Fojcik

Utforskande og elevsentrert geometriundervisning

I den nye læreplanen er utforsking og problemløysing eit av seks kjerneelement i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2019). Der vert utforsking omtalt som å: «leite etter mønster, finne samanhengar og diskutere seg fram til ei felles forståing» (s. 2). Utforsking vert sett som ein aktiviserande og elevsentrert læringsmåte, som både kan bli brukt når elevar jobbar åleine, og når dei samarbeider i par eller grupper. Det vert lagt vekt på læreprosessar der elevrolla og elevaktivitet står sentralt, der kvar enkelt elev bør oppmuntrast til å vere bevisst på eiga læring gjennom utforskande prosessar. Den andre delen av dette kjerneelementet handlar om problemløysing, forklart som at elevar skal danne seg ei metodesamling til bruk for å løyse «problem dei ikkje kjenner frå før» (s. 2). I denne artikkelen vel eg å definere eit problem som ei oppgåve, eit spørsmål eller ei problemstilling, som ein oppfattar problematisk fordi ho: «gets inside you; it nags and 'wants' to be resolved» (Mason & Davies, 1991, s. 4). Det å ha ynskje, vilje eller undring knytt til å forstå og løyse matematiske problem, kan vere drivkraft for elevar. I denne artikkelen undersøkjer eg om elevar som jobbar aktivt med utforskande oppgåver i matematikk, kan utvikle ei positiv haldning til faget og sjå matematikk som undring, verte nyfikne og kanskje også glede seg. Eg presenterer eit utforskande opplegg i geometri gjennomført i ei 10.-klasse og deretter utdrag av intervju med nokre elevar, for å finne ut korleis den valde læringsmåten kan verke inn på elevar sitt syn på matematikk. Eg har forska på dette i samband med masterprosjektet mitt (Fojcik, 2018) knytt til prosjektet Digital Interaktiv Matematikkundervisning (DIM), som lærarar og elevar i denne klassen deltok i. I masterstudien undersøkjer eg om elevar som jobbar med utforskande oppgåver i matematikk, klarar å utvikle ei engasjert haldning til faget og sjå på matematikk som noko meir enn rett svar med «to streker under» (Andersen, Fiskum & Rosenlund, 2018, s. 18). Problemstillinga i denne artikkelen er: *Kva haldning til matematikk kan elevar utvikle ved å lære matematikk gjennom utforskande oppgåver*?

Martyna Katarzyna Fojcik
Høgskulen i Volda
martyna.katarzyna.fojcik@hivolda.no

Inquiry-tilnærming, elevaktivitet og matematisk kompetanse

Fleire har diskutert undring, utforsking og problemløysing under eit felles omgrep: inquiry (Carlsen & Fuglestad, 2010; Jaworski, 2006; Säljö, 2013). Carlsen og Fuglestad definerer inquiry som ei haldning der elevar: «skal tilnærme seg matematikk og matematikkundervisning med undring – det vil si å stille spørs-

Dette er en fagfellevurdert artikkel på nivå 1. Tangenten er et sted der læreres og forskeres perspektiv på matematikkundervisning møtes og derfor har vi med praksisrelaterte forskningsartikler. Les mer i retningslinjene: www.caspar.no/nivaa1

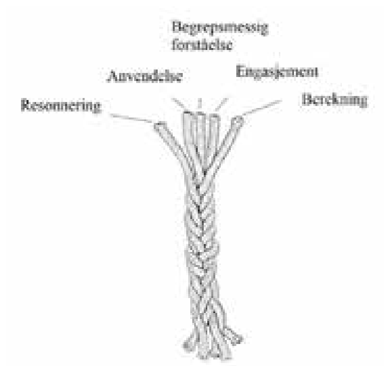
Fojcik, M. K. (2020). Utforskande og elevsentrert geometriundervisning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(2). 34-44.

www.caspar.no/tangenten

mål, undersøkje, utforske og eksperimentere med matematiske sammenhenger og didaktiske problemstillinger» (2010, s. 40). Gjennom å stille spørsmål og undersøkje kan ein finne matematiske problem ein får lyst til å sjå meir på. Ved å utforske og eksperimentere innanfor matematiske tema og didaktiske problemstillingar kan ein finne strukturar og samanhengar som kan vere til hjelp for å svare på spørsmål ein undrar på.

Utforskande eller inquiry-basert matematikkundervisning går ut på å søkje svar på faglege spørsmål og transformere dei til noko som gjev kunnskap og innsikt (Säljö, 2013). Jaworski (2006) skildrar to nivå av inquiry-tilnærming, det eine er ein aktivitet eller eit verktøy, mens det andre er ein veremåte (engelsk: *as a way of being*) der elevar kan påverke kvarandre gjennom diskusjon, erfaringsdeling og danning av eit læringsfellesskap. Ein lærar kan gje elevar ei utforskande oppgåve å jobbe med, men det er måten elevar jobbar med oppgåva på, som viser i kor stor grad dei brukar inquiry-tilnærming. Den utforskande tilnærminga skal engasjere elevar i faget ved å la dei oppdage faget på måtar som gjev dei kjennskap og kompetanse til matematiske prosessar (Jaworski & Fuglestad, 2010).

