Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

Jensen, Svorkmo

Flervalgsoppgaver

Mange av oss kjenner flervalgsoppgaver fra tester som nasjonale prøver eller konkurranser som Kengurukonkurransen og Abelkonkurransen. I en test eller konkurranse gjelder det bare å velge det riktige svaret, og så er man ferdig med oppgaven. Vi finner sjelden slike oppgaver i lærebøkene, noe vi undrer oss over, for de kan også brukes i undervisningen. Flervalgsoppgaver kan på lik linje med mange andre oppgaver gi muligheter for et læringsarbeid der vi søker å skape god forståelse av matematiske begreper, ideer, sammenhenger eller forhold. Men flervalgsoppgavene har noe som de andre ikke oppgavene har, og det er svaralternativer. Svaralternativene kan enten brukes i forkant av løsningsprosessen, de kan brukes i prosessen, for å sammenligne med egen løsning, eller i etterkant kan svaralternativene brukes til å utvide oppgaven.

Det er prosessen som læreren forbereder og gjennomfører, som avgjør om oppgaven blir en avkrysningsoppgave eller en utforskende oppgave. Det må være rom for samarbeid og diskusjon hvor ulike løsninger blir presentert, og i fellesskap kan man reflektere rundt løsningene. Underveis i arbeidet kan elever trenge veiledning. Ved å være forberedt på de ulike løsningsstrategiene som elevene kan komme til å velge, kan læreren veilede med utgangspunkt i det elevene selv har tenkt. Hvis elevene løser oppgavene på forskjellige måter, er det en flott anledning til å se at ulike metoder og representasjoner kan brukes. Det å kjenne ulike representasjoner og sammenhengen mellom dem er et av kjennetegnene på dybdelæring i matematikk.

Nedenfor viser vi to eksempler på flervalgsoppgaver og hvordan vi kan tenke oss å bruke dem i undervisningen. Vi ønsker å vise hvordan arbeid med flervalgsoppgaver kan hjelpe elevene til å trenge dypere ned i fagstoffet Vi vil utnytte det at flere svaralternativ er oppgitt, og at ett av dem er det riktige. Dette gir mulighet for en annen type arbeid enn «vanlig oppgaveløsning» ved at vi kan bruke svaralternativene på ulike måter.

I det første eksempelet har vi valgt en geometrioppgave som kan løses på mange forskjellige måter og med ulike representasjoner. Den gir muligheter til å se sammenhenger mellom representasjonene. Oppgaven kan løses på mange nivåer, og den kan være et utgangspunkt for nye undersøkelser.

Anne-Mari Jensen
Matematikksenteret
anne-mari.jensen@matematikksenteret.no

Anne-Gunn Svorkmo
Matematikksenteret
anne-gunn.svorkmo@matematikksenteret.no

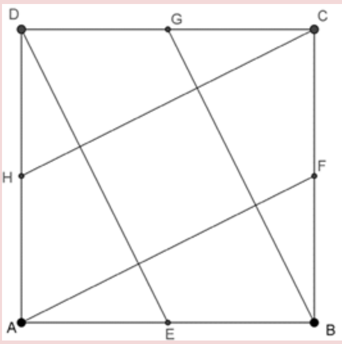
Jensen, A.-M. & Svorkmo, A.-G. (2017): Flervalgsoppgaver. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(3), 8–14.

www.caspar.no/tangenten

I det andre eksempelet ser vi på sammenhenger og likheter mellom tre oppgaver som alle handler om delelighet. De tre oppgavene skal, under god veiledning og tilrettelegging, til sammen utfylle, utfordre og gi mulighet til utvikling av elevers forståelse.

Oppgave 1: Kvadrat i kvadrat

Oppgave



Et kvadrat ABCD med sidelengde 1 er gitt. Punktene E, F, G og H ligger midt på hver sin sidekant, slik figuren viser. Linjene AF, BG, CH og DE trekkes. Da dannes det et kvadrat inne i figuren.

Hva er forholdet mellom arealet av det lille og det store kvadratet?

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 1/5 E) 1/6

Hva handler oppgaven om?

Den første utfordringen er å lese teksten og få oversikt over all informasjon som er gitt, og å forstå hva spørsmålet betyr. Hvis klassen har startproblemer, kan det være lurt å snakke i fellesskap om dette. Hva menes med forholdet mellom to arealer? Hvilke arealer dreier det seg om? Det kan være en idé å markere eller fargelegge det lille kvadratet.

Hvordan kan vi bruke svaralternativene?

En strategi er å vurdere svaralternativene før løsningen: Er det noen som åpenbart må være feil? Kan man snevre inn antall mulige løsninger? La elevene begrunne hvilke alternativer de ser som sannsynlige løsninger. Kanskje de kan gjette på en løsning før de arbeider videre, så blir det spennende å sammenligne gjetningen med resultatet.

