Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

Nordheim

Resonnering og argumentasjon

Et av kjerneelementene i matematikk i LK20 er resonnering og argumentasjon. Kort gjenfortalt fra beskrivelsen i læreplanen handler resonnering om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker, og argumentasjon om at elevene kan begrunne egne framgangsmåter, resonnement og løsninger, og etter hvert at de beviser gyldigheten av disse.

Jeg har fulgt en klasse i matematikk siden de begynte i 1. klasse høsten 2015. Arbeidet med resonnering og argumentasjon har vært en naturlig, integrert del av arbeidet i matematikktimene fra begynnelsen av. Elevene i klassen har hele tiden blitt bevisstgjort verdien av å forstå det de gjør, og å kunne forklare hvordan de tenker. Gjennom klassesamtalen som didaktisk verktøy i dette arbeidet har elevene blitt utfordret til å kommunisere sine egne tanker, og til å forstå og bygge videre på andres. Andre lærere har lagt merke til at elevene i klassen har hatt nytte av tankesettet også i andre fag, og at de snakker godt for seg.

Det er mange typer oppgaver som egner seg til å jobbe med resonnering og argumentasjon. Det som er viktig (og noen ganger litt vanskelig), er å virkelig lytte til elevene når de begrunner framgangsmåter, tankesett eller ulike svar, for å forstå det de ønsker å formidle. Læreren har en viktig rolle i å gjøre elevenes ytringer tilgjengelig for de andre elevene, og ikke minst i å bygge videre på, og eventuelt styre, den matematiske forståelsen elevene viser, slik at det etableres sammenhenger.

Noen ganger bruker jeg korte læringsaktiviteter som «Hvem skal ut?» for å sette elevenes tankeprosesser i gang. Det hender også at jeg presenterer flervalgsoppgaver, eller oppgavesvar med bevisste feil i, for å utfordre elevene til å tenke annerledes enn de selv kanskje ville ha gjort i utgangspunktet. Andre ganger er utforskning en sentral del av oppgaven, og arbeidet tar lengre tid. Eksemplene jeg ønsker å dele, tar utgangspunkt i relativt enkle oppgaver, som kan tilpasses og utvides etter nivå og engasjement. De viser et utdrag av hvordan elevene gjennom samtale, samarbeid, konkretisering og skriftliggjøring/tegning utviklet sine egne tankerekker, bygget videre på andres tanker, og hvordan vi jobbet med bevis i 3. klasse.

Å bevise noe matematisk med de yngste elevene dreier seg om å verifisere og forklare noe på en måte som styrker elevenes forståelse. Denne forståelsen uttrykkes gjennom eksempler og generelle vendinger som elevene behersker. Ved å jobbe med uformelle bevis på denne måten kan det legges et grunnlag for senere arbeid med formelle, algebraiske bevis.

Tonje Katrine Nordheim
Granly skole
tonje.nordheim@horten.kommune.no

Nordheim, T. K. (2021). Resonnering og argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 32*(2), 2–7.

www.caspar.no/tangenten

1. trinn – sortering og klassifisering

De fleste elever har gode sorteringsevner når de begynner på skolen. Mange har erfaringer fra opprydding i hjemmet og i barnehagen, og de har til en viss grad automatisert noe av kunnskapen. Som lærere bør vi hjelpe barna å sette ord på hvorfor de sorterer som de gjør; er det form eller funksjon, tilhørighet eller noe annet, som gjør at noe skal være samme sted? Hvilke likheter og forskjeller kan de identifisere, og hvilke begreper trenger vi for å vite at vi snakker om det samme?

En av aktivitetene vi gjennomførte på uteskole i 1. klasse, dreide seg om dette. Elevene ble delt inn i par og små grupper på tre. De fikk utdelt en rockering som fungerte som det definerte arbeidsområdet i oppgaven, og så fikk de fem minutter til å samle naturmateriell og legge i ringen sin. Det påfølgende oppdraget var felles for alle gruppene; sorter det dere har funnet, og legg det som hører sammen, i grupper. Dere må kunne forklare hvordan dere har bestemt hva som skal i de ulike gruppene. Dere skal ikke flytte noe ut av ringen.

