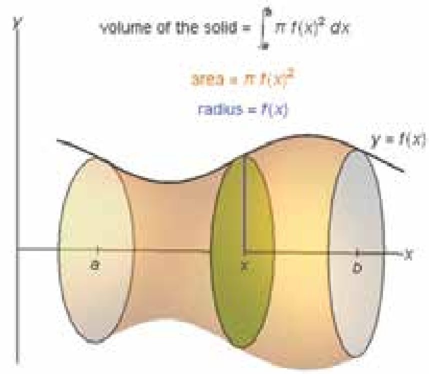
Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

Bakken

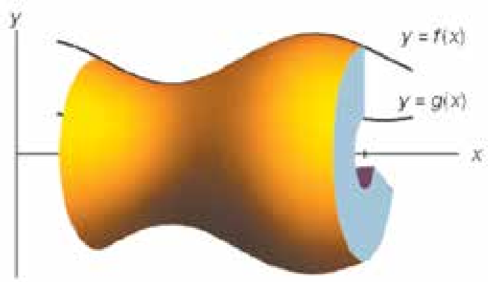
Omdreiningslegemer med 3D-printer

I løpet av de siste årene har bruk av digitale hjelpemidler blitt en stadig større del av matematikkfagene i videregående skole. Matematiske programmer, som for eksempel Geogebra, gir oss mulighet til å visualisere matematikk på en enklere og raskere måte enn tidligere, både gjennom todimensjonale og tredimensjonale representasjoner. De senere år har også 3D-printere blitt tatt i bruk i flere videregående skoler, og dette gir nye muligheter for konkretisering av matematikk. Spørsmålet er om bruk av digitale verktøy bidrar til at elevene forstår matematikk bedre?

Høsten 2015 gjennomførte jeg en fagdag i matematikk R2, der visualisering (todimensjonalt og tredimensjonalt med Geogebra) og konkretisering (med 3D-printer) hadde hovedfokus. Fagdagen var knyttet til omdreiningslegemer og volumberegning, et emne i læreplanen i matematikk R2 som etter min mening egner seg godt for visualisering og konkretisering. Jeg gjennomførte også en tilsvarende fagdag høsten 2016 som ble utgangspunkt for min masteroppgave (Bakken, 2017), med følgende problemstilling: Hvordan opplever elever at digital 3D-visualisering og konkretisering med 3D-printer bidrar til utvidet forståelse av omdreiningslegemer?



Figur 1: Animasjon av «skivemetoden», Mathematica



Figur 2: Animasjon av omdreining, Mathematica

I denne artikkelen vil jeg ha et særlig fokus på oppgavene elevene fikk, og hva som ble gjort på fagdagen. I tillegg presenterer jeg til slutt noen av elevenes tilbakemeldinger om erfarin-

Vibeke Bakken
Heggen videregående skole
vibeke.bakken@tromsfylke.no

Bakken, V. (2018). Omdreiningslegemer med 3D-printer. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(2). 2–6.

www.caspar.no/tangenten

Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

gene sine med 3D-visualisering og 3D-printing av omdreiningslegemer.

