

Wallace, Jensen

## Matematikk i tre akter

Som matematikklærere er vi på jakt etter aktiviteter og oppgaver som fører til at elevene opprettholder aktivitet, nysgjerrighet og motivasjon for faget. Oppgavene skal føre til at elevene lærer mest mulig med utgangspunkt i begreper og ferdigheter de allerede har. Flest mulig skal utfordres og motiveres, gjerne ved at matematikken knyttes til praktiske situasjoner. Slike oppgaver ser vi på som rike oppgaver. Vi prøver å vinkle problemstillinger og løsningsmetoder på ulike måter for at alle skal forstå. For å få dette til trenger vi å gi elevene et godt begrepsapparat, både i faget og om læring.

Oppgavene som presenteres i denne teksten, er det arbeidet med i grunnskolen og i videregående skole. Ved å bruke en metodikk vi kaller *Matematikk i tre akter*<sup>1</sup>, får elevene mulighet til å formulere problemstillinger, arbeide med disse og reflektere over svarene de får. Metodikken gir gode muligheter for å møte elevene der de er i sin forståelse, og hjelpe dem videre i sin læring.

Dette arbeidet startet ved at Molde videre-

gående skole ble deltakere i NORCAN-prosjektet, og noen lærere fikk anledning til å besøke K12-skolen Tecumseh Vista Academy i Windsor, Ontario våren 2016. Vi ble kjent med metodikken *Matematikk i tre akter*, og så et potensial for å støtte opp under praktisk og utforskende undervisning med vekt på kommunikasjon.

### Hva er Matematikk i tre akter?

Matematikk i tre akter er en arbeidsmåte der elevene tar utgangspunkt i en konkret situasjon. De skal finne ut hva de kan regne på, og lage matematikkoppgaver som de kan arbeide med i fellesskap. Gjennom samtale skal elevene finne matematikk i situasjoner de får presentert, for eksempel i form av en praktisk situasjon, bilder eller film.

Arbeidsmåten krever samarbeid. Vi har erfart at grupper på 3–4 elever fungerer godt. Å la elever som tenker praktisk være på gruppe med teoretisk sterke elever gir muligheter til å lære av hverandre.

Som tittelen antyder, deles økten i tre deler, eller akter. I den første akten presenteres elevene for en praktisk situasjon ved hjelp av en kort film, et bilde, en animasjon, en fortelling eller konkrete. Spørsmålet elevene får, er vanligvis: Hva kan vi, ved hjelp av matematikkunnskapene vi har, finne ut av i denne situasjonen? Elevene skal da foreslå ulike problemstillinger de ønsker å finne ut av. Etter at alle problem-

**Anne Karin Wallace**

Molde videregående skole  
anne.karin.wallace@mrfylke.no

**Renate Jensen**

Bergen kommune, seksjon skole  
renate.jensen@bergen.kommune.no

stillingene er presentert, kan læreren velge hva det skal arbeides videre med. Gruppene kan gå videre med samme eller ha ulike problemstillinger. Elevene blir bedt om å si hva de tror er et for lite svar, og hva de tror må være et for stort svar. Grunnen til dette er ønsket om å koble alle elevene på, få dem med i gruppesamtalen. De fleste opplever at dette er ufarlig, og alle på gruppen er med fra starten av. Deretter sier elevene hva de tror er det mest riktige svaret.

I andre akt skal elevene hente inn data som gir dem mulighet til å finne en løsning på spørsmålet/problemstillingen som de valgte å gå videre med. Hva trenger vi å vite for å kunne løse spørsmålet/problemstillingen vi kom fram til? Gruppene diskuterer forslag som kommer opp. Dette gir muligheter for å bruke matematikkbegreper. Læreren kan velge å gi elevene de dataene de ber om, eller be dem anslå størrelser der situasjonen legger til rette for det. Noen ganger kan det være aktuelt at elever går videre med ulike opplysninger. Hvilke opplysninger som trengs, avhenger av hvordan elevene velger å løse problemet.

Tredje akt er arbeidsøkten. Nå skal elevene bruke opplysningene fra andre akt til å løse problemet. Til slutt sammenliknes løsningen med svarene de foreslo som for lite, for stort og mest riktig i første akt. I tredje akt er det også mulig å stille oppfølgingsspørsmål eller å se på flere av spørsmålene som dukket opp i første akt. Her ligger det mulighet for å tilpasse til den enkelte og mulighet til å gå i dybden.

