Korden

«Jeg gir dere ikke løsningen!»

Hvor ofte får elever høre dette i matematikktimene av lærer? Er ikke lærere der nettopp for å hjelpe elever til å komme fram til løsninger snarest mulig? Hvis elever bruker for lang tid får de ikke tid til å løse nye problem. Å dvele med problemer uten å komme videre oppfattes lett av begge parter som sløsing av tid, og tid er erfaringsmessig en begrenset ressurs i skolen.

I media gjentas det stadig at elever gir for lett opp – de har ikke pågangsmot til å gå løs på matematikkproblemer som tar mer enn et par minutter å løse. Det kan være mange årsaker til dette fenomenet. En årsak kan være at både elever og lærere vurderer hva som gir uttelling i tester og på prøver. I disse er det i all hovedsak lagt opp til at oppgaver skal være greit løsbare innen rimelig tid. I lærebøker legges det også til rette for kjappe løsninger. Det gis regneoppgaver som gir hint om hvordan oppgaver skal løses. Står oppgaven i et divisjonskapittel, vet elever at den mest sannsynlig skal løses med divisjon. Tekstoppgaver med flere delspørsmål leder elevene fram til siste spørsmålet som er det egentlige problemet. Å arbeide med «liksom-problem» som det forventes en løsning på innen kort tid kan virke lite engasjerende og meningsfulle, ikke minst for ungdommer. Det er ikke få oppgaver det forventes at en elev skal løse gjennom 10 års skolegang.

Hva med å engasjere elever i reelle problemer? Reelle problemer må ikke være knyttet til hverdagslivet, de er reelle fordi de oppfattes slik av elever. Kanskje kan spørsmål oppfattes reelle fordi elever selv engasjeres i å finne ut hva problemet er. Elever kan bli invitert til å finne sammenhenger og argumentere som i artikkelen om bruken av «imaginære dialoger» av Lekaus og Askevold. Problemer som ikke nødvendigvis er matnyttige men som viser uventede sammenhenger, som i eksempelet til Kristensen om tauet rundt jordkloden, har også potensiale til å oppfattes reelle. Slike grep kan være nok til å stimulere elever til å strekke seg utover de to minuttene som vanligvis bruker på en oppgave.

Kanskje skal vi som lærere si litt oftere til elever at vi ikke gir dem løsningen? På den måten kan vi vise elever tillit: vi har tro på dem som problemløsere!

Toril Eskeland Rangnes

Ellen Konstanse Hovik

Eksakte svar – brøk og kvadratrøtter

Som lærer i matematikk gjennom mange år og for mange ulike grupper fra ungdomsskole via teknisk fagskole til lærerutdanning opplever jeg stadig episoder som viser at mange har svake kunnskaper og ferdigheter i brøkregning og generelt i regning med eksakte tall. Dette betyr at det er nødvendig å arbeide med oppgaver som kan sette i gang prosesser hos elevene slik at de kan erfare hva et rasjonalt tall kan representere. Det samme gjelder for irrasjonale tall som for eksempel kvadratrøtter og pi. I denne artikkelen vil jeg først vise et spesifikt oppgaveeksempel for deretter å kommentere noen utfordringer oppgaven kan gi elever.

Bretting av sirkel, oppgaveeksempel

Oppgaven har jeg brukt mye i geometriundervisning. Jeg møtte oppgaven første gang på et LAMIS-kurs (Tromsø 2006), og det er nok mange som kjenner den. Oppgaven ble presentert i forbindelse med geometri. På kurset kom vi ikke inn på beregninger, men det ble nevnt at den er velegnet til det. Jeg begynte umiddelbart å bruke den i egen undervisning ved lærerutdanningen på HIO.

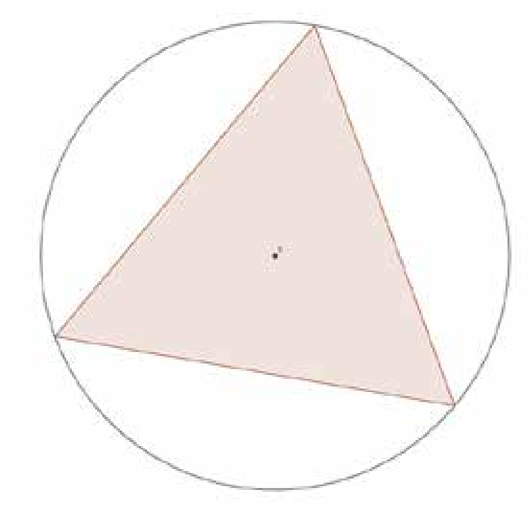
Oppgaven går ut på å brette en sirkel slik at du ender opp enten med et tetraeder eller en sekskant. Det er en innholdsrik oppgave hvor mange begreper og beregninger fra geometri anvendes. Selve brettingen gir støtte til å se sammenhenger mellom størrelser i de figurene som dannes. I tillegg til det visuelle knyttet til brettingen vil elevene også benytte tegninger eller skisser underveis for å sette opp regneoppgavene.

Jeg har brukt oppgaven både for lærerstudenter i grunnutdanningen og for lærere på videreutdanning. Gjennom arbeid med denne oppgaven har jeg erfart at det store flertallet av studenter og lærere i utgangspunktet velger å gjøre alle tall om til desimaltall selv om det egentlig er raskere og lettere å regne med brøk og kvadratrøtter. Denne oppdagelsen har ført til at jeg nå alltid utfordrer mine studenter til å regne eksakt når de løser oppgaven. Dermed blir dette like mye en oppgave i tallregning som i geometri. Gjennom å erfare hvor enkelt det er å bruke brøk, håper jeg motivasjonen for å lære bort det å regne med brøk øker. Regning med røtter har en høyere terskel enn med brøk, men også her blir det tydelig at regningen forenkles.

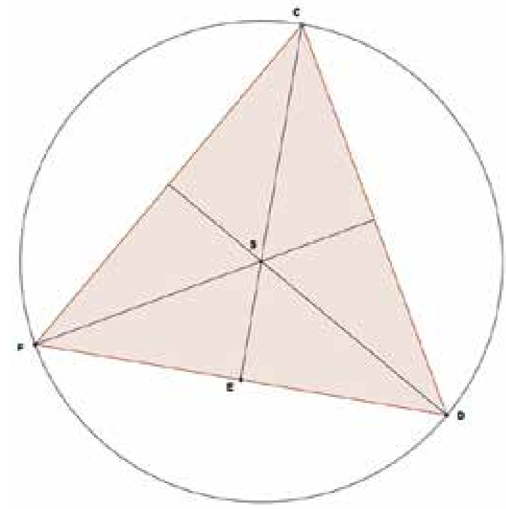
Løsningsforslag sirkeloppgave

Her gjennomgås sirkeloppgaven med systematisk bruk av brøk og kvadratrøtter i beregningene for å vise / minne om fordelene med det. Selve oppgaven er kanskje heller ikke like

Ellen Konstanse Hovik
Høgskolen i Oslo Akershus
Ellen-Konstanse.Hovik@hioa.no



Figur 1: Likesidet trekant og tre like store segmenter



Figur 2: Seks rettvinklede trekanter

godt kjent av alle. Utgangspunktet er å la elevene klippe ut en stor sirkel med gitt radius: $r = 1$. Det at man her oppgir en lengde uten å angi benevning som cm eller dm, er uvant for mange elever.

Første deloppgave går ut på å brette tre like store segmenter inn mot sentrum av sirkelen slik at du får en likesidet trekant (se figur 1). Her knyttes begrunnelsen for at den er likesidet, til at det skal brettes tre like store segmenter som danner omsirkel til likesidet trekant. Et annet argument for at den er likesidet, kan for eksempel være å vise det ved å brette trekanten slik at to hjørner møtes, gjenta og se at sidene er like lange. Da fås dessuten en rettvinklet trekant (30°, 60°, 90°) som det er fint å ta utgangspunkt i for å utvide oppgaven. Her velger jeg å hoppe over den rettvinklede trekanten og går direkte til den likesidede trekanten (figur 1). Første regneoppgave er:

Oppgave:
Hva er den likesidede trekantens areal?

Det er flere hensiktsmessige inndelinger av figuren. Jeg velger her å dele trekanten i seks rettvinklede trekanter (se figur 2).

$\angle$SDE er halvparten av vinkelen i en likesidet trekant, $\angle$SDE = 30°. Punktet E ligger midt på DF. S er sentrum for sirkelen, men også for de tre midtnormalene som er en del av en omsirkelkonstruksjon. Kunnskap om 30°, 60°, 90°-trekant tilsier at SE = 1/2 siden hypotenusen SD = radius = 1. Vi kan også argumentere ved hjelp av at selve brettingen av segmentet viser at E ligger halvveis mellom sirkelbue og sentrum S. Vi beregner ED ved hjelp av Pytagoras:

$$ED = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

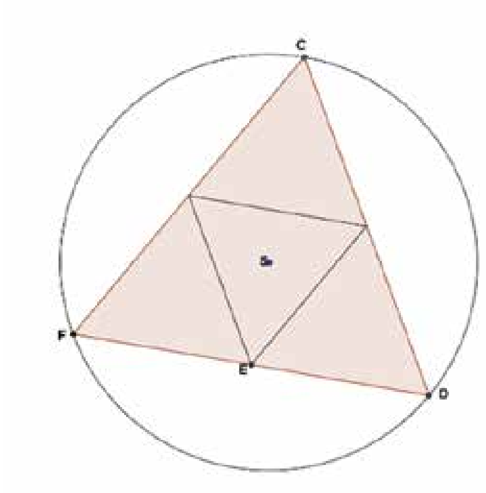
Grunnlinjen FD blir det dobbelte:

$$FD = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

Høyden i trekant CFD vil være 1 + 1/2 = 3/2.

$$\text{Areal } \Delta CFD = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{3}$$

Neste oppgave er å brette hjørnene i trekanten over mot midtpunktet på motstående side og deretter løfte hjørnene opp slik at de møtes i



Figur 3: Overflate av tetraeder

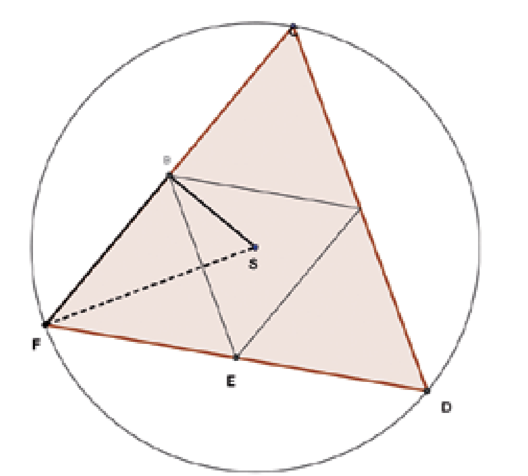
en «spiss». Figuren vi da får, er en regulær pyramide med likesidede trekanter som sideflater. Denne pyramiden kalles et tetraeder siden den har fire (tetra) like store flater. Brettingen viser at alle kantene i tetraedret er $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$ (figur 3)

Oppgave:
Hva blir overflaten av pyramiden?

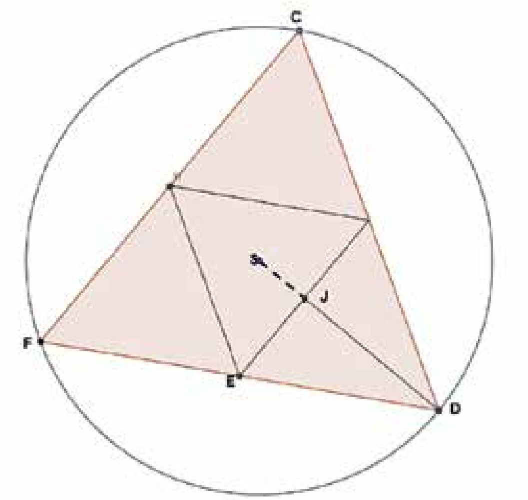
Det har vært interessant å observere at studenter fra grunnutdanning og videreutdanning ofte overser at de allerede har beregnet overflaten. Dette gir en fin anledning til å minne om at overflate er arealet av den flaten som danner romlegemet, og ikke bare arealet av den av sideflatene som vender opp, slik vi gjerne bruker begrepet i dagligtale. Overflaten er lik arealet av likesidet trekant: $O = \frac{3}{4}\sqrt{3}$.

Oppgave:
Hva blir volumet av pyramiden?

For å beregne volum trengs grunnflate og høyde. Grunnflate (heller ikke opplagt for alle) får vi ved å dividere arealet av likesidet trekant *CDF* på fire (se figur 3):



Figur 4: Høyden SF beregnes ut fra kantene i tetraedret



Figur 5: Høyden i tetraedret regnes ut via høyden i sideflatene.

$$G = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Med god kunnskap om regneregler for brøk og røtter er dette hoderegning.

Høyden i pyramiden kan beregnes på flere måter. Velger man hjørnekanten av pyramiden som hypotenus i en rettvinklet trekant med lengde $FS = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vil grunnlinjen SB = 1/2 være katet i denne trekanten (se figur 4). Dette er det lett å se hvis man følger med på brettingen. Høyden blir dermed:

$$h = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Alternativt kan høyden beregnes ved å la høyden i likesidet trekant som danner sideflatene i pyramiden, være hypotenus (se figur 5). Sideflatens høyde er 3/4 av opprinnelig sirkelradius, den kjente kateten blir da SJ = 1 – 3/4 = 1/4. Dette kan enten begrunnes bare ved å se på brettingen eller beregnes med utgangspunkt i at kantene i tetraedret er $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ og at halvparten av den igjen er $\frac{1}{4}\sqrt{3}$, som gir hypotenus (se figur 5)

$$DJ = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

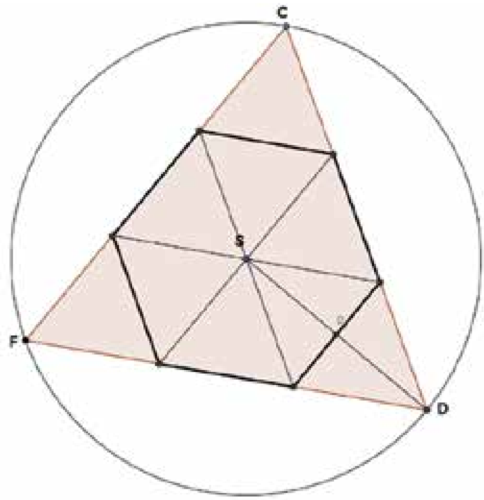
Regnestykket for høyden blir da:

$$h = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{16}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Pyramidens volum er gitt ved formelen

$$V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}{3} = \frac{3\sqrt{6}}{96} = \frac{\sqrt{6}}{32}$$

Oppgaven kan utvides til å beregne kanter og areal av en regulær sekskant (se figur 6). Denne sekskanten fås ved å gå tilbake til likesidet trekant. I stedet for å brette hjørnene over til midtpunktet på motstående side brettes de inn til sentrum av opprinnelig sirkel. Det dannes ni likesidede trekanter hvor sidekantene i hver trekant er 1/3 av grunnlinjen i den opprinnelige likesidede trekanten (figur 6). Dette kan ses med begrunnelse i brettingen. Alternativt beregnes



Figur 6: Sekskant

ved Pytagoras' setning. Grunnlinjen blir derfor $g = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, som også er lengden av sidekantene i sekskanten. Høyden er halve radius: SB = h = 1/2 og kan brukes til å regne arealet av sekskanten. Enklest er det likevel å regne 6/9 = 2/3 av opprinnelig likesidet trekant: Areal sekskant:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Hvorfor eksakte tall?

Når er det meningsfullt å gjøre svarene om til desimaltall? Å angi svar i avrundede desimaltall i tillegg til eksakte svar kan være fornuftig. Hvis man regner alt med desimaltall, vil man få et avvikende svar avhengig av hvor mange desimaler man underveis tar med seg i utregningene. Nøyaktighet er et selvsagt og viktig poeng med å regne eksakt, men mange vil nok ikke se den direkte nytteverdien av dette i skolen. Her kan samarbeid med estetiske fag og teknologi og design være aktuelt. Det er etter mitt syn viktig å bruke muligheten en oppgave som denne gir i å trene på eksakt regning i kontekst. I Eksamen for grunnskolen vår 2013 Del 2 oppgave 7a blir det bedt om å vise at en side er $\sqrt{50}$ cm, i oppgave 10 blir det bedt om å vise at en side er $\sqrt{2} \cdot r$. Dette viser en økt oppmerksomhet om eksakt regning.

At mange velger desimaltall og kalkulator, kan blant annet komme av følgende:

1. I skolen (og delvis også i lærerutdanning) er det en tradisjon at når hensikten med oppgaven er å finne lengder i en geometrisk figur, vektlegges ikke regneferdigheter. Det er ikke det som skal være i fokus: «Én ting om gangen».
2. Som en følge av punkt 1: Bruk kalkulator.
3. Noen forbauses over at det i det hele tatt er mulig å betegne en lengde som for eksempel 3/4 eller $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, og går umiddelbart over til 0,75 eller runder av til 0,71.

Hva kreves for å regne eksakt her?

Sirkeloppgaven er stor og omfattende, og det er lett å gjøre feil underveis. Jeg mener at den krever kunnskaper og ferdigheter som er nødvendige for matematikklærere. Jeg synes å ha erfart at de eldste lærerne ofte behersker dette bedre enn de yngre. Dette har jeg ikke belegg for å generalisere, men hvis min erfaring skulle være representativ, kan man tenke seg at kalkulatorbruk gjennom egen skolegang kan være årsaken. Å regne med tall oppgitt som brøk, røtter eller kombinasjoner av brøk og røtter som hode- og papirregning krever mye trening. Man kan spørre seg hvorfor vi lærer barn å utvikle regnestrategier og gode regneferdigheter hvis de ikke også skal bruke disse til beregninger knyttet til en kontekst.

Brøker kan begrepsmessig ses på både som forhold mellom to tall og som ett tall. Å se på divisjon av heltall som et selvstendig matematisk objekt er å se det som noe mer enn en divisjonsprosess og krever at elevene utvikler forståelse av brøk som tall (Behr, Post, Harel & Lesh, 1993). Når vi sier at SE = 1/2, er det både en kvotient (1 : 2) hvor radius halveres, det er del/hele hvor en halv er en del av én, og det er et mål for sidens størrelse. Senere i oppgaven brukes brøk både som operator (multiplikator) og som mål: $\frac{3}{4}\sqrt{3}$. Regner man om til desimaltall, slik man ofte gjør i skolen, vil ikke doblingen av $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ bli så enkel som her: «En halv roten av tre ganget med to er en hel roten av tre.» Å kvadrere en brøk er en direkte anvendelse av «teller ganger teller, nevner ganger nevner» og er lettere enn å kvadrere et desimaltall Kunnskap om definisjonen av kvadratrøtter er nødvendig for å kunne regne med dem. I oppgaven over er det nettopp anvendelse av selve definisjonen: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ som er viktig i beregningene. Her et eksempel:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 2} = \frac{3}{4}$$

Å oppgi et svar på formene 1/2, $\sqrt{3}$ eller $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ er som nevnt tidligere uvant for flere generasjoner elever, og dermed også våre lærerstudenter og lærere. De ser på brøkstreken som en divisjonsordre og kvadratrottegnet som en regnekommando de kan utføre på kalkulatoren. De vil altså betrakte svarene som uferdige regnestykker som de ønsker å gjøre om til «tall». Spesielt vil det gjelde tall på formen $\frac{3}{4}\cdot\sqrt{3}$ brukt som mål på f.eks. en lengde eller et areal. Siden det her står et multiplikasjonstegn, er det for så vidt ikke så merkelig. Sånn sett kan det være mer hensiktsmessig å skrive det som én brøk: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Et tall på denne formen er en brøk, men ikke et rasjonalt tall. Hensikten med å skille ut det rasjonale tallet 3/4 er i hovedsak at det sier oss intuitivt mer om størrelsen på svaret.

Hva gir arbeid med dette oss?

Oppgaven har en bred horisont både framover og bakover i matematikk-planene. Matematikken de møter har sammenheng med matematikk fra småtrinnet og med matematikk fra

(fortsettes side 11)

Andreas Lorange

Kjøkkenhager, hobbypinner og kvadratiske funksjoner

Hva er sammenhengen mellom kjøkkenhager, hobbypinner og kvadratiske funksjoner? Og hva har dette å gjøre med en kanadisk forsker som heter Luis Radford? Hvis du leser videre, kan du få vite mer om dette.

I denne artikkelen skal jeg beskrive en læringsaktivitet som er beregnet for ungdomstrinnet. Et viktig mål med aktiviteten er at elevene skal lage en kvadratisk funksjon som modellerer et praktisk problem. Følgende tre faser er sentrale i forbindelse med elevenes løsningsprosess.

Fase 1: Bruke hendene og visualisere
Fase 2: Bruke språket
Fase 3: Bruke de algebraiske symbolene

I den første fasen skal elevene bruke hobbypinner for å utforske det praktiske problemet. I den andre fasen skal elevene sette ord på det de gjorde i den første fasen, og i den tredje fasen skal elevene bruke algebraiske symboler for å uttrykke det de gjorde i den første og den andre fasen. Målet er at elevene skal kunne uttrykke en funksjonssammenheng med algebraiske symboler. Da dette kan være utfordrende for mange elever, legger denne læringsaktiviteten til rette for at elevene først får uttrykke funksjonssammenhengen gjennom handlinger og deretter gjennom sitt eget språk. Da kan det bli enklere å skulle uttrykke funksjonssammenhengen med algebraiske symboler til slutt. Denne måten å arbeide på er inspirert av den kanadiske forskeren Luis Radford. Hans teorier er omfattende, men i denne artikkelen vil jeg gi en svært forenklet fremstilling av noen få sider ved hans teorier. Jeg vil avslutte med å skrive litt om hvordan denne læringsaktiviteten kan knyttes opp mot de grunnleggende ferdighetene.

