har orket å følge med i undervisningen og har gitt opp. Noen har også laget uro og bråk for resten av klassen.

På studiesenteret får de undervisning og oppgaver tilpasset sitt nivå. De ser etter hvert at det nytter å jobbe, ta små steg og sakte, men sikkert bygge opp selvtillit i faget. I en liten gruppe er det lettere å konsentrere seg og få arbeidsro, og elevene uttrykker begeistring og er positive til å få undervisning i mindre grupper på studiesenteret. Studiesenteret har blitt et populært sted å være. Vi opplever at elever kommer og banker på døren og spør om å få plass på senteret! Både vi lærere som jobber på studiesenteret og elevene ser at det nytter!



Dordi Askildsen

Middelalderborg – fra tegning til modell



Dette er en tverrfaglig oppgave jeg gjennomførte ved Storevarden skole i Sola kommune våren 2012. Elevene i sjette klasse hadde om middelalderen i samfunnsfag, og i læreboken deres var det et forslag om å bygge middelalderborg av pappemballasje. Dette ble utgangspunktet for et opplegg som jeg herved inviterer andre lærere til å bruke.

Jeg startet med å vise bilder av ulike borger, elevene fikk også bidra med sine kunnskaper om temaet. Dermed var motivasjonen på topp da de startet arbeidet. Hver gruppe fikk utlevert en finerplate i passende størrelse som borgen skulle plasseres på.

Mål og kriterier

Elevene fikk tydelig mål og kriterier for hva de skulle gjøre. Min erfaring er at det er viktig å gi konkrete og målbare kriterier, da er det lettere for elevene å få god måloppnåelse. Tidsbruken for oppgaven er ca. 8–9 skoletimer à 45 min.

På sjette klassetrinn viste elevene stor innlevelse, og dermed fylte de også etter hvert borgen med «liv»: De tegnet dyr og mennesker i passende størrelse på tynn kartong som de farget og klippet ut. De ferdige figurene satte de i små klosser på ca. 1,5 cm × 1,5 cm × 1,5 cm. Midt oppe på klossene var det saget et lite spor som de kunne sette en figur i.

Dordi Askildsen
Storevarden skole
dordi.askildsen@broadpark.no

Kommentarer til selve prosessen:

Elevene kan bruke GeoGebra eller andre digitale hjelpemidler for å lage tegningene.

I selve prosessen er bruk av det matematiske språket sentralt. Det er viktig at det blir et gruppearbeid som utfordrer elevene til å sette ord på det de gjør og forklare hvordan de tenker.

Jeg har erfart at det er lurt å la gruppemedlemmene lage hver sin skisse for så i neste omgang å bestemme hvilken borg de skal lage. Dette bidrar til å skape et eierforhold til oppgaven for alle elever.

Det kan settes andre kriterier for borgen alt etter hvilket klassetrinn en har. For eksempel kan en si at borgen skal ha to prismeformede og to sylinderformede tårn med samme volum, eller en kan oppgi et spesielt volum hvert enkelt av tårnene skal ha. Andre idéer er å si at fallemmen skal være bueformet øverst, men ha et spesielt areal. En kan oppgi areal på ulike deler og la elevene lage sine forslag ut fra dette. Målestokken og arealene kan tilpasses ulike vanskelighetsnivåer.

Har en ikke så mange timer til rådighet som nevnt tidligere, kan en lage en mindre borg ved å bruke mindre målestokk. En kan ha flere bygninger innenfor «murene»; oppgi spesifikk form og størrelser når det gjelder volum og areal.

Det er viktig at læreren går rundt og samtaler med elevene om det de gjør, for å forsterke det matematiske i prosessen. I slike oppgaver er

Mål: Gruppen din (ca. fire elever) skal lage en modell av en middelalderborg.

Fakta: Borgens form er rektangulær. Ytre mål på sidene er 24 m og 30 m. Høyden på murene er 12 m. I hvert hjørne er det et tårn som er 14 m høyt. Rundt borgen er det en vollgrav med bredde 5 m.

Kriterier:

– Tårnene skal være prismeformet eller sylinderformet.
– Det skal være jevnt fordelte skyteskår på både tårn og murer med åpninger omtrent som et voksent menneske.
– På ett (eller flere) av tårnene skal det være en vimpel med areal 1,5 m^2.
– Det skal være en fall-lem som kan heises opp (areal 4,5m^2).
– Dere skal lage en skisse av borgen.
– Dere skal lage en tegning i målestokk 1 : 50 av hver enkelt del av borgen. (Målestokken kan varieres alt etter hvilket klassetrinn en har.)
– Hver enkelt del klippes ut i papp i denne målestokken. Alle delene må ha «limeflipp». Lim dem sammen.
– Borgen skal males i «steinfarger».

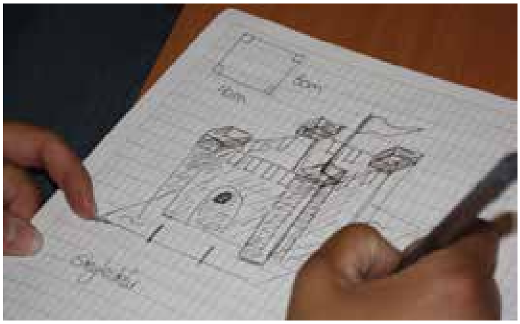
prosessen like viktig som resultatet, læringen ligger i arbeidet underveis.

Elevene mine var i utgangspunktet veldig motiverte for oppgaven, det med middelalderborger er noe mange har et forhold til, bl.a. fordi det er utgangspunkt i mange dataspill. De var ivrige underveis, diskuterte ulike løsningsmåter og var nødt til å ha et godt samarbeid for å få et bra resultat.

Vi hadde to hele skoledager til rådighet, dermed fikk de fordype seg godt i arbeidet og kunne jobbe målrettet og konsentrert til de var ferdige.

Ikke alle gruppene oppfylte alle kriteriene godt nok, men da kunne vi få en diskusjon om hva de måtte forandre på for eksempel for å få riktig areal på fallemmen. Det er god læring i slike vurderinger også.

I oppsummeringen etterpå kom det fram at de hadde lært mye på en annerledes og kjekk måte. I et slikt arbeid kommer de ikke på at de faktisk jobber med matematikk, iveren tar overhånd og læringen glir inn. Også det å få mye praktisk erfaring med målinger og å utforme noe tredimensjonalt er verdifullt. Alt for mange elever er lite «handy», de er mest vant til å bruke hendene sine på et tastatur …



(fortsatt fra side 34)

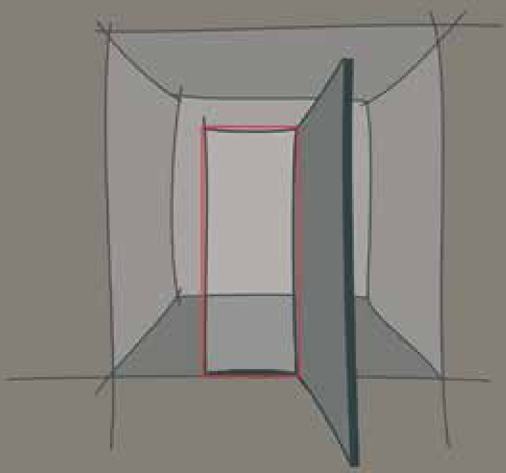
Fokus på tankegangen og forståelsen underveis i spillet blir mye større når det er lov å bruke lommeregner, da den fjerner all unødig støy omkring utregningene. Det er i hvert fall det jeg opplever hos mine elever.

Nei

jeg mener ikke at lommeregneren kan erstatte hoderegning og basisregnekunnskaper, men den kan brukes til å fokusere på det viktige i problemløsning, og den er et supert verktøy når vi undersøker og undrer oss over hverdagens små mysterier.

Moralen

i denne artikkel er (hvis vi kan snakke om en moral, men noe må jeg jo avrunde innlegget med) at selv om du syns du har det travelt i matematikktimene midt i julestria, så er det en veldig god idé å regne julekalenderen på matematikk.org med elevene dine – og så er det gratis.



Glimt fra klasserommet

Henrik Kirkegaard

Jubelen sto i taket

Min tredjeklasse hadde vunnet i julekalenderkonkurransen på matematikk.org. «Vi har vunnet 4000 kroner,» sa jeg smilende til klassen. Jeg forklarte at vi måtte bruke pengene til å kjøpe noe vi kunne bruke i matematikktimene. Klassen var helt med, og det kom mange gode forslag til hvordan vi kunne bruke pengene best. Valget falt på lommeregnere og pizza. Nå er pizza dessverre ikke standard lagervare i matematikkonkretiseringsmiddelbutikker, men elevene mine kunne altså ikke forstå at vi ikke kunne kjøpe pizzaer. «Men Henrik, vi regner da med pizzaer i matematikktimene,» sa Håkon hoderystende etter at jeg ennå en gang hadde forsøkt å forklare at dette ikke gikk an. Pizza ble det likevel i tillegg til lommeregnerne etter en konsultasjon med klassekontakten og klassekassen.

Endelig kom dagen da tredje klasse kunne få hver sin lommeregner. Jeg skrev navn på hver enkelt lommeregner, og elevene gikk straks i gang med å undersøke lommeregnerens magiske verden. Nå skal det sies at vi hadde brukt lommeregnere før, men dette var liksom noe helt nytt og annerledes.

Henrik Kirkegaard
Volsdalen skole
Henrik.Kirkegaard@gs.alesund.kommune.no

«Se hva min kan!» Live sto med lommeregneren i hånden og viste meg stolt at hun hadde regnet ut at 2 millioner + 2 millioner gir 4 millioner. Rakel kom også og viste meg en måte slik at hun hele tiden kunne legge til 2 bare ved å trykke på likhetstegnet. Det er utrolig så nysgjerrige og utforskende elevene er hvis man bare gir dem litt frie hender en gang i blant.

Etter at elevene hadde «leiket» seg ferdige, ville jeg vise dem hvordan lommeregneren kunne brukes. Jeg ville ikke gi dem vanlige oppgaver i de fire regningsartene, men heller utfordre fantasien deres.

Verdens eldste matematiske triks

Det finnes en papyrusrulle fra år 1650 før Kristus med en avskrift av et talltriks fra et 200 år eldre dokument. Dette nesten 4000 år gamle trikset gjorde jeg med elevene mine.

Før jeg begynner på trikset, skriver jeg tallet 3 på et ark, bretter det sammen og legger det ned i kateterskuffen. Så ber jeg elevene taste et hemmelig tall inn på lommeregneren. Det er ikke lov å vise det hemmelige tallet til noen. Dernest ber jeg elevene om å trykke på følgende taster:

+ 5 = × 2 = – 4 = : 2 =
– (det hemmelige tallet) =

Jeg finner nå arket frem fra kateterskuffen, bretter det opp og viser klassen at jeg har gjettet tallet som står på alle lommeregnerne. Jeg takker og bukker.

En trenger ikke å trykke på likhetstegnet etter hver regneoperasjon; men for mine elever letter det forståelsen av de enkelte utregninger, og det blir lettere for elevene selv å utforske om andre hemmelige tall gir samme resultat.

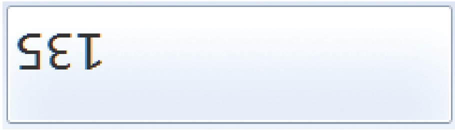
Elevene må nå prøve med tre forskjellige hemmelige tall og se om det gir samme resultat. De må også prøve trikset hjemme. Gjett om elevene er stolte neste dag når de hjemme har vist litt tallmagi.

Lommeregnerhistorier

Vi har språkverksted i tredje klasse. Tre timer i uka går vi ned på språkverkstedet, hvor vi har stasjonsundervisning. Nå er det jo grenser for hvor mye norskfaget skal favoriseres, syns jeg, så jeg har sneket inn to matematikkstasjoner og en teknologi- og designstasjon. He, he. Jeg jobber heldigvis sammen med en veldig snill, flink og forståelsesfull norsklærer. Da tredje klasse nå hadde fått lommeregnere, fikk den ene stasjonen følgende oppgave: Lag en regnefortelling som gir et opp-ned-svar. Først hadde vi en introduksjon samlet i klassen, og deretter måtte elevene jobbe selvstendig på stasjonen.

Introduksjon: Det var en gang en fiskebåt som het Valentina. Hun skulle ut på havet og fiske. Valentina kjørte i fem dager før hun var fremme på fiskefeltet. Vel fremme kastet hun tre garn. Dette gjorde hun ni ganger, og hun fikk massevis av fisk. Hvilken fisk fikk hun? Litt hjelp: Gang de tre tallene med hverandre. Litt mer hjelp – snu lommeregneren opp ned og les svaret. Prøv det selv, og du vil få samme svaret som elevene mine fikk: SEI.

Dernest fant vi sammen ut hvilke tall som kunne leses opp ned som bokstaver. 0 = o, 1 = i, 3 = E, 4 = h, 5 = s og 7 = L. Vi diskuterte også litt



om 6 = g eller q; men det gis en god del kunstnerisk frihet her.

På språkverkstedet på lommeregnerstasjonen skulle elevene selv lage en fortelling. Først måtte de danne et ord, for eksempel «esel». Dernest måtte de oversette ordet til tall: esel = 3537. Så måtte de speilvende tallet til 7353, og til sist måtte de lage en fortelling som ga dette tallet. Vi arbeider for tiden med å plusse flersifrede tall, så langt de fleste av elevene delte tallet opp i tusener, hundrer, tiere og enere. 7000 + 300 + 50 + 3. Det var jo midt i blinken, jeg var ganske fornøyd, og elevene kom og viste meg de flotteste fortellinger som de hadde gjort hjemme, fordi dette var gøy å gjøre.

Spill

er noe alle elevene mine liker. I matematikkbøkene står det en god del spill som de spiller med stor fornøyelse. Når jeg en gang i blant trenger å konsentrere meg om en enkelt elev, er det veldig greit at resten av klassen spiller. Selvfølgelig ikke hvilket som helst spill, men spill som passer til det tema vi har i matematikk for tiden. Setter jeg elevene til å regne i boka, blir jeg ofte avbrutt av spørsmål. Sitter elevene og spiller, blir jeg stort sett aldri avbrutt. Et spill som yatzy er noe de fleste elever kan. Det er et velkjent spill både blant elevene og hjemme i familien. Når poengsummen skal regnes ut til sist, er det som regel de flinkeste elevene som får dette oppdraget. Jeg har opplevd at elever som ikke klarer å regne ut sluttsummen, helst ikke vil spille yatzy. De liker å spille; men de gruer seg for utregningen. Etter at vi fikk lommeregnerne våre, er det forholdsvis enkelt å regne ut sluttsummen, og ingen trenger å gru seg for slikt.

(fortsettes side 32)

Renate Jensen, Stella Munch

Brann i matteboken

Matematikk med utgangspunkt i elevenes interesser – et samarbeid mellom VilVite og fotballklubben Brann.

Inspirasjonen til prosjektet *Brann i matteboken* kommer fra England. I 1997 tok familiedepartementet i England initiativet til programmet «Playing for Success». De hadde tro på at det å bruke idrett som arena for læring i ulike fag ville være motiverende for barn og unge. Flere idretter er etter hvert blitt involvert, og i dag deltar mer enn 210 000 barn i ulike prosjekter. VilVite i Bergen likte idéen og startet med å besøke skoler som deltok i det engelske programmet.

Tilbake i Bergen ønsket de å virkelighetsforankre matematikken ved å relatere den til fotball, og det ble inngått et samarbeid med fotballklubben Brann. Målet var å gjøre matematikken virkelighetsnær ved å bruke eksempler fra en idrett mange barn selv deltar i og har et forhold til. Resultatet ble et læringstilbud til elever på fjerde trinn kalt «Brann i matteboken». Dette inkluderer besøk på VilVite, et besøk på

Brann stadion og arbeid på skolen med ulike oppgavehefter, både før og etter besøkene.