Bilde 1

Noen elever laget grupper som jeg umiddelbart kjente igjen (bilde 1), mens andre hadde sine egne systemer, og jeg måtte lytte godt til elevenes forklaringer for å forstå tankegangen bak (bilde 2). I ringen på bilde 1 er det sortert i følgende fem grupper: små blader, store blader, korte og tykke pinner, lange og tynne pinner, nøtter/bær fra trær. Jentene på bilde 2 valgte heller å sortere grupper med ulike «slag» sammen; dere kan se hvordan det ligger en liten pinne oppå hvert blad, og jentene er i ferd med å telle opp og fordele små nøtter og bær fra trær. Det som ble til overs etter at hvert blad hadde fått én pinne og to bær, ble lagt i ytterkanten.

Bilde 2

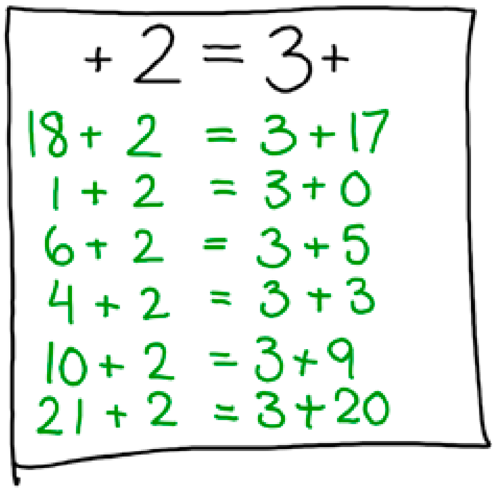
Oppfølgingsoppdrag ble gitt til elevgruppene etter hvert som de hadde vist fram og begrunnet grupperingene sine til læreren. Uten å legge til eller ta bort elementer i ringen skulle de omgruppere, altså finne en annen måte å sortere de samme gjenstandene på. Dette er kognitivt utfordrende for mange. De ser fort én løsning,

Nordheim, T. K. (2021). Resonnering og argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikk-undervisning, 32*(2), 2–7.

www.caspar.no/tangenten

men måtte nå omstille tankegangen sin for å etablere nye grupper.

Elevene kunne velge å lage færre eller flere grupper. Løsningen til elevene på bilde 1 ble å slå sammen grupper slik at de fikk tre grupper; blader, pinner og nøtter/bær. Argumentet deres for sammenslåingen var: «Pinner er pinner, selv om noen er korte og noen er lange, så de kan være sammen.» Sideinnspill fra annen elev: «De har vært på treet sammen før.» Og selv om bladene var fra ulike typer trær, så var de grønne. Løsningen til elevene på bilde 2 var at de oppløste de sammensatte gruppene sine, og sorterte deretter gjenstandene i gruppene blader, pinner, nøtter/bær, gress, strå og søppel. Og begrunnelsen deres var at «det er sånn det egentlig er».



Bilde 3: Utsnitt av tavla med eleveksempler.

2. trinn – likhetstegnet

For å få relasjonell forståelse av likhetstegnet må elevene oppleve at det brukes på andre måter enn den rent operasjonelle der tegnet dukker opp etter to tall med et regnetegn imellom. Prinsippet om likevekt har vi utforsket på ulike måter ved flere anledninger, og blant annet fenget denne oppgaven på 2. trinn:

$$\_\_ + 2 = 3 + \_\_$$

Elevene kom med mange eksempler, og da vi hadde skrevet opp en del tall på tavla, kunne vi begynne å snakke om hvorvidt noen kunne se et mønster. Ivrige elever pratet med læringspartneren sin, og i klassesamtalen etterpå konkluderte de med at «fordi at det er en mindre der (*på den ene sida*), må vi legge på en mer på tallet der (*på den andre sida*) for at det skal bli likt». Vi konkretiserte det med tegning og klosser. Mange elever hadde nok med de ensifrede tallene, men alle var med på hvorfor for eksempel 6 + 2 = 3 + 5.