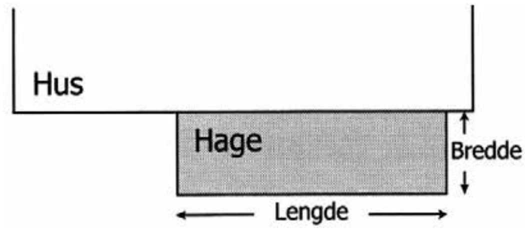
Kjøkkenhagen

Utgangspunktet for læringsaktiviteten er følgende problem (se figur 1):

> Dere skal gjerde inn et område som skal brukes til kjøkkenhage. Hagen skal ligge inntil en husvegg. Dere har 24 gjerdeenheter, hver på 1 meter. Hagen skal ha rektangelform. Gjerdeenhetene kan ikke bøyes eller deles opp. Bruk hobbypinnene til å lage de ulike rektanglene som er mulige med de 24 gjerdeenhetene. Finn lengden og bredden til den kjøkkenhagen som har det største arealet.

Dette problemet er hentet fra lærerveiledningen til den matematiske kofferten (Stedøy, 2006, s.

Andreas Lorange
NLA Høgskolen
andreas.lorange@nla.no



Figur 1: Denne figuren er hentet fra lærerveiledningen til den matematiske kofferten (Stedøy, 2006, s. 33).

33–34). Elevene arbeider med problemet i grupper på tre.

Fase 1: Bruke hendene og visualisere

I forbindelse med denne fasen skal elevene bygge de ulike rektanglene og tegne dem på rutepapir. Deretter skal de finne lengden til kjøkkenhagen og dens areal for de ulike verdiene av bredden. Mens de gjør dette skal de skrive ned hva de kommer frem til. Elevene kan selv velge hvordan de skal presentere arbeidet sitt. Figur 2 viser tegninger av fire slike kjøkkenhager og et eksempel på hvordan en tabell kan brukes som presentasjonsform.

Et endemål med disse læringsaktivitetene er at elevene skal kunne uttrykke lengden som en funksjon av bredden. Hvis vi kaller bredden til kjøkkenhagen for b, kan lengden uttrykkes som $24 - 2b$. Radford (2006) argumenterer for at elevene først skal få en mulighet til å uttrykke slike sammenhenger gjennom konkrete handlinger. I forbindelse med fase 1 er det akkurat dette som skjer.

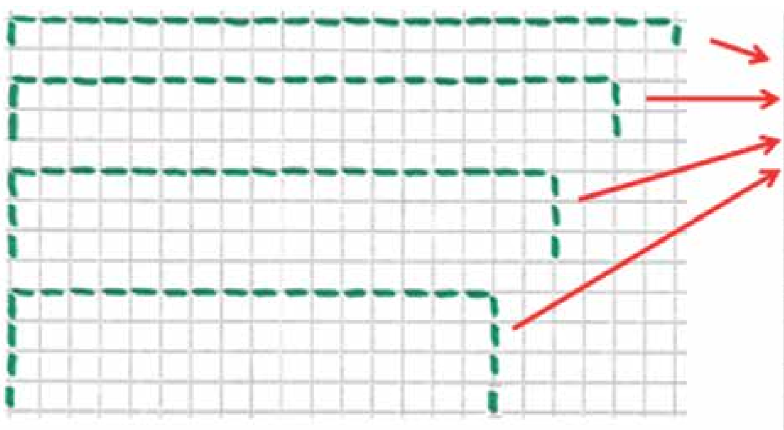
Fase 2: Bruke språket

I denne fasen skal elevene uttrykke sammenhengen mellom lengden og bredden av kjøkkenhagen ved hjelp av et språk som er naturlig for dem (Radford, 2010). De arbeider med de fire spørsmålene nedenfor og fordeler følgende roller mellom seg: Den ene eleven stiller spørsmålene, den andre svarer og den tredje sjekker om svaret er riktig. Deretter byttes rollene slik at alle får spille alle roller.

1. Hvis bredden er 1 m, hva er da lengden? Forklar hvordan du tenkte.
2. Hvis bredden er 2 m, hva er da lengden? Forklar hvordan du tenkte.
3. Hvis bredden er 3 m, hva er da lengden? Forklar hvordan du tenkte.
4. Hvordan kan vi finne lengden hvis vi kjenner bredden? Forklar hvordan du tenkte.

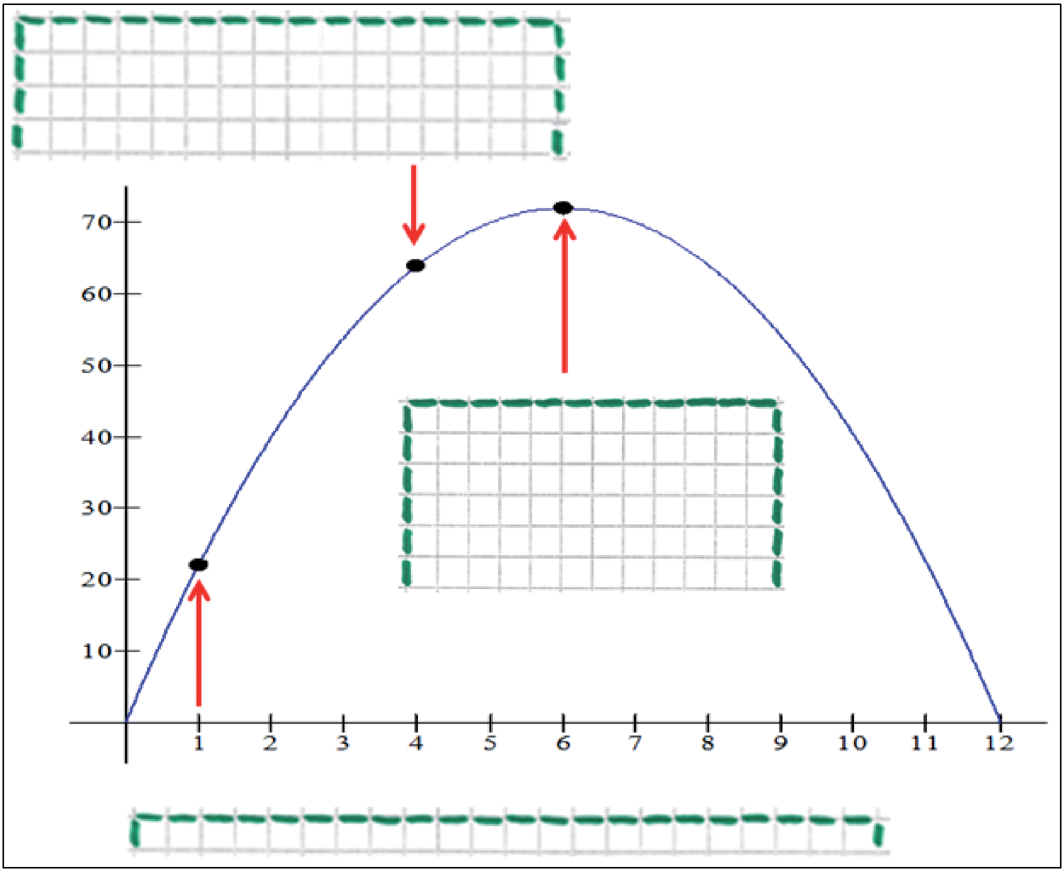
Etter at alle elevene har spilt alle rollene skal gruppene arbeide med følgende oppgave:

> Skriv en tekstmelding til en elev som ikke har vært til stede i dag som forteller hvordan



Bredde	Lengde	Areal
1	22	22
2	20	40
3	18	54
4	16	64
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		

Figur 2: Tegning av ulike kjøkkenhager og utfylling av tabellen.



Figur 3: Sammenhengen mellom grafen til arealfunksjonen og tre av kjøkkenhagene.

vi kan finne lengden av kjøkkenhagen hvis vi kjenner bredden. Diskuter med hverandre og bli enige om hvordan dette kan gjøres. Deretter skal en elev på gruppa sende tekstmeldingen til lærerens mobiltelefon[1].

Når elevene skal svare på spørsmål 1–4, har de en rekke uttrykksformer tilgjengelige. De kan bruke hobbypinner, figurer eller pekegester samtidig som de bruker sitt muntlige språk. Når elevene skal skrive en tekstmelding, kan de kun uttrykke seg gjennom skriftlig språk. Derfor er det nødvendig at presisjonsnivået økes for at den eleven som skal lese meldingen skal være i stand til å finne lengden av kjøkkenhagen når bredden er oppgitt. Oppgaven ovenfor prøver å legge til rette for en slik økning av presisjonsnivået ved at elevene skal diskutere seg imellom og bli enige om en skriftlig forklaring som skal sendes til lærerens mobiltelefon. Læreren samler alle disse meldingene på et ark eller på skolens læringsplattform. De ulike gruppene skal deretter diskutere følgende spørsmål:

1. Hvilken tekstmelding var best, og hvorfor var den best?
2. Hva mener gruppen bør være med i en slik forklaring?

Når gruppene er ferdige med å diskutere, kan læreren lede en klassediskusjon med utgangspunkt i disse spørsmålene.

I fase 1 ble sammenhengen mellom lengden og bredden uttrykt gjennom konkrete handlinger. En viktig hensikt med fase 2 er å legge til rette for at elevene skal uttrykke sammenhengen mellom lengden og bredden gjennom både muntlig og skriftlig språk. En mulig elevrespons på denne aktiviteten kan være: «Vi finner lengden ved å begynne med 24 og trekke fra bredden to ganger fordi det er to kortsider.»

Fase 3: Bruke de algebraiske symbolene

I forbindelse med denne fasen skal elevene bruke algebraiske symboler for å uttrykke det de gjorde i fase 1 og 2. Elevene arbeider med følgende oppgave:

1. Kall bredden for b og lengden for l. Uttrykk l ved hjelp av b. Finn en formel for arealet.
2. Tegn grafen til arealfunksjonen i et koordinatsystem på et ruteark og ved hjelp av et graftegningsprogram. Sammenlign de to grafene.
3. Hva er den største verdien arealet kan ha? Hvor lange er sidene da?

Målet er at altså elevene skal kunne uttrykke sammenhengen mellom lengden og bredden med algebraiske symboler. Da dette kan være utfordrende for mange elever, har Radford argumentert for at elevene først skal få uttrykke slike sammenhenger gjennom handlinger, og deretter gjennom sitt eget språk. Da kan det bli enklere å skulle uttrykke slike sammenhenger med algebraiske symboler til slutt.

Grafen til arealfunksjonen

Ved å sammenligne plottet av grafen fra graftegningsprogrammet med grafen de tegnet for hånd kan elevene finne ut om de har kommet frem til riktig formel for arealet. Videre kan elevene lære mye av å øve seg opp i å se sammenhenger mellom grafen til arealfunksjonen og de ulike kjøkkenhagene. Derfor kan elevene oppfordres til å klippe ut tegninger av noen av kjøkkenhagene de laget og markere de punktene på grafen som svarer til disse kjøkkenhagene. Resultatet av dette arbeidet kan presenteres for resten av klassen ved at alle gruppene henger opp hver sin plakat der de viser sammenhengen mellom ulike kjøkkenhager og de tilhørende punktene på grafen. I figur 3 har jeg gitt et eksempel på hvordan en slik plakat kan lages.

Læringsaktiviteten og de grunnleggende ferdighetene

Den muntlige ferdigheten innebærer å skape mening gjennom å samtale om matematiske problemstillinger. Denne læringsaktiviteten legger til rette for dette ved at alle elevene får en mulighet til å besvare de fire spørsmålene i fase 2. Sannsynligvis vil ulike elever besvare disse spørsmålene på forskjellig måte, og dermed legges det til rette for en diskusjon når elevene skal bli enige om hvordan de skal formulere en tekstmelding til en fraværende elev som forklarer hvordan man kan finne lengden av kjøkkenhagen når bredden er oppgitt. Dette innebærer at elevene må gjøre seg opp en mening og argumentere for sitt syn, noe som er en viktig del av den muntlige ferdigheten.

Å kunne skrive i matematikk innebærer å kunne sette ord på oppdagelser, tankemåter og ideer. Dette får elevene anledning til når de skal formulere en tekstmelding til en fraværende elev. Den skriftlige ferdigheten innebærer også å kunne uttrykke seg gjennom et formelt matematisk språk for å kunne løse et problem, og å lage tabeller og grafer. Dette får elevene trening i fase 3 når de skal finne en formel for arealet av kjøkkenhagen og tegne grafen til arealfunksjonen.

Å kunne regne som grunnleggende ferdighet innebærer blant annet å kunne bruke varierte strategier og matematiske symboler for å kunne løse et praktisk problem. Elevene får trening i dette når de skal prøve å kjenne igjen matematikken i den praktiske situasjonen og bruke matematiske metoder for å løse problemet. Når elevene sammenligner plottet av grafen til arealfunksjonen med sin egen tegning av denne grafen, får de en mulighet til å vurdere gyldigheten av sine egne løsninger.

Den digitale ferdigheten i matematikk innebærer blant annet å kunne bruke digitale verktøy til visualisering og presentasjon. Dette får elevene en mulighet til når de skal plotte grafen til arealfunksjonen. Hvis det er ønskelig, kan også plakaten som viser sammenhengen mellom ulike kjøkkenhager og de tilhørende punktene på grafen lages i PowerPoint eller i et annet presentasjonsprogram. Hvis man ønsker å fokusere mer på den digitale ferdigheten, kan man også lage tabellen i et regneark. Da kan elevene uttrykke hvordan man finner både lengden til kjøkkenhagen og dens areal ved hjelp av formler i regnearket.

Note

1 Hvis læreren ikke ønsker å oppgi mobilnummeret sitt til elevene, kan alle elevene skrive ned forklaringen sin på en lapp og gi den til læreren.

Referanser

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. I S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Red.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, November 9–12* (Vol. 1, s. 2–21).

Radford, L. (2010). Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. I V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Red.), *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 6)* (s. XXXIII–LIII). Lyon: Université Claude Bernard.

Stedøy, I. M. (2006). *Ingvill M. Stedøys Matematiske Koffert, Modul 2 for ungdomstrinnet, Lærerveiledning*. Løvenstad: Simplicatus.

(fortsatt fra side 6)

videregående skole. Ulike geometribegreper som kan være vanskelige å skille – volum, overflate, sidekant, sideflate, høyde i to- og tredimensjonale figurer – erfares visuelt. I trigonometri regner man ofte med eksakte verdier av sinus, cosinus og tangens til 30° og 60°. Å bruke én som enhet for radius eller for side i trekant finner vi igjen i enhetssirkel og enhetstrekant.

Det kan være mer verdifullt å fordype seg i en større oppgave som denne enn å regne mange mindre oppgaver. Oppgaven er kognitivt utfordrende for elevene. Den inviterer til å argumentere ved hjelp av ulike representasjoner som bretting, tegning og aritmetikk. Det er viktig å holde orden på beregningene underveis siden svarene brukes videre i beregninger, dermed blir den skriftlige kommunikasjonen med medelever, lærer og med seg selv viktig. Det er viktig at en lærer har tenkt godt gjennom det eksplisitte målet med oppgaven og har kompetanse til å forutse hvordan elevene vil løse den (Smith & Stein, 2011).

Referanser

Behr, M., Post, T., Harel, G. & Lesh, R. (1993): Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis – Emphasis on the Operator Construct. I T. Carpenter, E. Fennema, T. Romberg (red.): *Rational Numbers. An Integration of Research.* Hillsdale, New Jersey: Laurence Erlbaum Associates.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). 5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions. *The National Council of Teachers of Mathematics.*

Silke Lekaus, Gjert-Anders Askevold

Matematisk argumentasjon gjennom «imaginære dialoger»

Hvordan kan lærere engasjere elever i bevis- og argumentasjonsprosesser? På hvilken måte kan vi få tilgang til elevers tankesett i disse kreative prosessene? I et pågående prosjekt undersøker vi bevis- og argumentasjonsprosesser på 8. trinn. Vi har gjennomført en arbeidsmetode kalt «imaginære dialoger» knyttet til emne geometri. I denne artikkelen undersøker vi elevenes skriftlige dialoger for å få innsikt i hvordan elevene utvikler argumentasjon og begynnende bevis.

Imaginære dialoger

Vi ble inspirert av en form for matematisk skriving kalt *imaginære dialoger*, som er både en oppgaveform til bruk i klasserommet og en forskningsmetode som ble introdusert av Annika Wille, se Wille (2011) og Wille & Boquet (2009). Brukt som forskningsmetode undersøker Wille hvordan metoden kan gi tilgang til elevenes tankesett i bevis- og argumentasjonsprosesser. Brukt som læringselement i klasserommet introduserer læreren en skriftlig begynnelse på en dialog mellom to tenkte elever som funderer på et matematisk problem. Elevene skal hjelpe de to imaginære elevene til å undersøke problemet og fortsette å skrive dialogen. Ideer kan skrives ned av den ene imaginære eleven som påstander eller spørsmål som den andre kan argumentere for eller imot. Et mål er at hele tankeprosessen som elevene går gjennom, kommer fram i dialogen, både fruktbare og mindre fruktbare ideer. Elevene blir derfor oppfordret til ikke å bruke viskelær eller stryke over noe de har skrevet, når de finner ut at en idé ikke fører fram. Blindveier vil da bli synlige som en del av diskusjonen mellom de to tenkte elevene. Elevene i klasserommet skriver en dialog hver for seg. Én og samme elev tar dermed to roller i skriveprosessen. Et ønske bak metoden er at eleven skal få hjelp til en matematisk diskusjon og argumentasjon «med seg selv». Elevene skal også erfare at blindveier er en naturlig del av matematisk argumentasjon som hverken kan eller bør unngås. Forskningsresultater av Wille viser at dialogskrivingen kan hjelpe elevene å utvikle sine matematiske ideer, og at spor av deres egen tenkning vises i dialogene mellom de imaginære elevene (ibid.). Metoden har derfor potensial å hjelpe læreren å få mer innsikt i elevenes argumenter og tenkemåter.

Gjert-Anders Askevold
Høgskolen i Bergen
gjert-anders.askevold@hib.no

Silke Lekaus
Høgskolen i Bergen
silke.lekaus@hib.no

Argumentasjon

For å undersøke argumentasjonene i elevenes dialoger (skriftlige og muntlige) brukte vi Heinzes modell for faser i bevisprosesser knyttet til matematikklæring (Heinze, 2004), se figur 1.

Heinze gjorde en undersøkelse av lærerstyrte bevisprosesser i åtte forskjellige klasserom, der matematiske bevis ble utviklet i en klasseromsamtale mellom læreren og elevene. Heinze påpeker at det må skilles mellom den kreative prosessen med å utvikle et bevis på egen hånd og gjennomgangen av et ferdig bevis, noe som også er viktig for oss. I undersøkelsen ble blant annet tidsbruken i de enkelte bevisfasene brukt som indikator for å vurdere i hvor stor grad elevene fikk anledning til en selvstendig utforskning av antakelsene og utviklingen av en bevisidé. Heinze observerte at det ofte bruktes relativt kort tid på fase 3, der fokuset nettopp ligger på å undersøke problemet og antakelsene og å generere bevisideen. Dette var noe vi ville se nærmere på. Hos en matematiker vil fase 3 ofte ta lang tid, siden den er preget av kreativitet og det å finne ideer, prøve dem ut, feile og finne nye ideer. En mulig årsak til at denne fasen tar forholdsvis lite tid i noen av de undersøkte klasserommene, kan i følge Heinze være at elevene i disse tilfellene ledes mot et ferdig bevis som læreren har valgt. Selv om læreren tar imot innspill fra elevene, blir elevene som regel ledet av læreren gjennom hint og spørsmål. Elevene får dermed ikke mulighet til å gå fullstendig inn i den kreative prosessen med å utvikle et bevis selv.

Fase 1: Undersøkelse av problemsituasjonen, formulering av hypotese, finne argumenter for at hypotesen virker plausibel
Fase 2: Presis formulering av hypotesen i henhold til etablerte språkkonvensjoner i klasserommet
Fase 3: undersøkelse av problemet og antakelsene, generering av bevisidé
Fase 4: kombinasjon av argumentene funnet i fase 3 til en deduktiv argumentasjonskjede som gir et bevis; muligens bare muntlig
Fase 5: presis formulering av et bevis i henhold til etablerte språkkonvensjoner i klasserommet

Figur 1

Imaginære dialoger i grupper

I vårt forsøk med imaginære dialoger modifiserte vi metoden og lot elevene jobbe i grupper. Siden elevene ikke hadde jobbet med metoden før, fryktet vi at terskelen ville bli for høy for noen elever om de skulle skrive dialoger hver for seg.

Dialogoppgaven ble prøvd ut i en åttendeklasse med 30 elever. Klassemiljøet oppfattet vi var åpent og inkluderende, og gruppearbeid og diskusjon var mye benyttet. Derfor syntes vi at det var en kontekst som var egnet for utprøving. Det var første gang vi møtte elevene, og de var ikke kjent med arbeidsformen fra før av. Læreren delte klassen i sju ulike grupper med fire–fem elever i hver. Vi samlet inn det skriftlige materialet som elevene produserte i løpet av hver økt, både de ferdige dialogene og eventuelle tegninger og notater som elevene hadde gjort underveis. Dialogen som er gjenstand for denne analysen, ble skrevet av en gruppe bestående av to gutter og to jenter som læreren regnet som faglig sterke. Elevene fikk dialogoppgaven i figur 2.

Det matematiske læringsmålet med denne oppgaven er at elevene skal oppdage at det ikke finnes en entydig sammenheng mellom areal og omkrets, dvs. at ulike figurer med samme omkrets kan og vil ha forskjellig areal. Matematisk argumentasjon gjennom dialogskriving sikter i tillegg mot arbeidet med den grunnleggende ferdigheten å skrive i matematikk. I læreplanen LK06 står det at å kunne skrive i matematikk «inneber å beskrive og forklare ein tankegang og setje ord på oppdagingar og idear», og at skriving i matematikk «er ein reiskap for å utvikle eigne tankar og eiga læring».

Lise og Yaqub er to elever som går i åttende klasse.