Vi er fire lærere som har samarbeidet om å lage heftene til dette læringstilbudet. Oppgaveheftene med lærerveiledning kan lastes ned fra VilVites hjemmeside. Vi fikk stor frihet både når det gjaldt omfang og innhold. Vi ønsket å lage hefter som dekket deler av kompetansemålene i LK06 etter fjerde trinn i alle tema. Vi ville også at heftene skulle være slik at lærerne

Stella Munch
Nattland skole
stel-ma@online.no

Renate Jensen
Nattland skole
renate.jensen@hotmail.com

kunne bestemme hvor mye de ville gjøre i heftene, og om de ville jobbe intensivt i en periode eller bruke dem gjennom hele året.

Vi ønsket at heftene skulle binde sammen alle de tre læringsarenaene: VilVite, Brann stadion og skolen. Derfor har heftene oppgaver som er knyttet til det elevene har sett og opplevd på VilVite og på Brann stadion. Vi har fotografert i Brann-butikken, på tribunene og i treningsrommene slik at elevene skal kjenne seg igjen når de jobber med oppgavene i heftene. Bilder og mange idéer til praktiske oppgaver skulle også bidra til at heftene kunne brukes av elever som ikke har mulighet til å besøke VilVite eller Brann stadion.

Når det gjaldt fokuset i heftene, ønsket vi å jobbe spesielt med de to grunnleggende ferdighetene: å kunne uttrykke seg muntlig i matematikk og å lese i matematikk. I den reviderte utgaven av læreplanen, som nå er ute til høring, er nettopp de grunnleggende ferdighetene i fokus. Muntlige ferdigheter i matematikk innebærer å skape mening gjennom å lytte, tale og samtale om matematikk. Det innebærer å kunne gjøre seg opp en mening, stille spørsmål og argumentere ved hjelp av både et uformelt språk og presis fagterminologi. Det innebærer òg å være med i samtaler, kommunisere idéer og drøfte matematiske problem, løsninger og strategier med andre. I lærerveiledningen til oppgaveheftene oppfordrer vi derfor til samarbeid når elevene jobber. De fleste av oppgavene gir gode muligheter for observasjon av elevenes tankegang og muligheter for oppfølgingsspørsmål.

Å kunne lese i matematikk innebærer å forstå og bruke symbolspråk og uttrykksformer i matematikk til å hente ut informasjon, tolke, vurdere og dra nytte både av tekster fra dagliglivet og av matematikkfaglige tekster. Vi ønsker at elevene skal kunne delta på ulike arenaer der matematisk kunnskap inngår, også utenfor skolen. I tillegg til lærebøkene er det viktig at elevene møter matematiske uttrykk, diagram, tabeller, symbol, formler og logiske resonnement i mange ulike sammenhenger. Mange av oppgavene i heftene inneholder informasjon hentet fra dagliglivet. Lesing er en viktig aktivitet når nytt stoff skal bearbeides, og lesing i matematikk er krevende fordi tekstene ofte er sammensatte. Å lese i matematikk må trenes på jevnlig, grundig og i ulike kontekster.

Det er viktig å fokusere på at den som skal lære matematikk, skal beherske det matematiske språket. Nye begrep må opptre i mange ulike sammenhenger før de blir en del av elevenes eget språk. I oppgaveheftene har vi hatt fokus på matematiske begrep og på å bruke disse i tekst, oppgaver og spørsmål.

Noen eksempler fra heftene

Reisen til stadion

Denne aktiviteten er en god samarbeidsoppgave. Det er mange utfordringer, og hvis elevene arbeider alene, kan de lett gi opp. Dette er et eksempel på at praktisk erfaring er nødvendig, og at samarbeid gir et bedre resultat enn å jobbe alene. Oppgaven gir også mulighet til å arbeide med ulike uttrykksformer for å styrke resonnement, for eksempel tegninger og konkretiseringsmateriell.

Oppgaven gir god mulighet for å trene på å lese tall. Her finnes tall i mange ulike formater, for eksempel dato, klokkeslett, nummerering osv. Dette gir gode muligheter til fellesdiskusjoner eller diskusjoner i gruppen, hvor du som lærer kan gå rundt og lytte til elevene og stille oppfølgingsspørsmål.

Ser vi på oppgavens betydning for utvikling av lesekompetanse i matematikk, vil vi fremheve noen viktige aspekt i det læreplanen påpeker om lesing som grunnleggende ferdighet: Elevene skal dra nytte av tekster med matematisk innhold fra dagliglivet, og de skal kunne lese tekster som inneholder f.eks. tabeller og diagram. Denne oppgaven gir god trening i dette.

Hundrehuset

I oppgaveheftene har vi også med en del oppgaver som ikke er like virkelighetsnære. Vi

Kamp: Brann – Tromsø

Dato: Fredag 26.08.2011 kl. 19.00

Sted: Brann Stadion

83 Nesttun – Storetveitveien – Sentrum

Frå Nesttun	Måndag – fredag											
Turnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nesttun terminal	6.00	6.30	7.00	7.20	7.40	8.00	8.20	8.40	9.00	9.30	10.00	10.30
Paradis	6.04	6.34	7.04	7.24	7.44	8.04	8.24	8.44	9.04	9.34	10.04	10.34
Wergeland	6.10	6.40	7.10	7.30	7.50	8.10	8.30	8.50	9.10	9.40	10.10	10.40
Danmarks plass	6.14	6.44	7.14	7.34	7.54	8.14	8.34	8.54	9.14	9.44	10.14	10.44
Bergen busstasjon	6.20	6.50	7.20	7.40	8.00	8.20	8.40	9.00	9.20	9.50	10.20	10.50

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Nesttun terminal	11.00	11.30	12.00	12.30	13.00	13.30	14.00	14.20	14.40	15.00	15.20	15.40
Paradis	11.04	11.34	12.04	12.34	13.04	13.34	14.04	14.24	14.44	15.04	15.24	15.44
Wergeland	11.10	11.40	12.10	12.40	13.10	13.40	14.10	14.30	14.50	15.10	15.30	15.50
Danmarks plass	11.14	11.44	12.14	12.44	13.14	13.44	14.14	14.34	14.54	15.14	15.34	15.54
Bergen busstasjon	11.20	11.50	12.20	12.50	13.20	13.50	14.20	14.40	15.00	15.20	15.40	16.00

	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
Nesttun terminal	16.00	16.30	17.00	17.30	18.00	18.30	19.00	19.30	20.00	20.30	21.30	22.30	23.30
Paradis	16.04	16.34	17.04	17.34	18.04	18.34	19.04	19.34	20.04	20.34	21.34	22.34	23.34
Wergeland	16.10	16.40	17.10	17.40	18.10	18.40	19.10	19.40	20.10	20.40	21.40	22.40	23.40
Danmarks plass	16.14	16.44	17.14	17.44	18.14	18.44	19.14	19.44	20.14	20.44	21.44	22.44	23.44
Bergen busstasjon	16.20	16.50	17.20	17.50	18.20	18.50	19.20	19.50	20.20	20.50	21.50	22.50	23.50

Torstein tar bussen når han skal til stadion. Han bor på Nesttun, og tar bussen til Wergeland. Han bruker 10 minutter på å gå hjemmefra til bussen, og 10 minutter fra Wergeland til stadion.

a) Hvilket nummer er det på bussruten Torstein skal se på?

b) Når må han ta bussen fra Nesttun for å nå kampen?

c) Hvor lang tid bruker bussen fra Nesttun til Wergeland?

d) Når kommer Torstein til stadion?

Kampen varer i 90 minutter. I tillegg er det 15 minutter pause. Når skal kampen være ferdig?

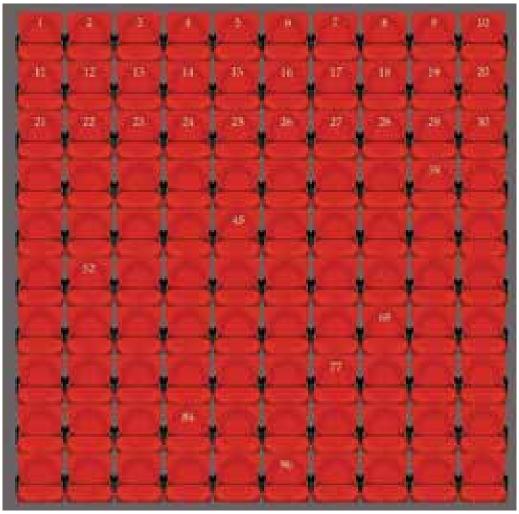
ønsker noen slike oppgaver for å trene på spesifikke ferdigheter.

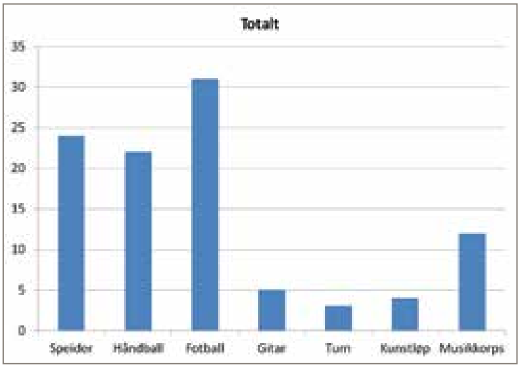
Oppgavene starter med en tegning av en tribune. Det kalles for et hundrehus eller, som vi har valgt, en hundretribune. Det disse oppgavene gir trening i, er å se mønster og system i vårt plassverdisystem og å utvikle strategier innen de fire regneartene. Mangelfulle strategikunnskaper (strategifattigdom) representerer en kritisk faktor for normal utvikling (Ostad, 199a).

Når elevene arbeider med hundretribunen, er det lagt vekt på muntlighet som grunnleggende ferdighet. Elevene skal samtale om ulike mønster som blir fremtredende, og ulike måter å løse en oppgave på. Ved å lytte til elevene vil læreren også få mulighet til å oppdage om elevene har misoppfatninger eller bruker strategier som er lite effektive.

Mange av oppgavene til hundretribunen handler om multiplikasjon. Elevene får oppgaver som: «Det er en gjeng med ungdomsskoleelever som skal ha billetter. De vil erte billettøren og sier at de bare vil ha billetter der tverrsummen er 9. Hvilke billetter kjøper de? Hvor mange billetter får de kjøpt? Hva er det som er spesielt med denne tallrekken? Hvorfor ser nigangen slik ut?»

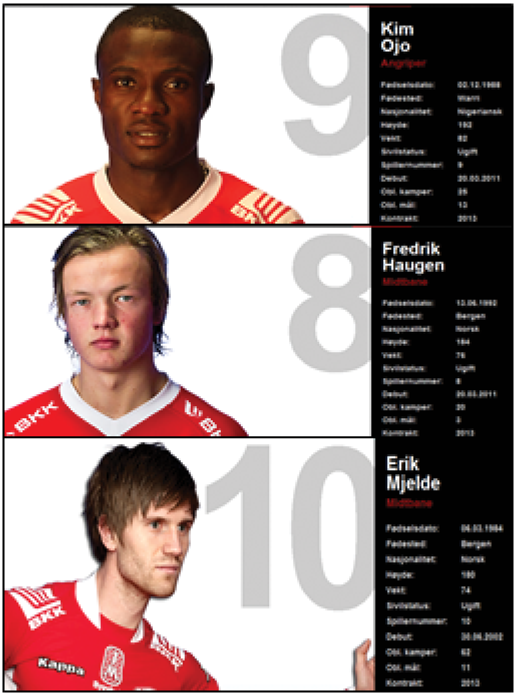
Hundretribunen kan brukes for å arbeide med hoderegningsstrategier når vi adderer to tall. For eksempel 23 + 35. Det er flere måter å finne det svaret på: 20 + 30 + 3 + 5 eller 23 + 30 + 5. Dersom man har smartboard kan man ha oppe hundretribunen og begynne med å ringe inn 23, for deretter å hoppe loddrett ned med tre tiere. Vi kommer da på 53 og ringer det inn og adderer til sist 5. Eller man ringer inn 20, hopper tre tiere ned til vi kommer på 50 og ringer den inn for til sist å hoppe (addere) 3 og 5. Dette kan også gjøres direkte på arket. Her er det utallige varianter og muligheter.





Hvordan bruke prosjektet til videre arbeid

I heftet er det oppgaver om høyde, vekt, alder, antall kamper osv. Elevene møter mange sammenligningsord og måleenheter. Oppgavene i heftene er fine som utgangspunkt for at lærer eller elevene selv kan lage flere oppgaver. Et eksempel er bildene av spillere. Elevene kan bruke bildene som inspirasjon, eller de kan finne bilder og fakta om sine helter. De kan også bruke sitt eget idrettslag som utgangspunkt. Når elevene lager oppgaver, gir det god mulighet til å kartlegge hva de mestrer på egen hånd, og hvilke begreper de har på plass. Bruk gjerne de oppgavene elevene lager, på lekseplaner, eller gi dem ut som et eget lite hefte. Det at de skal «publiseres», gir læreren en god mulighet til å ha fokus på føring og mottakerbevissthet.



I det praktiske heftet finnes oppgaven under. Den kan være utgangspunkt for et prosjekt hvor lokale idrettslag eller andre knyttes til skolen.

Her er resultatet til fjerde trinn ved skolen hvor vi arbeider. Disse elevene hadde gjennomført deler av Brann i matteboken da denne undersøkelsen ble gjort. Et slikt diagram gir mulighet for gode diskusjoner og for å kartlegge hva elevene er interessert i. Vi så at elevene brukte erfaringene fra Brann i matteboken, og overførte disse til sin aktivitet. En elev kom glad og sa: Det er masse matematikk i speiding! Det resulterte i mange gode oppgaver til medelevene.

Mange av oppgavene i heftene er praktiske, og de elevene som f.eks. er vant til å lese bussruter eller treningstabeller, erfarte vi var en styrke for gruppen de jobbet på. Dette trenger ikke være de samme elevene som opplever mestring i andre matematikkaktiviteter. Det å jobbe tre og tre har vi gode erfaringer med. Det gir ofte bedre diskusjoner enn å jobbe i par. Elevene får mulighet til å kommunisere idéer og drøfte

Fritidsaktiviteter

Lag en spørreundersøkelse over hvilke fritidsaktivitetene dine elever er med på. Elevene kan selv være med å foreslå hvordan dette kan registreres.

De skal deretter lage et diagram som viser det de har funnet ut.

Hva er den fritidsaktiviteten som er mest populær?

Det kan også være morsomt å finne ut hvor mange timer hver elev bruker på fritidsinteresser i løpet av en uke, og hvor mange timer man bruker på lekser i løpet av en uke.

Er det noen forskjeller på gutter og jenter?

La elevene lage egne spørsmål.

problem og løsningsstrategier.

Vi presenterte læringsprogrammet på Lamis sommerkurs 2012, og da oppsummerte vi med en idémyldring, både om oppgavene i heftene og om muligheten til å knytte matematikk til praktiske aktiviteter i nærmiljøet.

Mange av deltagerne hadde idéer til hva de kunne bruke i sitt nærmiljø. Ett innspill var «hvorfor har jeg aldri sett at femgangen er rett utenfor skolen vår?» Skolen lå ved et skiskytingsanlegg, og mange av elevene er aktive utøvere. Andre så muligheter i lokale idrettslag, musikk, sjakk, jakt og fiske. Et forslag var å dele gode oppgaver og idéer. Vi jobber videre med denne idéen!

Alle heftene med lærerveiledning kan lastes ned fra Vilvites hjemmeside. Der finnes også en film om prosjektet. Dette kan brukes om man deltar i selve programmet eller ønsker å utvikle noe som passer for skolen og nærmiljøet.

Arne Amdal

Divisjonstester

I denne korte teksten ønsker jeg å trekke fram noen såkalte divisjonstester. Noen vil være kjent for mange, mens andre ikke er fullt så kjent. Tanken bak teksten er altså delvis å drive folkeopplysning, men jeg har også tro på at noe av dette kan bidra til å stimulere lærere til å pirre elevers nysgjerrighet.