Omdreiningslegemer og digital representasjon av disse i 3D Geogebra

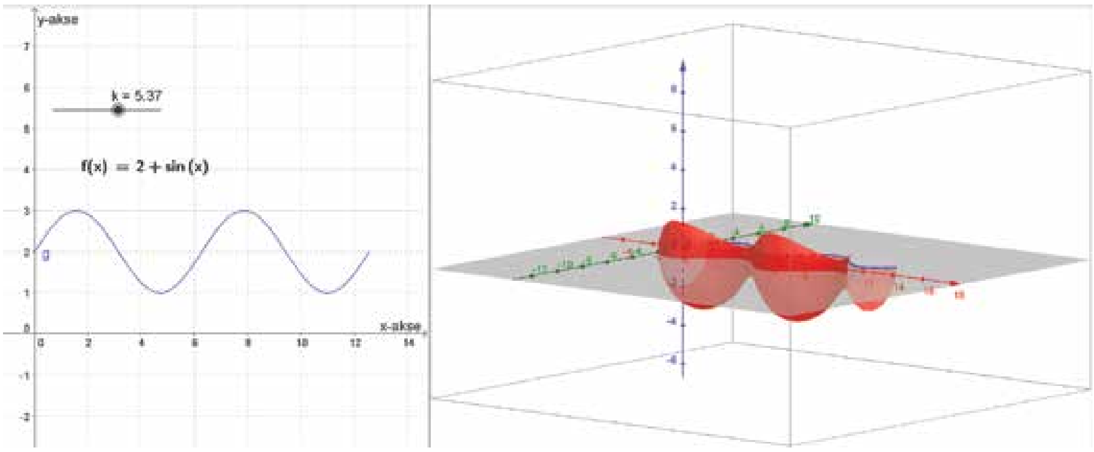
Elevene hadde før fagdagen arbeidet med temaene integrasjon, omdreiningslegemer og volumberegning. Fagdagen startet med en teoridel der disse emnene ble repetert, blant annet ved hjelp av animasjoner i Geogebra og Wolfram Mathematica, se figur 1 og figur 2.

Deretter viste jeg hvordan et omdreiningslegeme kan tegnes i 3D-Geogebra, se figur 3, og elevene prøvde det samme på sine pc-er. Vi brukte også Geogebra CAS til å beregne volumet av omdreiningslegemet som ble brukt som eksempel.

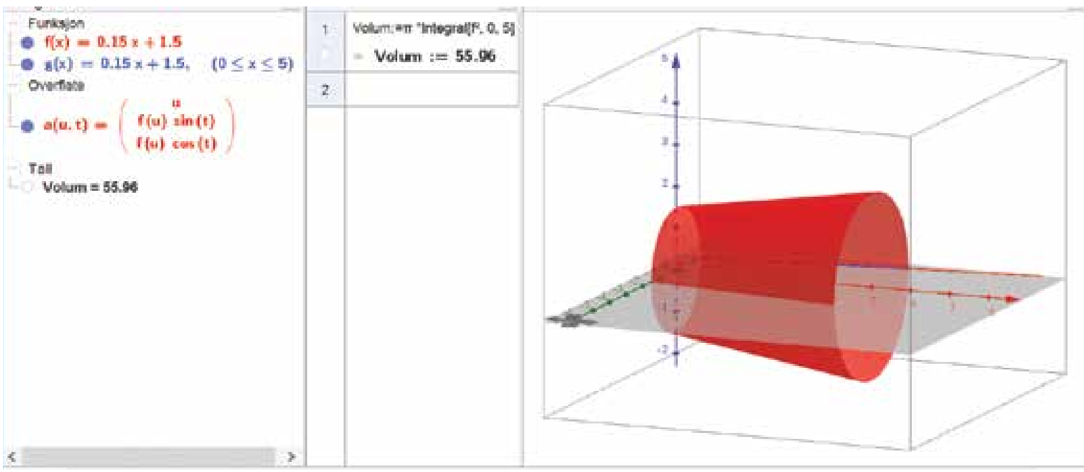
Gruppearbeid med praktisk oppgave

Elevene arbeidet i denne delen to og to for å løse en praktisk oppgave. De fikk utdelt et lite plastglass, som hadde form som en rett, avkortet kjegle, og følgende oppgave:

«Bruk det dere har lært om omdreiningslegemer, til å lage en så nøyaktig gjengivelse av plastbegeret som mulig i Geo-



Figur 3: 3D-visualisering, Geogebra



Figur 4: Modellering av plastglass, Geogebra

Bakken, V. (2018). Omdreiningslegemer med 3D-printer. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(2). 2–6.

www.caspar.no/tangenten

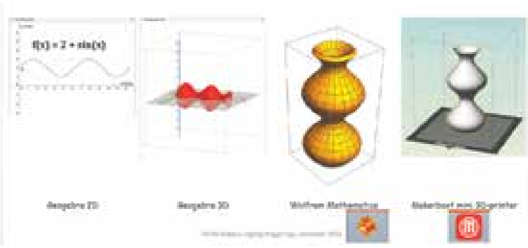
gebra 3D. Beregn deretter volum av begeret ved hjelp av CAS.»