Lise: Nylig lærte vi om areal og omkrets i mattetimen. Så lurte jeg: Har alle trekanter med lik omkrets også like stort areal?
Yaqub: Det er et godt spørsmål. Det har jeg aldri tenkt på. Skal vi forsøke å finne ut av det?

Hva tror dere? Kan dere hjelpe Lise og Yaqub?

Figur 2

Den gitte dialogen introduserer en problemstilling og skal vekke interesse for en selvstendig utforsking av problemet med skriveprosessen som støtte.

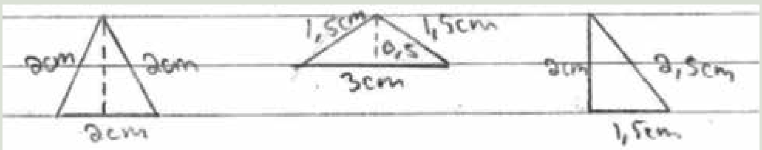
Analyse av elevenes skriftlige dialog

Læreren introduserte oppgaven og ba elevene å formulere svaret i form av en dialog. Vi observerte at dialogene ble skrevet i slutten av gruppediskusjonen og ikke underveis i diskusjonen. I gruppen som dialogen i figur 3 er hentet fra, er det de to jentene som skriver ned dialogen. De bruker sine egne navn. Dette kan tyde på at dialogen oppsummerer diskusjonen i elevgruppen. Det kan virke som om elevene først ønsker å finne svaret på oppgaven før de skriver dialogen. Dette kan ha flere årsaker: Én grunn kan være at elevene ikke er vant med arbeidsformen å skrive dialoger om matematiske problemstillinger, en annen grunn kan være at elevene ikke er vant til å argumentere slik oppgaven krever. En tredje grunn kan være at elevene er mest vant til å jobbe innenfor det som Skovsmose (2003) kaller oppgaveparadigmet, som kjennetegnes av oppgaver som skal gi *ett* rett svar, og der blindveier og uferdige forsøk ikke er verdsatt. En fjerde grunn kan ha vært at det ble oppfattet som for krevende å stoppe opp i gruppediskusjonen for å skrive ned ideer og delløsninger underveis.

En elevgruppe på fire elever, to gutter og to jenter, skrev dialogen i figur 3 (vår renskrivning med elevenes originale tegninger).

I dialogen er det Hege som kommer med hypotesen om at det finnes trekanter med samme omkrets, men forskjellig areal. I samme ytring nevner hun faktakunnskap som kan være nyttig å bruke, nemlig at «arealet avhenger jo av grunnlinjen og høyden til trekanten». I dialogen er det Kaja som foreslår hvordan problemet kan utforskes videre: «Vi kan lage tre forskjellige trekanter med en omkrets på 6 cm og måle areal.» Det er verdt å merke seg at hun kaller

Hege: Jeg tror at trekanter med samme omkrets ikke nødvendigvis har samme areal. Arealet avhenger jo av grunnlinjen og høyden til trekanten.
Kaja: Vi kan lage tre forskjellige trekanter med en omkrets på 6 cm og måle areal.
Hege: God ide. Det gjør vi. Fem minutter senere har vi tegnet tre trekanter og målt areal:



Kaja: Ferdig! Målene ble: 2 cm2 på første trekant, 0,75 cm2 på andre trekant og den siste trekanten hadde 1,5 cm2.
Hege: Konklusjonen må bli at trekanter med samme omkrets ikke nødvendigvis har samme areal

Figur 3

dette å *måle* areal når de egentlig måler lengder og beregner areal. Vi ser på dette som et tegn på at elevene enda ikke har utviklet et presist matematisk språk. Hege får rollen med å støtte bevisideen: «God idé. Det gjør vi.» Dette kan tyde på at gruppen i sin diskusjon har kommet til enighet om at denne metoden skal brukes. Det kan også være tegn på at elevene er vant til å få støtte for sine ideer av en autoritet, for eksempel læreren eller læreboken, før de går i gang med arbeidet. Elevene tegner deretter tre trekanter med en omkrets oppgitt til å være 6 cm. De bruker de påsatte målene for grunnlinje og høyde og beregner arealet. Vi ser bare resultatet av dette arbeidet i dialogen. Utregningene blir gjort på et kladdeark.

Det er interessant å se på de tre trekantene som elevene bruker som grunnlag for sin argumentasjon. Det kan virke som om elevene tar i betraktning de tre mest kjente spesialtilfellene av trekanter: likesidet, likebeint og rettvinklet. Når vi kontrollerer trekantenes faktiske mål, oppdager vi at de er delvis forskjellige fra de påsatte måltallene. Det virker som elevene veksler mellom å bruke de tegnete trekantene som tankeskisser og som faktiske figurer som de kan ta mål av, til tross for at trekantene ikke er presise konstruksjoner.

Den første trekanten er likesidet med sidelengde på 2 cm. Elevene beregner dens areal til 2 cm^2 når den egentlig skal være $\sqrt{3}$ cm^2. Når vi ser på elevenes kladdeark, ser vi at de har satt høyden til også å være 2 cm. Det kan hende at elevene antar at avstanden mellom linjene på papiret er 1 cm, som er vanlig linjeavstand i elevenes skrivebøker, men det var ikke tilfelle på det utdelte skrivepapiret. Høyden og arealet av den likesidete trekanten er altså egentlig mindre enn det elevene har regnet ut. Også den andre trekanten er interessant å se nærmere på. Grunnlinjen er 3 cm, mens de to andre sidene er 1,5 cm hver, altså også 3 cm til sammen. Denne trekanten har egentlig høyde lik 0 cm, den er bare en strek og har areal på 0 cm^2. Det virker for at elevene er mest opptatt av at summen på sidene er 6 cm, og ikke reflekterer over om trekantene faktisk eksisterer med de oppgitte måltallene. Bare den tredje trekanten som er tegnet med en rett vinkel, eksisterer med alle de påsatte målene. En rask sjekk, for eksempel ved hjelp av Pytagoras' setning, viser at den rettvinklede trekanten med kateter på 2 cm og 1,5 cm har hypotenus av lengde 2,5 cm, slik som elevene påstår. Elevene har imidlertid ikke lært Pytagoras' setning i undervisningen enda, og det virker derfor tilfeldig at hypotenusen har rett lengde. Dette støttes av at det ikke finnes noen utregninger på kladdearkene som tyder på bruk av Pytagoras' setning. Når elevene er ferdige med å beregne arealene til trekantene, markerer det slutten på innsamlingen av faktaopplysninger som de trenger for å fullføre argumentasjonen.

Bevismetoden som elevene tar i bruk, ligner på et såkalt bevis med selvmotsigelse, der en antar (muligens implisitt) at alle trekanter med omkrets på 6 cm har samme areal, og prøver å produsere et moteksempel. Dette er en mye benyttet bevismetode blant matematikere. Beviset til elevene er likevel ufullstendig, siden de konkluderer på basis av bare én trekant, den rettvinklede, som virkelig eksisterer med de påsatte målene. For å fullføre beviset matematisk korrekt måtte de imidlertid ha funnet minst to trekanter som virkelig eksisterer, med samme omkrets og forskjellig areal.

Diskusjon

Vi sammenlikner prosessen til den observerte elevgruppen i vår klasse med fasene i Heinzes modell. Spesielt er vi interessert i å finne ut om arbeidsformen har fått elevene til å eksperimentere selvstendig i fase 3, med å finne ideer, prøve dem ut, feile og finne nye ideer. Selv om dialogen deres ble skrevet i slutten av diskusjonen, gir den oss et visst inntrykk av en prosess og arbeidsfaser som elevene har gått gjennom i sin argumentasjon. Elevene formulerer først en hypotese: det finnes trekanter med samme omkrets som ikke har samme areal. Det er ikke synlig fra dialogen hvordan elevene har kommet fram til denne. Formuleringen av hypotesen er forholdsvis presis, og vi tilordner den derfor fase 2 som er presis formulering av hypotesen i henhold til etablerte språkkonvensjoner i klasserommet. Heges neste utsagn: «Arealet avhenger jo av grunnlinjen og høyden til trekanten» kan tolkes som en begynnelse av fase 3: elevene samler fakta som kan være til hjelp i argumentasjonen, i dette tilfelle formelen en bruker for å beregne areal av en trekant. Ordet «jo» i Heges utsagn kan imidlertid også tolkes slik at setningen oppsummerer gruppens diskusjon i fase 1, «Undersøkelse av problemsituasjonen, formulering av hypotese, finne argumenter for at hypotesen virker plausibel», når elevene utvikler argumenter for å gjøre hypotesen sin plausibel. Fortsettelsen av elevenes dialog plasserer vi i fase 3. Elevene bestemmer seg for strategien som de skal bruke i sitt bevis: De vil tegne flere trekanter med samme omkrets, måle dem og beregne areal. Dette er en bevismetode som vil føre fram i dette tilfellet: Hvis en klarer å finne minst to trekanter med samme omkrets, men som har forskjellig areal, har en bevist hypotesen om at lik omkrets ikke trenger å gi samme areal. Elevene begynner så på en utforskningsfase der de tegner trekanter på kladdearkene sine, måler lengder og beregner areal. I den innleverte dialogen ser vi bare resultatet av dette arbeidet. I elevenes arbeid med dialogen består fase 3 dermed av en diskusjonsdel og en utprøvingsdel.

Til slutt samler elevene resultatene fra utprøvingen, nemlig at trekantene har forskjellig areal. Dette gjenkjenner vi som fase 4, som kjennetegnes av at en samler argumenter og drar en slutning, selv om argumentasjonen er implisitt. I siste linje sier Hege: «Konklusjonen må bli at trekanter med samme omkrets ikke nødvendigvis har samme areal.»

Dialogen som helhet som ble skrevet ned til slutt, er elevenes avsluttende formulering av beviset. Vi plasserer den derfor i fase 5. Den gjør rede for den valgte bevismetoden og er godt strukturert, men selvfølgelig er bevisgangen ikke fullstendig siden to av trekantene elevene skisserte ikke eksisterer.

Potensialet i imaginære dialoger

Observasjon av elevenes arbeid i klasserommet og analysen av den skriftlige dialogen har vist at elevgruppen ved bruk av gruppediskusjon og dialog som metode brukte mesteparten av tiden på undersøkelsen av problemsituasjonen som tilhører fase 3. Denne fasen anser Heinze som den viktigste, siden det er her den matematiske utforskningen foregår. Elevene fikk ingen hjelp underveis, hverken fra oss eller læreren, og de utviklet bevisideen selvstendig. Når det gjelder elevenes selvstendige arbeid med matematisk argumentasjon, har arbeidsformen derfor fungert etter vår intensjon hos denne elevgruppen. Potensialet som kan ligge i en imaginær dialog som skriftlig prosess og produkt beskrevet av Wille (2011), ble ikke fullt utnyttet. Vi hadde forventet at den skriftlige dialogen var lengre, og at den var skrevet samtidig som elevene utforsket problemstillingen. I så fall ville mer av argumentasjonsprosessen kommet fram i dialogen, og vi kunne ha fått mer innsikt i elevenes tenkemåte. Dette var imidlertid elevenes og lærerens første møte med arbeidsformen å skrive dialog i matematikktimen, og de trenger tid til å bli fortrolig med denne. Her kan det også ha spilt inn at vi lot elevene jobbe i grupper, og at det kan ha virket tungvint for elevene å avbryte diskusjonen for å skrive ned uferdige ideer. Det kan også ha vært forvirrende for elevene at den skriftlige dialogen kan ha flere konkurrerende roller og aspekter. Den kan 1) være manus til et matematisk skuespill mellom to tenkte elever, 2) være et slags referat av elevenes egen diskusjon i sanntid eller 3) bli skrevet i ettertid som en oppsummering av det som elevene fant ut. Vi finner imidlertid at dialogen som arbeidsmetode hjalp elevene å strukturere fremstillingen av bevisideen og argumentasjonen. Selv om beviset ikke er helt korrekt, synes det ikke å være en lang vei å gå fra den skrevne dialogen til et matematisk mer formelt bevis av påstanden. Dialogen fikk elevene på egenhånd til å dvele ved fase 3 i Heinzes modell og utviklet argumentasjonen deres. Vi finner at denne tilnærmingen til imaginære dialoger virker lovende for å utvikle elevers matematiske argumentasjon.

Referanser

Heinze, A. (2004). The proving process in mathematics classroom - method and results of a video study. *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 41–48 (Vol. 3)). Bergen: Bergen University College.

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I O. Skovsmose & M. Blomhøj, *Kan det virkelig passe? Om matematiklæring* (s. 143–158). København: L & R Uddannelse.

Wille, A. (2011). Activation of inner mathematical discourses of students about fractions with the help of imaginary dialogues: A case study. *Proceedings of the 35th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 337–344).

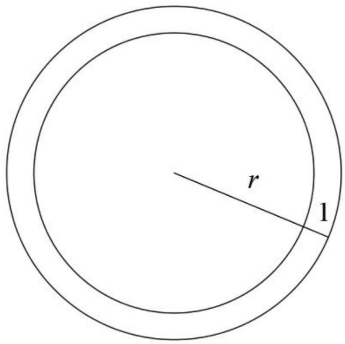
Wille, A., & Boquet, M. (2009). Imaginary dialogues written by low-achieving students about origami: A case study. *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (s. 3–5 (Vol. 1)).

Kai Forsberg

Tau rundt jorda

Noe av det jeg husker best fra matematikktimene på ungdomsskolen er lærerens introduksjon av en «tau rundt jorda»-problemstilling. Oppgaven kan gis ulike formuleringer, men essensen kan uttrykkes slik (se figur 1):

- Jorda betraktes som en fullkommen kule.
- Et tau som i utgangspunktet ligger tett langs en av jordas storsirkler, forlenges slik at det i stedet følger periferien til en sirkel med 1 meter større radius (se figur 1).
- Hvor mye må det opprinnelige tauet forlenges for å få dette til?



Figur 1

Jeg husker at svaret overrasket meg, og at jeg lot meg fascinere av det svært korte matematiske beviset som fulgte:

(1) $$2\pi(r + 1) - 2\pi r = 2\pi,$$

som betyr at tauet blir 2π meter lengre enn jordomkretsen, og at resultatet faktisk er uavhengig av radien! Hvis radien hadde økt med s meter, ville tauet på tilsvarende måte blitt $2\pi s$ meter lengre enn jordomkretsen. Ofte blir problemet stilt slik at man oppgir tauforlengelsen til et visst antall meter og spør om et dyr eller et menneske kan passere oppreist under tauet uten å berøre det. Hvis tauforlengelsen er 12 meter, må en niendeklassing være over 1,91 meter høy for ikke å kunne passere under tauet fordi $12/2\pi \approx 1{,}91$.

Ifølge Pickover (2009, s. 162) skal problemet første gang ha vært lansert i William Whistons bok «The Elements of Euclid» i 1702. Et google-søk på «rope around the earth» ga i underkant av 30 millioner treff, noe som er en overbevisende manifestasjon av interesse og engasjement. Min gjetning er at spørsmål som vedrører jorda, verdensrommet og store dimensjoner, og som samtidig konkluderer mot den allmenne menneskelige intuisjon, engasjerer bredt. Denne artikkelen angir noen ideer til eksperimentering, utforsking og generalisering

Kai Forsberg Kristensen
Høgskolen i Telemark
kai.f.kristensen@hit.no

knyttet til den opprinnelige «tau rundt jorda»-problemstillingen. Mot slutten tar jeg opp en annen kjent og beslektet oppgave, der resultatet kanskje i enda større grad går mot intuisjonen, men der matematikken er noe mer krevende.

Eksperimentering og teori

Mens noen elever, særlig på ungdomstrinnet, raskt vil kunne godta at tauet rundt jorda blir 2π meter lengre enn jordomkretsen på grunn av likning (1), er andre avhengige av å erfare denne sannheten gjennom en type eksperimentering. Min tanke er at GeoGebra egner seg godt for å illustrere at økningen i omkrets er uavhengig av radius. Jeg har valgt å ta med en relativt detaljert beskrivelse av hvordan dette kan gjøres:

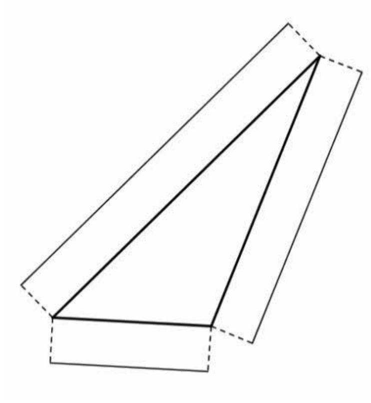
- Velg «Nytt punkt» og avsett deretter et vilkårlig punkt. Dette punktet får navnet A.
- Velg «Sirkel definert ved sentrum og periferipunkt», og klikk deretter på A. Når du beveger markøren, dukker det opp en sirkel som du selv kan bestemme radien til ved å klikke når den er passelig stor. Da dukker periferipunkt B opp der du har klikket.
- Velg «Linje gjennom to punkt», og klikk deretter på punktene A og B. Da får du opp en rett linje gjennom A og B, som derfor står normalt på sirkelen.
- Lag en sirkel med sentrum i B og radius=1 (eller et annet tall) ved først å velge «Sirkel definert ved sentrum og radius».
- Velg «Nytt punkt», og klikk på det ytre skjæringspunktet som linjen gjennom A og B får når den krysser sirkelen med radius = 1. Dette punktet får navnet C.
- Velg igjen «Sirkel definert ved sentrum og periferipunkt», og klikk deretter på A og C. Da dukker sirkelen i avstand 1 opp (tauet).
- Nå er tiden inne til å usynliggjøre de objektene som ikke er sentrale. Ved å høyreklikke på den rette linjen gjennom A og B og deretter velge «Vis objekt», fjerner du visningen av denne linjen. Det samme kan du gjøre med sirkelen med sentrum i B og med punktet C.
- Ved først å velge «Flytt» (Pil) kan man nå dra i punkt B ved å holde venstre musetast nede for å få fram sirkler med ulik radius. Den ytre sirkelen i avstand 1 følger med på lasset.
- Omkretsen til de to sirklene som synes, kan beregnes ved at man først velger «Avstand eller lengde» og deretter klikker på sirklene.
- I algebrafeltet til venstre kan man se hvilke navn omkretsene (og alle andre objekter) har fått. Hvis den største av de to konsentriske sirklene heter «sirkelomkrets e» og den minste «sirkelomkrets c», kan man skrive «differanse = sirkelomkrets e – sirkelomkrets c» i inntastingsfeltet i bunnen for å finne omkretsdifferansen.

Hvis man varierer radien i den indre sirkelen ved å «dra» i punkt B, kan man i algebrafeltet se at omkretsdifferansen holder seg konstant (lik 6,28). En slik demonstrasjon kan lede til at elevene også fatter interesse for en bakenforliggende forklaring i form av algebra. Et annet spor vil være å bruke omkretsformelen i Excel og beregne omkretsdifferanser med utgangspunkt i ulike radier (med jordradien som én av dem).

Selv etter å ha akseptert teorien vil nok mange likevel fortsatt slite med intuisjonen. Hvordan kan det ha seg at tauet, som henger hele 1 meter over jordoverflaten rundt hele jorda, virkelig ikke blir mye, mye lengre? Kanskje hjelper det å tenke at den store jorda til gjengjeld får veldig liten krumning. Hvis en bitteliten vinkelåpning i jordas sentrum svarer til en avstand på 1 meter langs jordperiferien, vil den samme vinkelåpningen bare gi marginalt større lengde langs tauet. Hvis jorda byttes ut med en tennisball, blir det på grunn av den økte krumningen stor forskjell på å gå langs tennisballens overflate og langs en sirkel som ligger 1 meter lenger ute.

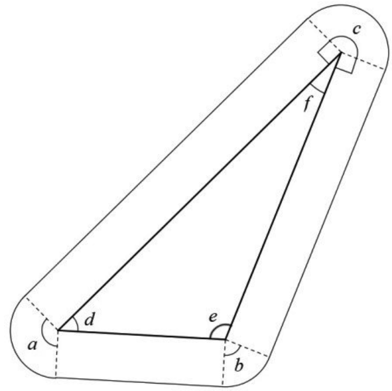
Tau rundt trekanter

For nysgjerrige elever finnes det rike muligheter for å utvide problemstillingen til å dreie seg om tau rundt andre geometriske former, for eksempel ulike typer mangekanter. Blir for eksempel tauet i en avstand på 1 meter rundt en trekant også 2π meter lenger enn trekantomkretsen? Sentralt for å besvare dette spørsmålet er hvordan man forholder seg til hjørnene. Det kan være en god idé først å tegne inn like lange paralleller til trekantsidene i avstand 1 meter, slik figur 2 antyder.



Figur 2

Parallellenes lengde er derfor til sammen lik omkretsen av trekanten. For at avstandskravet skal bli oppfylt hele veien, må tauet følge en sirkelbue rundt hvert hjørne, slik figur 3 viser. Hvis det nå er slik at $a + b + c = 360°$, vil tauet bli 2π meter lenger enn trekantomkretsen. Figur 4 viser det øverste hjørnet mer detaljert.



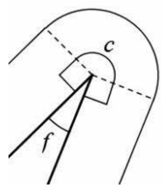
Figur 3

Siden det er 360° rundt hele sirkelen, vil $f + 90° + c + 90° = 360°$, noe som betyr at $c = 180° - f$. I de andre hjørnene skjer det samme, slik at $a = 180° - d$ og $b = 180° - e$. Dette fører til at

$$\begin{aligned} a + b + c &= 180° - d + 180° - e + 180° - f \\ &= 540° - (d + e + f). \end{aligned}$$

Generelt gjelder at summen av vinklene i en trekant er 180°, slik at

$$a + b + c = 540° - 180° = 360°.$$



Figur 4

Dette viser at et tau som ligger rundt en trekant i en avstand på 1 meter, også vil være 2π meter lengre enn trekantomkretsen. At forskjellen i omkrets ikke er avhengig av hvordan trekanten ser ut, lar seg illustrere elegant ved hjelp av GeoGebra på tilsvarende måte som med sirkelen:

- Velg «Nytt punkt», og avsett tre punkter A, B og C som ikke ligger på linje.
- Velg «Linjestykke mellom to punkt», og lag sidene i trekanten.
- Gjennom hvert hjørne opprettes en normal til hver av sidene som møtes i hjørnet (altså to normaler i hvert hjørne). Dette gjøres ved først å velge «Normal linje» og deretter klikke på punktet og så den aktuelle trekantsiden.
- I hvert hjørne slås en sirkel med radius = 1 ved å velge «Sirkel med definert sentrum og radius». De seks aktuelle skjærings-

punktene (kalt D, E, F, G, H og I) mellom normalene og sirklene markeres etter at du først har valgt «Nytt punkt».