Å finne løsningen

For å komme fram til en løsning kan man arbeide geometrisk eller regne ut arealer. Elevene kan velge å løse oppgaven ved å tenke seg at biter av figuren flyttes og settes sammen på nye måter. Hvis det er vanskelig å se for seg, kan de klippe opp figuren langs linjene og pusle dem sammen igjen. De må prøve å finne en måte å sette bitene sammen på slik at størrelsesforholdet blir tydelig. Læreren kan også forberede noen modeller som elevene kan arbeide med, de kan lages ulikt etter hvilket trinn og nivå elevene er på. Hvis de vil beregne arealer, må de med utgangspunkt i at $AB = 1$ se at alle sidene er halvert, og de må kjenne arealet av kvadratet *ABCD*. De må dessuten kunne bruke formlike trekanter i utregningene. Det fins flere måter å resonnere og regne på enn de eksemplene vi viser nedenfor.

Geometriske løsninger

Eksempel 1

Det enkleste er hvis figuren klippes opp etter linjene som på figur 1. De fire trekantene kan legges sammen slik at man kan se at de er fire ganger større enn det lille kvadratet i midten. Gi elevene delene slik de ligger i figuren til venstre, og be dem pusle sammen bitene slik at det blir tydelig hvor stor del det indre kvadratet utgjør av hele arealet. Siden de vet at ett av svaralternativene er riktig, er det lett å se at alternativ D må stemme.

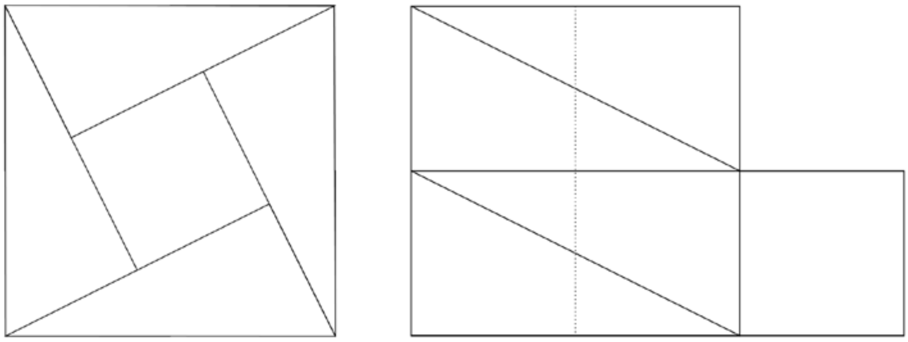
Eksempel 2

Hvis man klipper opp figuren etter alle linjene, blir puslespillet litt vanskeligere. Man kan ende opp med samme resultat som i figur 1, eller

Jensen, A.-M. & Svorkmo, A.-G. (2017): Flervalgsoppgaver. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(3), 8–14.

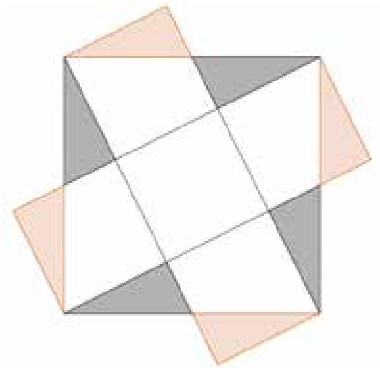
www.caspar.no/tangenten

Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

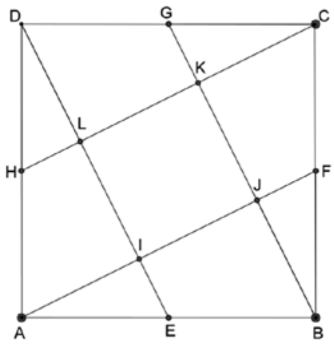


Figur 1

man kan tenke seg at man bare flytter de fire minste (grå) trekantene slik at man får et kors som består av fem like store kvadrater (figur 2).



Figur 2



Figur 3

Også her kan man støtte seg til svaralternativene, ett av dem er riktig. På et høyere trinn kan man i tillegg be elevene forklare at de fire firkantene som dannes i «korset» i figur 2, faktisk er kvadrater med samme areal som kvadratet i midten.

Løsning ved regning

Eksempel 1

Arealet av det indre kvadratet kan regnes ut på flere måter. Vi kan trenge å sette navn på flere punkter i figuren, se figur 3, og vi må bruke egenskapene til de formlike trekantene i figuren.