Oppgaven engasjerte og utfordret også elever med god tallforståelse. Flere syntes det var artig å finne mønster, for eksempel ved å systematisk øke og minke med samme siffer, eller prøve seg fram med andre regnearter. Den mest avanserte løsningen var 2 · 11 + 2 = 3 + 10,5 · 2. Et svar som dette er med på å minne meg på hvor viktig det er å ha oppgaver som åpner for at elevene kan jobbe med det samme på ulikt nivå.

3. trinn – aldri, alltid eller noen ganger sant?

På 3. trinn skulle vi fordype oss litt i egenskaper og begreper rundt tall og siffer. I forbindelse med det gjennomførte vi en oppgavestreng over to uker, med utgangspunkt i påstander, og om de aldri, alltid eller noen ganger var sanne.

Vi startet med å snakke om hva påstander er, og vurderte om det er sant (aldri, alltid, noen ganger) at «2 + 3 = 1 + 4», og at «snøen er hvit». Oppfølgingsspørsmålene var «Hvordan kan du vite det?» og «Kan det bevises?». I den forbindelse måtte vi snakke om begrepet «bevis», hva det innebar, og hvordan det kan gjøres.

Når elevene begrunner matematisk, finner jeg det nyttig å tenke over hvilket nivå de begrunner på. Da tenker jeg nivå som i hvilken grad resonnementet kan fungere som et bevis på noe, og hvilke spørsmål jeg som lærer kan stille for å bevisstgjøre og utfordre elevene til å tenke videre, gjerne mer generelt. Balacheff (i Klaveness et al., 2019, s. 236) beskriver fire

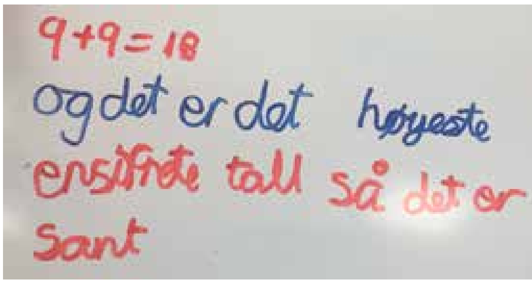
Nordheim, T. K. (2021). Resonnering og argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikk-undervisning, 32*(2), 2–7.

nivåer som alle er viktige for elevenes utforskning og matematiske læringsprosess. De to første nivåene er naiv empirisme og avgjørende eksempel. Argumentasjonen på disse nivåene er eksempelbaserte, og en generell struktur er ikke synlig. De to neste nivåene kan betraktes som uformelle bevis fordi de uttrykker generelle sammenhenger. Ved generisk eksempel brukes et eksempel til å forklare og illustrere en generell sammenheng, og ved tankemodeller forklarer man en generell tankegang uten å bruke konkrete eksempler. Det naturlige for unge elever er å ta utgangspunkt i eksempler, men som arbeidet med denne oppgavestrengen viser, kan de veiledes til å tenke i mer generelle vendinger. Forhåpentligvis vil dette kunne danne et grunnlag som hjelper dem i senere arbeid med mer formelle bevis.

Den første påstanden elevene skulle ta stilling til sammen med læringspartner, var: «Summen av to ensifrede tall er mindre enn 20.»

Noen elever brukte vilkårlige eksempler (bilde 4), og noen prøvde seg mer systematisk fram. Nærmere halvparten hoppet rett til konklusjonen, omtrent slik som Tiril og Joelien har skrevet på bilde 5. Elevene brukte tallforståelse som grunnlag for konklusjonen sin. Når det ikke finnes høyere ensifrede tall enn ni, så må påstanden alltid stemme. Eksempelet 9 + 9 = 18 brukes til å vise den generelle sammenhengen.