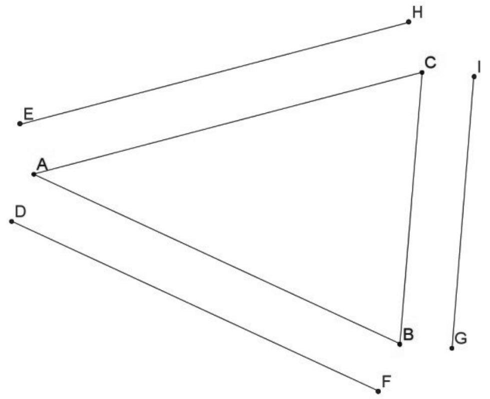
- Når du har laget linjestykkene DF, EH og GI, kan det se ut som på figur 5 når visningen av normalene og sirklene er tatt bort (høyreklikk og velg «Vis objekt» for å få visningen til å forsvinne).
- Sirkelbuene som er knyttet til hvert hjørne, og som binder den ytre kurven (tauet) sammen, lages ved at man først velger «Sirkelbue definert ved sentrum, radius og punkt». Sirkelbuen i hjørne B (med vinkel γ) kan man få frem ved deretter å klikke på B, F og G etter tur.
- For å få synliggjort (for eksempel) vinkelen γ og dens størrelse velger man først «Vinkel», hvorpå man klikker på F, B og G (se figur 6).
- Summen $\delta = \alpha + \beta + \gamma$ kan man finne ved å skrive dette inn i inntastingsfeltet (trykk på α-symbolet helt til høyre for å få greske bokstaver). Da dukker tallet $\delta = 360°$ opp i algebrafeltet.

Poenget nå er at man kan dra hjørnene A, B og C dit man vil, uten at vinkelsummen på … (og dermed omkretsforskjellen) endrer seg. Dette illustrerer at tauet rundt trekanten må ha en lengde som er 2π meter (hvis enheten er meter) lengre enn trekantomkretsen.

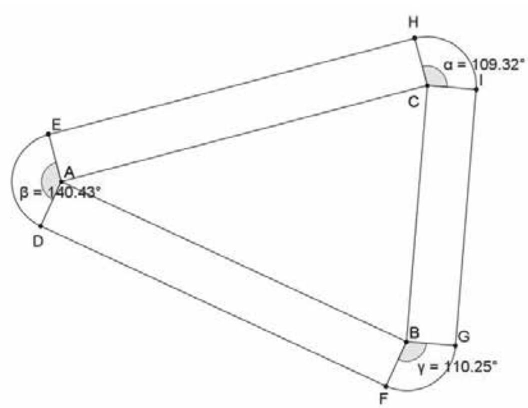
Tau rundt konvekse mangekanter

En mangekant (polygon) som er slik at alle de indre vinklene er mindre enn 180°, kalles konveks. Trekanter, trapeser, parallellogrammer og regulære mangekanter er eksempler på konvekse figurer. Se på firkanten i Figur 7.

Den indre vinkelen i A er større enn 180°, så denne firkanten er ikke konveks. Mer generelt vil et område i planet eller rommet være konvekst dersom hele den rette linjen mellom vilkårlig valgte punkter i området, alltid ligger innenfor området. I figur 7 vil for eksempel ikke hele den rette linjen mellom E og F oppfylle



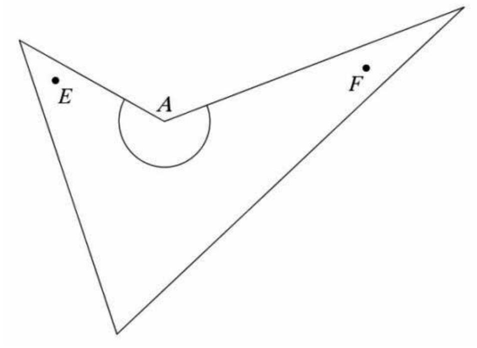
Figur 5



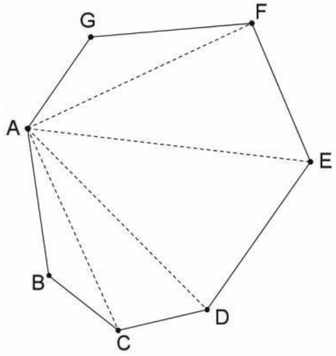
Figur 6

dette kravet. Et tau rundt denne firkanten i en avstand vil måtte formes som i figur 8. Sirkelbuene i B, C og D og i figur 8 spenner over mer enn 360°, slik at man må bruke mer enn $2\pi s$ meter tau ekstra rundt disse hjørnene. Det brukes imidlertid mindre tau på D'A' og A'B' enn på DA og AB, men det viser seg at denne forskjellen ikke svarer eksakt til overforbruket av tau i de tre hjørnene. At taulengden øker med $2\pi s$ når tauet har avstand fra jordomkretsen, gjelder for konvekse mangekanter, men ikke for mangekanter generelt.

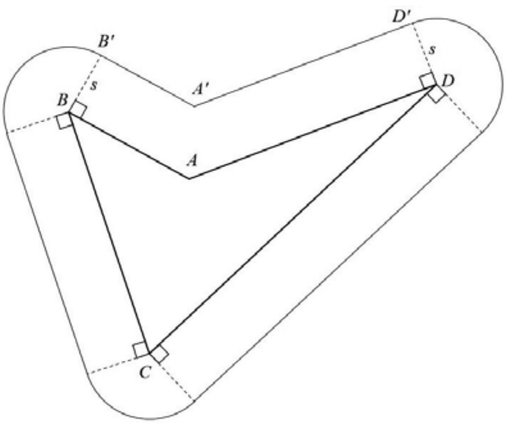
Ethvert hjørne i en konveks mangekant vil i prinsippet se ut som i figur 4, der $c + f = 180°$. Hvis man har å gjøre med en n-kant med tilsvarende vinkler knyttet til hjørnene, vil derfor



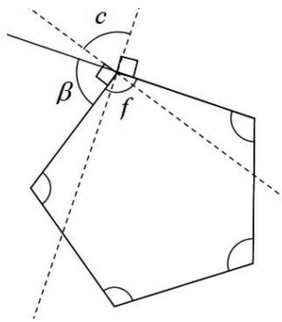
Figur 7



Figur 9



Figur 8



Figur 10

$$(2) \qquad (c_1 + f_1) + \ldots + (c_n + f_n) = n \cdot 180°.$$

I formel (2) er $f_1, \ldots, f_n$ de indre vinklene. Siden en konveks n-kant alltid kan deles inn i $n - 2$ trekanter, kan man finne summen $f_1 + \ldots + f_n$.

Figur 9 illustrerer nemlig det faktum at summen av vinklene i de $n - 2$ trekantene (i fem trekanter i sjukanten) blir lik $f_1 + \ldots + f_n$. Siden hver trekant har en vinkelsum på 180°, betyr dette at

$$f_1 + \ldots + f_n = (n - 2) \cdot 180°$$

slik at

$$c_1 + \ldots + c_n = n \cdot 180° - (n - 2) \cdot 180° = 360°.$$

Figur 10 viser at man med dette resonnementet samtidig har demonstrert en kjent egenskap ved konvekse mangekanter, nemlig at summen av de ytre vinklene alltid er 360°. Den ytre vinkelen β blir her lik c fordi det gjelder at $f + \beta = 180°$ og $f + c = 180°$.

Siden egenskapen med konstant tauforlengelse gjelder for alle konvekse mangekanter, er det ikke overraskende at man kan generalisere dette resultatet til å gjelde *alle kontinuerlige kurver* omkring konvekse områder. Glatte kurver kan oppnås som grensetilfeller der antall hjørner i mangekanten går mot uendelig.

Når tauet strammes til

Dersom det er mot intuisjonen at et tau i en fast avstand på 1 meter over en perfekt kuleformet jord bare er 2π meter lengre en jordomkretsen, er kanskje svaret på følgende oppgave mot intuisjonen i motsatt retning, i den forstand at svaret blir større enn man tror.

Oppgaven:

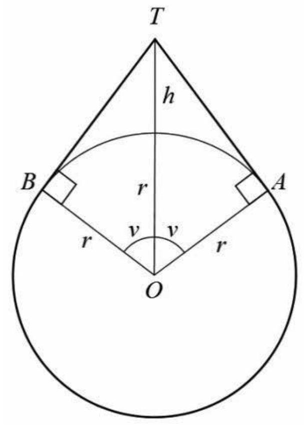
Tenk deg jorda som en perfekt kule med radius r = 6371 km. La oss si at du har tilgang på et (meget sterkt) tau som er bundet sammen, og som er to meter lengre enn jordomkretsen. Dette tauet strammes til slik figur 11 viser, i en versjon der taulengden (og dermed høyden over bakken) er svært overdrevet.

Tauet følger altså bakken tett mesteparten av veien rundt jorda, men på grunn av tilstrammingen vil en del av tauet være i lufta. Oppgaven er å finne høyden h over jordoverflaten der tilstramningspunktet T ligger.

Jeg har tatt med denne oppgaven ikke bare fordi den kan passe for spesielt begavede elever, men fordi den kan vekke nysgjerrighet og utforskertrang også i en bredere elevgruppe. Løsningsforslaget jeg tar for meg her, omfatter vinkelmåling i radianer i tillegg til trigonometriske funksjoner som cosinus og tangens. En aktuell referanse for den som trenger/ønsker en kort innføring i disse temaene, er Hole (2006, s. 140, 161–169). Hvis man ikke er innstilt på å la en kalkulator løse den aktuelle likningen som fremkommer, trenger man også kjennskap til numerisk løsning av likninger, gjerne i form av Newtons metode, se for eksempel Lindstrøm (2006, s. 323). For å forstå Newtons metode, må man ha innsikt i funksjonslære, spesielt derivasjon, se Hole (2006, s. 181–191).

Det er altså høyden h som skal bestemmes i det tilfellet at r = 6371 km. Hvis man klarer å bestemme vinkelen, vil man også kunne finne h siden $\cos v = \frac{r}{r+h}$. For å få satt opp likningen som v kan bestemmes ut fra, er ideen at man formulerer to uttrykk for taulengden L og deretter setter disse lik hverandre.

For det første vil $L = 2\pi r + 0{,}002$ hvis alle lengdemål er i kilometer. For det andre vil den delen av tauet som ligger tett på jordoverflaten, ha lengde $2\pi r - 2vr$ dersom vinkelen måles i radianer, for da svarer vinkelen 2π til 360°. Den delen av tauet som befinner seg i lufta, vil ha lengde $2r\tan v$, noe man kan se ved å betrakte



Figur 11

de to kongruente rettvinklede trekantene OAT og OTB i figur 11. Det andre uttrykket for taulengden er derfor $L = 2\pi r - 2vr + 2r\tan v$. Når man så setter de to L-uttrykkene lik hverandre, fremkommer likningen

$$2\pi r + 0{,}002 = 2\pi r - 2vr + 2r\tan v.$$

Denne kan forenkles, slik at man oppnår

$$\tan v - v - \frac{0{,}001}{r} = 0.$$

Jeg vil ikke her legge vekt på detaljene ved en numerisk løsning av denne likningen, men hvis Newtons metode anvendes, må man passe på å benytte en startverdi for vinkelen som er tilstrekkelig liten. Det viser seg at man får v = 0,0077798 (målt i radianer), som svarer til cirka 0,45°. Hvis vinkelen i grader svarer til i radianer, vil generelt

$$\frac{V}{360} = \frac{v}{2\pi}.$$

Dette er altså omregningsformelen mellom gradmål og radianer. Av likheten $\cos v = \frac{r}{r+h}$ følger at

$$h = \frac{(1-\cos v)r}{\cos v}.$$

(fortsettes side 43)

Per Arne Birkeland

Strategier ved addisjoner av ensifrede tall

Hvilke strategier bruker elever på 2. trinn ved ensifrede addisjoner? Hvordan undervise elever på 2. trinn slik at de lærer å automatisere ensifrede addisjoner? Lar lærerne i norsk skole elevene få solide tallbegreper og varierte strategier i begynneropplæringen? Dette var spørsmål jeg ønsket å belyse i et prosjekt jeg gjennomførte høsten 2013. Komparative undersøkelser foretatt på 1990-tallet avdekket store forskjeller i elevers strategibruk ved addisjonsoppgaver i grunnskolen. Sammenliknet med amerikanske og kinesiske elever, kom norske elever klart dårligst ut når det gjelder grad av automatisering av ensifrede addisjoner. Med automatisering menes her å kunne gi svarene straks. Snaut 20 % av de ensifrede addisjonsoppgavene som ble gitt til norske elever på 3. trinn var automatisert. På tilsvarende trinn var tallene for amerikanske elever over 50 % og for kinesiske elever nær 100 % (Ostad, 1997; Geary mfl, 1996). Tallene for norske elever på 7. trinn var heller ikke særlig oppløftende, da bare 40 % av oppgavene var automatisert.

Læring av strategier

Ostad (2010) har funnet at matematikkvansker har stor sammenheng med ineffektiv strategibruk. Eksempel på en ineffektiv strategi ved addisjon er å telle alt og forfra igjen. Når elevene får oppgaven 3 + 4 =, teller de først «1-2-3», så fortsetter de med «1-2-3-4» og så til slutt teller de forfra igjen og teller alle «1-2-3-4-5-6-7» og sier at svaret er 7. Mange barn benytter en slik strategi i lav alder, men strategien er tungvint, og regnes som primitiv hvis barna fortsetter å bruke en slik strategi. En mer effektiv strategibruk, som forutsetter mer kunnskap, er at barnet vet at to treere blir seks og at fire er én mer enn tre. Siden det ene tallet er én mer enn tre, må også svaret bli én mer enn seks, altså syv. Hvis barnet kan bruke en slik strategi, er de nær ved å automatisere 3 + 4 = 7. Ostad (2010) er tydelig på at *effektiv strategibruk* kan læres gjennom undervisning.

Men selv om elevene lærer *gode strategier*, er det ikke sikkert de bruker dem ved oppgaveregning. Måten strategiene læres på er av avgjørende betydning.

Ostad framhever hvor viktig det er at elevene tilegner seg kunnskap om hvordan, hvorfor og når det kan være hensiktsmessig å bruke de ulike strategiene og har evne til å skifte til en annen strategi når det er hensiktsmessig.

Verbalisering kan gjøre denne kunnskapstilegnelsen lettere. Den muntlige aktiviteten kan lære barna å sette ord på hvordan en tenker når en løser oppgavene. Denne aktiviteten kan lære-

Per Arne Birkeland
Universitetet i Agder
per.a.birkeland@uia.no

ren stimulere, og etter hvert hjelpe elevene til å utvikle som privat tale. Den kan først være hørbar, men så kan den utvikles til å bli en *indre tale*.

Det magiska, odelade talet fem

Dagmar Neuman har gjennom sin tid som lærer for barn med lærevansker blant annet vært opptatt av hvordan barna *danner tallbilder*. Det å kunne «se» tallet som en mengde, kan være avgjørende for den grunnleggende tallforståelsen som addisjon bygger på. Det er ikke så vanskelig å se forskjell på mengder med én, to, tre, fire og fem elementer, men tall som er høyere kan det være vanskeligere å danne gode bilder av. Tallet seks «ser» mange som prikker ordnet som tre ganger to, slik som på spillterningen. Neumann (1992) brukte «*det magiska, odelade* [udelte] *talet fem*» aktivt i begrepsoppbyggingen. Vi har fem fingre på ei hånd. Det er veldig konkret, for barna har fingrene tilgjengelig bestandig. Hun anbefaler bruk av hånd og fingre i begynneropplæringen, men sier læreren må være obs på at fingrene kan bli brukt på en uheldig måte. Det kan hemme videre utvikling hvis barna ikke klarer å frigjøre seg fra fingertellingen, og fortsetter å bruke dem som regneteknikk uansett tallstørrelse. Hun anbefaler å begrense bruken til et tidlig stadium under innlæringen. En problemstilling lærerne må ta stilling til er i hvilken grad læreren bør fortelle barna at de etter hvert ikke bør bruke fingertelling. Kanskje fokus heller bør være på å gi elevene opplevelse av at andre strategier er enda bedre.

Å bruke V som fem, slik vi gjør med romertallene, har hun også gode erfaringer med. Tallene 6, 7, 8 og 9 blir da henholdsvis VI, VII, VIII og VIIII. To femmere er det samme som ti, og når de har lært at 3 + 2 = 5, altså at III + II = IIIII = V, er ikke spranget så stort til å kunne «se» at 8 + 2 = 10, altså at VIII + II = VIIIII = VV = 10. Målet må være å *automatisere* dette regnestykket, eller å lære kombinasjonen 8-2-10. Denne kombinasjonen representerer egentlig mange regnestykker både innenfor addisjon og subtraksjon:

8 + 2 =	8 + ? = 10	? + 2 = 10
2 + 8 =	? + 8 = 10	2 + ? = 10
10 – 2 =	? – 2 = 8	10 – ? = 8
10 – 8 =	? – 8 = 2	10 – ? = 2

8-2-10 er en av i alt 25 kombinasjoner som er nødvendige for å kunne automatisere alle addisjoner og subtraksjoner i tallområdet opp til 10. De 25 kombinasjonene er:

1/1/2				
2/1/3				
3/1/4	2/2/4			
4/1/5	3/2/5			
5/1/6	4/2/6	3/3/6		
6/1/7	5/2/7	4/3/7		
7/1/8	6/2/8	5/3/8	4/4/8	
8/1/9	7/2/9	6/3/9	5/4/9	
9/1/10	8/2/10	7/3/10	6/4/10	5/5/10

Når barnet har lært disse 25 kombinasjonene, er grunnlaget lagt for at de også kan lære å løse oppgaver over 10-grensen, for eksempel 8 + 5. De kan «måle» med 10. De kan dele opp tallet 13 i 10 + 3, de vet at 5 = 2 + 3 og at 8 + 2 = 10.

I tallet 5, som er 2+3, havner 2 før 10 og 3 etter 10 slik: V111 | 11 | 111.

Neumann (1989) sier også at sentralt i arbeidet med å lære de 25 tallkombinasjonene er å velge *den letteste måten*. For eksempel i oppgaven 2 + _ = 9. Her er det ønskelig at barnet «ser» at 9 består av 7 først (representert ved en femmer pluss to) og så to, knyttet til bildet: VII | II. Det er lettere enn å legge til et ganske stort tall (nemlig 7) for å få tallet 9. Hvis undervisningen legges mer opp til at elevene kan *se* tallkombinasjonene, vil det ikke være nødvendig å bruke så mye tid på å *regne* og *huske* (Neuman, 2013).

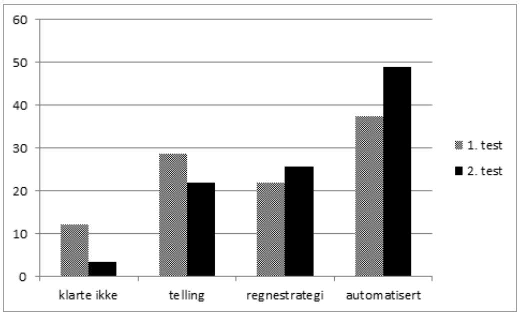
Strategier brukt av elever på 2. trinn

Jeg ville altså kartlegge hvilke strategier elevene brukte ved ensifrede addisjoner i to klasser på 2. trinn ved ulike skoler. Jeg ønsket også å se om det skjedde noen utvikling i strategibruken i løpet av høsten. Samme test ble gjennomført i september og i desember. I tida mellom disse to testene hadde elevene vanlig undervisning med sin klasselærer. Lærerne hadde på forhånd blitt gjort kjent med Snorre Ostads og Dagmar Neumanns anbefalinger. De sa i etterkant at undervisningen mellom testene ikke var endret noe vesentlig i forhold til det de var vant til, men at de hadde lagt litt større vekt på den hele femmeren. I testene skulle elevene løse 16 addisjonsoppgaver med to ensifrede tall. Oppgavene ble valgt slik at de skulle variere med hensyn til tallsammensetninger. Hver enkelt elev brukte ca 5 min på testen. Jeg var spesielt interessert i å se på i hvor stor grad automatisering ble brukt i forhold til tellestrategier og regnestrategier. Strategiene de brukte gjorde det naturlig å fordele svarene i disse kategoriene:

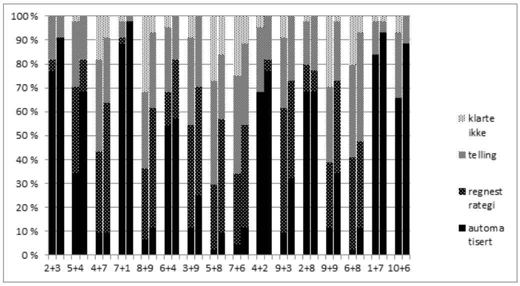
> 1. vet svaret, 2a. via tiervenner/fylle opp tier, 2b. via dobling, 3. tellestrategi, 4. klarer ikke/gir opp.

2a og 2b defineres som regnestrategier. Figur 1 viser resultatene på 16 oppgaver for de 44 elevene. Elevene presterte bedre i desember enn i september. Gjennomsnittlig andel av de 16 oppgavene som var automatisert økte fra 37 % til 49 %. Kategoriene automatisering og regnestrategi slått sammen økte fra 59 % til 75 %. Bruk av tellestrategier minket fra 29 % til 22 %. Disse tallene er mer positive enn Ostads tall fra 1990-årene, men de bygger på færre elever og færre oppgaver, kun 44 elever og 16 oppgaver, mens Ostads tall bygger på 28 oppgaver og 924 elever.