Nordahl (2014, s. 150) skildrar læring som blanding av prosess og resultat, og skriv at: «elevens vilje til å lære, de kognitive prosesser som eleven foretar, og den egenaktivitet eleven utfører, blir avgjørende for både læringsprosessene og læringsresultatet». Dette kan tolkast som tre faktorar som kan påverke elevane sitt læringsutbytte. Elevar må først og fremst ha innstilling, ynskje eller vilje til å lære, det Kilpatrick, Swafford og Findel (2001) omtaler som «engasjement» i sin modell (figur 1). Dei må også ha kunnskap om og forståing for ulike matematiske strategiar og løysningsmetodar som dei klarar å bruke for å løyse kognitive prosessar. Dei må med andre ord jobbe med å utvikle den «begrepsmessige forståelsen» i matematikk (Kilpatrick et al., 2001). I tillegg må elevar kunne delta aktivt. Haug (2012) peikar på at læring er avhengig av at elevar er aktive, men det treng ikkje å vere fysisk aktivitet, det kan òg vere mental aktivitet. Andersen et al. (2018) brukar omgrepet kognitiv aktivitet. Når elevar undersøkjer og oppdagar matematikk i eit læringsfellesskap, vert dei stimulerte til å stille eigne spørsmål og leite etter samanhengar (Säljö, 2013). Eit slikt arbeid med matematikk i læringsfellesskap krev at elevane engasjerer seg og kan bidra til utvikling av positiv haldning til faget.



Figur 1: Kilpatrick et al. (2001) skisserer ein modell for utvikling av matematisk kompetanse som samanfletting av fem delkompetansar som er avhengige av kvarandre. På figur 1 er det illustrert som ei snor samanfletta av trådar.

I denne artikkelen vert Nordahls (2014) tre faktorar for læring vovne saman med to delar i modellen til Kilpatrick et al. (2001), omgrepsforståing og engasjement, og brukte som rammeverk for analysen.

Omgrepsforståing (begrepsmessig forståelse, conceptual understanding)

Omgrepsforståing handlar om å sjå og forstå samanhengar mellom matematiske omgrep, logiske strukturar, ulike matematiske operasjonar og relasjonar, både innanfor eit konkret matematisk tema og på tvers av fleire (Kilpatrick et al., 2001; Matematikksenteret, 2015). Denne delkompetansen byggjer på integrert og funksjonell forståing av matematiske idear, og er

Fojcik, M. K. (2020). Utforskande og elevsentrert geometriundervisning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(2). 34-44.

vesentleg for at elevar skal kunne trekkje parallellar og sjå samanhengar mellom ulike metodar og fakta. Dette er i tråd med Hiebert og Lefevre (1986) sitt omgrep «conceptual knowledge», dei peikar på at for å lære matematikk må ein setje saman ein relasjon mellom ulike omgrep. Små bitar av informasjon ein har, må altså bli til ein større struktur, der ein flettar saman det ein allereie kjenner, med det nye ein lærer. Også Dysthe (2013) framhevar at elevar i ljos av Vygotskys sosiokulturell læringsteori må konstruere ei bru mellom det dei allereie kan og forstår, og det nye dei lærer. Det å starte å byggje denne brua er å starte å forstå omgrep, og det kan skje før ein klarar å setje ord på denne prosessen.

Det å lære om ulike fakta og metodar betyr ikkje at ein har god kontroll over dei. Kilpatrick et al. (2001) peikar på at det er lettare å hugse samanhengar og overordna strukturar enn detaljar, det inneber at dersom elevar forstår ein metode, så kjem dei lettare til å hugse han. Det er ikkje omvendt, berre det å hugse ein metode betyr ikkje at ein forstår metoden og klarar å bruke han i fleire samanhengar. Säljö (2013, s. 69) peikar på at kunnskap ikkje skal vere avgrensa til ein *kald* presentasjon av fakta, men av *varme* samanhengar og tema, noko som fører til at samansetjing av mønster og strukturar som inquiry byggjer på, er svært relevant for å byggje opp omgrepsforståinga. Elevar som kan sjå strukturar og setje saman nye fakta og metodar med kunnskap med liknande mønster, kjem raskare til brua mellom det kjende og ukjende, og kan dermed lære nye tema meir effektivt. Dei bør også oppmuntrast til å samarbeide om framgangsmåtar og kommunisere med kvarandre i eit «læringsfellesskap preget av inquiry» (Carlsen og Fuglestad, 2010, s. 42). Ifølgje Kilpatrick et al. (2001) byggjer omgrepsforståing på at elevar kan forstå eit matematisk omgrep utan nødvendigvis å kunne verbalisere det. I ein analyse kan det difor vere vanskeleg å bekrefte elevar si forståing, men læraren kan sjå etter om dei er i stand til å bruke matematiske omgrep korrekt, enten skriftleg eller munnleg. Ein kan også undersøkje om dei klarar å setje saman omgrep eller skildre relasjon mellom fleire omgrep. Omgrepsforståing vert utvikla over tid, og elevar bør utsetjast for oppgåver og problem som utfordrar forståinga deira, slik at det vert meir tydeleg om dei er på riktige spor.

Engasjement

Eit anna omgrep omtalt hos Kilpatrick et al. (2001) er engasjement (*productive disposition*). Dette omgrepet handlar om å sjå på matematikk som meiningsfylt, brukbart, verdifullt og ikkje minst mogeleg å få til, slik at elevar trur at dei er i stand til å lære matematikk, som igjen kan føre til at dei er motiverte til å leggje inn innsatsen som krevst for å lære (Kilpatrick et al., 2001, s. 171). Her kan engasjementet tolkast som ei positiv drivkraft til å vere uthaldande og til å ikkje gje opp.

Modellen til Kilpatrick et al. (2001) syner at dei ulike kompetansane er avhengige av kvarandre og byggjer på kvarandre. Det vil seie at utvikling av omgrepsforståing er like viktig som utvikling av engasjement. Difor bør det ikkje undervurderast kor mykje haldninga til matematikk kan påverke elevar sin prestasjon i faget (Kilpatrick et al., 2001). Nordahl skriv at «engasjement, arbeidsinnsats og motivasjon hos elevene er svært viktig i forhold til læring. Motivasjon og arbeidsinnsats er en av de faktorene som i sterkest grad forklarer elevenes læringsutbytte» (2014, s. 20). Læring, motivasjon og arbeidsinnsats heng tett saman, og påverkar kvarandre. Utan motivasjon er det vanskeleg å få til ein god arbeidsinnsats som fører til læring, mens med motivasjon og arbeidsinnsats kan læring bli oppfatta positivt, hyggeleg og kanskje til og med gøy. Då kan den emosjonelle reaksjonen som elevar får ved å lykkast, auke sjølvtillit og engasjement for matematikk (Kilpatrick et al., 2001).