Etter at elevene hadde utarbeidet en modell, beregnet de volumet i CAS ved hjelp av integrasjon, og til slutt ble resultatene oppsummert i fellesskap. Volumet av plastglasset ble deretter estimert ved hjelp av vann og digital vekt, og vi sammenlignet med elevenes resultat. Den modellen som viste seg å være nærmest «den tilnærmede fasiten», ble utgangspunkt for 3D-printing av plastglasset. Et eksempel på en slik modell er vist i figur 4.

Hva er en 3D-printer, og hvordan kan den brukes i matematikk?

Målet med aktivitet knyttet til 3D-printer var at elevene skulle få en viss forståelse for hva en 3D-printer er, hvordan den virker, og hvordan en 3D-printer kan brukes i matematikk. Jeg hadde hovedfokus på hvordan vi med utgangspunkt i et funksjonsuttrykk kan gå fram for å få omdreining av en graf til å bli et ferdig 3D-print. Prosessen ble gjennomgått trinn for trinn ut fra det samme eksemplet som jeg hadde gjennomgått tidligere, se figur 5.

Individuell oppgave



Figur 5: Trinn i prosessen fra matematisk funksjon til 3D-printet objekt

Den individuelle oppgaven var som følger:

- Bruk 3D-Geogebra (og de kunnskapene dere har om funksjoner og omdreiningslegemer) for å eksperimentere dere fram til et omdreiningslegeme som kan brukes som et elegant drikkebeger.
- Drikkebegeret skal ikke ha ordinær kjegleform, vær kreativ!
- Når du er fornøyd med drikkebegeret, tester vi om det kan genereres en stl-fil fra Mathematica.
- Drikkebegeret skal 3D-printes, men det tar litt tid.

Krav til det ferdige produkt:

- Det skal gå an å fylle vann i begeret når det er ferdig printet, og det skal være «tett».
- Hele objektet skal lages ved hjelp av omdreining av ett eller flere funksjonsuttrykk.

Elevene arbeidet deretter individuelt med hvert sitt produkt, men idéutveksling og samarbeid om metoder var selvfølgelig tillatt. To eksempler på ferdige produkter etter den individuelle oppgaven er vist i figur 6. Det ene drikkebegeret er laget ut fra ett funksjonsuttrykk, $f(x)$. Det andre drikkebegeret er laget ut fra tre ulike funksjonsuttrykk: $a(x)$, $b(x)$ og $h(x)$, som hver har forskjellig definisjonsområde:

$$f(x) = -\sin(e^{-x}), \quad a(x) = 1{,}8 + \sin(x),$$

$$b(x) = 1000x^3 + 2, \quad h(x) = \sin(8{,}5x)$$

Overflate[u, f(u) sin(t), f(u) cos(t), u, -1.5, 0.75, t, 0, 2π]

Overflate[u, a(u) sin(t), a(u) cos(t), u, 4.98, 9, t, 0, 2π]

Overflate[u, b(u) sin(t), b(u) cos(t), u, -0.13, 0, t, 0, 2π]

Overflate[u, h(u) sin(t), h(u) cos(t), u, 0, 5, t, 0, 2π]

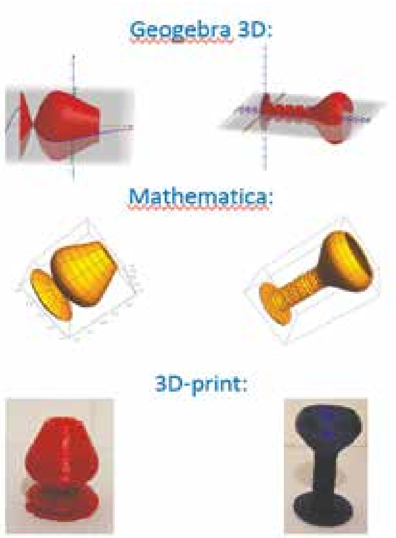
Utvidelse av oppgaven: Beregne volum av eget drikkebeger

Jeg har planlagt en utvidelse neste gang jeg skal gjennomføre fagdagen i egen R2-gruppe. I tillegg til å designe et eget drikkebeger skal elevene også beregne volum av «drikkedelen» av begeret. For å forenkle beregningen noe beregnes volum av «drikkedel fylt opp med vann», siden tykkelsen er noe som settes av 3D-printeren. Man kan imidlertid også ta hensyn til en gitt tykkelse på «veggene» dersom man ønsker det. Enhet på aksene settes til cm.