Bilde 4



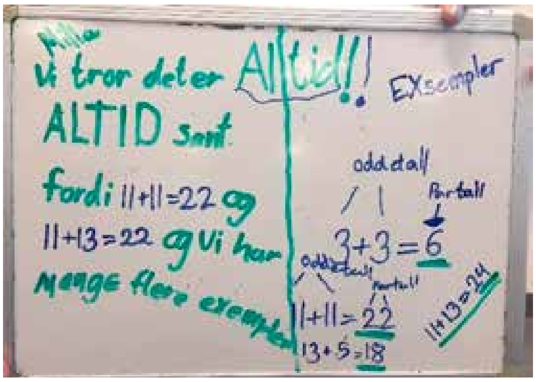
Bilde 5

Når det gjaldt neste påstand om at summen av to tosifrede tall er mindre enn 100, var elevene raske med å konkludere med «noen ganger», fordi de fant eksempler på tilfeller der påstanden stemte, og der den ikke stemte. Et «system» de fleste fant raskt, og støttet seg til videre, var at summen av to tall mindre enn 50 er under 100, mens dersom begge tallene er over 50, blir summen over 100.

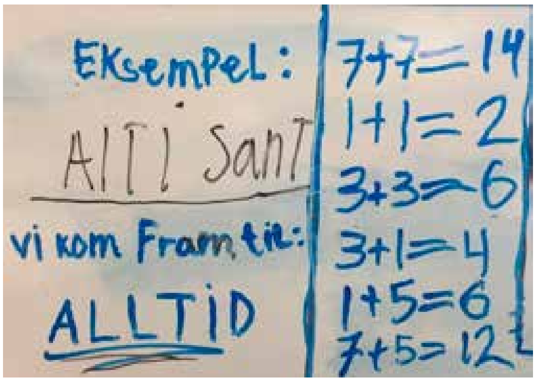
For å utfordre elevenes tankesett litt videre ba jeg dem om å se på andre kombinasjoner. Klassen utforsket da om det var mulig at ett tall kunne være mer enn 50 og det andre tallet mindre enn 50. Etter å ha undersøkt med en del tall oppsummerte Kasper (8 år) det slik: «Det går (*at summen blir mindre enn 100*) hvis det ene tallet er ganske stort, så må det andre være ganske lite.» Han valgte å understreke påstanden sin med et eksempel (bilde 6).

Disse oppgavene ledet mot den kanskje mest kognitivt krevende oppgaven, der elevene skulle finne ut om «summen av to oddetall er et partall», og bevise det. Nå hadde elevene gjort seg en del erfaringer med å tegne, finne eksempler og formulere generelle begrunnelser som kunne hjelpe dem i dette arbeidet. I begynnelsen var det flere elever som tenkte at bare de kunne finne mange nok eksempler, så ville det være nok som bevis (bilde 7). Jeg synes det var påfallende at så mange benyttet eksempler med like

Bilde 6



Bilde 7



Bilde 8

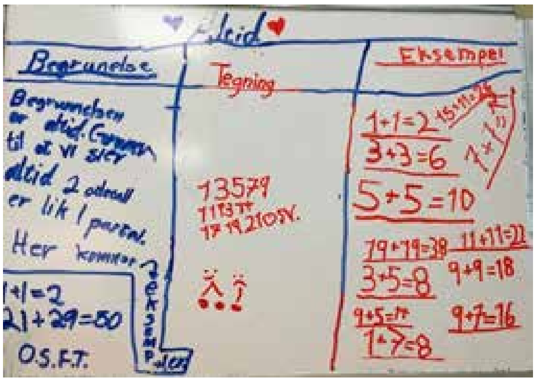
tall. En dobling (av heltall) resulterer naturlig nok i partall, men dette var lærerens tankegang, og viktig for elevene på dette nivået å oppdage.

En videre utforskning gjennom eksempler ble da å etterspørre ulike og kanskje flersifrede tall, slik at elevene kunne lete etter mønster og sammenhenger i et mer variert tallmateriale (bilde 8).