Figur 2 viser resultater på 1. og 2. test for hver oppgave. Diagrammet viser at på noen oppgaver var det få elever som hadde automatisert. Det gjaldt oppgavene 5 + 8, 6 + 8, 7 + 6 og 8 + 9. På de oppgavene var det også en høyere andel som enten ikke klarte oppgaven eller som brukte en tellestrategi. Da er det grunn til å anta at disse



Figur 1



Figur 2

oppgavene falt vanskeligst. De oppgavene som flest hadde automatisert, var 7 + 1, 1 + 7, 2 + 3 og 10+6 (eneste oppgave med 10). Da er det grunn til å anta at disse oppgavene falt lettest.

Å bruke tiervenner/fylle opp en tier var den mest brukte regnestrategien. De brukte denne strategien mest i oppgavene 4 + 7, 3 + 9, 9 + 3 og 5 + 8. Strategien dobling ble mest brukt i oppgavene 8 + 9, 7 + 6 og 9 + 9.

Hvorfor faller oppgaver som 5 + 8 og 6 + 8 vanskeligere enn 9 + 9? Man skulle kanskje tro at oppgavene øker i vanskegrad jo høyere tallene i oppgaven er. Når vi ser på strategiene som er brukt, finner vi noe av svaret. Mange hadde automatisert 9 + 9. De visste at det var 18. Å doble tall viser seg ofte å være lettere for elevene enn å legge sammen to ulike tall. Derfor var det også flere som hadde automatisert 9 + 9 enn 8 + 9. Å fylle opp tiere er også lettere med 9 + 9 enn med 5 + 8 eller 6 + 8. Det var også noen elever som gikk via 20, ved å tenke at 9 + 9 er 2 mindre enn 20. Oppgaven 5 + 8 var det 27 %

som ikke klarte i den første testen, mens andelen sank til 16 % i den andre testen. I den siste testen brukte hele 43 % strategien via tiervenner/fylle opp en tier på denne oppgaven. Noen spaltet opp 8 i 5+3 slik: $5 + 8 = 5 + (5 + 3) = (5 + 5) + 3 = 10 + 3 = 13$, mens noen spaltet opp 5 i 2+3 slik: $5 + 8 = (3 + 2) + 8 = 3 + (2 + 8) = 3 + 10 = 13$. Noe av årsaken til at oppgaven var vanskelig, kan ligge i at tallet 8 er med. Det viste seg at de vanskeligste oppgavene var når summen ble over 10 samtidig som at 7 eller 8 var et av tallene. Det kan forklares med at 5 og 10 er relativt lette tall å regne med, og 7 og 8 er de tallene som ligger lengst fra 5 og 10.

Hva sa lærerne i disse to klassene om undervisningen innenfor dette temaet? De fortalte i intervjuer at konkreter blir brukt mye i starten, ofte knyttet til elevenes eiendeler. De sier at visualisering er viktig, og å knytte tallene til mengder, tellestreker, terninger, kulesnor, penger. Det tas ofte utgangspunkt i dagens tall, som f.eks. kan være dagens dato. Mye av undervisningen foregår i lyttekrok, og der prøver læreren å få elevene til å fortelle hvordan de tenker. Barna lærer ulike måter å telle på i løpet av første klassetrinn. De mente det er viktig at elevene lærer andre strategier i tillegg, og at det å bruke tellestrategier er tungvint, særlig når de skal legge sammen større tall. Det er også viktig at elevene «ser» tallet, danner tallbilder, vet at det er fem fingre på ei hand, og at det er unødvendig å telle dem. Dessuten jobber de mye med den tomme tallinja og tiervenner. Selv om ikke læreren sa direkte til elevene at de etter hvert burde bruke andre strategier enn telling, viste resultatene at bruken av tellestrategier minket fra første til andre test. Intervjuene tydet på at undervisningen var mye i tråd med anbefalingene fra Snorre Ostad og Dagmar Neumann.

Den ene læreren fortalte at elevene hadde stort konkurranseinstinkt, og i lyttekroken hendte det at de ble utfordret til å bli den første til å reise seg hvis de fant svaret på en gitt oppgave. En lærerstudent ved UiA som hadde gått grunnskolen i Kina, mente noe av grunnen til at kinesiske elever var så flinke til å addere kunne være at det stadig ble konkurrert. Alle elevene måtte være med, og resultatene ble gjort kjent for alle. Det var ærefullt å bli best, men ikke så greit å bli dårligst. Da leide ofte foreldrene inn ekstrahjelp for at deres barn skulle oppnå bedre resultat neste gang. Det er lett å tenke seg at slike tiltak kan gi resultater, men i norsk skole er det ikke vanlig å bruke konkurranse på en slik måte. En annen forklaring på at kinesiske elever ligger så godt an, kan være at de pugger i større grad enn andre. Svært mange skrifttegn må læres, og da er antallet tallkombinasjoner lite i forhold.

Hvis elevene og lærerne som var med i min undersøkelse er representativ for norsk skole, må resultatene vurderes som positive sett i forhold til resultatene fra Ostads undersøkelser som er nevnt tidligere. Lærerne drev et målrettet arbeid for at elevene skulle lære å automatisere addisjoner i større grad.

Men selv om resultatene var positive, kan de bli bedre. Begynneropplæringen i matematikk handler mye om å la barna få en god tallоppfatning og flere strategier som kan danne et godt grunnlag for videre læring i matematikk. Å arbeide godt med ensifrede addisjoner krever arbeid over lang tid, og en klar bevissthet omkring hva vi bør gjøre. Når vi vet hvor viktig ferdighetene med addisjon er for en god utvikling i matematikk, bør vi kanskje ha et enda større fokus på dette enn vi har hatt de siste årene?

Referanser

Geary, D. C., Bow-Thomas, C. C., Liu, F., & Siegler, R. S. (1996). Development of arithmetical competencies in Chinese and American children: Influence of age, language, and scooling. *Child Development*, 67, 2022-2044.

Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter*. Stockholm: Utbildningsförlaget.

(fortsettes side 43)

Gjert-Anders Askevold

Symmetrisk juleverkstad

Til juleverkstad i år har eg nok ein gong late meg inspirere av designarduoen Arne & Carlos i Valdres, som står bak bøker som «Julekuler», «Handarbeid i hagen» og no ei bok om setesdalsstrikk. På facebooksida deira fann eg mønster til vakre bordbrikker som ein kan ha under glas slik at dei ikkje set ringar på bordet. Eg tenkte at slike brikker kunne ha potensial for ein matematisk verkstad eller ein juleverkstad, sjølvsagt med tilpassingar til elevgruppa ein arbeider med.

Gjert-Anders Askevold
Høgskolen i Bergen
gjert-anders.askevold@hib.no

Etter litt prøving og feiling finn eg at stoffet som det er brodert på, nok er stramei, og fullstendig fylt med korssting. Tråden ser ut til å være av ull. Eg har prøvd med stoffet Aida og Ankergarn (ullgarn). Det gjekk greit, men brikka vart noko tjukk og litt vanskeleg å brodere. Om ein vel å brodere med ullgarn, vil eg anbefale at ein bruker stramei. Det tek litt tid å fylle ut heile brikka, men reknar ein med at elevane kan gjere litt heime, så blir det eit flott resultat. Om ein vil ha ein aktivitet som tek litt kortare tid, kan ein brodere brikkene på Aida og brodere med perletråd (bomullstråd), då blir ikkje mønsteret så tjukt, og det er lett å brodere. Ein fordel med aida er at ein ikkje treng å fylle ut heile brikka med broderi, då stoffet er fint i seg sjølv. Det held å brodere det farga mønsteret. På begge typar brikke må ein sjølvsagt ha eit bakstykke. Ein kan sy på eit stykke stoff, eller ein kan stryke på eit stykke vlies alt etter kor mykje arbeid ein vil leggje ned i dette.

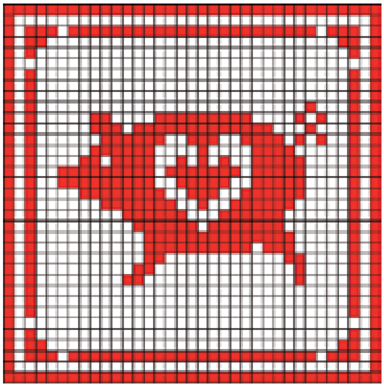
Matematikk i aktiviteten

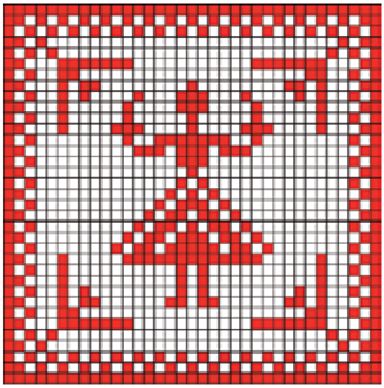
Sjølve syaktviteten vil bli ein aktvitet med preg av kunst og handverk, men har mykje matematikk i seg, spesielt om vi tenkjer på den grunnleggjande ferdigheita å rekne. Ein må lese arbeidsteikninga, analysere og setje i gang syinga. Samstundes må ein telje og telje og telje og passe på at symmetrien er rett, og at brikka blir fin. Dette gjeld spesielt når ein skal sy etter ferdige oppskrifter. Arne & Carlos har vist to flotte eksempel på brikker som du finn mønster til nedanfor.

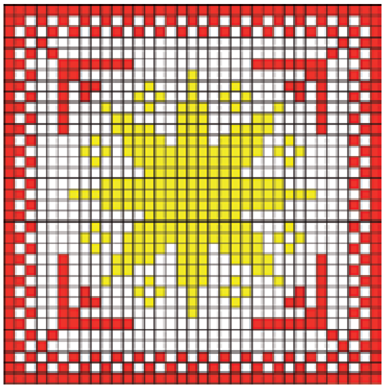
Men mønster kan ein godt lage sjølv, det er ein aktivitet eg sjølv finn glede i, og som eg trur elevane kan finne glede i. Tenk å brodere eit eigenkomponert mønster! Her kan ein gje elevane ferdikopierte ruteark med ramme rundt som avgrensar brikka, og elevane kan få fritt spelerom innanfor brikka. Eller ein kan avgrense oppgåva noko:

- Brikka skal ha éi (og berre éi symmetrilinje).
- Brikka skal ha to symmetrilinjer.
- Brikka skal ha fire symmetrilinjer.
- Ein skal bruke to fargar på tråden, nøyaktig 25 % av mønsteret skal vere raudt, og 75 % skal vere grønt.
- Ein kan bruke andre fargar og prosentsatsar.
- Ein kan leggje inn krav om at typar geometriske figurar skal vere med. Under er fleire mønster. Dei to første er teikna av Arne & Carlos og det siste er inspirert av dei. Til slutt kjem dei to rammene til Arne & Carlos, som er fine å kopiere opp slik at elevane kan designe sine eigne mønster. Malar og mønster finst som ei PDF-fil på Tangenten si heimeside.

Vidare inspirasjon: http://arnecarlos.blogspot.no/?m=1http://arnecarlos.blogspot.no/?m=1







Julekalender

Løs julekalenderen og delta i trekningen av flotte premier!

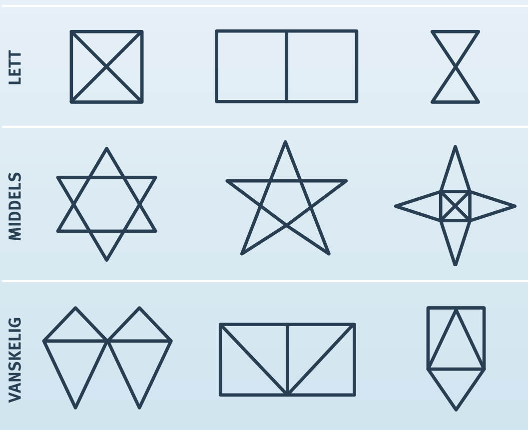
matematikk.org tilbyr hvert år gratis julekalender for grunnskolen; én tilpasset 1.–4. trinn, én for 5.–7. trinn og én for 8.–10.trinn. Julekalenderen består av 9 oppgaver og for småskoletrinnet er hver oppgave laget i tre vanskegrader.

Julekalender og tidligere utgaver finnes på *matematikk.org/julekalender*

Ønsker du en påminnelse så snart julekalenderen er publisert, send en e-post til *jatakkjulekalender@matematikk.org*

1.–4. trinn

I **nisseverkstedet** skal de tegne mønster, men de får ikke lov til å tegne mønster hvor de må løfte blyanten eller tegne to ganger på samme strek. Hvilket mønster får de ikke lov til å tegne?



5.–7. trinn

På en **romjulsfest** stemte 20 gjester på det beste kostymet. Hun som hadde kledd seg ut som julenisse fikk førsteplassen. Snømannen fikk 20 % av stemmene. Juletreet og Pepperkaka fikk like mange stemmer. Reinsdyret Rudolf fikk én stemme mer enn Juletreet. Pepperkaka fikk 1 av 20 stemmer. Med $\frac{1}{4}$ av alle stemmene fikk Engelen flere stemmer enn Snømannen, men færre enn Julenissen. Hvem kom på plass nr. 4?

8.–10.trinn

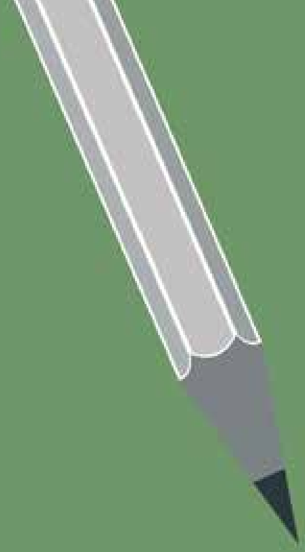
En av ungdomsskolens elever hadde fått med seg 1000 kroner fra elevrådskassa for å kjøpe 100 pyntegjenstander til **årets juleball**. Han måtte bruke opp alle pengene og han kunne velge mellom julestjerner til 50 kroner stykket, kubbelys til 10 kroner stykket, eller girlander til 5 kroner per stykket. I tillegg hadde han fått beskjed om at han måtte ha minst én av hver ting.

Hvordan må forholdet mellom antall julestjerner og antall girlandere være om han skal få til dette?

1:4 1:8 1:10

www.matematikk.org

i samarbeid med: bp PGS



Leserinnlegg

Hvordan forklare praktisk noe som virker teoretisk?

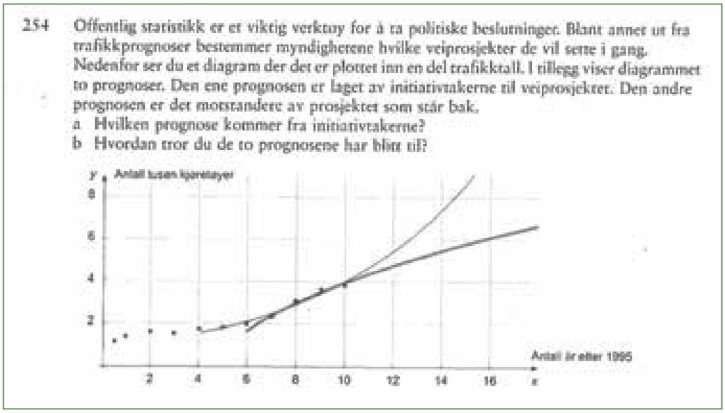
Magnus Jakobsen

I mars i år kunne vi lese flere ytringer om matematikkfaget 2P skrevet av lektor Karl-Eirik Kval på nrk.no. Han har skrevet mer om det samme i boken sin «Det store skolesviket». Kval skriver om faget 2P matematikk som livsfjern og upraktisk matematikk med teoretiske og overambisiøse læreplaner som ifølge ham gjør at tusenvis av elever hvert år får udugelig-stempel i panna. Han ytret seg om flere fag, og for matematikk brukte han regresjon som eksempel. Dette gjorde meg nysgjerrig på hvem han er, så jeg googlet navnet. Kval er samfunnsviter, og jeg vil gjerne utfordre ham til å lese læreplanen til 2P og skrive ned definisjonen på teoretisk matematikk. Jeg vil ikke utfordre ham til å lære bort matematikk til kommende samfunnsvitere, ettersom han etter min mening ikke forstår hvilke samfunnsfaglige konsekvenser det kan få dersom historiske fakta ikke blir korrekt tolket matematisk. Man kan ende opp med store feil hvis man bruker feil regresjonsmetode.

I all funksjonsmodellering finnes det en iboende usikkerhet i valget av matematisk modell. Dette er godt illustrert i Aschehoug 2P, 2007, oppgave 254 s. 194 (se figur 1).

Denne oppgaven belyser at statistikk kan benyttes på forskjellige måter, og er bare én av mange oppgaver som illustrerer for elever hvorfor matematisk modellering er samfunnsnyttig. Samtidig forklarer den også meget godt viktige spørsmål som *når er det praktisk å anvende matematikken, og for hvem*? Det at Kval som samfunnsviter ytrer seg så uvitende om læreplaner i matematikk og faget matematikk, viser at fagkunnskap er nødvendig for å formidle faget riktig. Det foruroligende er at mange kommentatorer sier seg enige med Kval, og noen av disse er også matematikklærere. Derfor tror jeg også at det norske skolebidraget kan bli bedre hvis matematikklærere selv kan velge spesialisering mot praktisk eller teoretisk matematikk. Slik spisset spesialisering finnes allerede på andre fagfelt, blant annet ortopedi, hvor noen velger spisskompetanse på ankler og noen på knær. Dette er også foreslått av både den gamle og den nye regjeringen og i ferd med å gjennomføres. Matematikk er et ikke bare et enkelt fag, men et fag som også bygger kompetanse innenfor andre

Magnus Jakobsen
Elvebakken videregående skole
magnus@lektorjakobsen.no


254 Offentlig statistikk er et viktig verktøy for å ta politiske beslutninger. Blant annet ut fra trafikkprognoser bestemmer myndighetene hvilke veiprosjekter de vil sette i gang. Nedenfor ser du et diagram der det er plottet inn en del trafikktall. I tillegg viser diagrammet to prognoser. Den ene prognosen er laget av initiativtakerne til veiprosjekter. Den andre prognosen er det motstandere av prosjektet som står bak.

a Hvilken prognose kommer fra initiativtakerne?

b Hvordan tror du de to prognosene har blitt til?

Figur 1

bolag er gjennomsnittsprisen på kebab 49 kroner. Hvis standardavviket har en lav verdi, betyr dette at de aller fleste prisene ligger rundt gjennomsnittsprisen. Hvis standardavviket derimot har en høy verdi, betyr dette at enkelte utsalgssteder har en mye høyere pris. Men derfor også utsalgssteder med desto lavere pris!

Sannsynligvis ble det enklere nå, og mange vil nok også interessere seg mer for teorien.

fag. Det er derfor viktig at matematikklærere også får mulighet til å stimulere egeninteressen for faget gjennom spesialisering. Selv matematikklærere kan vel ikke være gode til alt?

I god demokratisk ånd lot jeg elevene mine beskrive egen nytteverdi av matematikk, og svaret var ganske enkelt og med få unntak: matematikk vi kan bruke gjennom livet. Med disse elevsynspunktene på hva matematikk betyr, vil jeg gi eksempler på hvordan vi kan anvende det mange ser på som tilsynelatende teoretisk matematikk, i livet. Senere vil jeg knytte disse eksemplene til IKT i undervisningen og se på hvordan dette kan gi elevene bedre mestring og forståelse.

Eksempel 1. Standardavvik

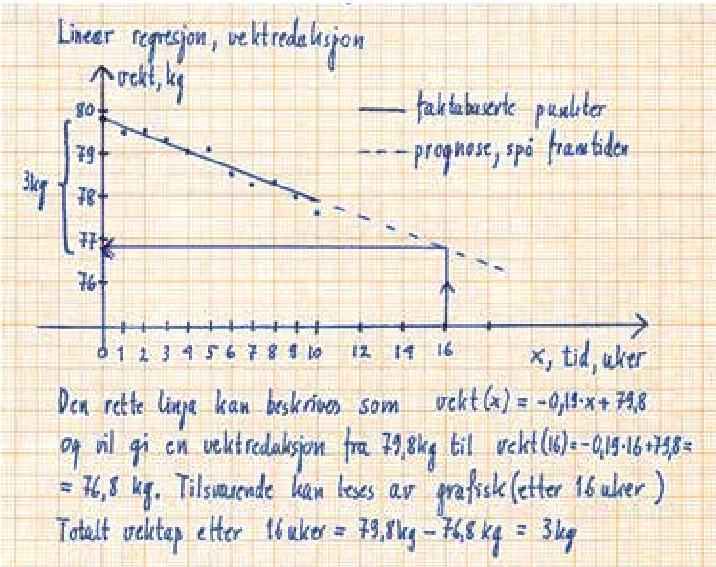
På Ndla.no sine nettsider kan man lese dette om standardavvik: «Standardavvik er et mye brukt mål for spredning. Standardavviket sier noe om hvor langt de enkelte verdiene i gjennomsnitt ligger fra gjennomsnittsverdien. For hver verdi regner vi ut avstanden til gjennomsnittsverdien. Hver avstand kvadreres, og så summeres alle kvadratene. Summen deles på antall verdier. Det tallet vi da får, kalles varians. Standardavviket er kvadratroten av variansen.»

Tilsynelatende veldig teoretisk, men la oss også sette dette inn i et anvendbart perspektiv ved hjelp av et tenkt eksempel: *I ditt skolena-*

Målet med læring er å skape forståelse, og hvis man lærer dette gjennom de teoretiske definisjonene og deretter anvendelsen av dem, vil brukeren stå friere til å søke sine egne eksempler og muligheter. Forståelse gjør selvgående.

Med rett til selv å velge skole vil mange kanskje også interessere seg for standardavviket på skolekarakterene ved flere forskjellige skoler? Med standardavviket, om vi går til definisjonen, finner vi jo også utgangspunktet, nemlig gjennomsnittskarakteren.