Mason og Davies (1991) skriv at alle kan tenke matematisk, og at elevar bør lære seg å ta det første skrittet, altså for å danne sjølvtil-

Fojcik, M. K. (2020). Utforskande og elevsentrert geometriundervisning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(2). 34-44.

www.caspar.no/tangenten

lit og å lære å stole på eigne kunnskapar. Det handlar om at elevar som har positive haldningar til matematikk og matematikkbaserte fag, har større sjanse til å sjå på eigne feil som mogelegheit for læring og ei form for øving eller mengdetrening, i staden for å sjå på dei som nedgang og vonbrott. Innstillinga til å sjå på feil som mogelegheit for læring bidrar til større hjerneaktivitet (Moser, Schroder, Heeter, Moran & Lee, 2011).

Når elevar ser på eigne feil som motgang, kan dei utvikle negative haldningar til matematikk. Det kan gje utslag som ei kjensle av spenning, uro, frykt og angst som forstyrrar matematisk prestasjon (Ashcraft, 2002). Til dømes kan dei oppleve at matematikk er vanskeleg og vondt, at det er hardt uansett kor mykje ein jobbar, eller at ein enten er god i matematikk, eller så kan ein ingenting. Den negative haldninga til faget er i seg sjølv skadeleg for elevar. For enkelte kan tanken på å utføre matematikk i seg sjølv vere nok til å gje oppleving av fysisk ubehag (Lyons og Beilock, 2012). Elevar som har ei negativ haldning til faget, vil prøve å unngå matematikk og alle fagrelaterte aktivitetar (Beilock og DeCaro, 2007). Dette kan bidra til å hemme den personlege og sosiale utviklinga deira. Desse elevane vil ha ein tendens til å vere innstilte på å yte i matematikk og ikkje å lære om matematikk; dermed avgrensar dei mogelegheitene sine på eit mentalt nivå (Kilpatrick et al., 2001).

Ramirez, Gunderson, Levine og Beilock (2013) har funne at det ikkje er nokon vesentleg korrelasjon mellom negativ haldning til matematikk og prestasjon i matematikk i starten av barneskulen, desse kjenslene er noko som oppstår gjennom skulegangen. Liknande studiar viser at elevar som utviklar negative kjensler for matematikk, også ofte har relativt høgt arbeidsminne (Beilock og DeCaro, 2007; Ramirez et al., 2013). Omgrepet arbeidsminne er knytt til den delen av hjernesystemet som behandlar informasjonen som er nødvendig for kognitive prosessar som språkforståing, læring og resonnering (Baddeley, 1992). Det vil seie at elevar som dannar negative haldningar til matematikk, ikkje nødvendigvis slit med læringsvanskar, det kan vere elevar som har stor kapasitet til å lære, sjølv om dei vel ikkje å bruke han til å lære matematikk. Desse elevane har ein tendens til å velje vekk matematikk når dei kan, på kostnad av karrieremogelegheiter innanfor realfag, teknologi, medisin og andre fagområde som krev høg matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001).

Analysen i denne artikkelen fokuserer på svara til elevar i ljos av Nordahls faktorar for læring; elevar sin vilje til å lære, kognitive prosessar elevar utfører, og eigen aktivitet. Faktorane vert sedde i samanheng med dei to delkompetansane i modellen til Kilpatrick et al. (2001): omgrepsforståing og engasjement.