I samtalene virket flere av elevene mer bevisst på at de skulle prøve å finne en mer generell uttrykksform. Legg merke til de tegnede prikkene sammen med smilefjesene på bilde 9. Her er det elever som prøver å uttrykke noe av strukturen til et oddetall, med «en til overs». Jeg valgte å ta utgangspunkt i denne tegningen da vi skulle finne ut mer om strukturen til oddetallet, og se på forskjellige representasjoner for det.

Alle elevene fikk på et tidspunkt stille seg opp i en gruppe med andre elever, og så skulle de sortere seg parvis i rekker. Hvis én ble til overs i gruppa skulle han eller hun stille seg først i køen. Elevene satte så ord på hva som skjedde når to grupper ble koblet sammen, og hver gang to grupper med «en til overs», altså et oddetall antall elever, ble koblet med annen tilsvarende gruppe, så ble det ikke lenger én til overs, uavhengig av hvor stor elevgruppa var (bilde 10).

Sammen med elevene skulle vi prøve å finne en gyldig notasjon som kunne beskrive hva som skjedde. Elevene satte ord på hva som skjedde, og jeg prøvde meg fram med illustrasjoner på



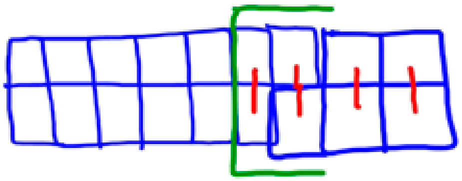
Bilde 9

tavla (figur 1). Liam (8 ½ år) uttrykte det slik: «Hvis du har to oddetall, da har du jo én til overs (*på hver*). Hvis du legger dem sammen, da blir det et partall, fordi da er det to til overs, og (*de*) setter sammen seg med (*til*) et partall.»

De to blå figurene ble tegnet hver for seg på tavla etter Liams instruksjoner og klassens samtykke. Jeg skjøv dem mot hverandre slik elevene hadde gått mot hverandre da de sto i grupper. Flere sa høyt «Åååååå», da de så hva som skjedde. Vi koblet «par» ved hjelp av røde streker. (Den grønne streken viser avgrensingen vi hadde på den gjeldende gruppa.)

Mange elever følte ikke lenger at de trengte alle eksemplene å støtte seg til. Konklusjonen var at summen av to oddetall alltid blir et partall, fordi «da liksom er ingen alene, og alle har liksom en venn hver. Sånn at de slipper å være alene». Det er også verdt å ta med seg at flere

Bilde 10



Figur 1

etter hvert ga uttrykk for at vi bare behøver å se på enerplassen for å bestemme om det er et oddetall eller partall. Det var elevene selv som kom fram til forståelsen og uttrykte det.

Avslutning

Resonnering og argumentasjon med de yngste elevene handler i stor grad om at de vet hvorfor de gjør som de gjør, og hvorfor det de gjør, fungerer. Dette må de få anledning til å erfare og sette ord på. Vi må ikke være redde for å bruke og utforske matematikkfaglige begreper i en kontekst som elevene kan relatere til.

For at elevene skal tørre å virkelig utforske matematikken, og være komfortable med å dele egne tanker og framgangsmåter, må de, uansett alder, erfare at det er trygt å gjøre feil. Lærerne må kommunisere tydelig at vi kan lære av og med hverandre, og at det er mange måter å løse oppgaver på. Disse normene er best å etablere tidlig, men min opplevelse er at det aldri er for seint, for elevene er raske til å oppfatte hva læreren legger vekt på. Ved at læreren forventer forklaringer også når svaret er riktig, og trekker fram misoppfatninger på en positiv måte som grunnlag for diskusjon og oppklaring, vil de fleste elevene nokså raskt omstille seg til forventningen om at de må underbygge egne tanker og strategier. Det er fruktbart for det matematiske klasserommet.

Referanser

Klaveness, E., Karlsen, L. & Kverndokken, K. (2019). *101 grep for å aktivisere elever i matematikk – matematikkdidaktikk i teori og praksis*. Fagbokforlaget.

Nordheim, T. K. (2021). Resonnering og argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikk-undervisning, 32*(2), 2–7.

www.caspar.no/tangenten