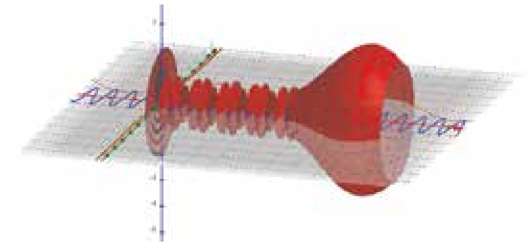
Bakken, V. (2018). Omdreiningslegemer med 3D-printer. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(2). 2–6.

www.caspar.no/tangenten

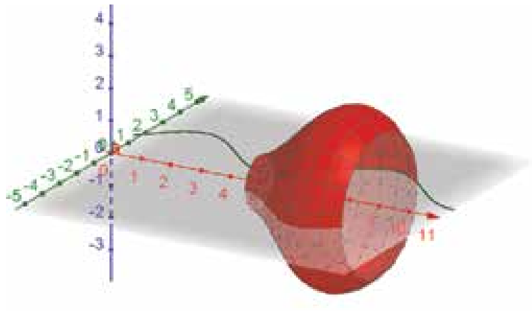
Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning



Figur 6: To elevarbeid, 3D-printede drikkebegre



Figur 7: 3D-modell av drikkebeger i Geogebra.

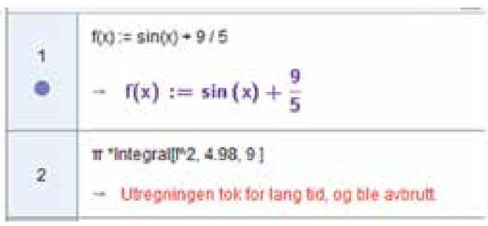


Figur 8: «Drikkedel» av drikkebeger, Geogebra

Eksempel

Drikkedelen av begeret er beskrevet av funksjonen $f(x) = 1{,}8 + \sin(x)$, med definisjonsområde fra $x = 4{,}98$ til $x = 9$. Som vist i figur 8 kan vi tegne kun denne delen i Geogebra.

Ved forsøk på å beregne volum av drikkebeger i Geogebra CAS viser det seg at også CAS har begrensninger:



Vi runder nedre grense opp til 5, og da klarer Geogebra CAS å gjennomføre beregningen:

Dersom det skal være mulig å beregne volumet, må de matematiske funksjonene ikke være for sammensatte.

Det er også mulig å gjøre deler eller hele integrasjonen manuelt hvis funksjonene ikke er for komplekse:

$$\pi\int_{4{,}98}^{9} (1{,}8+\sin(x))^2\,dx$$
$$= \pi\int_{4{,}98}^{9} (1{,}8^2 + 2\cdot 1{,}8\cdot\sin(x) + \sin(x)^2)\,dx$$

En «manuell» utfordring i forbindelse med denne integrasjonen kan være å beregne $\int (\sin(x))^2\,dx$, som er en del av volumberegningen. Vi gjør derfor denne delen separat:

$$\int (\sin(x))^2\,dx = \int\left(\frac{1}{2}(1-\cos(2x)\right)dx$$

setter $u = 2x$, og dermed $dx = \dfrac{du}{2}$

$$= \int \frac{1}{4}(1-\cos(u))\,du = \frac{1}{4}(u-\sin(u)) + C$$
$$= \frac{1}{4}(2x - \sin(2x)) + C$$

Bakken, V. (2018). Omdreiningslegemer med 3D-printer. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(2). 2–6.