For noen år siden hadde jeg en jobb jeg måtte pendle til. Når jeg samkjørte med andre matematikklærere, pleide vi av og til å more oss med å primtallsfaktorisere bilnummer. Vi lærte oss etter hvert noen regler som kanskje ikke er så godt kjent. Det gikk etter hvert sport i å faktorisere numrene på den mest elegante måten. Jeg tror mange elever vil sette pris på å lære noen av disse divisjonstestene, ja kan det til og med tenkes at de kan lage noen selv?

Mange av testene er av en slik art at elevene selv kan bli gitt anledning til å oppdage dem. Ta for eksempel treertesten. Ber vi elevene om å ta tverrsummen av tallene i tregangen, gjerne i en variant som strekker seg utover 30, vil nok mange oppdage at også tverrsummene er med i tregangen, det vil si er delelige med 3. Mange elever vil sikkert lure på om det bestandig må være slik. Elevene kan da få sjekke større tall som er med i tregangen, og dessuten få kontrollere at tall som ikke er med i tregangen, ikke har tverrsum i tregangen. Mange vil kanskje nå etterlyse et formelt bevis, men som vi skal se, følger treertesten direkte av niertesten, som det er naturlig å ta like etter treertesten.

Elevene vil raskt oppdage at niertesten er helt analog med treertesten: Alle tall i nigangen har tverrsum som er med i nigangen. For elever som har tilstrekkelig kompetanse i algebra, kan et bevis for niertesten være interessant. Vi viser den her for tresifrede tall. Disse har form $100a + 10b + c$. Hvis tverrsummen $a + b + c$ er med i nigangen, er $a + b + c = 9k$ for et tall k. Siden $100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c = 9\cdot(11a + b + k)$, må altså også $100a + 10b + c$ være med i nigangen. Dette kan lett utvides til tall med flere siffer: Alle tall som består av bare nitall, er med i nigangen.

Ellevertesten likner litt på treer- og niertesten. Den er slik: Hvis den alternerende tverrsummen til et tall er med i ellevegangen, er også tallet selv med i ellevegangen. For eksempel er 918082 med i ellevegangen siden $9 - 1 + 8 - 0 + 8 - 2 = 22$ er det. Elevene kan selv få formulere testen etter å ha regnet ut den alternerende tverrsummen for et passende antall tall i ellevegangen. Igjen viser vi først testen for et tresifret tall $100a + 10b + c$. Hvis den alternerende tverrsummen $a - b + c$ er med i ellevegangen, er $a - b + c = 11k$ for et tall k. Siden $100a + 10b +$

Arne Amdal
NTNU
arne.amdal@plu.ntnu.no

$c = 99a + 11b + a - b + c = 11 \cdot (9a + b + k)$, viser dette at også $100a + 10b + c$ er med i ellevegangen. Her må man nok tenke seg litt om før man utvider til tall av flere sifre.

Vi prøver et firesifret tall $1000a + 100b + 10c + d$. Den alternerende tverrsummen er $a - b + c - d$. Hvis vi skal følge mønsteret over, må vi nå skrive $1000a + 100b + 10c + d = 999a + 101b - 9c + a - b + c - d$. Men dette fører jo ingen vei. Hverken 999, 101 eller 9 er med i ellevegangen. Krever vi derimot at det siste sifferet skal være positivt, blir den alternerende tverrsummen $-a + b - c + d$, og uttrykket får form $1000a + 100b + 10c + d = 1001a + 99b + 11c - a + b - c + d$. Nå stemmer det. Både 11, 99 og 1001 er med i ellevegangen. Kan det være slik at $10^n + 1$ er med i ellevegangen når n er odde, og $10^n - 1$ er med i ellevegangen når n er like? En rask sjekk med lommeregneren gir indikasjoner på at dette kan stemme. Å vise at det virkelig stemmer, kan være en fin utfordring for elevene.

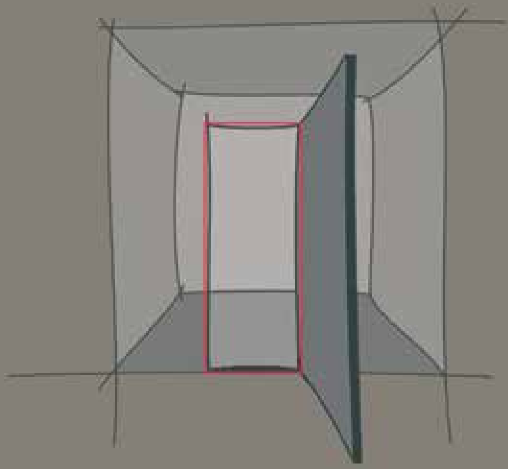
Nå er det på sin plass med en oppsummering så langt. Vi har altså etablert treer-, nier- og ellevertesten. I tillegg tør femmertesten (siste siffer er 0 eller 5) og toertesten (siste siffer er et partall) være kjent. Både toer- og femmertesten kan relativt greit utvides til potenser av 2 og 5: Et tall er med i henholdsvis 2^n-gangen eller 5^n-gangen hvis de n siste sifrene av tallet er det. Testene kan selvfølgelig kombineres. Er et tall med i for eksempel togangen og tregangen, er det med i seksgangen. Dette betyr at det minste tallet vi foreløpig ikke har noen test for, er 7.

Det finnes faktisk flere slike. Ingen av dem er kjempegode, men den jeg bruker, er som følger: Trekk det dobbelte av det siste sifferet i tallet fra de sifrene som er igjen. Hvis det tallet du nå får, er med i sjugangen, er tallet selv med i sjugangen. Det er nok lettest å forklare testen med et eksempel: 154 er med i sjugangen siden $15 - 8 = 7$ er det. Du kan fortsette prosessen om nødvendig: For å avgjøre om 861 er med i sjugangen, tar du først $86 - 2 = 84$, og så $8 - 8 = 0$, som viser at 861 er med i sjugangen. Testen er faktisk ikke så vanskelig å vise: Alle tall kan skrives på formen $10a + b$, der b er et ensifret tall. Testen består i å undersøke at hvis $a - 2b$ er med i sjugangen, så er $10a + b$ det. Hvis $a - 2b = 7k$, er $10a + b = 10 \cdot (2b + 7k) + b = 21b + 70k = 7 \cdot (3b + 10k)$, som viser at da må $10a + b$ være med i sjugangen. En annen og kanskje lettere måte å se dette på er å bruke at 21 er med i sjugangen. Hvis vi dobler $10a + b$ får vi $20a + 2b$, som kan skrives som $21a + 2b - a$, som viser at $10a + b$ er med i sjugangen hvis $2b - a$, eller ekvivalent $a - 2b$, er det. Slike tester kan det lages mange av. Om de er spesielt gode, er en annen sak. Hvis vi benytter at 98 er med i sjugangen, og at alle tall kan skrives på formen $100a + b$, der b nå er et tosifret tall, kan vi skrive $100a + b = 98a + 2a + b$. Hvilken divisjonstest vil det produsere? Kan man tenke seg at det er mulig å utfordre elevene til å produsere sine egne divisjonstester?

Den siste testen jeg har et personlig forhold til, er den simultane sjuer-, ellever- og trettentesten. Den får være toppen på kransekaka i dette korte notatet. Den er som følger: Del tallet opp i blokker på tre, og ta den alternerende summen av disse blokkene. Hvis det tallet du ender opp med, er med i sju, elleve- eller trettengangen, er tallet selv med i sju, elleve- eller trettengangen. Eksempel: For tallet 28 378 350 beregner du $350 - 378 + 28 = 0$. Det betyr at 28 378 350 er med i både sju, elleve- og trettengangen. Å bevise denne testen er også innen rekkevidde for elevene. Hvis jeg skal gi et hint, må det være at $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$.

Å faktorisere for eksempel bilnummeret 31 395, kan da gå for seg slik: Tverrsummen er 21, så én faktor er 3. Den alternerende tverrsummen $3 - 1 + 3 - 9 + 5 = 1$, så 11 er ikke en faktor. Tallet slutter på 95. Det betyr at 5 er en faktor, men ikke 5^2, da 95 ikke er med i 25-gangen. Så må vi nok over på den simultane sjuer, ellever- og trettentesten. $395 - 31 = 364$, som viser at 7 er en faktor da $36 - 8 = 28$ er med i sjugangen. 364 er faktisk med i trettengangen også. Det ser vi ved å se at $364 = 390 - 26$. Altså har vi nå funnet faktorene 3, 5, 7 og 13. Produktet

(fortsettes side 44)



Lucia Liguori

Epler og brøk: en praktisk tilnærming til begrepet fellesnevner i brøkaddisjon

Brøker er for mange et komplisert begrep i matematikk. Dette bekreftes dessverre av det faktum at et stort antall videregående elever føler seg usikre når de skal utføre matematiske operasjoner med brøk. Utfordringene elevene møter kan være knyttet til de mange betydningene/forståelsene av begrepet «brøk»:

– Brøk som en del av en helt tall: 4/5 av 1 betyr at vi deler 1 i fem like store deler og tar fire av dem
– Brøk som et rasjonalt tall som også kan skrives som et desimaltall:

$$4/5 = 4:5 = 0{,}8$$

– Brøk som en matematisk operator: 4/5 av 250 ml, det vil si $250/5 \cdot 4 = 200$ ml
– Brøk som et forhold mellom to lengder: høyden (h) av en trekant delt på sin grunnlinje (b) er lik 4 til 5. Matematisk sett er dette proporsjonen $h:b = 4:5$.

Lucia Liguori
Nordahl Grieg Videregående Skole
luc.bjo@hfk.no

Mange elever tenderer til å pugge algoritmer som brukes i beregninger med brøker, men uten å tilegne seg forståelse for betydningen av brøker og deres matematiske operasjoner.

Erfaringsmessig viser det seg at når læreren introduserer bruk av brøker i algebra eller i enkle matematiske funksjoner, for eksempel en rett linje med brøk som stigningstall, blir eleven forvirret.

Det er ikke bare elever som har utfordringer med brøk. Faktisk er det en hel del voksne som sliter med grunnleggende forståelse av brøkregning (Fazio, 2011). Ett av de vanskeligste begrepene er fellesnevner i brøkaddisjon og -subtraksjon. Det er kjent at praktisk arbeid i matematikk er en populær læringsmetode blant elever fordi matematiske begreper blir mer konkrete og håndgripelige. Ofte blir arealmodeller (Garcia, 2007), lengdemodeller og settmodeller (Son, 2010) brukt til å introdusere brøkbegrepet. Dette representerer elevens første kontakt med abstrakt matematikk (Son, 2010).

Praktisk øvelse

I denne artikkelen beskrives en praktisk øvelse som ble testet i to matematikklasser. To like store epler (eple A og eple B) ble brukt til å forstå og forklare betydningen av fellesnevner i addisjon av brøker. Øvelsens vanskelighetsgrad kan modifiseres avhengig av nivået på klassen ved å gjøre det mer praktisk eller teoretisk. Den praktiske versjonen, basert på en mer detaljert og lukket tekst, ble gitt til en klasse med matematikk 1PYF. Den teoretiske versjonen i form av et åpent problem ble tildelt en klasse med matematikk S1. Hver av elevgruppene blir gitt to like store epler, A og B.

Praktisk versjon

Beregn og forklar hvor mye eple som blir spist om

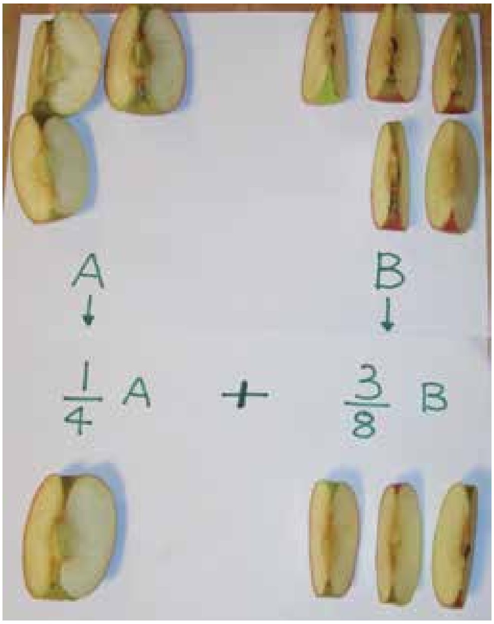
a) det blir spist 1/4 av eple A og 2/4 av eple B
b) det blir spist 1/4 av eple A og 3/8 av eple B

Teoretisk versjon

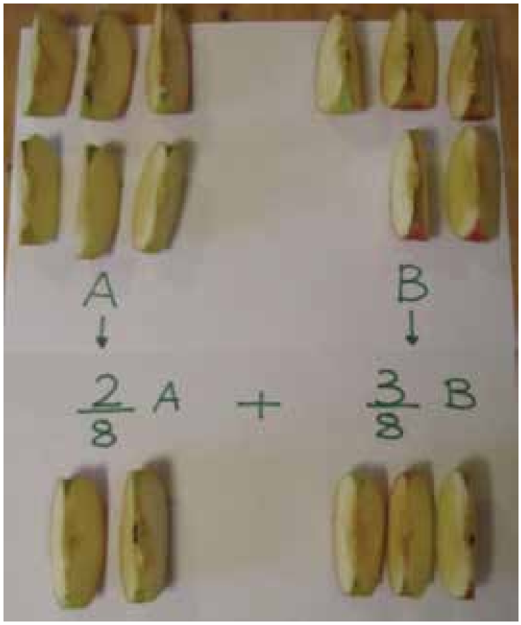
Bruk to like store epler, A og B, og finn praktiske eksempler som viser betydningen av fellesnevneren i addisjon av brøk.

Elever på matematikk 1PYF løste oppgave a) uten problemer. De skar begge eplene i fire stykker og tok bort én bit fra eple A og to biter fra eple B. Summen av disse delene var 3/4 av ett eple. For oppgave b) skar elevene eple A i fire stykker og tok bort én del. Eple B ble delt i åtte biter, og tre av dem ble tatt bort (figur 1).

Det var tydelig at elevene syntes det var utfordrende å finne ut hvor mye av ett eple som ble spist. Stykkene var av forskjellige størrelser og kunne ikke summeres på en *riktig* måte. Noen av elevene sa: «Det er som å summere centimeter og meter … vi må omgjøre bitene til sammenliknbare størrelser.» De konkluderte med at eple A kunne skjæres i åtte biter, og så kunne de ta bort to av dem. De innså at 2/8 tilsvarer 1/4 (figur 2).



Figur 1: Eple A er skåret i 4 deler og eple B i 8 deler. 1 del fra A og 3 deler fra B er tatt. A-delen er større enn B-delene.



Figur 2. Eple A er skåret i 8 deler og 2 av dem er tatt. A-delene er like store som B-delene.

Matematisk sett kan oppgave b) skrives som

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{1\cdot 2+3\cdot 1}{8}=\frac{5}{8},$$

hvor 8 er fellesnevneren. Fellesnevneren sikrer at alle bitene har samme størrelse.

S1-klassen, som hadde den teoretiske oppgaven, hadde noen vanskeligheter med å finne enkle eksempler som demonstrerte verdien av fellesnevneren. Til slutt kom de til samme konklusjon som den andre klassen. Årsaken til at mange oppfattet dette som vanskelig, var at elevene ikke var vant til å jobbe med problemløsning og resonnement. Og selv om begrepet *fellesnevner* var kjent for noen elever, var det andre som slet med det. Resultatene på en senere prøve bekreftet at elever fikk en større forståelse etter at den praktiske øvelsen var fullført.