## Eksempel på tre akter

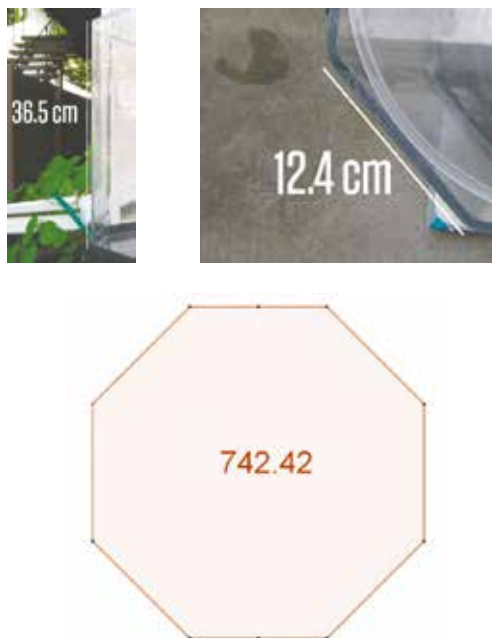
Dette eksempelet er knyttet til en situasjon som er hentet fra Dan Meyers nettsted. Først beskriver vi hvordan det ble gjennomført i en IT-klasse på videregående skole relativt kort tid etter skolestart da elevene skulle introduseres for lineære funksjoner. Temaet er kjent fra ungdomstrinnet, men erfaringsmessig har mange elever behov for repetisjon.

Første akt startet med en filmsnutt på 15 sek-

under der en person fyller vann i en tank med åttekantet bunn.

Elevene satt i grupper med 3–4 personer. De ble alle ganske raskt enige om at spørsmålet de ville ha svar på, var: «Hvor lang tid tar det å fylle tanken?» Alle gruppene gjorde seg så opp en mening om et svar som helt sikkert var for lite, og et svar som helt sikkert var for stort. De noterte dette ned sammen med gjetning om hva de trodde kunne være det mest riktige svaret.

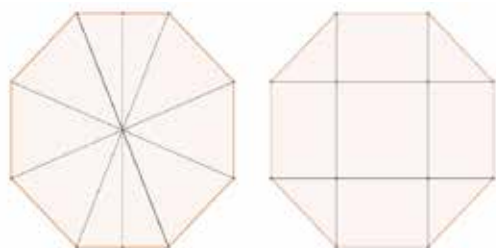
I andre akt diskuterte gruppene hva de trengte å vite for å finne svar på spørsmålet. Alle ønsker ble skrevet på tavlen og diskutert i fellesskap. Alle gruppene mente at de trengte å vite hvor fort vannet renner inn i tanken, for eksempel hvor mye vann som renner inn på ett minutt, eller hvor lang tid det tar å fylle én liter. I tillegg mente elevene at de trengte å vite tilstrekkelig med mål for å regne ut volumet av tanken. Alle ville vite tankens høyde, men de hadde litt ulike tanker om hvordan de kunne finne arealet av grunnflaten.



Figur 1: Tverrsnitt, lengde av en sidekant og høyden av tanken.

En gruppe sa bare at de trengte arealet av grunnflaten. Flere av gruppene sa at de ville dele opp den regulære åttekanten slik at de fikk figurer de kunne regne ut arealet av, dersom de hadde nødvendige mål. En gruppe bad om en formel for arealet av en regulær åttekant. Her var det mulig for læreren å få innsikt i elevenes forkunnskaper. Elevene fikk mulighet til å friske opp begreper og ferdigheter og lære noe nytt.

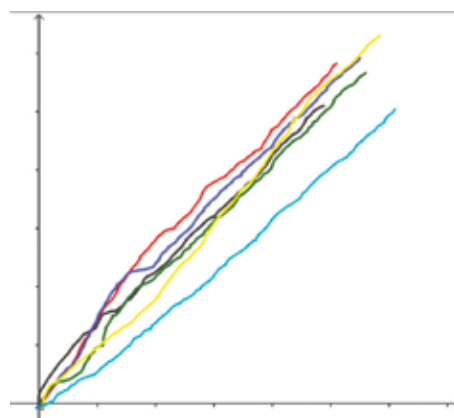
Dersom elevene ikke mestrer den nødvendige geometrien, eller dersom en ønsker å ha fokus på noe annet, kan elevene tegne en regulær åttekant med sidelengde 12,4 i GeoGebra og måle arealet.