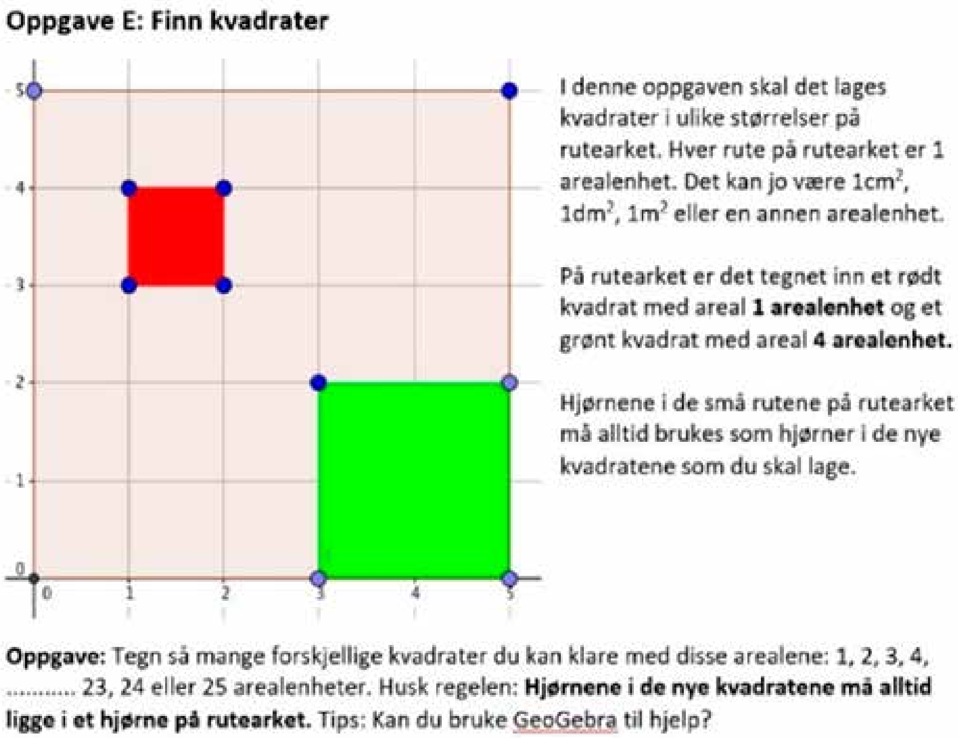
Datainnsamling

Denne artikkelen skriv seg frå ein casestudie av tre elevar på 10. trinn, som i «ein detaljert og intensiv analyse av eit enkelt kasus» (Bryman, 2016, s. 688, mi omsetjing), data er henta frå ein klasse som deltok i DIM-prosjektet. DIM var eit treåring samarbeidsprosjekt mellom to ungdomsskular og Universitetet i Agder som gjekk ut på å undersøkje korleis digitale verktøy kan bli brukte på ein pedagogisk måte for å «utvikle fremtidens digitale matematikkundervisning» (Dean, Kjebekk & Fuglestad, 2017, s. 8). Eit av måla i prosjektet var å vinkle undervisninga mot meir elevstyrte aktivitetar og opne oppgåver, særleg med søkjeljos på utforsking av matematikk, bruk av digitale verktøy, samarbeid og diskusjon. Lærarane i prosjektet laga eigne oppgåver for det.

Datamaterialet er henta gjennom kvalitative metodar som observasjon og intervju. Observasjon var gjennomført i ei open forskarrolle og som rein observatør (Bryman, 2016), der det blei tatt detaljerte feltnotat. Elevane og lærarane var vane med å bli observerte, og ut frå det eg oppfatta, oppførte dei seg som om eg, som forskar, ikkje var til stades. For å utdjupe elevane si forståing og haldning til matematikk valde eg å

Fojcik, M. K. (2020). Utforskande og elevsentrert geometriundervisning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(2). 34-44.

www.caspar.no/tangenten


Oppgave E: Finn kvadrater

I denne oppgaven skal det lages kvadrater i ulike størrelser på rutearket. Hver rute på rutearket er 1 arealenhet. Det kan jo være 1cm^2, 1dm^2, 1m^2 eller en annen arealenhet.

På rutearket er det tegnet inn et rødt kvadrat med areal **1 arealenhet** og et grønt kvadrat med areal **4 arealenhet.**

Hjørnene i de små rutene på rutearket må alltid brukes som hjørner i de nye kvadratene som du skal lage.

Oppgave: Tegn så mange forskjellige kvadrater du kan klare med disse arealene: 1, 2, 3, 4, ……….. 23, 24 eller 25 arealenheter. Husk regelen: **Hjørnene i de nye kvadratene må alltid ligge i et hjørne på rutearket.** Tips: Kan du bruke GeoGebra til hjelp?

Figur 2: Oppgåva «Finn kvadrater», henta frå http://www.dim2015-18.no/sites/default/files/E%20 Finn%20kvadrater.docx_.pdf

gjennomføre eit semistrukturert intervju med nokre elevar i etterkant av observasjonen. Elevane som blei spurde om å delta på intervju, var valde ut i samråd med læraren i klassen. Målet var å få snakke med elevar med ulik kompetanse i matematikkfaget og med ulik deltaking i aktivitetar i klasserommet.

Under intervjuet blei det stilt spørsmål om korleis elevane, gjennom prosjektet, opplevde undervisning i matematikk, og kva dei tenkte rundt eigne læreprosessar og faktorar som kan påverke meistringa deira i faget. Dei vart også spurde om haldning til faget, meir konkret til undervisningsforma dei fekk gjennom DIM-prosjektet, og til framgangsmåte og tankegang dei brukte i ei utforskande oppgåve. Under intervjua blei det lagt vekt på ein naturleg samtale. Eg ville at dei kunne kjenne seg komfortable og kunne forklare og grunngje tankar og meiningar. Eg valde å ta utgangspunkt i oppgåva dei nett hadde hatt, «Finn kvadrater», for å gje dei noko konkret dei kunne snakke om, noko som var friskt i minne.

Gjennom DIM-prosjektet fekk eg samtykke frå Norsk senter for forskningsdata (NSD) angåande vern av personopplysningar, og eg fekk også samtykke frå skulen, lærarane og føresette til å observere klassen og gjennomføre intervju. I tillegg har eg personleg spurt elevane om løyve både til å gjennomføre intervju og til å ta opp lyd under intervjuet, for å bevare den frivillige deltakinga deira i studiet. Ved utval av respondentar og transkripsjon la eg vekt på at elevane skulle bevare anonymiteten sin, men det blei ikkje gjort endringar på dialekten til elevane.

Fojcik, M. K. (2020). Utforskande og elevsentrert geometriundervisning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(2). 34-44.

www.caspar.no/tangenten

Oppgåva «Finn kvadrater»

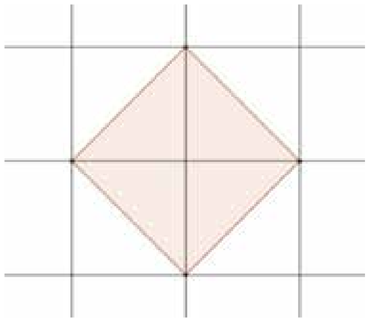
Oppgåva «Finn kvadrater», som er vist på figur 2, er laga av lærarane i DIM-prosjektet og er tilpassa pensum i geometri for 10. trinn. «Finn kvadrater» går ut på å undersøkje geometriske figurar ved hjelp av formlikheit, areal og setninga til Pytagoras. Målet med oppgåva er at elevane skal lage kvadrat med ulik storleik på eit avgrensa rutenett. Kvadrata kan ikkje vere utanfor rutenettet, og kravet er at hjørna på kvadrata må treffe hjørna på mønsteret i rutenettet. Målet med denne oppgåva er å konstruere flest kvadrat med ulikt areal og leite etter samanhengar mellom dei, altså å analysere kva som gjer at visse kvadrat er mogelege å konstruere og andre ikkje kan konstruerast, og å grunngje kvifor det er slik.