Konklusjon

Denne typen eksperiment er meget enkel, praktisk og samtidig veldig visuell. Den krever ikke forkunnskap om begrepene *areal* eller *lengde* som i noen matematiske modeller (Garcia, 2007; Son, 2010). Den kan brukes på alle nivåer i læringsprosessen, selv i en førskoleklasse! Elevene mine i videregående skole satte stor pris på denne praktiske måten å utforske brøksummen og fellesnevneren på. De uttrykte tydelig at dette var en tilnærming som ville ha skapt bedre forståelse av begrepene hvis den hadde blitt tatt i bruk når brøk ble undervist på barne- og ungdomsskolen.

Takk til Aleksander Husøy, adjunkt på Nordahl Grieg VG Skole, for språkrevisjon.

Referanser

Garcia, J. (2007). Visual Fraction-Addition Teaching Method. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education, 2*(1), 30–39.

Son, J.-W., & Senk, S. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 74*(2), 117–142.

Fazio L., & Siegler, R. (2011). «… many students continue to struggle with fractions, even after years of instruction». Educational Practices Series–22. The International Academy of Education, lest 23. januar 2013 på http://unesdoc.unesco.org/images/0021/002127/212781e.pdf

---

(fortsatt fra side 41)

av disse faktorene er anslagsvis litt over 1300. Da mangler vi en faktor på litt over 20. Her er eneste kandidat 23. Vi ser her at det faktisk er mulig å fullstendig faktorisere femsifrede tall i hodet. Litt flaks må man nok ha, men det er bestandig spennende å prøve.

Jeg tror slike øvelser kan være nyttige for elevene. De får her anledning til å gjennomføre matematiske resonnement. For dem som trekker det så langt at de utvikler nye divisjonstester, og beviser dem som er nevnt her, kan jeg ikke tro annet enn at det vil bidra til å styrke forståelsen for hvordan tallene våre er bygd opp.

Hvis man i en klasse jobber med tallsystem med andre grunntall enn 10, er det mulig å trekke dette enda lenger. Finnes det for eksempel en sjuertest i åttetallsystemet som likner på vår niertest? Eller mer generelt, en (n – 1)-test i n-tallsystemet? Hvor mange av testene over her er overførbare til andre tallsystem? Hvordan ser lista med primtall ut i de forskjellige tallsystemene? Her er mulighetene uendelige.

En takk må rettes til matematikklærer Johan for mange hyggelige bilnummersamtaler.

(fortsatt fra side 14)

I vår hverdag som lærere ved en montessoriskole opplever vi ytterst sjelden at elever ikke er positive til ny læring. De trekker ikke ned rullegardinen. De går inn i prosessen med en forventning om mestring, bygget på sine mange tidligere erfaringer av mestring. Dette er et privilegium for oss som lærere; å se at elevene er nysgjerrige og motiverte for nye dykk ned i matematikkens verden.

Note

1 Frimerkespillet har fått navnet sitt fra Maria Montessori sin tid i Casa Del Bambini. Hun brukte da frimerker i stedet for trebrikkene som dagens montessoriskoler bruker.

Referanser

Imsen, G. (1998). *Elevens verden*, Oslo: Universitetsforlaget

Lillard, P. P. (1996). *Montessori today*. New York: Schocken Books.

Montessori, M. (1988). *The absorbent mind.* Oxford: ABC-Clio Ltd.

Vatland, M. H., & Lexow, M. (2004). *Montessori – en innføring*. Oslo: Montessoriforlaget.

Walls, C. H. (2013). Waterpark Montessori. Quote *To the lesson*. Hentet 06.02.13 fra tothelesson.blogspot.no/2011/04/mathematical-mind.html

Einar Jahr

En enkel oppstilling for Euklids algoritme

Euklids algoritme går som kjent ut på å finne største felles faktor for to naturlige tall ved gjentatte subtraksjoner, som kan rasjonaliseres til gjentatte divisjoner med rest. Grunnlaget for algoritmen er at en felles faktor for to tall også er faktor i differensen. Videre er det slik at en felles faktor for $a - b$ og b også er faktor i a, slik at største felles faktor for a og b også er største felles faktor for b og $a - b$. Når en stiller opp denne algoritmen som gjentatte divisjoner på vanlig måte, har en erfaringsmessig lett for å bruke kvotientene i den videre regningen i stedet for restene. Det kommer antakelig av at standardoppstillingen for divisjon er laget for å finne kvotienten, som derfor har en dominerende plass i bildet. En annen feilkilde er at man må skrive hver rest om igjen for hver divisjon, med mulighet for avskriftsfeil. Jeg har funnet på en oppstilling for Euklids algoritme der ingen rest skrives mer enn én gang, og der kvotientene plasseres på «ufarlige» steder. Videre er det lett å «nøste opp» algoritmen bakfra slik at man finner et uttrykk for største felles faktor for a og b som en lineærkombinasjon av dem.

Det enkleste er nå å vise oppstillingen ved et eksempel: Vi skal finne største felles faktor for 2604 og 1380:

$$
\begin{array}{rcr}
2604 & & \\
\underline{1380} & \xleftarrow{\cdot 1} & 1380 \\
1224 & \xrightarrow{\cdot 1} & \underline{1224} \\
\underline{1092} & \xleftarrow{\cdot 7} & 156 \\
132 & \xrightarrow{\cdot 1} & \underline{132} \\
\underline{120} & \xleftarrow{\cdot 5} & 24 \\
12 & \xrightarrow{\cdot 2} & \underline{24} \\
 & & 0
\end{array}
$$

Største felles faktor for 2604 og 1380 er den siste resten som er forskjellig fra 0, dvs. 12.

Nå kan vi sette opp dette regnestykket:

$$
\begin{aligned}
12 &= 132 - 120 = 1224 - 1092 - 5\cdot(156 - 132) \\
&= 2604 - 1380 - 7\cdot(1380 - (2604 - 1380)) - \\
&\quad 5\cdot(1380 - (2604 - 1380)) + 5\cdot(1224 - 1092) \\
&= 13\cdot 2604 - 25\cdot 1380 + 5\cdot(2604 - 1380) - \\
&\quad 5\cdot(7\cdot(1380 - (2604 - 1380)) \\
&= 53\cdot 2604 - 100\cdot 1380
\end{aligned}
$$

Einar Jahr
Pensjonert lærerutdanner
einjahr@hotmail.no

Tom Lindstrøm

Hva er dimensjon? Skaleringsidéen

I Tangenten (1/2013) skrev jeg om hvordan dimensjonen til et objekt kan beregnes ut ifra hvordan objektet er bygget opp – den såkalte sammenhengsidéen. I denne artikkelen betraktes en annen måte å nærme seg dimensjonsbegrepet på der utgangspunktet er skalering og ikke sammenheng.

Den grunnleggende observasjonen er det sikkert mange som har gjort allerede i barneskolen. Vi tar en geometrisk figur og ser på den gjennom et forstørrelsesglass eller en linse som forstørrer r ganger. Hvor mye større blir da figuren? Hvis det vi ser på er et én-dimensjonalt objekt som et linjestykke eller en kurve, er det naturlig å bruke lengden som et mål på størrelsen, og lengden øker med en faktor r: Var lengden l før vi forstørret, er den rl etterpå. Dersom vi i stedet forstørrer et to-dimensjonalt objekt, for eksempel et rektangel med sider a og b, er situasjonen en annen. Nå er det naturlig å bruke arealet som et mål på størrelsen, og det øker fra ab til $(ra)(rb)=r^2(ab)$, det vil si med en faktor r^2. Det samme skjer for alle andre arealer. Ser vi på dem gjennom en linse som forstørrer r ganger blir arealet r^2 ganger så stort. Ved tre-dimensjonale objekter, for eksempel en boks med sidekanter a, b og c, er det naturlig å bruke volum til å måle størrelse. Volumet til terningen øker fra abc til $(ra)(rb)(rc)=r^3(abc)$, altså med en faktor r^3.

Dimensjonen gjenspeiles i eksponenten til skaleringsfaktoren: Forstørrer man et d-dimensjonalt objekt (der d er 1, 2 eller 3) r ganger, øker størrelsen med en faktor r^d. Dette er den grunnleggende observasjonen bak *skaleringsidéen*.

Legg merke til at i argumentene ovenfor behøver ikke r være et helt tall, og det behøver ikke engang være større enn 1. Er r mindre enn 1 har vi riktignok en forminskning i stedet for en forstørrelse (tenk på en arbeidstegning eller et kart), men det spiller ingen rolle for resultatene.

Tom Lindstrøm
Universitetet i Oslo
t.l.lindstrom@cma.uio.no

Dimensjonsmåling

Et lite tankeeksperiment: Anta at vi har fått besøk fra en annen planet av vesener som har et helt annet sanseapparat enn oss, og som derfor ikke begriper hva dimensjon er. For å hjelpe dem tilbyr vi å vise dem et eksperiment som måler dimensjon.

Idéen er enkel: Gjenstanden vi skal måle dimensjonen til kuttes i små terninger av forskjellig størrelser. Så undersøkes det hvordan massen varierer med sidekanten i terningen. Er stoffet homogent, ville massen være proporsjonal med volumet, altså

$$M=Cl^3$$

for en eller annen konstant (tetthet) C. Nå er ikke tankeeksperimentet mer fiktivt enn at fysikere faktisk har gjennomført det. Dersom stoffet er uregelmessig, hvis det er fullt av hull og porer av alle mulige størrelser, viser det seg at denne ligningen ikke holder. Man får i stedet en (tilnærmet) ligning av typen

$$M = Cl^d$$

for et tall d mindre enn 3 (den beste verdien til d kan finnes ved regresjon). Dette tallet d kaller de den (eksperimentelle) dimensjonen til stoffet. Vi har altså stoff med en dimensjon som ikke er heltallig!

Ikke-heltallig dimensjon

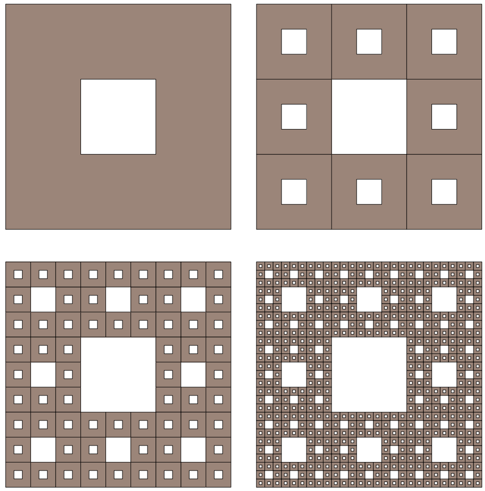
Det naturlige spørsmålet er om man kan få til noe tilsvarende matematisk. Finnes det geometriske former som har en ikke heltallig dimensjon dersom man legger skaleringstanken til grunn? Vi ser på Sierpinski-teppet der figur 1 viser de første stegene i konstruksjonen.

Legg merke til at denne figuren er bygget opp av 8 mindre kopier av seg selv (de 8 «kvadratene» som ligger rundt kanten), og alle er forminsket med en faktor 1/3 i forhold til originalen. Hver av disse er igjen bygget opp av 8 kopier av seg selv, og disse er forminsket med en ny faktor 1/3. Den opprinnelige figuren består dermed av $8 \cdot 8 = 64$ kopier av seg selv, alle forminsket med en faktor $(1/3) \cdot (1/3) = 1/9$. Fortsetter man på denne måten, ser man at Sierpinski-teppet er bygget opp av 8^n kopier av seg selv, alle forminsket med en faktor $(1/3)^n$.

Hvis vi lar $M(l)$ betegne størrelsen til et Sierpinski-teppe med sidekant l, og lar det opprinnelige teppet ha sidekant 1, betyr dette at

$$M(1) = 8^n M(1/3^n).$$

Hvordan stemmer denne formelen med en skaleringslov av typen $M(l) = Cl^d$? Setter vi $M(1) = C1^d = C$ og $M(1/3^n) = C(1/3^n)^d = C(1/3^{nd})$ inn i formelen ovenfor, får vi etter å ha forkortet



Figur 1: Sierpinski-teppet

C-ene

$$1 = 8^n(1/3^{nd}).$$

Det er det samme som

$$3^{nd} = 8^n.$$

Ved å ta logaritmen på begge sider vil

$$nd \log 3 = n \log 8.$$

Det gir

$$d = \log 8/\log 3 \approx 1.89.$$

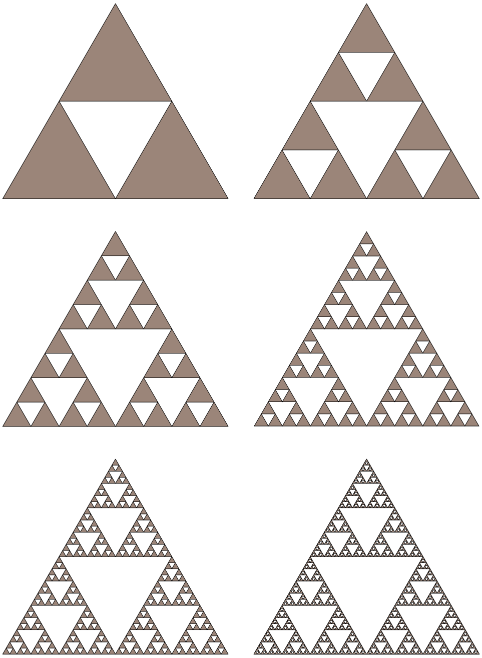
Denne regningen indikerer altså at Sierpinski-teppet har dimensjon log 8/log 3.

Vi kan gjøre et helt tilsvarende regnestykke for Sierpinski-trekanten (se figur 2).

I dette tilfellet er den opprinnelige trekanten bygget opp av 3^n trekanter med sidekant $1/2^n$. Det gir en dimensjon på $\log 3/\log 2 \approx 1.58$.

Hausdorff-dimensjon

Regnestykkene ovenfor indikerer at ut ifra skaleringsidéen bør Sierpinski-teppet ha dimensjon log 8/log 3 og Sierpinski-trekanten ha dimen-



Figur 2: Sierpinski-trekanten

sjon log 3/log 2. Siden vi ikke har definert hva dimensjon skal være etter skaleringsidéen er dette ikke noe bevis, men det er mulig å gjøre idéene presise. Ved å innføre det en kaller Hausdorff-mål som måler størrelsen til mengder av ulik dimensjon, kan vi definere definisjonen til en hvilket som helst mengde i planet, rommet eller høyere-dimensjonale rom. Bruker man denne definisjon på Sierpinski-teppet og Sierpinski-trekanten får man log 8/log 3 og log 3/log 2 akkurat som vi har fått ved hjelp av formaliserte versjoner av argumenter som er brukt i denne artikkelen.

Men hva er riktig?

Sammenligner man resultatene i denne artikkelen med resultatene i artikkelen jeg skrev i Tangenten (1/2013) føler man seg kanskje en smule forvirret. I den forrige artikkelen ble det vist at dimensjonen til Sierpinski-teppet er 2 og at dimensjonen til Sierpinki-trekanten er 1, mens nå er vi kommet frem til at dimensjonene er log 8/log 3 og log 3/log 2. Hva er riktig?

Svaret er at begge deler er like riktig, det avhenger av hvilken definisjon av dimensjon man legger til grunn, sammenheng eller skalering. Det finnes ikke bare ett dimensjonsbegrep, men flere, og de er nyttige til ulike formål. Dette er ikke noe enestående fenomen i matematikk. Det er slett ikke uvanlig at begreper deler seg i ulike presiseringer når man analyserer dem nærmere.