Senere kan vi trekke fra eller legge til ett standardavvik fra gjennomsnittet. Dermed har vi funnet spredningen på kebabprisen eller skolekarakterene med gjennomsnittet som utgangspunktet. En slik spredning er normalfordelt. Den ser ut som en kirkeklokke og kalles derfor «bell curve». Sannsynligheten er størst (omtrentlig 68 %) for at du selv havner innenfor første standardavvik (pluss eller minus verdien av ett standardavvik fra gjennomsnittet), og det kan godt tenkes at du havner på den øvre halvdelen. Med en slik prosess har vi startet ved gjennomsnittet og kan derfor «spare tid» gitt at en har en forståelse av den praktiske nytteverdien av standardavvik.En slik praktisk bruk av standardavviket kan bety at man kan velge hvilken videregående skole man skal søke opptak ved. Vil man bli sykepleier og har kunnskap om skolens gjennomsnittlige skolekarakter/stan-



Figur 2

dardavviket, kan man bare bedømme dette opp mot opptakskravet til sykepleierutdanningen!

Bruken av standardavvik på metodene ovenfor kan derfor gjerne beskrives som samfunnsfaglig, demokratisk og økonomisk nyttig.

Eksempel 2. Lineær regresjon

I Aschehoug 2P kan vi lese at lineær regresjon er «[…] at man ønsker å finne den lineære funksjonen hvis kurve/graf passer best med innsamlede data, som inneholder en eller annen statistisk feilkilde også kalt residual. Lineær regresjon brukes ofte for å lage prognoser.»

Igjen tilsynelatende teoretisk. Derfor kan vi «oversette» dette med at vi ut fra observasjoner eller historiske fakta kan se inn i fremtiden, og at den matematiske modellen vi lager, blir mer nøyaktig jo flere observasjoner eller historiske fakta vi kjenner.

Derfor startet jeg på en slankekur som skulle vare i 16 uker. Allerede etter 10 uker kunne jeg spå – ganske nøyaktig, viste det seg – min egen vekt 6 uker fram i tid.

Lineær regresjon kan vi lage for hånd gitt at vi har nok historiske fakta. Alt vi gjør, er nemlig å strekke en rett linje, på øyemål, som passer best mulig med de gitte punktene (som er våre historiske fakta). Deretter finner vi $ax + b$ hvor a blir bestemt gjennom den rette linjen og ikke punktene.

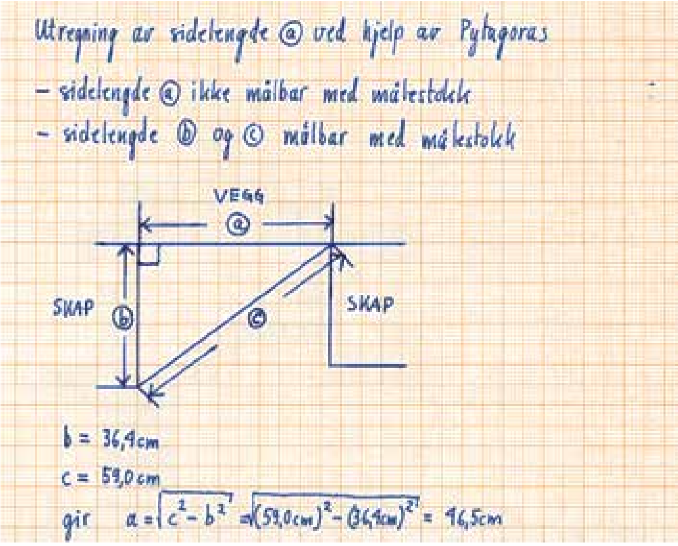
Muligens gjør ikke elevene det enda, men i hverdagen spår mange om leilighetspriser basert på historiske fakta. På «øyemål» anslår vi verdien om noen år. Ofte hjelper TV, aviser og eksperter oss med dette. Men de bruker ikke ordet regresjon, og dermed er det kanskje ikke matematikk lenger?

Ikke alle historiske fakta kan fullt ut tilpasses en rettlinjet modell. Mange ganger må vi benytte andre matematiske modeller, ofte eksponential- eller polynomfunksjoner, og uavhengig av matematisk modell må vi også beherske sunn fornuft. Kan vi «slanke» oss uendelig mange uker etter den lineære modellen? Eller vil leilighetsprisene faktisk vokse inn i himmelen? Se skisse.

Eksempel 3. Pytagoras' læresetning og formlikhet

For alle trekanter som er rettvinklete, finnes det en sammenheng mellom sidelengdene i trekanten som beskrives av Pytagoras' læresetning: Kvadratet av hypotenusen (den motstående sidelengden til den rette vinkelen) er lik summen av kvadratene av katetene (sidelengdene som er hosliggende til den rette vinkelen). For alle trekanter gjelder også at trekanter er formlike hvis de har to parvis like store vinkler.

Igjen tilsynelatende teoretisk, men med mange bruksområder for huslige sysler. For dem som ikke har målebånd eller snor, men bare målestokk og en anslagsvinkel/vinkelhake, kan noen lengdeoppmålinger vise seg vanskelige. For en gitt rettvinklet konstruksjon i et kjøk-



Figur 3

at det kommer stadig nye digitale verktøy og nye brukerkommandoer. Er skolen moderne og tilpasset livet hvis elevene ikke kan bruke det aller nyeste innen digitale verktøy? Skolens motivasjon for å bruke IKT er jo nettopp å forberede eleven på en yrkeshverdag.

Allerede i dag skjer det mye digitalt som også gir elevene større mulighet til å velge hvilken digitalisering som gir dem best forståelse. Touchtavler og nettbrett er noen eksempler på dette. Eleven styrer operasjonene med fingrene. Dette tror jeg vil hjelpe mange elever til å se at det samme kan gjøres like

ken, for eksempel, kan man bruke Pytagoras' læresetning for den lengden som ikke er målbar, altså den siden hvor man ikke kommer til med bare målestokk.

IKT som verktøy for økt forståelse

Jeg er ingen tilhenger av IKT som verktøy i matematikken. Jeg oppfatter mange matematiske programvarer som forståelsens motstander og kun et verktøy som kan gi flere poeng på prøver og dermed bedre karakterer. Så hvordan henger dette sammen? Data- og ingeniørfagene har laget fantastiske digitale verktøy som regner ut matematikk beskrevet tidligere (regresjon, sidelengder, standardavvik) på et øyeblikk, hurtigheten er enorm. Prøv gjerne igjen, sier datamaskinen – vi tror du glemte å definere en variabel. Neste trykk og du har rett svar. Dette kan være fantastisk for karakteren hvis prøven ikke krever forståelse. En annen utfordring er

enkelt for hånd, men med litt mer tidsbruk, selvfølgelig.

Derimot er jeg en stor tilhenger av IKT som distributør av kunnskap. Den amerikanske modellen MOOC («massive open online courses») er nå også på vei inn ved norske høgskoler og universiteter, og allerede i fjor startet professor Arne Krokan ved NTNU Norges første MOOC. MOOC tillater storskala undervisningsmodeller, og derfor trenger man også en mer tilpasset læringsplattform. Adaptiv læring gjennom blant annet knewton.com fanger dette behovet. Her er det datasystemet som tilpasser læringen til eleven gjennom strategisk plasserte underveisvurderinger. Datasystemet organiserer en elevs kompetanse gjennom elevens svar på spørsmål. Dette krever et stort forarbeid, men så er det også tilpasset et storskala undervisningsopplegg som ligger i ordet «massiv».

Camilla Björklund

Klassificering och mönster

– förskollärares intentioner och småbarns initiativ

Abstrakt

I svensk förskola har matematik under senare år lyfts fram som ett betydelsefullt innehåll för verksamheten liksom färdigheter och förmågor barn behöver få möjlighet att utveckla i lekfulla och meningsfulla sammanhang. Den pedagogiska utmaningen för lärare i förskolan är att synliggöra lärandeobjekt och sätta mål för lärande som är förenliga med såväl förskoletraditioner som kunskaper om hur barn utvecklar kunnande inom olika matematikområden. I artikeln diskuteras hur idén om mönster didaktiskt kan behandlas i arbete med småbarn i form av klassificering, genom ett empiriskt nedslag i en studie av ett systematiskt arbete med matematik i förskolan. En lärares arbete med tvååringar observeras under en avgränsad aktivitet och analyseras med fokus på mötet mellan lärarens intentioner och barnens initiativ. Studien visar att småbarn har och utvecklar grundläggande förmågor som kan utvecklas till förståelse för hur mönster skapas, men att det är viktigt att barnen ges möjligheter att utmana just dessa förmågor som grund för fortsatt lärande.

Camilla Björklund
Göteborgs universitet
camilla.bjorklund@ped.gu.se

Dette er en nivå 1-artikkel. Artikler som blir akseptert som nivå 1, skal presentere ny innsikt, være i en form som gjør resultatene anvendelige i ny forskning og den skal være vurdert av granskere utenfor redaksjonen. Tangenten ønsker å være et sted der læreres og forskeres perspektiv på matematikkopplæring kan møtes og har derfor åpnet opp for praksisrelaterte forskningsartikler. Les mer i retningslinjene: www.caspar.no/tangenten/fagfelle.pdf

Bakgrund

Artikeln lyfter fram lärares intention att arbeta med ett avgränsat innehåll av matematik – mönster – vilket visar sig vara ett mer komplext innehåll än vid första åtanke. Syftet med artikeln är att diskutera hur idén om mönster didaktiskt kan behandlas i arbete med småbarn och vad som blir rimligt innehåll för lärande. Diskussionen tar sin utgångspunkt i det förändrade uppdrag som svensk förskola fått i och med revideringen av läroplanen för förskolan och problematiserar målorienterat matematiklärande genom ett empiriskt nedslag i en studie av ett systematiskt arbete med matematik i förskolan.

Den svenska läroplanen för förskolan reviderades 2010 och har sedan 2011 implementerats i förskoleverksamheten. Det som utmärker revideringen är ett tydligare fokus på matematik, naturvetenskap och teknik, där barn ska ges möjligheter att utveckla sina existerande förmågor på basen av sina intressen, initiativ och idéer. Barnets perspektiv är framträdande, liksom leken som en naturlig verksamhetsform för barns lärande.

I den reviderade läroplanen Lpfö98 (Skolverket 2010, 10) kan man utläsa fyra mål med betydelse för arbetet med matematik som ett innehåll. Ett av målen beskriver de områden i matematik som barn bör få möjlighet att utveckla sin förståelse för: *rum, form, läge och riktning och grundläggande egenskaper hos mängder, antal, ordning och talbegrepp samt för mätning, tid och förändring. Utöver detta formuleras tre mål i form av förmågor: utvecklar sin förmåga att använda matematik för att undersöka, reflektera över och pröva olika lösningar av egna och andras problemställningar, utvecklar sin förmåga att urskilja, uttrycka, undersöka och använda matematiska begrepp och samband mellan begrepp samt utvecklar sin matematiska förmåga att föra och följa resonemang.* Dessa mål är i samklang med svenska grundskolans nya läroplan Lgr11 (Skolverket 2011) med tanke att gynna kontinuiteten i barns matematiklärande. Förskolan har däremot inga kursplaner utan har större frihet att forma lärandemålen. Målen som beskrivs i förskolans läroplan ger därmed snarare riktlinjer och övergripande mål som den enskilda läraren bör bryta ner och forma med utgångspunkt i barnens intressen och initiativ.

Den pedagogiska utmaningen för förskollärare i den svenska kontexten är sannolikt att urskilja det matematiska innehållet och vilka förmågor som lägger grund för ett fortsatt matematiklärande. Studier av förskollärares förhållningssätt till sitt didaktiska arbete (Sheridan et al. 2011) visar nämligen att många lärare är osäkra på matematik som ett lärandemål och innehåll i förskoleverksamheten. I synnerhet spatiala områden såsom geometri och mönster är generellt mindre synliga än numeriska och tycks utmanande att arbeta med i pedagogisk verksamhet med yngre barn (Clements & Sarama 2011).

Från klassificering till algebra

Förskollärarens uppdrag innebär att organisera en verksamhet som främjar barns utveckling och lärande av sin omvärld. Läroplanen lyfter fram kunskapsområden och förmågor, men läraren har ansvaret att avgöra vad barn erbjuds att utveckla sitt kunnande om och hur detta ska iscensättas. Att välja innehåll och formulera mål för lärande som engagerar barn och utmanar deras tänkande förutsätter insikter dels i barns livsvärldar och dels i komplexiteten hos det aktuella kunskapsområdet (Johansson & Pramling Samuelsson 2006).

I studien som här diskuteras väljer läraren fenomenet mönster som ett innehåll för lärande. Mönster är ett betydelsefullt område inom matematiken, inte minst i förhållande till algebraiskt tänkande. Förmågan att urskilja mönster har först på senare tid lyfts fram som en betydelsefull aspekt av det tidiga matematiklärandet, även om forskning visar att barn har förmåga att generalisera och abstrahera redan i tidig ålder (Cross et al., 2009; Garrick, Threlfall & Orton, 1999; Sarama & Clements, 2009).

Rivera (2013) beskriver mönster som ett betydelsefullt innehåll i matematikundervisning som förekommer både som vardagliga och matematiska fenomen. Gemensamt är att det är möjligt att urskilja och konstruera samt berättiga en uppmärksammad struktur både i konkreta vardagliga situationer och i abstrakta matematiska sammanhang. Att lyfta fram mönster som ett matematikinnehåll innebär bland annat att uppmuntra barn till att delta i resonemang som drivs av tänkande kring abstrakta relationer och strukturer. Naturligtvis gestaltar sig barns förmåga att urskilja och uttrycka sig åt beroende på ålder och erfarenheter, men förståelsen kan tolkas som ett kontinuum där konkreta mönster är en ytterlighet och algebraiska representationer en annan ytterlighet. Algebra kan till exempel definieras enligt Heeffer (2010) som ett analytiskt redskap för att lösa problem där en obekant mängd ersatts med abstrakta enheter. Dessa enheter kan representeras av bokstäver, figurer eller färger. Här ser vi kopplingen mellan mönster och algebra, där det är idén om en struktur som är urskiljbar och förutsägbar som framträder vare sig uppgiften gäller att skapa ett mönster av pärlor eller beskriva ett dekontextualiserat samband i algebraiska termer.

Att urskilja och generalisera mönster innebär enligt Rivera (2013) att barnet i sitt resonemang går över från att prata om specifika objekt till generella idéer om samband. Radford (2012) hävdar att denna förmåga överlag inte utvecklas spontant utan förutsätter ett kulturellt inflytande, det vill säga uppmärksamheten på möjliga samband stöds av till exempel en lärare och olika artefakter. Att generalisera idéer om samband gestaltar sig i en mer ursprunglig form i barns förmåga att klassificera och seriera, vilket antas vara grundläggande förmågor också för numeriskt resonemang (Piaget 1952). Småbarn urskiljer i tidig ålder likheter och olikheter hos föremåls egenskaper vilket möjliggör indelning i kategorier och underkategorier, det vill säga att ordna och sortera enligt någon regel eller struktur (Björklund 2007) där vissa egenskaper står i förgrunden och andra egenskaper i bakgrunden. Däremot är det ingen självklarhet att småbarn förmår urskilja vissa egenskaper och frångå andra (Smith 1989). Förmågan utvecklas till exempel i barns lek med klossar och olika sorteringsmaterial (Park et al. 2008).

Mönster innebär vidare att känna igen eller skapa en regel för hur en sortering struktureras och sedan att följa upp och tillämpa regeln. Förmågan att urskilja regelbundenheter, likheter och struktur är även en aspekt av pre-algebraiskt tänkande, som alltså med fördel utforskas med stöd av konkreta manipulativa materiel (Threlfall, 1999). Klassificering, mönsterskapande och algebraisk analys knyts på så sätt samman i barns matematikutveckling.

Warren och Cooper (2008) menar att begreppslig förståelse för mönster och algebra gynnas av att använda konkreta materiel för att skapa varierande mönster och på så sätt göra det möjligt att explicit urskilja förhållandet mellan delarna och delarnas positioner i mönstret. Enligt Threlfall (1999) är det vanligt att barn i tidiga år skapar mönster av objekt i rader, men har större svårigheter att uttrycka regeln som ligger bakom mönstret. Vanliga strategier för att synliggöra mönster för barn i förskoleåldern är att benämna egenskaper rytmiskt och på så sätt gestalta mönstret i en repetitiv ramsa ”blå-röd-grön-blå-röd-grön”. En alternativ strategi kan vara att differentiera de enheter som upprepas som en del av en större helhet ”blå-röd-grön [paus] blå-röd-grön” och därmed rikta uppmärksamheten på den generaliserande aspekten av mönster. Bägge förutsätter dock att barnet urskiljer vilken egenskap som varieras och som samtidigt upprepas.

I en studie av Björklund och Pramling (2013) framträder den generaliserande aspekten som central för barns möjligheter att urskilja och själva skapa mönster. Delar skiljs ut som enheter med början och slut, som upprepas. För att tillägna sig en begreppslig förståelse krävs dock att barnen får möjlighet att upptäcka idén om upprepning av enheter i varierande sammanhang med objekt av varierande slag. Men även att enheterna synliggörs på varierande sätt simultant, till exempel med stöd av rytm och tonhöjd i verbala beskrivningar, vilket Radford (2012) poängterar i undervisningen av äldre barn. Studien av Björklund och Pramling visar även att ju mer komplexa objekt som används, det vill säga med olika dimensioner av egenskaper, desto svårare blir det för barnen att urskilja den enhet som skall upprepas. De ramar som undervisningen läggs upp inom och vilka materiel som används tycks ha en betydelsefull roll för barns möjligheter att utforska och lära om mönster. Studier bland yngre barn (Björklund 2012; 2013) visar att valet av material och hur material presenteras spelar stor roll för vilka lärandemöjligheter en situation bidrar med.

Studiens syfte, metoder för genomförande och analys

År 2011–2012 genomfördes ett utvecklingsprojekt (Vetenskapsrådet projekt nr. 724-2011-751) där förskollärare deltog i fortbildning med särskilt fokus på lärandeobjektet och hur undervisning kan iscensättas för att gynna barns begreppsutveckling. I föreliggande studie görs ett nedslag i en av dessa lärares arbete under en planerad lärandesituation med barn i 2-årsåldern. Läraren har i diskussion med andra projektdeltagande lärare valt och diskuterat ett gemensamt innehåll för lärande – mönster – och diskuterat vad som gör det möjligt för barn att utveckla förståelse för idén med mönster. Målet för lärande är att barnen ska ges möjlighet att utveckla sin förståelse i ett meningsfullt, lustfyllt men tillika målorienterat sammanhang. Stor vikt i planeringen av lärandesituationen läggs vid barnens intressen men i projektet är det betydelsefullt att lärarna utvecklar sina förmågor att utmana barnens tänkande och erbjuda dem erfarenheter som möjliggör upptäckt av nya perspektiv och aspekter av lärandeobjektet som barnet inte tidigare kunnat urskilja.

Den empiriska studien tar sin kunskapsteoretiska utgångspunkt i variationsteorin (se Marton & Tsui 2004). Lärande innebär enligt variationsteorin ett förändrat sätt att uppfatta fenomen i omvärlden. En sådan förändring sker i och med att den lärande får möjlighet att urskilja allt fler aspekter av ett lärandeobjekt som därmed fördjupar och breddar förståelsen. I undervisningssammanhang väljer lärare i enlighet med denna teori ut sådana aspekter av ett lärandeobjekt som kan vara kritiska för barnet att få syn på, för att utveckla förståelse. Variation är ett centralt begrepp inom variationsteorin, eftersom man anser att det är genom iscensatta mönster av variation som nya aspekter kan urskiljas. Läraren erbjuder alltså barnet möjligheter att erfara och undersöka omvärldsfenomen på sådana sätt att det kritiska framträder och nya sätt att förstå görs möjligt. I utvecklingsprojektet utbildas lärarna i den teoretiska ansatsen och ges handledning i att implementera teorin i praktisk verksamhet.

Forskningsfrågan som ställs i studien är vilka förmågor som träder fram som nödvändiga för att utveckla grundläggande förståelse för matematiska mönster i tidiga år. Samspelet mellan lärare och barn i en planerad lärandesituation observeras därför med avseende på barnens perspektiv, deras respons och initiativ i kommunikationen med lärare och materiel. Lärarens intentioner (”intended object of learning”, se Runesson 1999) och barnens initiativ möts i lärandesituationen och det är detta möte vi lägger intresset vid för analys i studien.

Datamaterialet som analyseras består av 60 minuter videoobservation av tre barn i 2-årsåldern och en förskollärare. Läraren har själv utformat lärandesituationen och genomför den i barngruppens ordinarie utrymmen i en autentisk aktivitet. Barnen och läraren sitter runt ett ljusbord med knappar i olika former, färger och storlekar och samtalar samtidigt som de sorterar knapparna på bordet. Analysen är kvalitativ, vilket innebär att data studeras och kategoriseras utgående från de innebörder och förmågor som framträder i såväl ord som i handling. Datamaterialet är småskaligt, men i och med den kvalitativa djupanalysen av den interaktion som sker mellan barn och lärare, kan slutsatser dras som är av värde för diskussionen om matematiklärande för de yngsta barnen i förskolan.

Resultat

I resultaten presenteras först lärarens intentioner följt av de initiativ som barnen tar och som därefter blir objekt för lärande i aktiviteten. Av särskilt intresse är tolkningen av förhållandet mellan lärarens intentioner och barnens perspektiv och initiativ.