Bente

Meg Korleis lærer du best?
Bente Litt sånn som nå, bli med undervegs for å finne ut av ting, og sånn som læreren gjør, at han sier ikke svaret med en gang, men at vi liksom er med på å finne det ut.
Meg Så du likar denne måten å få undervisning på?
Bente Ja.
Meg Kva er det som du likar i denne måten?
Bente Det at du får ikke bare svaret, men du lærer liksom å komme fram til et svar. Jeg syns det er lettere å forstå det hvis jeg er med på å finne det ut.

Eg spurde litt meir detaljert om ho kunne skildre ein «vanleg» matematikktime i DIM-prosjektet.

Bente I det siste har vi … eller normalt så tror jeg vi først sitter og har liksom forelesning eller at læreren forklarer litt, og så får vi noen oppgaver, og så setter vi oss hver for oss, og så arbeider vi med oppgaver, så går vi tilbake til samlingsstedet og presenterer det vi har funnet ut.



Figur 3: Teikning av kvadrat med areal 2.

Meg Korleis likar du denne fordelinga?
Bente Det syns jeg er gøy. Jeg liker å gjøre noe selv, ikke bare høre hele tida.

Bente sa at ho lærer mykje ved at læraren ikkje gjev svar, men formar undervisninga slik at elevar kan bli med på å finne svaret. Her viser Bente nettopp det med å vere aktiv i eiga læring (Nordahl, 2014), å gjere noko sjølv og ta initiativ i læreprosessen. Ho seier også at ho «liker» å gjere noko sjølv, og at det er «lettare» å lære på denne måten. Ordet «lettare» får ein positiv undertone i denne setninga, og når det vert brukt saman med «liker», kan det tyde på at Bente har vilje til å lære.

Vidare i samtalen vert Bente spurd om ho har opplevd nokon vanskelege/uforståelege timar.

Bente Ja, det er jo mange ganger det skjer, sånn at jeg ikke forstår med en gang, og så er det liksom sånn at du må ha litt flere timer med det og tenke over, og etter hvert så forstår du det.

Denne kommentaren viser kjennskap til eigen læringsprosess og dermed refleksjon over eigen framgangsmåte og tankegang, gjennom ei veksande innstilling til læring og utvikling (Kilpatrick et al., 2001). Det å resonnere over eit tema

Fojcik, M. K. (2020). Utforskande og elevsentrert geometriundervisning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(2). 34-44.

www.caspar.no/tangenten

og setje ord på tankar og meiningar er eit teikn på bruk av arbeidsminne, altså den delen av hjernen som er ansvarleg for kognitiv tankegang og læring (Baddeley, 1992).

Bente var den første eleven som beviste at det var mogeleg å lage eit kvadrat med arealet 2, dette gjorde ho gjennom teikninga på figur 3.

Meg	I timen i dag så kom du med din eigen hypotese. Kva er det som fekk deg til å tenke på den løysinga?
Bente	Først så tenkte jeg på det læreren sa «om det går an å få et kvadrat med arealet to», og så tenkte jeg at det går ikke an, og så hørte jeg at noen sa «jo», så jeg tenkte og prøvde å se litt på læreren og se om det var en måte. Så tenke jeg på det læreren sa at det kunne være skrått, å ja, det kunne.

Bente forklarte at ho ikkje fekk det til med ein gong, men då ho høyrde læraren og nokon andre i klassen diskutere at kvadrata kan stå på skrå, såg ho på oppgåva frå ein annan vinkel. Bente klarte å konstruere ei bru frå noko ukjent til noko kjent ved å høyre på andre og deretter sjå på oppgåva i eit nytt lys (Dysthe, 2013), og dette påverka utviklinga av omgrepsforståinga hennar.

Gjennom intervjuet klarte Bente å forklare at ho jobbar med å vere aktiv i faget, og med å bruke og omtale matematiske omgrep på ein fruktbar måte, noko som kan tyde på at ho utviklar omgrepsforståinga si gjennom aktive læringsformer og kognitiv tankegang. Det at ho brukar ord som «likar», «lettare» og «gøy», indikerer at Bente har ei positiv haldning til matematikk, at ho har eit engasjement, og er villig til å prøve å løyse matematiske oppgåver. Dermed dekker ho alt det Nordahl (2014) omtaler som viktige faktorar i læringsprosessen.

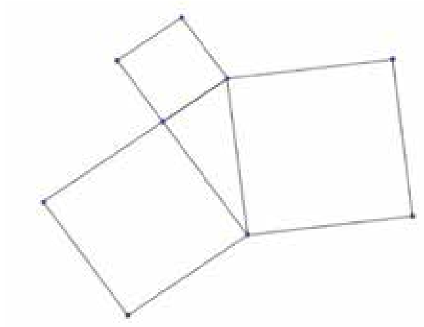
Tom

Meg	Kor mykje føler du at du lærer i ein matematikktime?
Tom	Middels … det kan være på og av, liksom, noen ganger litt sånn derre at hvis jeg først klarer noe, da, sånn som i stad, da gønner jeg på, men hvis ikke jeg har helt skjønt hva det er snakk om, da er det sånn … jeg vet ikke … ta det litt sånn forsiktig eller tregt.
Meg	Trur du det er noko konkret som gjer at du får ting med deg, eller at du ikkje får ting med deg?
Tom	Ja, jeg tror det er hvis jeg er med på det eller sånt, så får jeg med meg ting, hvis jeg skjønner hva det handler om, da får jeg det med meg, men hvis ikke, så er jeg sånn derre … har ikke peiling da.
Meg	Hugsar du ein konkret matematikktime der du følte verkeleg at du meistra?
Tom	Akkurat denne timen som vi hadde (med oppgåva «Finn kvadrater»). Der følte jeg at det gikk faktisk ganske greit. Læreren har sagt etterpå at jeg «har en matematikkhjerne» eller sånn. Så akkurat den følte jeg at jeg mestra.
Meg	Kva trur du i denne timen gjorde at du fekk denne kjensla?
Tom	At jeg klarte å gjøre det de andre gjorde, på en måte. Det er jo litt sånn deilig følelse å se at du også klarer det de andre klarer, så ikke det blir sånn at du ser at bare alle andre klarer det rundt deg, og du står der og ikke har peiling på hva du skal gjøre.