Det dimensjonsbegrepet vi har sett på i denne artikkelen, *Hausdorff-dimensjon*, brukes spesielt mye i forbindelse med fraktaler. Christoph Kirfel har omtalt dette temaet i artikkelen *Fraktaler, nymotens ting i matematikken* (Tangenten, 3/1994). Her finner man blant annet en grundigere beskrivelse av Sierpinski-teppet og dets dimensjon. Ønsker man en systematisk innføring i teorien, kan man enten se på Gerald Edgars bok *Measure, topology and fractal geometry* eller Kenneth Falconers *Fractal Geometry – Mathematical Foundations and Applications.*

Asta Godt

I Norge med fokus på matematikvanskeligheder

I juni måned blev vi, som studerende på Nr. Nissum Seminarium opfordret til at søge stipendium til et såkaldt ekspresbesøg i et nordisk land. Jeg så straks muligheden for at komme til Norge. Som bekendt er nordmænd eksperter i specialpædagogik og meget aktive i forhold til diskursen om "elever i matematikvanskeligheder". Jeg tog derfor kontakt til Olav Lunde og Tone Dalvang, som begge er kendte navne på Nr. Nissum Seminarium. Disse to kontakter bragte mig til fire forskellige skoler i henholdsvis Kristiansand, Sandnes og Hommersåk, samt til Sørlandets Kompetencecenter i Kristiansand. Jeg var på privat besøg hos Marta Vaasbø, der har stor erfaring med begynderoplæring og i dag arbejder på Vitenfabrikken i Sandnes, samt havde timelange matematiksnakke med forfatter og forhenværende skolepsykolog Olav Lunde og hans kone Kari Lunde.

Jeg vil i artiklen plukke det mest matematikrelevante ud fra min tur, i håbet om, at det vil kunne inspirere matematiklærere i dagligdagen og måske endda motivere nogle til at opsøge ny viden. Lad mig starte med at citere Olav Lunde: "Når eleven ikke har lært det på måden, som vi hidtil har prøvet – så må vi prøve noget andet!"

Asta Godt
3. års studerende på Nr. Nissum Seminarium,
141162@viauc.dk

Artikkelen er tidligere publisert i det danske bladet "Liv i skolen" nr. 4, 2012.

Besøg på Øvre Slettheia Skole i Kristiansand

Generelt er undervisningen på skolen præget af en socialkonstruktivistisk tilgang til læring. Skolen har i samarbejde med Sørlandets Kompetencecenter indført brugen af matematikmaterialet Numicon, som oprindeligt er udviklet i England til brug for elever med Downs Syndrom.

Numicon består af farverige brikker, der illustrerer tallene fra 1 til 10, små plancher med billeder af brikkerne og tilhørende symboler, byggeplader og byggeklodser. Eleven opdager på en konstruktivistisk måde matematiske strukturer og relationer. Materialet hjælper elever til at forstå tal, mønstre, talsystemet og regning, især for de elever hvor matematikken godt kan blive for abstrakt. Ifølge skolen har materialet en positiv effekt på elevernes læring, og den glæde og det engagement som eleverne viste, når de arbejdede med Numicon, var bekræftende og bemærkelsesværdig. Systemet anerkender, at ikke alle børn lærer ens. Nogle har brug for at få matematikken serveret visuelt og andre har brug for at konstruere matematikken. Piaget, ville have været henrykt. Lærerne lægger meget op til dialog mellem eleverne, som bruger meget af tiden på at arbejde sammen to og to eller måske i lidt større grupper. Og hele vejen igennem, er rummet gennemsyret af motivation. Det er SMUKT.

Et Numicon-grundsæt vil være egnet til undervisning af en mindre gruppe elever af gangen. Systemet kan udbygges alt efter behov. Sørlandets Kompetencecenter i Kristiansand har oversat lærervejledningen til norsk og information findes på www.songvaar.no.

Generelt oser Øvre Slettheia Skole af mangfoldighed af metodiske tilgange til læring. Matematikken bliver spillet, konstrueret, sunget, italesat, skrevet, automatiseret, visualiseret, forklaret af læreren og som et supplement var Numicon altid lige ved hånden, ikke mindst for de elever, der havde mest brug for det.

Besøg på Smeaheia skole i Sandnes

Her observerede jeg en 3. klasse blive undervist efter en russisk metode, som bygger på observation, analyse og logisk tænkning. Der bliver arbejdet hårdt med begreber og elevernes ræsonnementskompetence. Dette skete i form af problemløsningstræning, og efter devisen - først færdigheden, så forståelsen. Eleverne, der i øvrigt boede i et ressourcestærkt kvarter, scorer meget højt i test. Universitetet i Stavanger er særligt begejstret for metoden, som de selv har været med til at udvikle sammen med en norsk lærer ved navn Gerd Inger Moe. De tager udgangspunkt i en russisk bog som Natasja Blank, der er førsteamanuensis ved universitetet i Stavanger oversætter, da hun oprindelig selv er fra Rusland.

Jeg følte selv, at jeg var tilbage i 80'erne, hvor jeg selv sad på skolebænken og kedede mig, men erkender, at der var mange gode elementer i undervisningen. Eksempelvis udnyttelsen af elevernes sproglige dimension, når de sammen to og to fik få minutter til at forberede næste opgave inden gennemgangen på tavlen. Matematikken blev i form af italesættelse og refleksion til en del af elevernes matematiske kompetencer. Til den interesserede læser, vil jeg henvise til Smeaheia Skoles hjemmeside http://www.minskole.no/smeaheia, og søge på den russiske metode.

Jeg vil dog alligevel beskrive et par bemærkelsesværdigt elementer. Rundt i lokalet hang der regneregler, og geometriske tegninger med relevante tekster. Disse mange små plancher, blev der dagligt talt om, i forhold til det emne, som de arbejdede med. Eksempelvis hørte jeg eleverne blive overhørt i "faktor × faktor = produkt". Tanken bag dette var, at eleverne lige som godt kunne lære de rigtige begreber med det samme, så de ikke på et senere tidspunkt kommer i tvivl om, hvad en faktor er, når de hører, at faktorernes orden er underordnet. En anden bemærkelsesværdig lille finesse var matematikopvarmningen, som bestod af tabeltræning, hvor eleverne arbejdede to og to sammen omkring et laminat med eksempelvis 8-tabellen. Den ene havde resultatet på sin side, mens den anden blev overhørt.

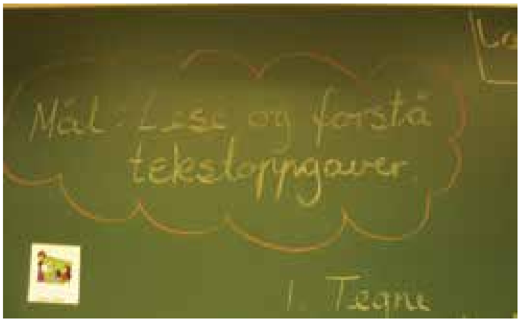
Vygotskij ville have været ellevild over den metode, som fik alle eleverne i gang med at tale matematik, hvad enten han var for eller imod tabeltræning. Dette går godt i tråd med, at undervisningen er inspireret af Zankovs, som var en af Vygotskijs elever.

Besøg på Kyrkjevollen Skole i Hommersåk nær Sandnes

Nylund Skolen i Stavanger har i samarbejde med Universitetet i Stavanger videreudviklet den australske metode EYNP, Early Years Numeracy Program. Det er en stations-undervisning, der isoleret set ikke er noget nyt i.

Jeg så dette blive praktiseret på Kyrkjevollen Skole i Hommersåk, hvor eleverne i 3. klasse arbejdede på fem forskellige stationer. De arbejdede i matematiktimen på problemløsningsstation, spillestation, repetitionsstation, lærerstation og en pc-station, som bestod af fem pc'er. Målet var, at undervise eleverne i samme tema på forskelligt niveau. Eleverne var derfor inddelt i faglige niveauer og skulle vælge det ark med den geometriske figur, som de hørte til, når de ankom til stationen. Læreren introducerede kort eleverne i de nødvendige regler for hver station, og eftersom EYNP har været en del af elevernes dagligdag i såvel norsk, engelsk og matematiktimerne siden 1. klasse, og derfor var kendt af eleverne, var dette hurtigt overstået. De arbejdede mellem 10 og 15 minutter ved hver station, og jeg så på intet tidspunkt motivationen dale hos eleverne. Til gengæld var der en konstant dejlig summen af aktivitet, og til tider et par glædesudbrud fra eleverne på spillestationen, der var godt i gang i et kortspil i plus og minustal. I løbet af dobbeltlektionen, nåede alle eleverne at samarbejde og kommunikere / diskutere omkring problemløsninger, spille matematikfagligt kortspil, lave en færdighedstest, arbejde på pc og få tavleundervisning med kommunikation med læreren og 4 andre niveausvarende elever. Alt sammen, i et og samme klasselokale.

I al sin enkelthed er det en metode, der anerkender elevernes behov for variation, åbner mulighed for praktisk arbejde uden et helt klassesæt af materialer og gør brugen af pc'er muligt ved blot at have ganske få computere i klassen. Det giver læreren mulighed for differentiering og ikke mindst – det var SÅ motivationsfremmende. En vigtig pointe er dog ifølge skoleleder Helga Bertelsen på Kyrkjevollen Skole, at det altid kræver 2 lærere, da den ene af lærerne jo bruges til tavleundervisningen på lærerstationen. Til gengæld bruger begge lærere tiden på undervisning og ikke blot en af lærerne, mens den anden adfærdsregulerer fra bagenden af lokalen - overvågende med armene over kors. Jeg forestiller mig dog, at metoden godt kunne bruges med kun en lærer, hvis man eksempelvis bytter lærerstationen ud med noget andet, så læreren ikke er låst fast ved tavlen.



Indførelse af metoden har iflg. Helga Bertelsen forbedret skolens nationale testresultat markant, samt givet utallige positive tilbagemeldinger fra forældrene, da eleverne i høj grad er begyndt at glæde sig til matematikundervisningen. Stationsundervisningen bliver praktiseret i ca. 1/3 af alle matematiklektionerne. Vigtigt er det dog her at pointere, at de på skolen indførte kravet om et synligt mål i hver time, samt valgte at købe smartboards til alle klasse, på samme tid som de iværksatte stationsundervisningen. Finansieringen af de mange smartboards kunne man fristes til at tro, var kommet fra Nordsøens olie, men dette var dog ikke tilfældet. Skolen ville have prioriteret smartboards til fordel for et års lærerstilling, men det viste sig ved årets udgang, at der var råd til både smartboards og lærer.

Marta Vaasbø's konstruktivistiske tilgang til begynderoplæring.

Jeg tilbragte fire dage hjemme hos Marta Vaasbø, som har mange års erfaring i grundskolen. Hendes force er begynderoplæring og hun mente, at der generelt ligger mange matematikvanskeligheder gemt hos elever, der ikke havde fået den dybe forståelse af positionssystemet. Hun bruger meget tid på at visualisere og konstruere positionssystemet, eksempelvis ved hjælp af knapper eller mælkelåg. Hun pointerer vigtigheden i, at eleverne kan talrækken, kender 1–1 korrespondancen og kan fastholde mængden med tallet uden at tælle. Hun er varm fortaler for den konstruktive tilgang til læring, og at elever altid skal have lov til først at lege med materialet. De må ikke tilbageholdes i at være nysgerrige! Dette link www.skoleipraksis.no/matematikk-1-4/filmar/posisjonssystemet/ viser Marta i færd med at arbejde med positionssystemet.

Hun havde på et tidspunkt skaffet omkring 1000 knapper fra en textilfabrik, og lod eleverne arbejde med positionssystemet i form af knapper. De sorte knapper er 1'ere og de røde knapper er 10'ere osv. Igen en spændende og sjov tilgang til læring, som mange elever sikkert priser sig lykkelig for, at have fået tilbudt. Umiddelbart kan man fristes til at tro, at matematikken og knapperne stopper her, men skal du eksempelvis reducere en ligning $(2a + 3b)2 + (8a + 6b)/2$ vil det vel aldrig skade, hvis a var de røde knapper og b var de gule knapper? Knapperne sætter dog sine begrænsninger, men netop disse begrænsninger vil kunne gøres til et stykke matematisk modellering. Hvornår er knapperne brugbare til at illustrere eksempelvis brøkregning?

Jeg var med Marta Vassbø til et af hendes foredrag omkring positionssystemet, og fik her bekræftet, at når Mikael Skånstrøm starter matematikstuderende på Nr. Nissum Seminarium op ved at kaste os ud i repetition af de fire regneregler i andre talsystemet, så ligger der i høj grad en pædagogisk overvejelse bag.

Olav Lunde – for mig, en guru!

Jeg brugte en del timer sammen med Olav Lunde og hans kone Kari, som har mange års erfaring med begynderoplæring. De var begge med til at observere den russiske metode og Marta Vassbøs foredrag omkring positionssystemet. Jeg var så heldig, at de bagefter ville bruge mange timer på at reflektere over matematikundervisningen sammen med mig. Olav Lunde vil gerne flytte fokus fra matematikvanskeligheder til matematikmestring, og erkender, at der ikke findes et entydigt svar på, hvordan vi får eleverne til at mestre matematikken. Jeg vil dog nævne tre vigtige pointer fra en af hans bøger, i forhold til de elever som befinder sig i matematikvanskeligheder.

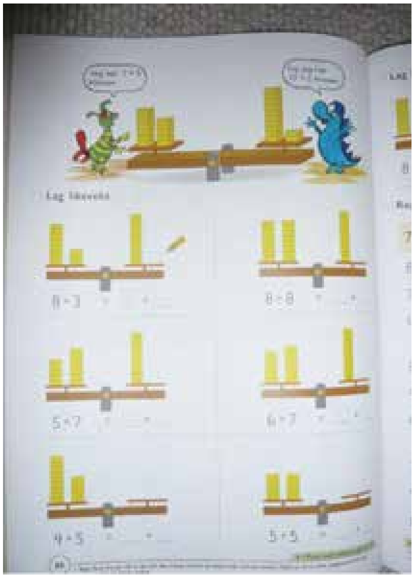
1. Når eleven ikke har lært det på måden, som vi hidtil har prøvet – så må vi prøve noget andet!
2. Elever er forskellige, hvilket kræver forskellige didaktiske indfaldsvinkler til undervisningen.
3. Vi må anerkende brugen af hjælpemidler og utraditionelle veje til læring. (Vi tager jo

heller ikke brillerne fra en svagtseende!)

Olav Lunde har skrevet bøgerne ”Nu får jeg det til!” og ”Hvorfor tal går i bold”, og jeg kan kun opfordre matematiklærere til at læse dem. Bøgerne oser af en systemisk tankegang omkring tilpasset oplæring i matematik, og gør i virkeligheden matematikundervisningen meget kompleks. Han drejer fokus væk fra den ”traditionelle” undervisning og sætter i stedet individet i centrum i forhold til omgivelserne. Han henviser til MIO, der betyder Matematikken, Individet og Omgivelserne, som er udarbejdet i et samarbejde mellem Universitet i Stavanger og Sørlandets Kompetencecenter. MIO er tænkt som et observationsredskab i forhold til en tidlig indsats for elever, der kan komme i matematikvanskeligheder og som en kompetenceudvikling inden for matematisk opmærksomhed for personalet i børnehaver og lignende. Ud over dette fik jeg en stribe af gode artikler af Olav Lunde, fra hans tid på Sørlandets Kompetencecenter – alle med en specialpædagogisk tilgang til matematikken.

Multisystemet

På flere af skolerne brugte de det norske Multisystem i matematikundervisningen. Systemet er bygget op efter princippet, konkret, halvkonkret, halv-abstrakt og abstrakt opgaveløsning. Til orientering kan jeg oplyse at en af forfatterne af denne bog, har arbejdet på Kyrkjevollen Skole. Jeg så spændende og motiverende sider i bøgerne, der dannede broer mellem det konkrete og det abstrakte. Jeg sendte straks en ulykkelig tanke til Piaget og hjem til de børn, som dagligt arbejder i bogsystemet REMA, hvor måske 80 % af bogen indeholder opgaver på abstraktionsniveau. Hvis man som lærer vælger at arbejde med Sigma, der trods alt er bedre til at konkretiserer matematikken i form af problemløsninger, ser jeg det som vigtigt at finde den indre russer frem, så børnene får lov at ræsonnere over og tale om problemløsningerne, i stedet for blot at blive færdig så hurtigt som muligt.