Lärarens intentioner

Läraren i den målorienterade aktiviteten väljer att arbeta med ett material som har många egenskaper att utgå ifrån. Knapparna varierar i färg, form och storlek och inbjuder till att samla och sortera på olika sätt. Läraren erbjuder barnen möjligheter att upptäcka, utforska och skapa mönster genom att dels *göra egna modeller*, dels *inbjuda barnen till samtal* om de samlingar av knappar som barnen skapar på eget initiativ. I lärarens handlingar kan uttolkas ett mål för aktiviteten där barnen förväntas ordna och sortera på ett systematiskt sätt, för att regelbundenheten, det vill säga regeln för mönstret, ska framträda. Barnen ger inget entydigt svar på lärarens försök att initiera mönster som upprepning av enheter. Läraren lyfter då i stället fram barnens egna initiativ som främst handlar om att urskilja egenskaper och klassificera och utmanar deras tänkande genom att bjuda in barnen till samtal om deras initiativ. Samtidigt är lärarens intentioner i samtalet alltjämt riktat mot lärandemålet genom att peka på likheter, upprepning och struktur, vilket framkommer i uttryck som ”likadan”, ”lång rad” och ”samla”. Detta är ur pedagogiskt perspektiv ett intressant resultat som kommer att problematiseras ytterligare i den följande analysen av barnens initiativ.

Att identifiera likheter och olikheter

Förmågan att urskilja likheter och olikheter är förutsättningen för att klassificera och skapa samlingar av objekt, delar som bildar en helhet och därigenom möjlig att urskilja som enheter. Läraren erbjuder barnen mönster som modell, till exempel genom att placera knappar varannan stor och liten. Barnen tycks däremot inte följa upp eller imitera modellen. Barnens fokus är riktat mot att identifiera likheter och olikheter som initierar gruppering av likadana egenskaper.

Carol (lärare) och tre barn sitter vid ett ljusbord. På bordet är knappar utspridda i olika former, färger och genomskinlighet. Barnen flyttar knappar en och en, hela högar och plockar emellanåt ut någon knapp som de visar för läraren.

Maja visar upp en mycket liten blå knapp och säger: ”Liten knapp”.

Carol pekar på knappen: ”En liten knapp! Har du någon stor knapp Maja då?”

Maja tittar på ljusbordet och visar upp en större röd knapp och en lika stor ljusröd knapp, ”Där är det”.

Carol: ”Dom var jättestora!” Maja lägger ner knapparna på ljusbordet. Carol: ”Hittar du någon mer som var så liten [som den blå knappen]?”

Maja tar upp den lilla knappen och tar upp ytterligare en i samma storlek: ”Den”.

Carol: ”Den var också liten, ja. Två små och två stora” pekar på de små och de stora knapparna på bordet, vänder sig till Jenny och frågar ”har du några såna stora knappar som Maja har?” Saga visar upp en stor röd knapp ”Den!” Carol: ”Ja, den var också stor”. Saga fortsätter plocka stora röda knappar ur en ask.

Förmågan att urskilja likheter och olikheter är en av förutsättningarna för att utveckla matematikfärdigheter. Barnen i studien uppmärksammar varandra och läraren på objekt som är lika i färg, form och storlek. Läraren svarar på barnens initiativ genom att sätta ord på det barnet skiljer ut, till exempel ”en stor knapp” eller ”en liten knapp”. Läraren stödjer även urskiljningen av likheter och olikheter genom att visuellt kontrastera värden inom en och samma dimension, såsom två stora knappar intill två mycket små knappar. Barnen får på detta sätt ett starkt stöd i sina val för klassificering av knapparnas egenskaper.

Samtidigt fokus

En av utmaningarna för de yngre barnen i förskolan är att urskilja vilka egenskaper som beaktas när man sorterar och ordnar, och vilka som inte har en bärande betydelse i en viss situation (Smith, 1989). Det handlar om att avgöra vad som är i förgrund och vad som är i bakgrund. Vilken egenskap som helst hos ett föremål kan utgöra referens för en klassificering, men till detta avgörande kommer också en bedömning av kategorikänslighet. Vad avgör om ett objekt kan ingå i en samling eller faller utanför? Detta har i förlängningen också betydelse för skapandet av mönster i och med att det är nödvändigt att skilja ut enheter som alltså bygger på uppfattade likheter och olikheter i innebörd, för att en struktur som är möjlig att tolka och generalisera ska framträda.

De yngsta barnen hittar vanligtvis utan större problem likheter i egenskaper hos olika föremål. Detta tar sig uttryck till exempel i att barnen väljer ut röda knappar ur en större samling knappar, där de röda knapparna kan variera i storlek eller form. Färg tenderar att vara en egenskap som barnen tillåter variera i rätt så hög grad, till exempel accepterar många nyanser av rött som en klass, medan storlek inte är en egenskap som självklart tillåts variera inom en och samma klass. I följande episod ser vi hur lärarens initiativ till att utmana klasstillhörigheten får gensvar hos ett barn som prövar idén i sin egen samling.

Maja ordnar raderna med knappar framför sig. ”Ett till hjärta” säger hon och visar upp en hjärtformad knapp innan hon lägger ner den i raden efter tre likadana hjärtformade knappar som hon ordnat tidigare.

Carol: ”Vad många. Fyra hjärtan på rad.” […] Carol ordnar långa rader av knappar framför sig på bordet, likadana knappar i samma rader. Jenny öser en handfull knappar från askarna på bordet och ger Carol. Carol: ”Kan du hjälpa mig se om det finns några likadana? Titta så blir den en sån lång, lång rad”. […] Maja bidrar med fler knappar till raderna. Jenny tar fram en stor knapp som de tidigare konstaterat liknar en ratt och jämför den med en likadan men mindre knapp. Carol: ”Titta här, det var den stora. Var har vi den lilla då?” Jenny och Maja tittar i askarna. Maja hittar den mindre ratt-knappen. Carol lägger dem bredvid varandra ”Titta, här har vi stor och liten, likadana”.

Maja tittar på sina knapprader, tar en liten knapp och säger: ”Litet hjärta!” och sätter det i raden av större hjärtan.

Carol: ”Ett litet hjärta, får det vara med de stora hjärtana?”

Det vi ser i episoden är att barnet uppfattar den generaliserade idén där lärarens sätt att variera storlek men hålla formen konstant förs över till ett annat sammanhang. Barnets samling av likadana hjärtan tillåts inbegripa också ett hjärta i annan framställning där storlek men även vissa detaljer är olika. Den yttre formen, liksom beskrivningen av objektet ”hjärta” hålls konstant och medger alltså att det nya objektet ingår i samlingen. Detta är exempel på generalisering men också att barnet urskiljer en abstraherad relation mellan objekten i samlingen. Föremålen är olika i utformning men ändå lika i innebörd. Detta torde vara en viktig aspekt att beakta i barns utveckling av förmågan att strukturera och generalisera, där barnet uppmärksammas på flera egenskaper men tillåter vissa att träda fram i förgrunden och andra egenskaper i bakgrunden.

Att systematisera

I episoden ovan ser vi hur läraren Carol fångar upp Majas initiativ till att ordna knappar i rader. Hon erbjuder Jenny att hjälpa henne sortera knapparna i rader genom att leta efter likadana egenskaper. Den strukturen tycks underlätta för barnen att identifiera lika och olika egenskaper. Barnen ordnar objekten i långa rader, efter varandra. De för ihop objekten till en hög och ordnar upp dem i rader igen. Att ordna en samling av objekt på detta sätt bidrar sannolikt till att barnen bättre kan urskilja objektens egenskaper och deras relation till varandra och till andra samlingar av objekt.

Carol: ”Här hade du också en massa figurer på rad” pekar på en rad med olika djurfigurer som Maja gjort. Maja tar två stora runda knappar och placerar dem intill varandra mellan raden med figurer och raden av hjärtan. Sen lägger hon ytterligare en stor rund knapp till vänster om de tidigare och ännu en till höger om raden. Maja väljer sen fem knappar i olika färg och storlek och placerar dem alldeles ovan-för raden med stora knappar.

Maja utvecklar sitt sorterande och ser ut att ordna på en mera generaliserande nivå än i början av aktiviteten. Genom att ordna i rader får hon en överblick och helhet av de grupper hon skiljt ut. Det som skiljer denna gruppering från de tidigare i aktiviteten är att hon klassificerar föreställande knappar för sig, hjärtknappar för sig och olikfärgade "vanliga" knappar för sig. Inom dessa grupperingar tillåts egenskaperna variera, såsom att hjärtan av olika slag ingår i samma grupp och olika djurfigurer i en annan grupp, men regeln för grupperingen är fortfarande tydlig för en observatör. Strukturen återfinns alltså på en övergripande nivå och är sannolikt av betydelse för ytterligare utveckling av generella idéer, såsom i riktning mot ett algebraiskt tänkande.

Diskussion

Litteraturen och forskningen om utvecklingen av förståelse för mönster och algebra sammanfattar tydligt att det handlar om komplexa samband som förutsätter ett stort mått av resonemangsförmåga. En kärnförmåga för algebra och generalisering av mönster är att resonera om strukturer och samband. För att i en planerad lärandesituation nå det uppställda lärandemålet (att utveckla förståelse för idén med mönster) förutsätter därför, som vi kan se i denna studie, att barnen redan har utvecklat ett flertal grundläggande förmågor såsom *att identifiera likheter och olikheter*, *samtidigt fokus* samt *att systematisera*. Det explicita avgränsade lärandeobjektet bör alltså utgå från barnens erfarenheter och kunskapsnivå och undervisningen utformas mot denna bakgrund. Hur detta kan gestalta sig framgår också av resultaten där läraren fångar upp det barnen tar initiativ till och utmanar de förmågorna i riktning mot lärandemålet. Detta är helt i linje med läroplansskrivningarna, där mål för lärande visserligen ställs men som strävansmål med utgångspunkt i respektive barns existerande förmågor och förståelse.

Lärarens mål med aktiviteten i studien var att barnen skulle utveckla sin förståelse för idén med mönster. Vid en första anblick kan man tycka att lärandemålet inte uppfylldes eftersom barnen inte skapar mönster i matematisk mening. Däremot är just detta resultat av stort pedagogiskt värde för diskussionen om matematiklärande i förskolan i synnerhet med de allra yngsta barnen. Vad förväntar vi oss att barn ska lära och hur tänker lärare sig att detta lärande sker? De yngsta barnen i förskolan fångar inte upp lärarens intentioner att skapa mönster på samma sätt som äldre barn och vuxna förmår både tolka och utveckla mönster. Radford (2012) hävdar också att denna förmåga inte utvecklas spontant utan i sociokulturella sammanhang där samband och strukturer synliggörs och prövas. Vi kan i resultaten av analysen se att barnen är engagerade i att utforska och även resonera i handling om både samband och strukturer, särskilt av spatial karaktär. Tvååringarnas respons på kommunikationen med läraren och med utgångspunkt i knapparna visar att barnen uttrycker just denna förmåga att strukturera och generalisera. Tidigare forskning på området poängterar just dessa förmågor som grundläggande för vidareutveckling mot algebra, vilket alltså tar sig uttryck som klassificering och sortering i tidiga år.

Barnens grundläggande utforskande av likheter och olikheter möter inledningsvis i studien lärarens mycket specifikt ordnade mönster. Barn och lärare resonerar alltså med olika utgångspunkter, vilket sannolikt gör att barnen inte följer upp lärarens initiativ och imiterar dennes mönster. Som ett bidrag till kunskapsfältet om mönster och algebraiskt tänkande kan man diskutera att barn i tidig ålder tycks ha förmågor att strukturera och generalisera på ett övergripande plan som så småningom kan tillämpas på explicita situationer med konkreta objekt. Lärarens förslag att direkt gå på att ordna egenskaper hos knapparna i varannan stor, varannan liten är ett exempel på en sådan explicit situation. I läroplanens skrivningar lyfts särskilt förmågor fram i flera mål med tonvikt på att upptäcka och använda matematiska samband samt att föra och följa resonemang. Resultaten av studien visar även att grundläggande förmågor för ett komplext kunnande kan utmanas redan i tidig ålder, men för att åstadkomma ett sådant progressivt och långsiktigt tänkande om matematiklärande bör läraren ha både kunskaper om lärandeobjektet, vad det innebär att förstå och utveckla kunnande om mönster, samt hur barns förmågor kan utmanas i lekfulla och inspirerande sammanhang. *Att identifiera likheter och olikheter*, *samtidigt fokus* samt *att systematisera* är exempel på sådana grundläggande förmågor.

Vilka implikationer får denna studie för pedagogisk verksamhet med småbarn och matematik som ett lärandeinnehåll? Sammanfattningsvis kan man dra slutsatsen att många begrepp inom matematiken som barn möter i vardagen är komplexa till sin natur. Att förstå begrepp såsom ”mönster” förutsätter en generell förståelse för struktur, systematik och klassificering. Dessa förmågor kan senare tillämpas på specifika uppgifter för att igen generaliseras på ett än mer utvecklat sätt som inbegriper regler för att skapa och fortsätta ett mönster. Mer forskning och systematiskt utvecklingsarbete med matematiska begrepp som lärandeinnehåll och mål behövs för att bättre förstå sambandet och progressionen i lärandet. Tendenserna framträder dock redan i detta småskaliga arbete och torde ger underlag för fortsatta studier.

Referenser

Björklund, C. (2012). What counts when working with mathematics in a toddler-group. *Early Years. An international Journal of research and development, 32*(2), 215–228.

Björklund, C. (2013). Less is more – mathematical manipulatives in ECE. *Early Child Development and Care*. Published online: 20 June 2013 http://dx.doi.org/10.1080/03004430.2013.799154

Björklund, C. & Pramling, N. (2013). Pattern discernment and pseudo-conceptual development in early childhood mathematics education. *International Journal of Early Years Education*. Published online: 27 June 2013 http://dx.doi.org/10.1080/09669760.2013.809657

Clements, D. & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Mathematics Teacher Education, 14*(2), 133–148.

Cross, C., Woods, T., & Schweingruber, H. (Eds.) (2009). *Mathematics learning in Early Childhood. Committee on Early Childhood Mathematics; National Research Council*. Washington DC: The National Academic Press.

Garrick, R., Threlfall, J., & Orton, A. (1999). Pattern in the nursery. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 1–17). London: Cassell.

Heeffer, A. (2010). Learning concepts through the history of mathematics: The case of symbolic algebra. In K. François & J. P. Van Bendegem (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 83–103). Dordrecht: Springer.

Johansson, E., & Pramling Samuelsson, I. (2006). *Lek och läroplan. Möten mellan barn och lärare i förskola och skola*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Marton, F. & Tsui, A. (Eds.) (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Park, B., Chae, J-L. & Boyd, B.F. (2008). Young children’s block play and mathematical learning. *Journal of Research in Childhood Education, 23*(2), 157–162.

Papic, M., Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2011). Assessing the development of preschoolers’ mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237–268.

Piaget, J. (1952). *The child’s conception of number*. New York: Norton & Company Inc.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA, 6*(4), 117–133.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics: Psychological and Pedagogical Considerations*. Dordrecht: Springer.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Sarama, J., & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research. Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Sheridan, S., Williams, P., Sandberg, A., & Vuorinen, T. (2011). Preschool Teaching in Sweden: A Profession in Change. *Educational Research, 53*(4), 415–437.

Skolverket (2010). *Läroplan för förskolan. Lpfö98*. Reviderad 2010. Stockholm: Fritzes.

Skolverket (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stodkholm: Fritzes.

Smith, L. (1989). A model of perceptual classification in children and adults. *Psychological Review 96*(1), 125–144.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18–30). London: Cassell.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 171–185.

(fortsatt fra side 23)

Ved innsetting av verdier for v og r finner man så at $h \approx 0{,}193$. Dette betyr at tilstramningspunktet ligger ca. 193 meter over jordoverflaten! Så kan man lure på hvordan dette er mulig når tauet bare er 2 meter lengre enn jordomkretsen. Kanskje kan en elev få en idé om hvordan ved å regne ut kateten med lengde x i figur 12?

Her blir $x = \sqrt{10001^2 - 10000^2} \approx 141,4$, som kanskje er et overraskende høyt tall, men som de fleste nok vil godta siden det er Pytagoras' formel som ligger bak. I så fall vil man kanskje også akseptere at noe av det samme gjør seg gjeldende når tauet strammes til rundt jorda.

Referanser

Hole, A. (2006). *Grunnleggende matematikk i skoleperspektiv* (4. utgave). Oslo: Universitetsforlaget.

Lindstrøm, T. (2006). *Kalkulus* (3. utgave). Oslo: Universitetsforlaget.

Pickover, C. A. (2009). *The Math Book.* New York: Sterling Publishing Co.

(fortsatt fra side 27)

Neuman, D. (1992). Kraften i det odelade 5-talet. *Nämnaren*, 19(1), 30-33.

Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *NOMAD*, 18(2), 3-46.

Ostad, S. A. (1997). Developmental differences in addition strategies: A comparison of mathematically disabled and mathematically normal children. *British Journal of Educational Psychology*, 67, 345-357.

Ostad, S. A. (2010). *Matematikkvansker: En forskningsbasert tilnærming.* Oslo: Unipub.

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Realfagbygget A4, NTNU
7491 Trondheim
Telefon: +47 73 55 11 42
Faks: +47 73 55 11 40
merete.lysberg@matematikksenteret.no

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen (NSMO) har som oppgave å bidra til utviklingen av bedre arbeidsmåter i matematikkopplæringen fra barnehage til videregående skole. Nyansatt leder Kjersti Wæge vil endre matematikkundervisningen og gjøre matematikk til et morsomt fag.

Mange har dårlig selvtillit i matematikk og husker matematikkundervisningen fra skoletiden uten særlig glede. De husker en matematikkundervisning hvor læreren står ved tavlen og presenterer regler. Men fremtidens matematikkundervisning vil bli annerledes, om Wæge får det som hun vil. – Matematikk handler ikke om bare å huske regler. Tradisjonell matematikkundervisning legger stor vekt på å vise hvordan man finner det riktige svaret. Å vite hvorfor og det å se sammenhenger har fått mye mindre oppmerksomhet, sier Wæge. – Matematikk handler om å se mønstre og systemer, og i fremtiden vil vi i mye større grad involvere elevenes egen tenkning i undervisningen.

Metoden hun viser til heter Undersøkende matematikkundervisning. I en slik undervisningskontekst setter læreren opp læringsmålene, men lar elevene selv utforske problemene for å finne mønstre og systemer. Elevene driver aktiv matematisk utforskning og diskuterer egne løsningsstrategier med hverandre. Metoden øker både motivasjon og læringsutbytte betydelig, viser blant annet Wæges egen forskning. En av grunnene til det, er at det er lov å gjøre feil!

– Feil, og det å lære av feilene vi gjør, er en del av matematikken det også. Når elevene får lov til å utforske et felt og diskutere hvordan de tenker med hverandre, oppdager de at matematikk slett ikke er et tørt fag som består i å huske hva læreren har sagt. I stedet blir det til et spennende og aktivt fag som utforsker virkeligheten på elevenes egne premisser. Og da oppdager de at matematikk er gøy!

Nye ansatte ved matematikksenteret presenterer seg selv

Oliver Thiel

Jeg er ansatt i 20% ved Matematikksenteret for først og fremst å jobbe med begynneropplæringsprosjektet. Jeg kommer fra Tyskland og ble utdannet som Diplomfysiker. Dette tilsvarer en mastergrad i fysikk. Etterpå har jeg fullført utdanning som allmennlærer med vekt på realfag. Jeg har også en doktorgrad i filosofi (PhD) rettet mot grunnskolepedagogikk.

Jeg har undervist både fysikk på ungdomsskole og matematikk og tysk på barneskole i Berlin. Jeg har jobbet i mange år ved Humboldt-Universitetet i Berlin og gjennomførte blant annet et stort forskningsprosjekt om matematikk i barnehagen. Etter at jeg vikarierte som professor i matematikk og matematikkdidaktikk ved Pedagogiske Høyskole Schwäbisch Gmünd, begynte jeg i 2011 som førsteamanuensis ved Dronning Mauds Minne Høgskole for barnehagelærerutdanning. Der underviser og forsker jeg fortsatt i barnehagematematikk.

Monica Rehaug

Jeg er ansatt ved Matematikksenteret i 50 % stilling for å utvikle oppgaver til læringsstøttende prøve i regning for Vg1. Jeg er utdannet allmennlærer med vekt på realfag fra HiST. I tillegg har jeg tatt flere ulike IT-fag, samt et studium i ledelse i skolen.

Siden 1997 har jeg hovedsakelig jobbet på ungdomstrinnet hvor jeg har undervist i matematikk, naturfag og kroppsøving. Jeg har også noen års erfaring med å undervise i matematikk på mellomtrinnet. Jeg har fungert som ressurslærer i matematikk på skolenivå.

Filip Witzell

Min oppgave på Matematikksenteret er å finne og prøve matematiske applikasjoner som kan brukes til matematikklæring, hovedsakelig til nettbrett. Jeg samarbeider med fagansvarlige på senteret om utprøving og opplegg som kan benyttes i skole og barnehage. Oppleggene legges ut på matematikksenteret sine nettsider. Jeg holder også foredrag om bruk av nettbrett i barnehage og skole, på forskjellige relevante konferanser.

Jeg ble ferdig utdannet barne- og Ungdomsarbeider i 1999. Jeg har ingen formell kompetanse, men er selvlært på mange områder innenfor IKT og lidenskapelig opptatt av IKT siden Commodore 64 på midten av 80 tallet.

Siden 1999 har jeg jobbet som barne- og ungdomsarbeider ved Stavset skole og i Regnbuen barnehage. Fra 2012 har jeg deltatt i ulike prosjekter på Matematikksenteret, primært angående bruk av nettbrett til matematikklæring. Jeg har også drevet eget firma med kurs- og foredragsvirksomhet: Finnes det en app for alt, Witzell.

Anita Valenta

Jeg har lærerutdanning fra NTNU, i fagene matematikk og fysikk, og har også fullført mitt

hovedfag og min doktorgrad på NTNU, innen algebra. Etter endt utdanning jobbet jeg i åtte år som førsteamanuensis i matematikk ved lærerutdanningen på Høgskolen i Sør-Trøndelag.

Hovedoppgaven min ved Matematikksenteret er innen utvikling og forskning knyttet til etterutdanning av matematikklærere. Jeg er særlig opptatt av forskning innenfor tre områder. For det første matematikklærerkompetanse og dens utvikling i lærerutdanning og etter- og videreutdanning. For det andre kommunikasjon i matematikk og dens rolle i læring og undervisning. Det tredje området jeg er opptatt av, er resonnering og argumentasjon i matematikk.