Figur 2: Alle gruppene bestemte seg for å dele opp åttekanten. Det gjorde de på to ulike måter.

Da oppgaven ble gjennomført, hadde elevene ikke arbeidet med trigonometri. Grupper som delte åttekanten i åtte trekanter, fikk derfor oppgitt høyden i trekanten når de skulle beregne arealet. De som delte åttekanten i fem firkanter og fire trekanter, brukte Pytagoras' setning og klarte seg med lengden av sidekanten. Med denne oppdelingen hadde de også mulighet for å komme fram til formelen noen ønsket for arealet av en regulær åttekant.

Før elevene gikk videre til tredje akt, fikk alle gruppene spørsmålet: «Hvis dere skal lage en funksjon som beskriver hvordan tanken fylles med vann, hvordan vil grafen til denne funksjonen se ut?» Gruppene brukte penneverktøyet i GeoGebra og skisserte formen til grafen. Alle gruppene tegnet deretter sine grafer på samme PC slik at de fikk vist dem fram sammen (figur 3).



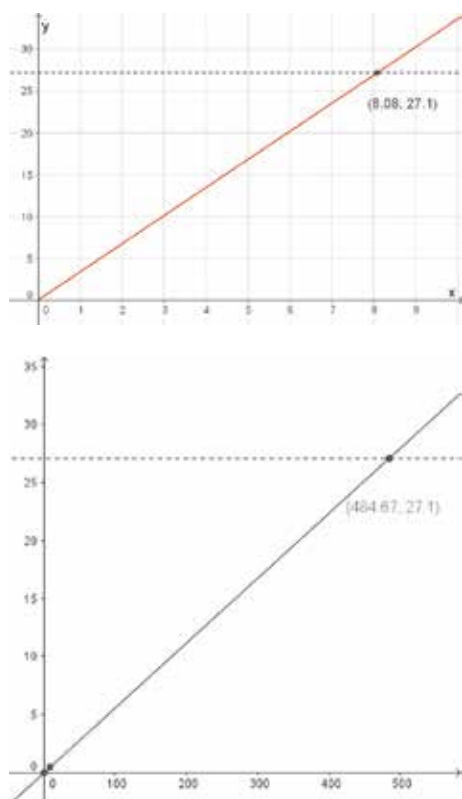
Figur 3: Funksjon som viser hvordan tanken fylles med vann.

I samtalen som fulgte, ble begreper som lineær funksjon, origo, stigningstall, konstantledd, proporsjonalitet, førsteakse, andreakse og rett linje brukt. Samtalen kom også inn på hva det betyr at den turkise linja er mindre bratt enn de andre.

Da var elevene klar for tredje akt. Oppdraget ble å tegne grafen til en funksjon som beskriver hvordan tanken fylles, og å bruke grafen til å finne ut hvor lang tid det tar å fylle tanken. De fikk vite at det tar 8,46 sekund å fylle 0,473 liter. Elevene hadde to ulike strategier for å tegne grafen. Noen ville finne funksjonsuttrykket først. De brukte opplysningen om hvor fort vannet kommer inn i tanken, til å regne ut stigningstallet og skrev deretter funksjonsuttrykket inn i GeoGebra. De regnet ut volumet av tanken, la inn dette som en vannrett linje i grafikkfeltet, fant skjæringspunktet og hadde løsningen.

Den andre strategien var å se på opplysningen om hvor mye vann som var i tanken etter 8,46 sekund som koordinatene til et punkt. Når de i tillegg visste at tanken var tom da filmen startet, kunne de tegne en linje gjennom de to punktene. Denne linjen vil være grafen til funksjonen de trengte.

Gruppene måtte i tillegg ta stilling til hvilken enhet de ville ha på førsteaksen: minutt eller sekund (figur 4).



Figur 4

Oppgaven har en «fasit» i form av en video som viser at det tar 8 minutter og 11 sekund å fylle tanken. Slik har en også mulighet til å diskutere hvor godt modellen stemmer med virkeligheten.