Pudsigt nok var det ikke på noget tidspunkt matematikbøgerne, der var i centrum i undervisningen i de mange lektioner, som jeg fik lov at overvære. Det giver et kort flash back, til min første matematiklektion på Nr. Nissum Seminarium, hvor Mikael Skånstrøm starter med at hive en masse sider ud af en matematikbog. Hvem siger egentligt, at målet bliver opfyldt ved at slæbe eleverne igennem bogen fra side 1 til 200? Til gengæld så jeg mange matematikinteresserede børn, der sagde ”Yes, nu skal vi have matematik!” og jeg bemærkede, at motivationen langt hen af vejen drev børnene igennem de 90 minutters lektioner.

Seminariet er jo virkelighedsnært!

Vi læser om Piaget, der mener, at elever ikke er i stand til at tænke abstrakt før omkring 10 års alderen og at al form for læring burde foregå i et laboratorium. Vi læser om Knud Illeris, der mener, at læring kan ses ud fra et 3 dimensionalt samspil mellem det kognitive, det sociale samspil og det psykologiske perspektiv. Vi læser om Vygotskij og Høines, som taler meget om sprogets betydning og Marianne Hedegaard, som derfor opfordrer til gruppearbejde, fordi det er vejen til italesættelse hos den enkelte elev. Vi læser om Ole Løw og den systemiske tankegang, og gentagne gange hører vi om motivationens betydning hos en elev. Vi læser om Howard Gardners definition af forskellige intelligenser og på kurset Praktisk Musisk, lærer vi om brugen af rummet, lyden og elevernes sanser generelt. Mens jeg observerede i Norge, kunne jeg gentagne gange vinge af ud fra de mange teorier, som jeg har læst. Jeg har set eleverne snakke matematik, konstruere matematik, forstå matematikken, bliver anerkendt for forskellige måder at tænke på, være motiveret af gruppearbejde, og have lyst til at lære. Jeg så hyggelige klasseværelser, der var pyntet med såvel faglighed og social adfærdstræning. Jeg er så glad for, at jeg ikke længere skal hoppe på udsagnet om, at "Det man lærer på seminariet er bare så virkelighedsfjernt!"

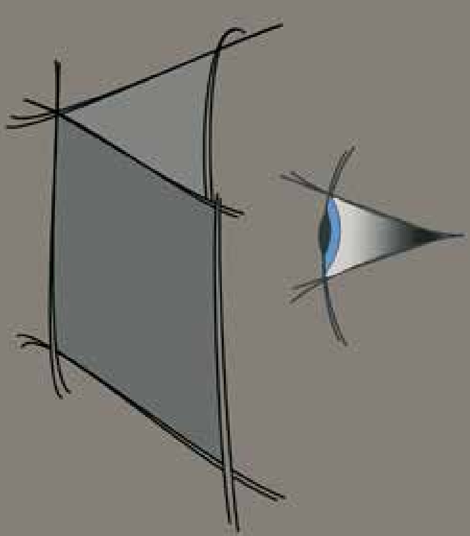
Både Olav Lunde og Tone Dalvang henviste til flere danske teorier, som de tog ved lære af i Norge. Eksempelvis var Olav Lunde meget betaget af vores Pernille Pind, som han lader sig inspirere af i forhold til matematikvanskeligheder. Yderligere var både navnet KOM-rapporten og begrebet Undersøgelseslandskab noget nyt og banebrydende i Norge. Så bliver man da stolt af at gå på seminariet, når man på en studietur kan bidrage med noget, som man hidtil har anset som almen viden for en matematiklærer.

Det var det hele værd!

I de 12 dage jeg var i Norge, mødte jeg en række gæstfri og imødekommende lærere og forskere, og jeg så kompetente lærere praktisere teorierne i virkeligheden, så hvor er jeg er glad for, at jeg valgte, at bruge både tid og penge på en sådan rejse til Norge. Men turen hang på et tidspunkt i en meget tynd tråd, da stipendiet fra NordPlus Midler, der oprindeligt skulle dække udgifter til ophold og rejse, var blæst meget stort op og i stedet viste sig at være et minimalt tilskud. Det gik desværre først op for mig, da turen var planlagt. Jeg havde så valget mellem at aflyse eller gennemføre rejsen. Jeg valgte i første omgang, at korte turen ned til Kristiansand-området, men blev reddet på målstregen af Marta Vassbø, som tilbød mig logi i Sandnes og kost i form af rensdyr og laks. Og fordi jeg havde min cykel med til at cykle op og ned af fjeldene, samt levede af Nutella madder og nudler på Budget Hotel i Kristiansand, kunne jeg holde prisen på ca. 7000 kr. + en ærbødigst taknemmelig tanke til Marta.

Og i dag kan jeg jo så sige "heldigvis," for selvom jeg for 4 måneder siden efter endt matematikeksamen følte mig klar til at varetage matematikundervisningen, så føler jeg mig i dag MEGET mere klar til at påtage mig det store ansvar, det er at føre en flok forskelligheder gennem åbenbaringerne i den matematiske verden.

Bokomtale



Lisa Lorentzen: *hva er MATEMATIKK*
Universitetsforlaget 2012
139 sider
Pris 179,–
ISBN 978-82-15-02042-6

Denne boken hører til en serie der forlaget har utfordret fagformidlere til å gi svar på det krevende spørsmålet om hva deres fagfelt er, i et lite format. Serien har mye til felles i form og størrelse med serien «A very Short Introduction» fra Oxford University Press, men denne boken har en innfallsvinkel som i hvert fall fanger min interesse i større grad. Fra engelsk kjenner vi også bøker som «What Is Mathematics, Really» av Reuben Hersh og «The Mathematical Experience» og «Descarte's Dream» av Philip Davis og Reuben Hersh, bøker som hver på sin måte prøver å si noe om hva matematikk egentlig er for noe. På tilsvarende måte gir Lorentzen i innledningen til sin bok en beskrivelse av matematikk som noe som ligger dypt forankret i våre sinn, og av hvordan dette kommer til uttrykk i vitenskapen, vår kultur og vårt språk.

Bokens struktur henger sammen med dens originale innfallsvinkel, da kapitlene ikke er organisert etter matematikkens emner, men beskriver ulike sider ved matematikkens vesen. Kapitlene heter derfor «Matematikk og tall», «Matematikk og verden», «Matematikk og struktur», «Matematikk og sannhet», «Matematikk og uendelighet», og «Matematikk og skjønnhet». Felles for alle kapitlene er at de gir en interessant historisk innføring i de emnene som beskrives. Kapittelet om «Matematikk og tall» tar oss med tilbake til de første nedtegnelsene av tall vi kjenner, med både additive systemer og de første posisjonssystemene. I antikkens Hellas ble tallenes egenskaper studert, noe som blant annet førte til en del dilemmaer da man fant tall og størrelser som ikke stemte overens med grekernes definisjon av tall, nemlig at alle tall var rasjonale.

Kapittelet «Matematikk og verden» handler om modeller og modellering, fra behovet for å beskrive det eksisterende ved å måle jordstykker eller å tegne kart, til å modellere klima eller organismers vekst. Eksponentialfunksjonen kalles i denne sammenheng for en uhyggelig funksjon, og en amerikansk professor siteres på at «den største feilen ved den menneskelige rasen er vår manglende evne til å forstå eksponentialfunksjonen!»

Forfatteren sier at dersom hun skulle bruke kun ett ord til å beskrive matematikk, så måtte det bli *struktur*. Kapittelet om «Matematikk og struktur» trekker inn problemstillinger som kan løses ved bruk av vektorer, matriser og grafteori, men vi blir også vist hvor vakre mønstre man kan få ved ulike tesselleringer. I kapittelet om

«Matematikk og sannhet» er Euklid og verket «Elementene» sentrale. Matematiske sannheter er evige og uangripelige, men det er viktig å ha klart for seg at de matematiske sannheter gjelder innenfor gitte remmer. Dersom man for eksempel tenker seg en trekant på en kule i stedet for på et plan, så er vinkelsummen større enn 180 grader, og Euklids parallellpostulat gjelder heller ikke på en kule. Det stilles også et betimelig spørsmål om hvilke krav man skal kunne stille for å akseptere at en hypotese er tilstrekkelig bevist. Er for eksempel firefargeteoremet strengt tatt bevist, eller er vi bare blitt overbevist om at det sannsynligvis må være sant? De tre klassiske problemene med sirkelens kvadratur, kubens fordobling og vinkelens tredeling kunne godt ha fått litt større plass i boken. Det er jo bevist at alle tre er uløselige, selv om det fortsatt fra tid til annen dukker opp fantasifulle forslag til løsninger, men disse tre problemene var motivasjonen til mye av arbeidet til antikkens matematikere.

«Matematikk og uendeligheten» er ikke bare spennende. Det er også ubegripelig og uhåndterlig for mange, spesielt når man begynner å se på flere typer uendelighet. Størrelser kan være både uendelig store og uendelig små, og gjennom matematikkens historie har det vært ulike tilnærminger til disse begrepene. I antikken ble uendelighet brukt i en betydning som vi ville kalle potensiell uendelighet – man kunne alltid gå et skritt videre. Når man fikk stringente definisjoner av begreper som grenseverdi, kunne man med fornuft snakke om hastigheten til et legeme ved et gitt tidspunkt. Det er også interessant at store oppdagelser i matematikken noen ganger gjøres av flere matematikere samtidig, uten at de kjenner til hverandre. Et velkjent eksempel i så måte er Newtons og Leibnitz' samtidige oppdagelse av det som ble til teorien om integrasjon og derivasjon. Matematiske oppdagelser kommer ofte når tiden er inne, men det blir ofte plantet noen idéer tidligere. Gode eksempler på det er Cardanos beskrivelse fra 1500-tallet av det som senere ble til teorien om komplekse tall, og Arkimedes' glemte og gjenoppdagede verk «Metoden», som beskriver noe som kan kalles en forløper til integrasjon.

Det kjekkeste kapittelet er det om «Matematikk og skjønnhet», der selvfølgelig den engelske matematikeren G.H. Hardy og hans bok «A Mathematician's Apology» står sentralt. Det er etter min mening umulig å skrive en bok om matematikk uten å vise til Hardy. Som en kuriositet kan det nevnes at boken om matematikk i serien «A very Short Introduction» ikke har med Hardy på referanselisten. Hardy sammenligner matematikkens strukturer med malerens og poetens strukturer, og han sier at «skjønnhet er det viktigste kravet – der er ikke rom for stygg matematikk i denne verden». Lorentzen lurer på om ikke Hardy her tar for hardt i, men det tror jeg ikke Hardy gjorde. Skjønnheten ligger både i det visuelle, det verbale og i strukturene. Som et eksempel på den strukturelle skjønnhet brukes Pythagoras' læresetning og et bevis på denne. Nå må det kunne innvendes at akkurat dette beviset ikke er det mest metoderene, i og med at det bruker algebraiske metoder i beviset av en geometrisk læresetning, men uansett, beviset er elegant.

Forfatteren sier et sted at hun skutter seg når hun hører matematikk omtalt som et metodefag, et fag som utelukkende skal fungere som verktøy for andre fag. Med denne boken fjerner hun eventuell tvil. Boken er skrevet for ikkematematikere, men er til glede for alle. Noe av det som gjør boken troverdig så vel som lesverdig, er de lange linjene som blir trukket til de ulike begrepenes opprinnelse i matematikkens historie.

Man trenger ikke så mye kunnskap i matematikk for å ha glede av boken, det eneste man trenger er interesse for faget.

Andreas Christiansen

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Realfagbygget A4, NTNU
7491 Trondheim
Telefon: +47 73 55 11 42
Faks: +47 73 55 11 40
merete.lysberg@matematikksenteret.no

NyGIV

Svein H. Torkildsen

Fra nettsiden til UDIR:

> Ny GIV betyr at fleire elevar skal bestå og gjennomføre vidaregåande opplæring. Statistikkprosjektet i Ny GIV utviklar og legg til rette eit felles statistikkgrunnlag og indikatorar som viser kor vi står i forhold til dei måla som er satt.
>
> Ny GIV er eit tre-årig prosjekt som har som mål å etablere eit varig samarbeid mellom stat, fylkeskommunar og kommunar for å betre føresetnadane til elevane for å fullføre og bestå vidaregåande opplæring.

Kunnskapsminister Kristin Halvorsen har engasjert seg sterkt i dette prosjektet og hun har hatt innlegg på et par av samlingene, seinest tidlig i desember i fjor. Den treårige prosjektperioden er nå ved veis ende. Departementet har etablert et gjennomføringsbarometer for å registrere effekten av prosjektet. Målet er at 75 % av årskullet som begynte videregående skole i 2010 skal ha fullført videregående skole i løpet av fem år, altså 2015. Resultatet vil foreligge først i 2016. To tiltak er satt inn for å hindre frafall:

- Sosialt oppfølgingsprogram
- Lærerskolering i Ny GIV

Alle videregående skoler og grunnskoler med elever på ungdomstrinnet har fått tilbud om en fem-dagers skolering av en matematikklærer og en norsklærer. Matematikksenteret har hatt ansvar for skolering av matematikklærerne.

Hovedvekt på 10. trinn

De elevene som får tilbud om matematikkopplæring gjennom Ny GIV siste del av 10. trinn har i løpet av skoletiden ikke fått med seg det mest elementære. Tallforståelsen er ikke godt

utviklet hos de fleste, og selv enkle regneoperasjoner er vanskelig å utføre med standard algoritmer. Et typisk problem består da i at elevene ikke har noen alternativ måte å angripe beregningene på. Vi har derfor i skoleringen lagt vekt på varierte representasjoner. Som kursholdere har vi erfart at mange lærere i ungdomsskolen og videregående skole ikke har mye erfaring med slike tilnærminger til matematikken. Kanskje ikke så rart når de fleste problemstillingene vi tar for oss i skoleringen er hentet fra fagstoff som det forventes at elevene skal ha kontroll på fra mellomtrinnet.

Er det håp?

Har denne intensive opplæringen helt på tampen av ungdomsskolen noen betydning? Resultatene varierer, og mange lærere sliter med å få elevene «koblet på» selv om de får dette tilbudet i liten gruppe. Men tiltaket har hatt stor betydning for enkeltelever. Som kursholdere setter vi pris på å høre lærere fortelle at de har tatt i bruk metodene vi har presentert på kursene og fått gode resultater med det. Plutselig får elevene til å utføre divisjoner som de aldri før har behersket. Og en lærer fortalte om elever som grep fatt i «arealmodellen» for multiplikasjon og plutselig fikk kontroll på multiplikasjon av to tosifrede tall. Da de følte seg trygge på det bad om å få prøve seg på tresifrede tall, og når systemet var forstått ble heller ikke dette noen utfordring. Denne læreren våget så å gi elevene et produkt og ba elevene finne faktorer som passet til produktet. For oss som har erfaring med elever er det ikke vanskelig å forestille seg den gleden det er for elever som kjenner at de nå mestrer. Og denne mestringsfølelsen gir også mot til å gi seg i kast med problemer der de i utgangspunktet ikke har noen løsningsmetode. Ny GIV har ført til at elever som nærmest har gitt opp får nytt håp før de tar fatt på videregående skole. Erfaringen fra Ny GIV viser med all ønskelig tydelighet at det også er behov for en innsats mot mellomtrinnet, og det ser heldigvis ut til at det er noe på gang også der.

I utgangspunktet var det nok et håp om at skoleringen av Ny GIV-lærere skulle resultere

i en spredning til resten av kollegiet. Det har nok ikke slått til, og vi som har erfaring med etterutdanning er ikke overrasket over det. I så måte er nok den videre satsingen på skolebasert kompetanseheving et bedre tiltak. For vårt fags vedkommende vil det dreie seg om en satsing på regning i alle fag. I denne sammenheng må det understrekes at utvikling av matematikkundervisningen ved skolene må inngå som et element i denne satsingen. Eller går det an å ha en god regneundervisning på en skole uten at en også har en god matematikkundervisning?