Vi kan finne arealet av kvadratet i midten ved å finne IJ og deretter IJ^2:

$$AF = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ΔABF, ΔAJB og ΔAIE er formlike, og ΔAIE og ΔBJF er kongruente. Trekantene er rettvinklede, og lille katet = 1/2 · store katet. I ΔABJ er $BJ = 1/2\ AJ$. $BJ = AI$ (ettersom ΔAIE og ΔBJF er kongruente). Da må $AI = 1/2\ AJ = IJ$. $JF = 1/2\ BJ = 1/2\ IJ$, så

$$IJ = \frac{2}{5}AF = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Arealet av kvadrat i midten: $IJ^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$

Eksempel 2

En annen måte er først å finne arealet som ligger utenfor kvadratet i midten.

Jensen, A.-M. & Svorkmo, A.-G. (2017): Flervalgsoppgaver. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(3), 8–14.

www.caspar.no/tangenten

Denne løsningen henger nært sammen med eksempel 1 under geometriske løsninger. Hvis man først har klipt opp figuren, ser man at trekantene som omgir kvadratet i midten, er kongruente rettvinklede trekanter. Den korteste kateten er like lang som siden i det indre kvadratet (strengt talt må dette vises), og den lengste er dobbelt så lang. Vi kan kalle sidelengden til det lille kvadratet for a og arealet a^2. Arealet til de fire trekantene blir da til sammen $4 \cdot \frac{a \cdot 2a}{2} = 4a^2$, det vil si at det som ligger utenfor det lille kvadratet, har fire ganger så stort areal som dette kvadratet.

Hvis man ikke har klipt opp figuren, er det ikke så tydelig at trekantenes lille katet er like lang som kvadratets side. Da må det litt mer regning og resonnering til:

ΔABJ, ΔBCK, ΔCDL og ΔDAI er kongruente. ΔABJ er formlik med ΔAEI og $AE = 1/2\,AB$. Dette medfører at Areal ΔAEI = 1/4 Areal ΔABJ.

Areal ΔAEI = Areal ΔBFJ, så

$$\text{Areal } \Delta ABJ = \frac{4}{5} \text{Areal } \Delta ABF$$

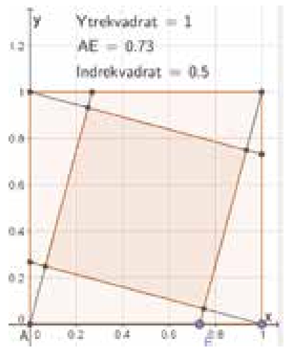
$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{AB \cdot BF}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{5}$$

Areal av kvadratet $IJKL = 1 - 4 \cdot$ Areal ΔABJ
$= 1 - 4 \cdot 1/5 = 1/5$.

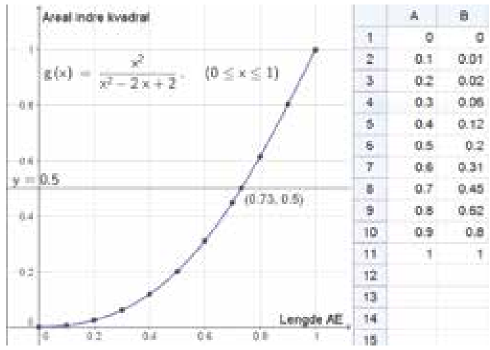
Videre utforskning

Vi kan utvide oppgaven ved å utnytte alle svaralternativene. Vi kan for eksempel spørre om hvor punktet E måtte vært plassert på AB for at de «gale» svaralternativene skulle ha vært oppfylt. Man kan lage en dynamisk figur i GeoGebra hvor det ytre kvadratet er plassert slik figur 4 viser, og ved å markere kvadratet inni som Mangekant, får man fram arealet av dette.

Man kan bevege punktet E langs AB og legge lengden AE og arealet av det indre kvadratet inn i et regneark, og man kan få disse registreringene ut som punkter i grafikkfeltet.



Figur 4



Figur 5

Det er ingen ferdigprogrammerte regresjonsfunksjoner i GeoGebra som vil passe. En oppgave kan være å finne den funksjonen som passer til disse punktene. Figur 5 viser funksjonsuttrykket.

Til høyre i figur 5 ser vi spesielt hvordan vi kan finne ut hvor punktet E må ligge dersom arealet av det indre kvadratet skal være halvparten av det ytre.

Lag en pusleoppgave

Puslespillet i figur 6 er beslektet med oppgaven ovenfor. Korset skal klippes opp som vist på figuren. Lag et kvadrat av bitene!

Gangen i arbeidet

Det er viktig at læreren på forhånd har tenkt igjennom hvilke mulige løsninger problemet kan ha. Læreren må være forberedt på at veiledningen blir forskjellig etter hvilket nivå elevene er på, og etter hvilken innfallsvinkel de har valgt

Jensen, A.-M. & Svorkmo, A.-G. (2017): Flervalgsoppgaver. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(3), 8–14.

www.caspar.no/tangenten