I denne sekvensen kan ein sjå at Tom har varierande motivasjon i faget. Han forklarar at det krev ein del arbeid frå hans side, men at når han får lyst og vilje til å gjere det bra, så «gønner» han på. Ordvalet til Tom kan tyde på at han

Fojcik, M. K. (2020). Utforskande og elevsentrert geometriundervisning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(2). 34-44.

www.caspar.no/tangenten



Figur 4: Geometrisk forklaring av Pytagoras' setning.

er ein engasjert elev, som i utgangspunktet vil gjere det bra, men det kan bli uforståeleg og treigt til tider. Ein kan sjå at denne motivasjonen hjelper han med å «gønne» på, sjølv om han kanskje opplever matematikk som utfordrande og treng litt rettleiing til å starte med. Tom fortalde at han følte at læraren såg han, noko som Tom sette stor pris på. Det tyder på at læringsfellesskapet i klassen gjev Tom den sosiale tryggleiken han treng for å halde fram med læreprosessane sine i matematikk (Nordahl, 2014), og at han kan oppnå å drive på med utforsking «som ein veremåte» (Jaworski, 2006).

Under arbeidet med «Finn kvadrater» kom Tom med eit bevis for kvifor det var umogeleg å lage eit kvadrat med arealet 6. I etterkant forklarte han det slik:

Tom (…) Det går jo an å ha en og fem, hvis du tenker Pytagoras (viser til tegning på figur 4). Så det går ikke an å ha fem, fordi da, det er liksom noe tall mellom 2 og 3, og da treffer det ikke punktene.
Meg Korleis fann du ut av det?
Tom Jeg så jo det med litt hjelp fra læreren, og så tenkte jeg at det høres logisk ut, eller vi fikk jo beskjed om at det går ikke an å ha kanter mellom punktene, så ja.
Meg Så du testa alle kvadratane, og begynte med dei små …
Tom Så gikk jeg stadig oppover, så ja.

Tom forklarte at han fekk litt hjelp frå læraren til å begynne med. I timen forklarte han at ved hjelp av figur 4 kunne ein bruke Pytagoras til å konstruere alle tre kvadrat som vert utspende ved sidene på ein rettvinkla trekant. Då må dei to minste kvadrata stå vinkelrett på rutenettet slik at det største kvadratet kunne stå på «skrå». Det fører til at ein ikkje kan konstruere eit kvadrat som har sida lik rota av ($1^2 + 5^2$). Tom sa at han løyste oppgåva ved å starte med det minste kvadratet, og «så gikk jeg stadig oppover», noko han meinte «hørtes logisk ut». Han fann ut at sidene i eit kvadrat med arealet 5 måtte vere «liksom noe tall mellom 2 og 3, og da treffer det ikke punktene». Ei tolking her er at Tom prøvde med heile ruter oppover som $2^2 = 4$ og $3^2 = 9$, som begge gjev kvadrat med hjørne i punkt i rutenettet. 5 er eit tal mellom 4 og 9 og vil då vere eit kvadrat med sider mellom to og tre, og vil difor måtte stå på skrå i rutenettet om det skal vere mogeleg å konstruere. Dette passa likevel ikkje saman med ideen at dei to små kvadrata skal stå vinkelrett på rutenettet, og han konkluderte med at det ikkje ville bli mogeleg å lage eit kvadrat med areal 6. Tom er kanskje eit døme på ein elev som treng litt rettleiing i starten for å kople saman brua mellom ukjende og kjende omgrep (Dysthe, 2013), men etter litt støtte såg han samanheng mellom figurane og klarte å bruke læresetninga til Pytagoras, noko som kan vise omgrepsforståinga hans knytt til denne setninga.

Gjennom intervjuet forklarar Tom at viljen og deltakinga hans i læringsprosessane varierer, men at engasjementet hans viser ei positiv haldning ved at han «gønner på», så lenge han opplever å få støtte og forstår oppgåvene. Tom viser at etter å ha fått litt hjelp til å starte, så klarar han å flette saman oppgåva med forståinga si av Pytagoras' setning, dessutan at han viser omgrepsforståinga si. Av dei tre faktorane til Nordahl (2014) er det dei kognitive prosessane som Tom set i verk, som ser ut til å påverke læringsprosessane hans (Andersen et al., 2018).

Fojcik, M. K. (2020). Utforskande og elevsentrert geometriundervisning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(2). 34-44.

www.caspar.no/tangenten

Ingrid

Meg	Korleis lærer du best?
Ingrid	Kossen jeg lærer best, må vel være at vi får oppgaver, eller lekser først. At vi skal lese en oppgave, og så foreleser læreren om det dagen etterpå. (…)
Meg	Korleis vil du skildre ein vanleg matematikktime?
Ingrid	En vanlig matematikktime må vel være at læreren presenterer noe, en oppgave, og så går vi og gjør den oppgaven etterpå, og så har vi en samling eller oppsummering til slutt.
Meg	Kva synest du om den tredelinga?
Ingrid	Den liker jeg veldig godt, egentlig. Jeg syns det er veldig greit, og fordi at da får vi prøve det ut praktisk, og så hvis det er noe som vi ikke klarte, da vi prøvde det praktisk, så får vi liksom forklart det.