Takk til deltakerne!

Dette har vært et ressurskrevende, men hyggelig

oppdrag for Matematikksenteret. Vi har møtt mange engasjerte og positive lærere. Departementet og Utdanningsdirektoratet har sørget for gode rammer rundt arrangementene. Både kursholdere og deltakere er blitt ivaretatt på en forbilledlig måte som kan gjerne være en ny standard for etterutdanning av lærere.

Film om dokumentasjon

En av de siste samlingene for matematikklærere ble filmet i sin helhet av filmmiljøet på Høgskolen i Lillehammer. Filmen vil gi et bilde av hvordan dagene på kurs har artet seg. Filmteamet har lagt vekt på å få formidlet både stemningen og det faglige innholdet, og filmen vil bli lagt på nettsiden til både Matematikksenteret og Senter for livslang læring, Høgskolen i Lillehammer. Fotografiene er utlånt fra fotograf Andrew Koonce.

Regnesatsing på ungdomstrinnet

Lill Sørensen

Skolebasert satsing på klasseledelse, lesing, skriving og regning

Utdanningsdirektoratet har utarbeidet Rammeverk for skolebasert kompetanseutvikling 2012-2017 som bygger på Strategi for ungdomstrinnet – motivasjon og mestring for bedre læring. Rammeverket informerer om nasjonale rammer, prinsipper, roller og organisering av skolebasert kompetanseutvikling i klasseledelse, regning og lesing. I tillegg presenteres i rammeverket definisjoner og beskrivelser av god klasseledelse, regning, lesing og vurdering for læring.

Rammeverket skal ligge til grunn for en pilotering av skolebasert kompetanseutvikling skoleåret 2012-13. Piloteringen vil omfatte et utvalg skoleeiere, skoler, universiteter og høyskoler, og den vil bli evaluert av NTNU.

Erfaringene fra piloteringen vil bli brukt til å justere rammeverket slik at det foreligger i endelig versjon skoleåret 2013-14. Endelig versjon vil også omtale skriving som nasjonalt prioritert område. Høsten 2013 og fram til 2018 vil det legges til rette for skolebasert kompetanseutvikling for alle skoler med ungdomstrinn.

Bakgrunn

Evaluering av LK06 viser at regning ses på som vanskelig å integrere i undervisningen i andre fag enn matematikk (rapport, evaluering av kunnskapsløftet, Aasen m. fl 2012). Det finnes også få tegn på planlegging for tydelig progresjon i hvordan elevene tilegner seg grunnleggende ferdigheter (Sammenheng mellom undervisning og læring, Nordlandsforskningen).

I endringsforslagene til LK06 er det utarbeidet mer detaljert beskrivelse av grunnleggende ferdighet i de ulike fagene.

Bakgrunnsdokumenter

Matematikksenteret har i samarbeid med fagfolk fra universitets- og høgskolesektoren utarbeidet bakgrunnsdokument på oppdrag fra Utdanningsdirektoratet. Disse dokumentene er publisert både på udir.no og på matematikksenterets hjemmesider. I første omgang skulle dette være til hjelp i piloten for universitet og høyskoler, og vil i neste omgang også kunne brukes direkte av alle skoler med ungdomstrinn.

Skolebasert kompetanseutvikling

Dette er en skolebasert kompetanseutvikling og skal ideelt sett møte et behov som den enkelte skole har. Det skal være en skolebasert etterutdanning, og det vil si at kompetansen i hele kollegiet skal økes og utvikles. Det er ønskelig at skolene skal kunne utvikle en ny og bedre praksis, og at endringene skal integreres i det daglige arbeidet slik at elevenes motivasjon og mestring fører til bedre læring.

Det er høyskoler og universitet som har fått oppdraget med å bistå skolene i dette arbeidet, og de kan velge å trekke inn kompetanse fra de nasjonale sentrene. Skolene får tilbud om veiledning og bistand i tre semester, men det presiseres at det er skolen som er ansvarlig for denne etterutdanningen. Rektor/skoleleder vil være den som leder utviklingsarbeidet, og alle lærerne vil være deltakere i denne kompetansehevingen.

Dette vil for noen være en ny måte å tenke skoleutvikling på, mens andre har erfaring med utviklingsarbeid der hele kollegiet deltar.

Skolene skal ha gjennomført en prosess der de har analysert egen virksomhet og kommet frem til hvilket område de ønsker å satse på. Noen skoler starter opp allerede til høsten og andre velger å starte neste høst. I enkelte kommuner har man valgt å ha felles satsingsområde, men uansett er det viktig at prioriteringene er godt forankret på den enkelte skole.

Tilgjengelige ressurser

Matematikksenteret jobber med å komme med eksempler på god praksis i regning, og konkrete eksempler på hvordan regning er en del av fagstoffet i alle fag. Disse eksemplene vil være tilgjengelig for alle involverte og kan brukes på ulike måter. Den enkelte lærer kan finne eksemplene på udir.no og de kan brukes av skoleledere som introduksjon til felles arbeid.

Et av undervisningsoppleggene som vi ønsker å utvikle videre er en idé som lærere ved Løpsmark skole presenterte etter ei arbeidsøkt med regning i alle fag. Dette er en 1–10-skole og de så for seg progresjon i grunnleggende ferdigheter synliggjort gjennom en idrettsdag for alle klasser. Kompetansemålene fra LK06 kroppsøving kombinert med en progresjon av den grunnleggende ferdigheten å regne i kroppsøving.

Det kan se ut som om det har vært lite fokus på den grunnleggende ferdighet å regne, og vi ser frem til at mange skoler satser på dette og bidrar med kreative idéer til hvordan dette kan gjøres.

Matematikkmandag

Svein H. Torkildsen

Matematikksenterets nettside er i stadig utvikling.

På matematikksenteret.no finner du nyheter om matematikkundervisningen i Norge, undervisningsopplegg, publikasjoner og konkurranser. Nytt av året er en ukentlig blogg: Matematikkmandag.

Vi er mange som har hatt fornøyelsen av å høre Mike Naylor i ulike sammenhenger. Denne kreative matematikeren og enestående formidleren er et oppkomme av idéer som ofte har et fornøyelig skråblikk på matematikken, dens finurligheter og anvendelser.

Mike er nå godt i gang med sin matematikkblogg. Vi gjengir her den første han skrev.

Begynn uken med Mikes matematikkblogg. Bedre start på uka får du neppe!

2013 og tallsystemets overraskelser

Skrevet av Mike Naylor, 7. januar 2013

Velkommen til Matematikkmandag!

Happy 2013 og velkommen til Matematikkmandag, vår ukentlige blogg for lærere, elever og alle som liker matematikk og morsomme idéer.

2013 er et ganske tøft tall. Hvis vi skriver det i 13-tallsystemet får vi et interessant resultat. Husk at i posisjonssystemer har hvert siffer forskjellig verdi avhengig av posisjonen. I ti-tallsystemet, har sifrene verdier ganger 1, 10, 100, 1000, osv. (fra høyre til venstre). Alle posisjoner er potens av 10 (10^0, 10^1, 10^2, 10^3, osv). I andre tallsystemer er verdien avhengig av potenser av et annet grunntall. 2013 skrives for eksempel i 8-tallsystemet som 3735 fordi 2013 = $3 \times (8^3) + 7 \times (8^2) + 3 \times (8^1) + 5 \times (8^0)$. Vi skriver navnet på grunntallet i parentes etter tallene for å forklare: 3735 (åtte) = 2013 (ti).

2	**0**	**1**	**3**	**(ti)**
$\times 10^3$	$\times 10^2$	$\times 10^1$	$\times 10^0$	
(1000)	(100)	(10)	(1)	
= 2000	= 0	= 10	= 3	
2000	**+ 0**	**+ 10**	**+ 3 = 2013**	

3	**7**	**3**	**5**	**(åtte)**
$\times 8^3$	$\times 8^2$	$\times 8^1$	$\times 8^0$	
(512)	(64)	(8)	(1)	
= 1536	= 448	= 24	= 5	
1536	**+ 448**	**+ 24**	**+ 5 = 2013**	

Når grunntallet er større enn ti, må vi bruke flere enn ti sifre. Vanligvis bruker vi bokstaver: A = ti, B = elleve, C = tolv, osv. I 13-tallsystemet, for eksempel, teller vi:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C,
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1A, 1B, 1C,
20, 21, 22, …

Legg merk til at 10 (tretten) betyr at vi har 1 trettener og 0 enere, så 10 (tretten) = 13 (ti).

1B (tretten) betyr at vi har en tretten og tolv enere, så det er lik 25 (ti).

En god overraskelse med 2013

Når vi skriver 2013 (ti) i base 13, så får vi en veldig fin representasjon:

2013 i 13-tallsystemet = BBB

Fint! Kan du vise at det er riktig? (Husk at B er lik elleve). Det er også et godt problem for elever å prøve å oversette fra 2013 (ti) til 13-tallsystemet og se om de kan finne svaret BBB!

Happy BBB til alle!

Det binære tallsystemet

Det enkleste posisjonssystemet er 2-tallsystemet, eller det binære tallsystemet. Datamaskiner bruker 2-tallsystem internt fordi magnetiske brytere kan være på eller av, da er på = 1 og av = 0, to sifre. Plassverdi er 1, 2, 4, 8, 16, osv., så teller vi 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, osv. De første 12 tallene er vist nedenfor:

8er	4er	2er	1er		Verdi (10-tall-systemet)
			1	=	1
		1	0	=	2
		1	1	=	3
	1	0	0	=	4
	1	0	1	=	5
	1	1	0	=	6
	1	1	1	=	7
1	0	0	0	=	8
1	0	0	1	=	9
1	0	1	0	=	10
1	0	1	1	=	11
1	1	0	0	=	12

Det er mange spennende mønstre i binære tall. Bildene på neste side viser noen idéer med geometriske mønstre.

Det trinære tallsystem

I 3-tallsystemet bruker vi sifrene 0, 1 og 2, og plassverdiene er 1, 3, 9, 27, 81, osv.

Alle er potenser av 3 (3^0, 3^1, 3^2, osv.). Så teller vi: 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, … Mønstre er også fine i 3-tallsystem. På neste side finner du et eksempel.

3-redusert tallsystem

Her er et merkelig og morsomt tallsystem.

Vi bruker 3-tallsystemets plassverdier (1, 3, 9, 27, 81, osv.). I stedet for å bruke sifrene 0, 1 og 2, bruker vi '–', '0' og '+'. De har verdien –1, 0 og +1. Vi skriver for eksempel 7 slik: '+ – +'. Det betyr +1 ni, –1 tre, og +1 en: 9 – 3 + 1 = 7.

Det er morsomt å prøve å skrive tallene fra

0 til 27 og videre. Det er også kjempeartig at vi kan skrive negative tall uten ekstra tegn! '– + 0' er for eksempel –6. Kan du se hvorfor?

Ukens oppgaver

(1) Skriv tallene fra 0 til 25 i det 3-reduserte tallsystemet ved bruk av sifrene '–', '0' og '+'.
(2) Skriv så tallene fra –1 til –25 i dette systemet.
(3) Hvilke mønstre og symmetrier finner du?

Fargete trinære tall (av Stig Atle Myhre)

Binære tall 0-15 laget i tre

Binære tall 0-127 (128 shades of gray)

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
v/Randi Håpnes
NTNU, Realfagbygget
7491 Trondheim

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det overordnede målet for Landslaget for matematikk i skolen er å heve kvaliteten på matematikkundervisningen i grunnskolen, den videregående skole og på universitet/høyskole.

Landslaget skal stimulere til kontakt og samarbeid mellom lærere på ulike utdanningsnivåer og mellom lærere og andre som er opptatt av matematikk.

Styret for LAMIS

Leder
Anders Sanne, Trondheim
Barnehage/førskole
Else H. Devold, Oslo
Barnetrinnet
Åge Rygsether, Nedre-Eiker
Ungdomstrinnet
Gerd Nilsen, Hedmark
Videregående skole
Anne-Mari Jensen, Meløy
Høgskole/universitet
Marianne Maugesten, Østfold
Varamedlemmer
1. Grete Tofteberg, Østfold
2. Trine S. Forfang, Vestfold

Medlemskontingent

380 kr for enkeltmedlem m/Tangenten
150 kr for husstands-medlemmer
150 kr for studenter m/Tangenten
760 kr for skoler/institusjoner m/Tangenten

Organisasjonssekretær

Gro Berg
org.sek@lamis.no
41562324

Husk
LAMIS sommerkurs
i Trondheim
7.–9. august 2013

Lederen har ordet

Anders Sanne

LAMIS sommerkurs er Norges viktigste møteplass for alle som er opptatt av god matematikkundervisning i barnehage, i grunnskole, i den videregående skole og på universitet/høyskole. På sommerkurset møtes lærere, forskere, lærerutdannere og læremiddelprodusenter for å lære nytt, utveksle erfaringer og knytte kontakter. Det er nå klart for påmelding til sommerkurset i Trondheim 7.–9. august, og jeg håper å få ønske nettopp deg velkommen til årets sommerkurs! Påmeldingsskjema finner du på www.lamis.no.

I forbindelse med sommerkurset i august holdes det årsmøte i LAMIS med valg av nytt styre og ny leder. Jeg har sittet i sentralstyret i fem år, de siste to årene som leder. Nå har jeg behov for å tre til side, og jeg har derfor takket nei til gjenvalg. I løpet av mine fem år i styret har jeg hatt gleden av å jobbe tett sammen med dyktige og engasjerte LAMIS-folk fra hele landet. Særlig har det vært en fornøyelse å samarbeide med LAMIS' organisasjonssekretær og de andre i sentralstyret.

Takk for meg!

(fortsatt fra side 69)

laget av Lamis Østfold, og er sendt ut til allle medlemmer av Lamis. Savner du den nynorske versjonen? Den er i år å finne på nettet. Damene mente vi hadde sittet lenge nok på rompa denne helgen, så forsamlingen ble raskt satt i aktivitet.

Her var det bare å svinge seg rundt med de små grå. Vi ble utfordret i rebusløp, geometrisk tegning, gangestafett og plassverdistafett. En morsom og kreativ slutt på en samling preget av stort faglig utbytte, hyggelig samvær og en flott gjeng med mennesker med matematikk i fokus.

Etter den offisielle kåringen av stafettvinnerne gjenstod bare å pakke sekken og sette nesa hjemover. Etter en super helg var det mange inntrykk som skulle bearbeides og idéer som skulle settes i verk. Ønsker alle lokallagene lykke til med videre arbeid utover mot sommeren, så sees vi forhåpentligvis igjen i Trondheim til sommeren.

Sommerkurset 2013

Svein H. Torkildsen

Du har vel satt av dagene 7.-9. august i år?

Da er det tid for årets sommerkurs som i år er lagt til Trondheim. Vi har i år valgt å la sommerkurset gå over tre dager med oppstart onsdag 7. og avslutning fredag 9. august. Vi har tidligere presentert foredragsholderne Birgit Pepin og Oliv Klingenberg.

Denne gangen kan vi røpe **at Mike Naylor** og **Carl Haakon Waadeland** skal ha åpningsforedraget. Mike er kanskje kjent for mange fra før. Han har alltid interessante ting å berette, og det skjer med en formidlingsevne av de sjeldne. Det får vi et klart inntrykk av gjennom Matematikk-mandag, Mikes blogg på Matematikksenterets hjemmeside. Haakon har tidligere bidradd på sommerkurs til LAMIS. For de som ikke kjenner Haakon, legger vi til noen linjer fra Wikipedia: Carl Haakon Waadeland er en norsk musikkteoretiker og jazzmusiker (slagverk), kjent fra flere band og utgivelser. Han var en av drivkreftene bak Jazzlinja (NTNU) som han også har ledet. Han har hovedfag i matematikk og doktorgrad fra Institutt for musikk (NTNU), der han i dag er professor med fokus på rytmikk, swing, musikkframføring (performologi), rytme og bevegelse. Vi kan altså by på en musiker med hovedfag i matematikk, og en matematiker som har livnært seg som sjonglør. Gled dere!