www.caspar.no/tangenten

Løsningen av det opprinnelige integralet blir da

$$= \pi \cdot \left[3{,}24x + 3{,}6 \cdot (-\cos(x)) + \frac{1}{4}(2x - \sin(2x)) \right]_{4{,}98}^{9}$$

$$= \pi \cdot \left(3{,}24 \cdot 9 - 3{,}6 \cdot \cos(9) + \frac{1}{4}(2 \cdot 9 - \sin(2 \cdot 9) \right)$$

$$-(3{,}24 \cdot 4{,}98 - 3{,}6 \cdot \cos(4{,}98)$$

$$+\frac{1}{4}(2 \cdot 4{,}98 - \sin(2 \cdot 4{,}98))$$

Volum av drikkedel ≈ 60,72 cm^3.

Oppsummering

Den praktiske gjennomføringen av fagdagen var etter min mening vellykket. Det oppsatte programmet lot seg gjennomføre i løpet av 3×90 minutter, og elevene var aktive og engasjerte i arbeidet med oppgavene de fikk. Jeg observerte at elevene diskuterte mye med hverandre, både ved løsning av plastglass-oppgaven og drikkebeger-oppgaven. Elevene utvekslet erfaringer om gunstige funksjoner, og innimellom kunne jeg høre overraskede utbrudd og i flere tilfeller latter om hva endring i funksjonsuttrykk og definisjonsmengder førte til. Siden dette var del av min masteroppgave, fikk jeg tilbakemeldinger fra elevene både skriftlig og muntlig (gjennom intervjuer), og her følger noen gullkorn fra elevene:

«Dagen har vært gøy, fått et bedre bilde om hvordan omdreiningsfigurer ser ut, også fått større forståelse for noe i Geogebra og hva det kan brukes til. Det å få et konkret og håndfast eksempel på hva man regner ut, hjelper også på forståelsen.»

«Det som var veldig bra med denne fagdagen i forhold til mange andre, er muligheten for å bruke teorien i praksis. Med en 3D-printer var det kanskje lettere å skjønne noe jeg slet med litt tidligere.»

«Utrolig givende og lærerik dag. For meg har alltid matematikk handlet om det teoretiske, og det har for det meste bestått av regning og pugg, derfor ble dette for meg en helt ny måte å praktisere matematikk på.»

«Jeg har også fått mye bedre kontroll på bruken av definisjonsmengder i Geogebra.»

«Jeg syns at det var en veldig lærerik dag, det gjorde sånn at jeg lærte mye lettere, det sitter jo, jeg satt faktisk i stedet og lagde flere sånne 3D-figurer (ler litt).»

«Nå har jeg jo en funksjon i handa!» (ler)

I min studie gir elevene uttrykk for at de opplever at det å bruke digitale hjelpemidler for å visualisere og konkretisere fører til økt forståelse for hva omdreiningslegemer er. Gjennom å eksperimentere med enkle og sammensatte funksjoner ble de også tryggere i sin bruk av Geogebra. De lærte også en metode for å visualisere omdreiningsfigurer tredimensjonalt, som de har sett nytte av i flere sammenhenger. Elevene ga tilbakemeldinger om at de i løpet av fagdagen hadde gjort en ny og positiv erfaring når det gjaldt matematikk R2: Matematikk var ikke lenger bare «noe på papiret», de hadde erfart at matematikk kan bli til noe konkret. En hendelse fra fagdagen er en god bekreftelse på dette:

En elev som ikke er med på fagdagen, ser på 3D-printeren, og sier:

«Men, var det ikke matematikk-fagdag dere hadde??»

En av fagdagselevene peker på plastglasset i 3D-printeren og sier:

«Det der *er* matematikk!»

Referanser

Bakken, V. S. (2017). Visualisering og konkretisering av omdreiningslegemer ved bruk av Geogebra 3D og 3D-printer. Universitetet i Bergen. Hentet fra http://bora.uib.no/handle/1956/16373

Bakken, V. (2018). Omdreiningslegemer med 3D-printer. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(2). 2–6.

www.caspar.no/tangenten