Ingrid fortel at ho opplever matematikktimane på ein positiv måte, som «veldig godt egentlig» og «veldig greit». Ho peikar på at ho likar at dei får prøve ut ting praktisk før dei får hjelp og forklaring om dei ikkje klarar oppgåva sjølve. Dette tyder på at Ingrid likar å lære gjennom eigenaktivitet, både når det gjeld å få «oppgaver, eller lekser først» og det å «prøve det praktisk». Dette viser at ho er reflektert over sin eigen aktivitet i læringsprosessen (Andersen et al., 2018; Haug, 2012; Nordahl, 2014).

Under oppgåva «Finn kvadrater» bruker Ingrid det Tom forklarte i klassen, og generaliserer tankegangen hans. Då klarte ho å komme fram til ein hypotese som dekker alle figurar som er mogelege å lage på dette rutenettet. Kvadrat som er mogelege å lage, er enten kvadrat med areal som er kvadrattal, eller summen av to kvadrattal.

Meg	Korleis kom du fram til denne hypotesen?
Ingrid	Jeg bare satt og fulgte med i timen, og så begynte jeg å se til arket mitt som jeg hadde jobba med. Så ser jeg på tallene, og så ser jeg på Pytagoras og alt det derre, og så ser jeg «oj, er det kanskje sånn?». Så bare har jeg det.
Meg	Læraren sat heile friminuttet og prøvde å finne ut om din hypotese stemte …
Ingrid	Ja, … det var veldig gøy.
Meg	Kva var det som gjorde det gøy?
Ingrid	Nei, si det. Det er egentlig … så er det vel bare at det liksom «oh, jeg klarte det».
Meg	Ja, det er ei god kjensle å ha. Møter du ho ofte i matematikktimar?
Ingrid	Ja, det tror jeg. Jeg føler jeg mestrer faget.

Måten Ingrid skildrar prosessen med å sjå samanhengen mellom denne oppgåva, Pytagoras og kvadrattal på, kan tyde på at Ingrid har god omgrepsforståing. Ingrid kommenterte sjølv at ho «mestrer faget». Denne tryggleiken og sjølvtilliten kan både vere eit resultat av forståinga hennar i matematikk som ein motivasjonsfaktor for å lære. I modellen til Kilpatrick et al. (2001) heng alle trådane tett saman og påverkar kvarandre. Dette kan tolkast som at dersom Ingrid har ei god omgrepsforståing, så forsterkar det motivasjonen og engasjementet hennar i faget gjennom meistring, samtidig som den positive innstillinga hennar engasjerer henne til å utvikle omgrepsforståinga.

Gjennom intervjuet fortalde Ingrid at ho opplever mykje meistring i matematikkfaget. Gjennom ord som «veldig godt», «veldig greitt» og «gøy» viser Ingrid ei positiv haldning til faget og uttrykker «vilje» til å lære (Nordahl, 2014). Ho ser også ut til å ha god kontroll over eiga læring og vala sine av ulike løysingsmetodar som kan tyde på kognitive læringsprosessar (Andersen et al., 2018; Kilpatrick et al., 2001). Gjennom vilje til læring, eigenaktivitet og kog-

Fojcik, M. K. (2020). Utforskande og elevsentrert geometriundervisning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(2). 34-44.

www.caspar.no/tangenten

nitive prosessar viser ho at ho innehar faktorane som Nordahl (2014) nemner er vesentlege for læreprosessar.

Konklusjon

Gjennom DIM-prosjektet fekk elevar smakebitar på matematikk som prosess og metodesamling, og ikkje som eit bestemt resultat med to strekar under svaret (Andersen et al., 2018). Dei fortalde eksplisitt at dei er fornøgde med undervisninga dei får, sjølv om dei ikkje klarte å grunngje presis kva det er som gjer at undervisninga dei får, er bra. Faktorar dei nemnde, var mellom anna: motiverande lærarar, digitale verktøy, opne oppgåver som alle kan prøve seg på, mogelegheit til å stille spørsmål, oppleving av meistring, å bli sett og å diskutere funna sine med andre. Dette kan vere eit teikn på at prosjektet har klart å danne og halde ved like ein læringskultur gjennom bruk av opne og utforskande oppgåver som oppmuntrar elevar til å sjå positivt på matematikk, og som påverkar motivasjonen og innsatsen deira i faget (Jaworski og Fuglestad, 2010).

Ein kan tenke at ved å jobbe med utforskande oppgåver i tre år fekk elevane etablere nokre vanar som kan vere nyttige, både ved å lære seg nye omgrep og nye matematiske tema, og ved å utvikle ei positiv og undrande haldning til matematikk (Kilpatrick et al., 2001). I intervjuet sa Bente: «Jeg syns det er gøy.» Tom fortalde at han likte «å gjør det de andre gjorde,» og Ingrid blei motivert gjennom «oh, jeg klarte det»-augneblinkar. Slike utsegner kan bekrefte at matematikk vert oppfatta som meiningsfullt blant desse elevane.

Læring gjennom utforsking og eigenaktivitet er avhengig av innstillinga til elevane, dei kan «gønne på», som Tom hadde sagt, men det kan også vere demotiverande for elevar som har vanskar med å komme i gang, eller som har lett for å gje opp (Haug, 2012). Dermed er det ikkje sikkert at alle elevane fekk utbytte av utforskande undervisning, men det skapte mogelegheit til å prøve, og eit godt sosialt og fagleg læringsmiljø som kunne trekkje desse elevane med i undervisninga. Elevane fortalde at det var viktig for dei å sjå og høyre på løysingsstrategiane til andre, noko som viser at dei forstår relevansen av matematiske prosessar (Dysthe, 2013).