Geir Ellingsrud er professor ved Matematisk institutt på Universitetet i Oslo. Geir er en dyktig matematiker og en fremragende formidler. Han har blant annet vært redaktør av det populærvitenskapelige tidsskriftet NORMAT i fire år.

I hver parallell byr vi på tema som er aktuelle for lærere på alle nivå. Grethe Solbakk tar for seg det aktuelle temaet Matteangst som hun vil belyse gjennom flere paralleller, både som foredrag og verksted. Anne Nakken kaster lys over små barns arbeid med romforståelse. Inger-Lise Risøys verksted dreier seg om hvordan elever på barnetrinnet kan få matematiske utfordringer gjennom en pose Non Stop. Gerd Nilsen problematiserer ungdomsskoleelevers forståelse av formler og den rutinerte læreren fra videregående skole, Anne-Mari Jensen vil sørge for at det også blir noe for lærere på dette nivået.

Vi har allerede læremiddelprodusenter på plass. En parallellsesjon er satt av til utstillerne slik at vi kan få god anledning til å et innblikk i hva de har å tilby.

Ta en tur innom hjemmesiden til LAMIS der du finner all nødvendig informasjon, også påmeldingsskjema til årets sommerkurs.

Lokallagsseminar 2013

Hilde Eik Svendsen

2.–3. februar var alle lokallagene i det ganske land samlet på Gardermoen for å tilbringe helgen i matematikkens ånd.

Vi ble ønsket velkommen av Anders Sanne, leder av Lamis, han gav oss praktisk informasjon om de kommende dagene, tider og deltagere. Tidlig en lørdags morgen ble de som enda ikke hadde våknet helt utfordret inn i den logiske tankegang av Gro sine to logiske nøtter. Førstemann til løsningene ble fristet med premie, heder og ære. Dette gjorde sitt til at gjesteforeleserne ble møtt av en gjeng våkne og ivrige deltagere.

Helgens faglige påfyll var viet Geogebra. Vi var så heldige å ha besøk av Rikke Teglskov og Bo Kristensen, som hadde kommet hele veien fra Danmark for å dele sine erfaringer og gi oss en innføring i emnet.

Tema startet med en felles introduksjon om Danmarks bruk av IKT på skoler og hvordan et slikt verktøy som geogebra kan være med på å øke elevers forståelse og praktiske erfaringer innen matematikkfaget.

Teglskov og Kristensen vektla hvordan Geogebra passet inn i fremtidens kompetansebehov. Våre studenter utdanner seg inn i en tid med viten som raskt foreldes. De vil møte en overflod av informasjon, mye av våre ferdigheter vil det i fremtiden være mindre bruk for. Fremtidens arbeidstagere vil måtte konkurrere mot arbeidskraft fra Kina og Øst Europa i et arbeidsmarked med behov for mindre ufaglært arbeidskraft.

Det vil derfor være viktig å utvikle meningsfull kompetanse hos våre studenter. De vil ha

behov for evner i bruk av datasystemer og regneprogrammer, en læring basert på inovasjon, nytenking og kreativitet.

Så, hvordan skal man kunne bygge opp en slik kunnskap?

Teglskov og Kristensen valgte å vektlegge det de kalte 30/70 prinsippet i undervisningen. En undervisningsøkt burde preges 30% av lærer, og 70% av elevene. I motsetning til dagens skole som ofte er boksentrert, preget av individuelt arbeid, reproduksjon av viten ofte med fokus på kvantitet i motsetning til kvalitet og preget av lærer som prater og elever som lytter. Ønsket er en skole preget av samarbeid mellom elever, der elevene selv utvikler egne strategier og der det er elevene, ikke læreren, som eier matematikken i rommet.

Hele foredraget til Rikke og Bo er å finne på snurl.com/lamis 13, eller via lenke på LAMIS sine hjemmesider. Her vil man også kunne finne linker videre til oppgaver i Geogebra, både beregnet på barne- og ungdomstrinnet. Vel verdt en titt.

Etter en bedre lunsj og en liten pust i bakken, delte forsamlingen seg mellom to verksteder. GeoGebra ble da praktisk presentert og testet ut basert på om man ønsket en titt på oppgaver rettet mot barneskole eller ungdomstrinn. En nyttig og god presentasjon, som nok fikk de fleste av oss til å teste ut og prøve mer på hjemmebane i etterkant.

For de som synes det høres interessant ut, bør det nevnes at Nordic GeoGebra network i september avholder en konferanse i København rettet mot lærere og andre interesserte.

Litt praktisk informasjon og etterlysninger avsluttet dagens økt.

Hugo Christensen etterlyste 9. og 10. trinns-lærere for et samarbeid i forbindelse med utvikling av den virtuelle matematikkskolen (se artikkel side 15 i dette bladet) fra høsten av. Han jobber med et pilotprosjekt gjennom Nasjonalt senter for IKT i utdanningen. Prosjektet baserer seg på undervisningsopplegg på nett og retter seg i denne omgang mot svakt presterende elever på 9. trinn, samt sterkt presterende elever på 10. trinn. Tema i pilotprosjektet er tall og algebra, og målet er å øke motivasjon og forståelse for emnene.

Det ble i tillegg tid til en rask presentasjon av årets sommerkurs. Årets kurs foregår i Trondhjem, og datoene det er viktig å holde av er 7.–9. august. Tema på kurset vil være «Matematikk. Praktisk, relevant, engasjerende» Her er det mye å se frem til. Følg med på www.lamis.no for mer informasjon om kurser og påmelding.

Holmboeprisen

Kjenner du en en lærer som er spesielt god i klasserommet, er utadrettet og god i kommunikasjon og fronting av matematikkfaget? Kanskje dette er en kandidat for neste års Holmboepris? Nominasjonsskjema og informasjon om prisen finner du ved å gå inn på Norsk matematikkråds sider.

Dagen ble avsluttet med en hyggelig 3-retters middag, skravling og godt selskap. Lamis-folket er på ingen måte en kjedelig gjeng å tilbringe en lørdagskveld med.

Søndagen var viet organisasjonsarbeid og presentasjon av årets matematikkdaghefte

Sentralstyret, representert av Else H. Devold, Marianne Maugesten og Anders Sanne, gikk gjennom tre høringsutkast med påfølgende kommentarer og diskusjoner. Utkastene dreier seg om: Læreplanen i matematikk, muntlig eksamen for 10. trinn

og eksamen for grunnskole og videregående opplæring. Dokumentene er å finne på utdanningsdirektoratets nettsider. Det oppfordres til å sende eventuelle uttalelser og tanker om høringene til Gro Berg, frist for innsendelse er påske. Merk emne med høring.

Samlingens siste punkt ble presentert av to blide østfolddamer, Kari Anne Bjørnø Karlsen og Monika Nordbakke. To av tre som står bak årets matematikkdaghefte. Årets hefte er

(Fortsettes side 65)

Temakveld i LAMIS Follo

Gro Fjermedal, Eva Jæger

Tradisjonen tro arrangerte Lamis Follo medlemsmøte/årsmøte i slutten av januar. Tema for disse møtene er alltid «Presentasjon av årets Matematikkdaghefte «. I år fikk vi besøk fra Østfold, og forfatterne ledet oss gjennom heftet og inspirerte oss til å gjennomføre årets matematikkdag. Disse møtene er godt besøkt, og vi ser at mange lærere synes denne kvelden gir dem gode idéer som de kan bruke både i matematikkundervisningen generelt og på matematikkdagen spesielt.

Innledningsvis gav forfatterne oss en god oversikt over oppbyggingen av hefte og hvilke tanker som lå til grunn for oppgavevalget. De fokuserte på grunnleggende ferdigheter i faget og oppgaver knyttet til kompetansemålene i matematikk på alle trinn. Videre la de vekt på oppgaver knyttet til temaet «Tren tanken» .

Kvelden startet med «Tårnblåseren» som er et spill knyttet til tall og regning. Spillet er ment som ferdighetstrening, og vi brukte til sammen tre terninger. Spillet kan lett differensieres, og man kan lett variere hvilke regnearter man vil øve på og hvor mange terninger som egner seg for formålet. Oppgaven fenget både den kvelden og også senere med elevene på skolen. Oppgaven går ut på å riste to terninger inne i en kopp og til slutt snu koppen og legge den tredje terningen på toppen av koppen og blåse den ned. Denne oppgaven gir mulighet for å bruke alle fire regningsarter avhengig av hvilket trinn den skal brukes på . Vi brukte spillet sammen med våre elever på 5. trinn og der utfordret vi dem på en kombinasjon av addisjon og multiplikasjon. De to terningen i koppen ble summert, og deretter multiplisert med den terningen som ble blåst ned. Denne oppgaven syntes elevene var veldig morsom.

Deretter fulgte «Algebraspillet» med bruk av terning som variabel. Vi brukte kort med ulike regneoppgaver tilpasset de ulike trinnene. Oppgavene fenget samtidig som de ga god trening i å regne med variabler. Et godt utgangspunkt for å skape et gryende grunnlag og forståelse for algebraregning som mange elever senere sliter med på ungdomskolen. Da kan det være godt å minne dem på at de allerede kan algebra, for de har jo spilt algebraspillet. Men her som i alle oppgaver, er den matematiske samtalen knyttet til selve oppgaven avgjørende for at læring i samhandling med andre, skal skje.

Etterpå prøvde vi oss på en «Tren tanken» oppgave med tall og algebra. De fleste hadde gjort tilsvarende oppgaver i andre fag og erfarte at det var inspirerende å bruke metoden i matematikk også. Her er jo mulighetene mange både innenfor et spesifikt emne og innenfor matematikken generelt. Heftet har mange eksempler på denne typen oppgaver, noe som igjen kan inspirere til å lage nye oppgaver seinere. Dette var også fine aktiviteter å gjøre sammen med elevene våre.

Årets hefte legger opp til noen oppgaver/leker der matematikk kombineres med fysisk aktivitet. Vi prøvde oss på «Stafett med posisjonssystemet» og «Bingostafett». Den første stafetten går ut på at laget finner/får det høyeste tallet. Hver elev skal representere en verdi: ener, tier og hundrer (og eventuelt tusener hvis en ønsker å utvide). Elevene slår terning som viser hvor mange enere, tiere og hundrere som skal hentes. Det kåres to vinnere, en for det største tallet og en for første lag i mål. En ekstra utfordring vil være å legge inn en ekstra vurdering til hver gruppe. Gruppa slår f.eks. en firer med terningen. Hvilken «verdi» ønsker gruppa å bruke: ener, tier eller hundrer? Oppgaver med fysisk aktivitet er jo ofte de oppgavene som elevene setter mest pris på. De liker å bruke kroppen samtidig som de får konkurrere sammen med andre. Oppgavene stilte utfordringer til elevene – både matematisk og samarbeidsmessig. Også her er samtalene knyttet til aktivitetene uhyre viktige – enten man tar dem sammen med aktivitetene, eller som en oppsummering senere.

«Bingostafetten» hadde mange muligheter og var godt egnet for differensiering helt fra barnehage til videregående. Enkel å bruke, lett å variere og mye god ferdighetstrening kombinert med fysisk aktivitet.

«Pizzabrøken» var en god oppgave som skapte stort engasjement. Ferdighetstrening i brøk kombinert med strategisk tenkning, inspirerte forsamlingen. Oppgaven var også fin for de eldre elevene på selve matematikkdagen. De yngste elevene måtte ha tilgang til konkreter.

Vi prøvde oss også på samarbeidsoppgaven «Figur i minnet» og tok utgangspunkt i oppgaven tilpasset mellomtrinnet hvor vi skulle tegne et hus med hage. Oppgaven var morsom og utfordrende samtidig som den stilte store krav til å huske å gi presise instruksjoner til vedkommende som skulle tegne. Det fine med oppgaven var at det var flere på gruppa som samarbeidet om å gi instruksjoner og på den måten også kunne korrigere eller supplere tidligere opplysninger. Elevene på vår skole viste om mulig enda større engasjement enn oss voksne da de skulle utføre oppgaven. På mellomtrinnet startet vi opp med oppgaven for småskoletrinnet slik at elevene fikk trening i oppgaveformen før de gikk over til oppgaven for mellomtrinnet. Denne oppgaven hadde mange detaljer, men gjennom samarbeid og «lek» er det utrolig hva vi kan få til sammen. Vi anbefaler på det varmeste denne oppgaveformen som trening av egenskaper ved geometriske figurer. Her er det bare å bruke fantasien og lage oppgaver sammen med kollegaer og elever.

Målmemory og klassifisering av geometriske figurer var også oppgaver som engasjerte. Oppgavene gir fin trening i kvalitativ gjetting av mål til vanlige gjenstander. Et tips er kanskje å ha gjenstandene liggende på et bord og gå gjennom hva som måler hva i forkant. Det er også kanskje lurt å bytte ut noen av kortene i målmemory med gjenstander som har større variasjon i selve målene hvis det er ønskelig.

En annen oppgave som vi anbefaler på det varmeste fra årets hefte er oppgavene fra Kenguruløpet. Disse oppgavene er som kjent både gode matematisk og gir passe ufordringer for mellomtrinnet. Her er det lurt at elevene arbeider sammen i par eller i små grupper. Flere av oppgavene er ganske krevende, men lar seg løse dersom man ikke gir opp med det første. I matematikk handler det jo mye om å ikke gi opp for tidlig, men å prøve og feile helt til man finner en løsning på problemet. Mange elever trenger trening i å strekke seg litt ekstra – og dette gjøres kanskje best i samhandling med kompetente jevnaldrende.

Det virket som stemningen var god og engasjementet stort gjennom hele temakvelden vår. Det er inspirerende for oss i LAMIS Follo at det kommer ca. 30 stykker på møtene våre. Tusen takk til forfatterne av årets hefte som tok seg tid til å komme til oss. Det er alltid ekstra morsomt å bli inspirert direkte fra primærkilden.

Brøkregning

Henrik Kirkegaard

En gammel matematikklærer hadde gjennom et langt liv samlet seg 11 førsteutgaver av svært sjeldne mattebøker. Han hadde lenge grublet på, hvorledes han skulle fordele disse matematikkbøkene til de 3 døtrene sine, når han engang ikke var mer … Han bestemte at eldstedatteren skulle ha halvparten, den midterste datteren skulle ha en firedel og minstedatteren skulle ha en seksdel.

Etter hvert gikk det som det måtte her i livet – en dag var den gamle matematikklæreren ikke mer. Død og borte var han … og de tre døtrene hans møttes og skulle dele disse svært sjeldne førsteutgaver. Det var ganske vanskelig å dele 11 bøker uten at måtte bruke en saks, slik at eldstedatteren fikk halvparten, den midterste datteren fikk en firedel og minstedatteren fikk en seksdel og da de var fra en god sunnmørsk familie skulle alle ha sitt, verken mer eller mindre. De diskuterte lenge frem og tilbake og kom med ulike løsningsforslag, da de alle hadde hatt en lærer på barneskolen som var spesiell opptatt av den matematiske samtale. Plutselig kom den yngste datteren på en lys idé. Hun gikk inn til naboen og lånte en ikke helt så sjelden mattebok. Nå hadde de 12 bøker og da var det mye lettere å dele.

Eldstedatteren skulle ha halvparten – det ble 6 bøker.

Den midterste datteren skulle ha firedelen – det ble 3 bøker.

Minstedatteren skulle ha seksdelen – det ble 2 bøker.

Da hadde de fordelt alle 6+3+2 = 11 bøker og den minste datteren kunne glad og fornøyd gå inn til naboen og levere boken de hadde lånt tilbake.

Snipp, snapp, snute, brøkregning er bare å nyte.