Et oppfølgingsspørsmål til denne gruppen kunne være: Kan dere løse oppgaven uten å regne ut volumet av tanken? Hva trenger dere da å vite? Dersom elevene, i stedet for å måle hvor lang tid det tar å fylle et visst volum, måler hvor høyt vannet står i tanken etter for eksempel ett minutt, kunne de klare seg fint uten volumet av tanken.

Filmen som var utgangspunktet, ble også presentert for en gruppe på 9. trinn. Elevene var her opptatt av geometri. De ville finne volumet av tanken og fikk ikke oppgitt mål, men

måtte bruke personen på filmen for å estimere høyde og lengder. De målte den av lærerne som de mente hadde samme høyde som personen i filmen, og fant at høyden på tanken var 35 cm, og at lengden på en sidekant var mellom 10 og 15 cm. Dette er veldig nær målene som er gitt i filmen.

De fleste gruppene syntes det var utfordrende å dele opp bunnen av tanken på en slik måte at de kunne regne ut arealet. Det var ingen grupper som gav opp, de brukte lærerne og hverandre til å finne og diskutere alternativ. Det å komme fram til en løsning etter å ha jobbet en stund så ut til å gi en god følelse. Mange var stolte over å ha løst utfordringene. Gruppene hadde en datamaskin tilgjengelig, men ingen valgte å tegne den regulære mangelkanten i GeoGebra. Dette tolker vi som at elevene trenger mer trening før et digitalt verktøy blir en naturlig del av verktøykassen de bruker når de arbeider.

I tredje akt fikk gruppen på 9. trinn utfordringer tilpasset det de trengte å arbeide mer med. Noen fikk arbeide videre med å bli sikrere på egenskaper ved figurer, mens andre fikk oppgave med å finne radius i en sylinderformet tank med samme høyde og volum. Gruppene presenterte til slutt løsningene for hverandre.

## Forberedelsesark til lærere

I denne arbeidsmetoden kan spørsmålene, arbeidsgangen og vurderingsformen gjøres på mange ulike måter. Det blir derfor nødvendig å tenke gjennom hva som er målet med arbeidet, og hvilke begreper og ferdigheter som skal ha fokus. Det er viktig å tenke gjennom hvilke spørsmål vi antar elevene vil stille, og hvilke opplysninger de vil kunne trenge. I et annet opplegg med Matematikk i tre akter vises en 20 sekund lang film om en løve som tar opp jakten på en sebra. Vi har laget et forberedelsesark som vi tenker er nyttig, og viser et eksempel på hvordan forberedelsesarket kan brukes for oppgaven introduseres for elevene (se side 7).

## Hvorfor arbeide med Matematikk i tre akter?

Å ha kompetanse i matematikk er å være klar til å kunne handle hensiktsmessig og med innsikt i situasjoner der matematikk inngår. Det handler om selv å kunne avgjøre hvordan matematikken kan hjelpe til å løse problemer, stille opp de matematiske uttrykkene, utføre beregningene og tolke resultatene og deres gyldighet i forhold til det opprinnelige problemet. For å utvikle slik kompetanse trenger elevene å være aktive, kreative og å kunne kommunisere i faget. Matematikk i tre akter er en metode der elevene får arbeide undersøkende. En matematikkøkt slik det er skissert i denne artikkelen, skiller seg i betydelig grad fra tradisjonell undervisning. Det er et trekk ved undersøkende matematikkundervisning at læreren introduserer en ny og kognitivt krevende oppgave eller aktivitet for elevene. Deretter får elevene god tid til å jobbe med aktiviteten. Læreren observerer arbeidet og kan oppmuntre til å finne nye løsninger eller til å beskrive hvordan de tenker. Timen avsluttes med at elevene diskuterer aktiviteten og presenterer de forskjellige løsningsmetodene som har blitt brukt.

Det finnes mange aspekter som påvirker elevenes motivasjon i matematikk på en positiv måte, i form av økt indre motivasjon og læringsorientering. Vår erfaring er at oppgaver og aktiviteter der elevene får samarbeide, er eksempler på aktiviteter/metoder som gir læringsmot. Dette er oppgaver der det er fokus på læringsprosessen og utvikling av forståelse i faget. Ved å arbeide med slike aktiviteter opplever elevene at deres arbeid underveis i prosessen blir sett og verdsatt. Det er ikke det endelige svaret som avgjør om de har lyktes i arbeidet. Åpne og problemløsende oppgaver har nesten alltid flere trinn og utregninger. Dette gir læreren mulighet til å vise elevene hva de mestrer, for deretter å hjelpe dem til å justere eller endre tenkningen der de trenger andre eller mer effektive strategier og flere begreper. Matematikk i tre akter er en arbeidsmetode som gir rom for å arbeide på denne måten både i grupper og klasser.