I denne artikkelen har eg undersøkt *kva haldning til matematikk elevane kan utvikle ved å lære matematikk gjennom utforskande oppgåver*, ved at eg har sett på viljen deira til å lære, dessutan engasjement, dei kognitive prosessane deira, omgrepsforståing og eigenaktivitet (Andresen et al., 2018; Haug, 2012; Kilpatrick et al., 2001; Nordahl , 2014). Eg har vist at nokre elevar i klassen eg undersøkte, jobbar med matematikk på ein reflektert måte gjennom samarbeid og utforsking. Dei held på eit læringsmiljø og dannar gode vanar for å utvikle omgrepsforståing og engasjement, gjennom å grunngje løysingsstrategiar og dele dei med medelevar. Klassen eg observerte, brukar matematikk til å undersøkje og eksperimentere med matematiske figurar og formlar. Dette ser ut til å auke engasjementet deira i matematikk (Carlsen og Fuglestad, 2010; Kilpatrick et al., 2001).

Dette viser at undervisning som byggjer på undring og utforsking, kan byggje på elevsentrerte aktivitetar og engasjere elevar i matematiske problem, noko som kan gje dei eit positivt og meiningsfullt syn på matematikk, og ei mogelegheit til sjølvstendig læring og utvikling. Slike idear og initiativ bør prioriterast i framtidig matematikkdidaktisk forsking, og dei bør komme tydelegare fram for elevar i matematikkundervisninga. Ifølgje Ramirez et al. (2013) og Beilock og DeCaro (2007) er det viktig å hindre at elevar utviklar skadelege syn og ubehag ved sjølve tanken på å utføre matematikk. Vi bør gje alle elevar mogelegheit til å sjå på matematikk som noko forståeleg, slik at dei ikkje baserer framtidige val på angst, men vel framtida si etter noko dei sjølve vil og har interesse for.

Fojcik, M. K. (2020). Utforskande og elevsentrert geometriundervisning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(2). 34-44.

www.caspar.no/tangenten

Referanser

Andersen, H. P., Fiskum, T. A. & Rosenlund, M. R. (2018). Hva menes med undrende, utforskende og aktiviserende undervisning? I T. A. Fiskum, D. Gulaker & H. P. Andersen (red.), *Den engasjerte eleven: Undrende, utforskende og aktiviserende undervisning i skolen* (s. 17–30). Oslo: Cappelen Damm Akademisk/NOASP.

Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current directions in psychological science, 11*(5), 181–185.

Baddeley, A. (1992). Working memory. *Science, 255*(5044), 556–559.

Beilock, S. L. & DeCaro, M. S. (2007). From poor performance to success under stress: Working memory, strategy selection, and mathematical problem solving under pressure. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 33*(6), 983.

Bryman, A. (2016). *Social research method* (4. utg.). New York: Oxford University Press.

Carlsen, M. & Fuglestad, A. B. (2010). Læringsfellesskap og inquiry for matematikkundervisning. *FoU i praksis, 4*(3), 39–59.

Dean, E., Kjebekk, I. & Fuglestad, A. B. (2017). Digital interaktiv undervisning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 2*(28), 8–12.

Dysthe, O. (2013). Dialog, samspill og læring. Flerstemmige læringsfellesskap i teori og praksis. I R. J. Krumsvik & R. Säljö (red.), *Praktisk Pedagogisk Utdanning. En antologi* (s. 81–116). Bergen: Fagbokforlaget.

Fojcik, M. K. (2018). *Elevanes oppleving av inquiry-basert digital matematikkundervisning* (Masteroppgåve). Universitetet i Agder, Kristiansand.

Haug, P. (2012). Tilpassa opplæring. I T. O. Engen & P. Haug (red.), *I klasserommet. Studie av skolens praksis* (s. 45–60). Oslo: Abstrakt forlag.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I J. Hiebert (red.), *Conceptual and procedural Knowledge: The case of mathematics* (s. 1–27). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of mathematics teacher education, 9*(2), 187–211.

Jaworski, B. & Fuglestad, A. B. (2010). Developing mathematics teaching through inquiry – a response to Skovsmose and Säljö. *Nordic Studies in Mathematics Education, 15*(1), 79–96.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping students learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Lyons, I. M. & Beilock, S. L. (2012). When math hurts: math anxiety predicts pain network activation in anticipation of doing math. *PloS ONE, 7*(10), e48076.

Mason, J. & Davies, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving*. Greelong: Deakin University Press.

Matematikksenteret (2015). Meningsfull matematikk for alle. I Matematikksenteret (red.), *Visjon og strategier 2015–2020.*

Moser, J. S., Schroder, H. S., Heeter, C., Moran, T. P. & Lee, Y. H. (2011). Mind your errors: Evidence for a neural mechanism linking growth mind-set to adaptive posterror adjustments. *Psychological Science, 22*(12), 1484–1489.

Nordahl, T. (2014). *Eleven som aktør* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Ramirez, G., Gunderson, E. A., Levine, S. C. & Beilock, S. L. (2013). Math anxiety, working memory, and math achievement in early elementary school. *Journal of Cognition and Development, 14*(2), 187–202.

Säljö, R. (2013). Støtte til læring – tradisjoner og perspektiver. I R. J. Krumsvik & R. Säljö (red.), *Praktisk-pedagogisk utdanning. En antologi* (s. 53–80). Bergen: Fagbokforlaget.

Utdanningsdirektoratet (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn* (MAT1-05). Henta 20.11.2019 frå https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Fojcik, M. K. (2020). Utforskande og elevsentrert geometriundervisning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(2). 34-44.

www.caspar.no/tangenten