Læreplanmål som kan være relevante i denne Matematikk i tre akter:

### Ungdomstrinnet

- løse likninger og ulikskapar av første grad og likningssystem med to ukjende og bruke dette til å løse praktiske og teoretiske problem
- lage funksjonar som beskriv numeriske samanhengar og praktiske situasjonar, med og utan digitale verktøy, beskrive og tolke dei og omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar, som grafar, tabellar, formlar og tekstar
- identifisere og utnytte eigenskapane til proporsjonale, omvendt proporsjonale, lineære og kvadratiske funksjonar og gje døme på praktiske situasjonar som kan beskrivast med desse funksjonane

I arbeidet vil jeg ha fokus på:

*At elevene skal kunne bruke likninger til å løse praktiske problem.*

Viktige begreper: *likning, fart, vei, tid, sammensatte enheter, m/s, km/h*

### Note

- 1 Metoden kalles *3 Act Math* i Canada.

### Nettressurser

NORCAN: <http://norcan.ning.com/>

Tecumseh Vista Academy: <https://www.publicboard.ca/school/tecumsehvista-elem/Pages/default.aspx>  
<https://tapintoteenminds.com/real-world-math-tasks/>  
<http://blog.mrmeyer.com/2011/the-three-acts-of-a-mathematical-story/>  
<http://blog.mrmeyer.com/2013/teaching-with-three-act-tasks-act-one/>  
<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1jXStCoDzyDFeJimZxnhgwOVsWkTQEsfqouL-WNNC6Z4/pub?output=html>

# Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

<p><b>Første akt</b></p> <p>Bilde/film jeg vil bruke:</p> <p><i>Praktiske likninger: Jakten – filmen finnes på Lærernetstedet til NUMMER 8–10 (de 20 første sekundene av filmen)</i></p> <p>Spørsmål som elevene kan foreslå:</p> <p><i>Hvor lang tid vil det ta før løven fanger sebraen?</i></p> <p><i>Hva er farten til løven og sebraen?</i></p> <p>Spørsmål som velges å gå videre med:</p> <p>Elevene gjetter:</p> <p>For høyt/stort:</p> <p>For lavt/lite:</p> <p>Hva tror de svaret blir?</p>	<p><b>Andre akt</b></p> <p>Hva trenger vi å vite:</p> <p><i>Løven har en fart på 22 m/s</i></p> <p><i>Sebraen har en fart på 18 m/s</i></p> <p><i>Sebraen har et forsprang på 20 meter.</i></p> <p>Hvordan velger du å formidle det elevene trenger å vite?</p> <p><i>Jeg ønsker at elevene skal spørre om de opplysningene de trenger.</i></p> <p><i>Mulighet å snakke om fart m/s – km/h</i></p>
<p><b>Tredje akt</b></p> <p>Hvordan tror du elevene går fram for å svare på spørsmålet?</p> <p><i>Jeg tror noen kommer til å bruke likning. Mange elever vil prøve, tegne osv.</i></p> <p><i>Noen elever vil bruke GeoGebra, tenke funksjoner eller likning for rett linje.</i></p> <p>Hvilke problem kan de støte på, og hvordan komme videre?</p> <p>Hvordan er svaret i forhold til gjetting i første akt?</p>	<p><b>Oppfølgingsspørsmål</b></p> <p>Andre spørsmål fra første akt som vi nå kan finne svar på?</p> <p>Andre oppfølgingsspørsmål jeg kan stille?</p> <p><i>Hvor lang tid ville det tatt hvis sebraen hadde et forsprang på 50 meter, hvis farten var raskere/saktere?</i></p> <p><i>Hvor mange meter måtte forspranget vært hvis løven brukte 10 sekunder på jakten?</i></p> <p><i>Hvor raskt kan et menneske løpe?</i></p> <p><i>Hvor lang tid bruker dere på å løpe 500 meter?</i></p> <p><i>Hva er farten i m/s?</i></p>
<p><b>Plass til utregninger/annen informasjon:</b></p>	