Kay Ronny Dahl

På Matematikksenteret jobber jeg primært med utarbeiding av Nasjonale Prøver i regning for 5. trinn sammen med tre andre dyktige medarbeidere.

Jeg gikk lærerskolen på Høgskolen i Hedmark, avd. Hamar og jobbet også på en skole i Hedmark noen år og fikk til sammen 10 flotte år på Hedmarken før jeg vendte nesen hjemover til Trøndelag i 2008.

Da begynte jeg å jobbe på Stabbursmoen skole på Heimdal hvor jeg fortsatt jobber. Jeg har også tatt noe etterutdanning i form av 90 studiepoeng henholdsvis i musikk og i IT for lærere.

Dessuten tok jeg mellom 2010 og 2012 60 studiepoeng i studiet «Matematikk for ungdomstrinnet» og har fra tidligere 25 studiepoeng i naturfag fra NTNU.

Trine-Lise Nerdal

Jeg jobber med utvikling av læringsstøttende prøver for 6. trinn.

Jeg har 4-årig allmennlærerutdanning med fordypning i matematikk ved Høgskolen i Tromsø. Jeg har fordypning i matematikkdidaktikk, veiledningspedagogikk, ledelse i skolen og matematikk og uteskole.

I tillegg til å jobbe på Matematikksenteret, jobber jeg ved Lavangen skole som lærer på mellom- og ungdomstrinn og eksternvurderer i Region Midt-Troms. Jeg har også erfaring som kontaktlærer og sensor i muntlig og skriftlig eksamen. Tidligere har jeg vært kompetanselærer i prosjektet Matematikk i Nord og norsklærer for voksne fremmedspråklige ved Folkeuniversitetet i Gratangen, Lavangen og Salangen.

Silje Alette Heggem

Jeg er fra 1. august ansatt i 50 % stilling som prosjektmedarbeider på Matematikksenteret. Her er jeg med i en gruppe som utviklinger oppgaver til Nasjonale prøver i regning for 5. trinn.

Jeg tok lærerskolen ved Høgskolen i Agder, Kristiansand, med mellomfag i matematikk. I tillegg har jeg en master i matematikkdidaktikk fra Københavns Pedagogiske Universitet.

Utover å være på Matematikksenteret er jeg ansatt som kontaktlærer ved Borkedalen skole i

Lillesand, og har arbeidet der siden 2005. I flere år var jeg nettverksleder i matematikk i Lillesand kommune. Jeg har også hatt ett års engasjement på Pedagogisk senter i Kristiansand med samlinger for matematikklærere og vært med å holde kurs i Vurdering for læring.

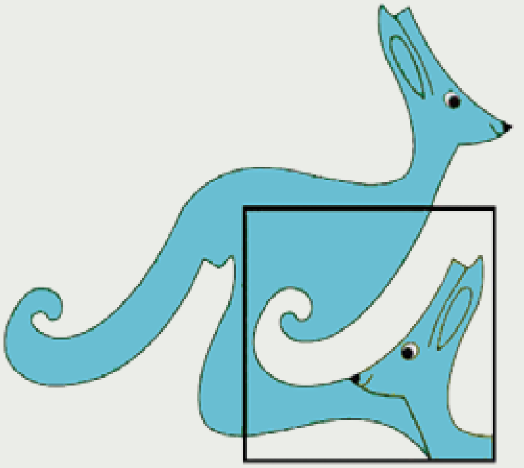
Wenche Dypbukt

Dette skoleåret skal jeg jobbe i nesten femti prosent stilling ved Matematikksenteret i forbindelse med den nasjonale FYR-skoleringen. Det vil si at jeg skal arbeide med yrkesretting av matematikkfaget. For tiden er jeg også FYR-koordinator i Sør-Trøndelag.

Til vanlig underviser jeg i matematikk, geografi og geofag ved Charlottenlund videregående skole. Jeg er utdannet lektor med hovedfag i geografi med geografisk informasjonsbehandling som spesialfelt. I tillegg har jeg studert matematikk, informatikk og idrett, alt ved NTNU.

Etter hovedfag jobbet jeg noen år ved geografisk institutt (NTNU) som vitenskapelig assistent og stipendiat. Siden 1994 har jeg jobbet som lærer ved Brundalen og senere Charlottenlund videregående skole. Jeg har også vært med på å forfatte flere lærebøker i matematikk (Gyldendal forlag).

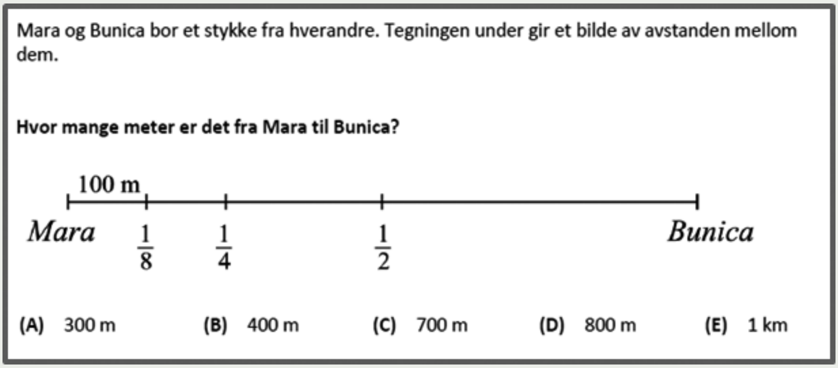
KENGURUSIDENE



Hvordan utnytte muligheter i flervalgsoppgaver?

Morten Svorkmo

Gjennom flere år har jeg i egen klasse benyttet oppgaver fra Kengurukonkurransen som et utgangspunkt for samarbeid og felles oppgaveløsing i hel klasse eller gruppe. Dette er flervalgsoppgaver med varierende vanskegrad og med ulike matematiske tema. Når en skal forsøke å legge til rette for at hver enkelt elev skal møte utfordringer på sitt nivå, er det lett å tenke at en skal jobbe med ulike oppgaver. Jeg har sjøl opplevd at det å ta utgangspunkt i en felles oppgave for deretter å utvide eller forenkle problemstillinger knyttet til oppgaven, kan gi et godt læringsutbytte både for de som er flinke og de som kanskje strever litt.


Mara og Bunica bor et stykke fra hverandre. Tegningen under gir et bilde av avstanden mellom dem.

Hvor mange meter er det fra Mara til Bunica?

(A) 300 m **(B)** 400 m **(C)** 700 m **(D)** 800 m **(E)** 1 km

Jeg skal vise et eksempel på hvordan jeg har brukt en flervalgsoppgave i egen undervisning på 6.trinn, og hvordan svaralternativer kan brukes til å bygge forståelse og gi differensierte utfordringer.

Noen stikkord om organisering og tilrettelegging:

- Elevene jobber i par.
- Tilrettelegging og tilgang på bruk av konkreter og hjelpemidler. Til denne oppgaven brukte elevene åpne tallinjer og papirstrimler.
- Samlinger og oppsummeringer i felles gruppe (ca. 20 elever).

Oppgaven jeg har brukt er fra *Kengurukonkurransen 2013, Benjamin* (se ramme på neste side).

Oppgaven ble introdusert i felles gruppe, og deretter skulle elevene jobbe parvis før vi skulle møtes til en felles gjennomgang. De skulle også forberede en presentasjon av sitt løsningsforslag.

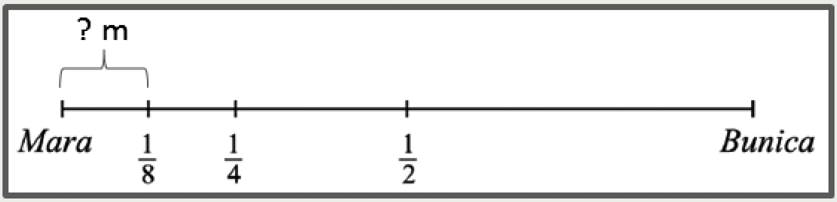
Jeg fikk muligheten til å gå rundt blant elevene mens de jobbet med oppgaven, og jeg registrerte noen varianter av løsninger som kunne fungere som gode forklaringer i felles gruppe. I felles samling så vi på tre løsningsforslag som ikke var veldig ulike, men som alle ga en grei forklaring på at hele avstanden måtte være 800 m. Her var det egentlig ikke så mange diskusjoner, og heller ikke særlige uenigheter om hvilket svaralternativ som var riktig.

Ut fra det korrekte svaralternativet, 800 m, så vi på sammenhengen mellom de tre brøkene 1/2, 1/4 og 1/8, og hvilke meterverdier disse representerte i denne oppgaven. Med tanke på det som skulle komme videre, brukte vi litt tid på nettopp disse brøkene. Det å vite at 1/8 er halvparten av 1/4 som igjen er halvparten av 1/2 er ikke like opplagt for alle. Dette er brøkverdier jeg vil kategorisere som sentrale, og det er sammenhenger mellom brøker jeg har erfart at elever har stor nytte av å kjenne godt til.

Vi gikk deretter videre med samme oppgave, og jeg lot elevene få en ny utfordring med samme oppgavetekst, men med en liten vri: *La et annet av svaralternativene være riktig svar. Hva må måltallet være da?*

Igjen jobbet elevene parvis, og igjen fikk jeg en mulighet til å gå rundt, stille spørsmål og se hvilke utfordringer elevene hadde. De fleste greide å finne ut at det måtte være 50 m dersom hele avstanden mellom Mara og Bunica skulle være 400 m. Svaralternativ (E), 1 km, gikk også nokså greit å finne et måltall til når en først hadde fått gjort om 1 km til 1000 m.

Å finne 1/8 av 300 m eller 700 m kan være en utfordring for elever på dette årstrinnet, men i og med at vi hadde hatt et fokus på brøkverdiene 1/2 og 1/4 litt tidligere, var det overraskende mange som også greide å finne løsninger på



de litt vanskeligere tallverdiene. Jeg la merke til at det var flere som gikk veien om og for å forklare sitt resonnement da vi gikk gjennom løsningsforslagene i felles gruppe.

Etter dette ble utfordringen å lage sin egen oppgave med egne brøker, og gjerne andre tallverdier.

Kravet til oppgaven var: *Lag din egen tallinje der du velger brøkverdier og antall meter, og du skal også lage svaralternativer der ett av alternativene skal være riktig.*

Med en slik felles oppgave som utgangspunkt gir det flere muligheter for differensiering. I denne fasen kom vi også inn på problemstillingen i det å velge svaralternativer slik at det ikke blir altfor lett å finne riktig løsning. Jeg opplevde at flere av elevene var svært kritiske både til seg selv og til andre. Det førte til flere diskusjoner, og det er interessant å se hvor mye regning og matematisk argumentasjon det kan være i å velge svaralternativer som ikke skal være riktige. Her hadde jeg flere morsomme observasjoner.

Noen elever hadde veldig lyst til å lage litt vanskelige brøker, men oppdaget da at de sjøl fikk en utfordring i å plassere brøkene riktig på tallinja. Det at brøkenes plassering på tallinja skulle være helt korrekt, var et krav jeg som lærer ikke hadde satt opp eksplisitt, men som elevene var nokså enige om at de måtte ha med. Når elever har arbeidet grundig med en oppgave slik som jeg har vist her, har de mange ideer på hvordan deres egen oppgave kan formuleres. Kvaliteten på oppgavene blir bra.

Oppgaver med svaralternativer er kanskje litt uvant i matematikksammenheng for norske elever. Jeg håper dette eksempelet kan vise måter å bruke flervalgsoppgaver på. En oppgave behøver ikke å være avsluttet etter at riktig svar er funnet. Bruk gjerne tidligere oppgaver fra Kengurukonkurransen til å finne egnede oppgaver til undervisningen. Jeg har opplevd at dette kan gi varierte økter med et godt læringsutbytte.

På Matematikksenteret sine kengurusider, matematikksenteret.no/kengurusiden/, finnes det også oppgaver tilpasset elever på 2. og 3. trinn. Disse oppgavene er oversatt fra svensk. Her er det mange idéer til hvordan de yngste elevene kan arbeide med kenguruoppgaver på ulike måter i klassen.

Kengurusidene

Kengurukonkurransen er en internasjonal matematikkonkurranse for elever fra 4. til 10. trinn. Kengurukonkurransen har som mål først og fremst å inspirere elever, men også lærere slik at de blir glade i matematikkfaget.

Oppgavesettene, *Ecolier* (4.–5. trinn), *Benjamin* (6.–8. trinn) og *Cadet* (9.–10. trinn), består av 18–24 oppgaver med utradisjonell vinkling. Elevene får fem svaralternativer for hver oppgave, noe som ufarliggjør deltakelsen.

www.matematikksenteret.no

Tidligere oppgaver finner du i menyen til venstre. *Den internasjonale dagen for Kengurukonkurransen er tredje torsdagen i mars.* Logoen er reklame for den 22. «Annual Meeting of the Association Kangourou Sans Frontières» i Puerto Rico i november 2014.

www.matematikksenteret.no

På Matematikksenterets nettsider får du tilgang til en rekke gratis nettressurser.
Vi har blant annet en rekke hefter både med ideer til og ferdige undervisnings opplegg.

Besøk vår nettbutikk som du finner på knappen øverst på siden vår.

Vi anbefaler Skriftserien, en serie hefter med opplegg matematikksenterets ressurspersoner har presentert på Novemberkonferansen opp gjennom årene.

Andre titler

Adresseavisens Abelkonkurranse 2002

GeoGebra 4.0 for videregående skole – Med eget kapittel om CAS

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
v/Randi Håpnes
NTNU, Realfagbygget
7491 Trondheim

post@lamis.no • www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det overordnede målet for Landslaget for matematikk i skolen er å heve kvaliteten på matematikkundervisningen i grunnskolen, den videregående skole og på universitet/høyskole.

Landslaget skal stimulere til kontakt og samarbeid mellom lærere på ulike utdanningsnivåer og mellom lærere og andre som er opptatt av matematikk.

Styret for LAMIS

Leder
Tone Skori, Akershus
Barnetrinnet
Hege Fjærvoll, Nordland
Åge Ryghseter, Nedre-Eiker
Ungdomstrinnet
Gerd Nilsen, Hedmark
Videregående skole
Per Gunnar Østerlie, Sør-Trøndelag
Høgskole/universitet
Marianne Maugesten, Østfold
Varamedlemmer
1. Renate Jensen, Hordaland
2. Kurt M. Klungland, Rogaland

Medlemskontingent 2015

450 kr for enkeltmedlem m/Tangenten
200 kr for husstands-medlemmer
300 kr for studenter m/Tangenten
975 kr for skoler/institusjoner m/Tangenten

Organisasjonssekretær

Gro Berg
gro@lamis.no
41562324

LAMIS sommerkurs 2015 «Matematikk i tiden» arrangeres i Fredrikstad 7.–9. august. Følg med på www.lamis.no for oppdatert informasjon.

Lederen har ordet

Tone Skori

Da nærmer det seg jul med stormskritt. I den anledning vil jeg slå et slag for et tverrfaglig samarbeid i kunst og håndverk og matematikk, med tanke på all julepynten som blir laget i disse tider. Da kan elevene kanskje få litt mer forståelse for måling og bli enda bedre på å beskrive de ulike geometriske formene og begrepene innen for to- og tredimensjonale figurer. Eksempel på slike figurer er kjegle, sylinder, kube, ulike trekanter og firkanter som rektangel, rombe, kvadrat, parallellogram, drake og trapes. Trenger dere flere ideer til julepynt så er det mye å hente på Matematikksentret sine sider, www.matematikksenteret.no/content/520/6.-Juleverksted. Både tverrfaglighet og grunnleggende regneferdigheter henger nøye sammen. Her snakker vi om regning i alle fag.

Grunnleggende regneferdigheter danner basis for læring og utvikling i alle fag, ikke bare som ferdigheter på et lavt og elementært nivå, men for å møte dagligdagse, allmenne utfordringer. De grunnleggende regneferdighetene er integrert i kompetansemålene i det enkelte fag, og skal medvirke til å utvikle fagkompetansen. De grunnleggende ferdighetene skal være en berikelse for faget, i tråd med fagenes målsettinger. Å kunne regne er å bruke matematikk på en rekke områder, som for eksempel å resonnere og bruke matematiske begreper, verktøy for å løse problemer og for å beskrive, forklare og forutse hva som skjer, gjenkjenne regning i ulike kontekster, stille spørsmål av matematisk karakter, velge holdbare metoder når problemene skal løses, være i stand til å gjennomføre dem og tolke gyldigheten og rekkevidden av resultatene. I tillegg er grunnleggende regneferdigheter å gå tilbake i regneprosessen for å gjøre nye valg, kommunisere og argumentere for valg som er foretatt, ved å tolke konteksten og arbeide med problemstillingen fram til en ferdig løsning.

På årsmøtet vi hadde i august ble det bestemt at det ikke blir lokallagssamling på Gardermoen i februar. Det blir en samling for lokallagsmedlemmer dagen før sommerkurset starter, det vil si fra torsdag 5. august til fredag 6. august. Sommerkurset 2015 blir fra fredag 6. august til søndag 8. august, og det arrangeres på Quality hotell i Fredrikstad. Følg med på LAMIS sin hjemmeside, www.lamis.no, for oppdateringer om sommerkurset.

På Udir.no ligger det nå ute læringsstøttende prøver i matematikk for 5. – 10. trinn. Dette er prøver som kan brukes til å identifisere misoppfatninger og manglende begrepsforståelse hos elevene, som kan være til hinder for videre læring. Det er laget egne ressurshefter i tillegg til prøvene. Heftene er til hjelp til undervisning for elevene som strever med misoppfatninger og feiltenkninger.

Matematikkdagheftet 2015 blir sendt ut til alle medlemmene rundt årskiftet, og hvis du ønsker dette er det viktig at vi har din oppdaterte adresse. Dette er det siste året heftet kommer i papirform. Fra og med 2016 vil alle få en digital utgave. Vi holder på å jobbe med løsninger på dette.

Ønsker dere alle en riktig god jul, når den tid kommer.

Kurt Klungland

«I have a dream …»

… sa Martin Luther King for 51 år sia. Jeg har også en drøm, en drøm som gir meg styrke til å undervise i matematikk. Jeg drømmer om at tall og barn skal leve i skjønn forening, at barna blir fortrolige med tallene.

Jeg har en drøm om at ingen skal måtte pugge gangetabellen. Mitt forhold til gangetabellen som fenomen er til dels oppløftende, til dels anstrengt. Å hevde at barna ikke absolutt må pugge gangetabellen hindrer ofte enhver form for utviklingsarbeid i matematikk. Så jeg har lært å tie. Men jeg har erfart at den som ikke pugger gangetabellen, men som blir fortrolig med tallene, han eller hun kan regne. Som regel også nokså riktig. Jeg tenker bl.a. på to tidligere elever med toppkarakter i matematikk. Den ene, en gutt, svarte rett på alt, unntatt to av de fire oppstilte regnestykkene. Den andre, mi eiga datter, fikk også toppkarakter. «Pappa, hva er 4×6?» «Vet du hva 5×5 er?» Da visste hun svaret. Hun hadde en intuitiv forståelse av konjugatsetningen.

Her har jeg støtte av en autoritet. I kapittel 15 i *Alle teller* sier Alistair McIntosh bl.a.: *Det er tydelig at det å lære på rams ikke fungerer for mange elever, og at de mangler forståelsen slik at de ikke klarer å gjenskape svarene* (s. 80). Og på side 85: *Det er mye mer effektivt å telle med sprang enn å gjengi den tradisjonelle tabellen*.

Det er min drøm at barna skal bli godt kjent med de små tallene, med alle summer og differanser under tjue. De skal få så mye erfaring med kombinasjoner av små tall at de bare vet dem. Her har jeg også støtte av Olav Lunde. Alt for mange unge sliter med matematikk fordi de ikke har automatisert enkle summer og differanser i tallområdet opp til tjue. Fra de samme folk som hevder at barna må kunne multiplikasjonstabellene, har jeg aldri hørt noen si at de må kunne addisjonstabellene. Men det hevder jeg! Barna må bli kjent med tallkombinasjoner på mange forskjellige måter, ikke minst gjennom å spille, bruke konkreter og sette ord på det de ser og opplever.

Før jeg traff Alistair McIntosh – på biennalen i Malmø 2006 – tenkte jeg at det viktigste er at barna får gode opplevelser i matematikk. Etter at jeg traff han, forstår jeg at det går an å kombinere trening med glede. Det finnes nemlig veldig mange spill som gir mulighet til å styrke forståelsen og øke regneferdigheter og –strategier. I tillegg er det et spørsmål som læreren ofte bør stille: Hvordan tenkte du?

Det er min drøm at alle må kunne få regne på sin måte. Det er også min drøm at flest mulig må få oppleve og forstå mange forskjellige måter å regne på. Ikke minst gjelder dette lærere, slik at de kan lytte til, forstå og veilede sine elever. Algoritmer skal være et tilbud, en snarvei, ikke tvangstrøyer eller hemmelige bokser der tallene trylles om til noe som kanskje tilfeldigvis er svaret på oppgaven, hva nå den var for noe. – «Jeg skal finne et svar på en oppgave, ikke lære noe.»

Jeg drømmer om at alle barn må få bruke konkreter i undervisninga. Et utvalg av konkreter må være tilgjengelig, og de bør «tvinges inn» i undervisninga gjennom lek og spill. Vi må la barna få se, ta på, manipulere og oppdage sammenhenger. Bruk Numicon og JOVO-brikker, multibase og tangram, terninger, multilink, kulerammer, kortstokker … Bruk dem så lenge de har noe å tilføre. Det er lærerikt, og det kan ofte også være vakkert. Dessuten – vi tenker bedre når vi gjør noe med resten av kroppen.

I had a dream

Piet Hein satt visstnok i en naturfagtime og drømte. Da kom Somakuben til ham, rekende på et vindpust. Foredraget jeg hørte på forsvant også i vinden. Tankene kom. Tallene. Små kuler. Tetraedertallene – i gangetabellen? Ja, hele gangetabellen var full av tetraedertall. Så flott. Den store plasskrevende flata som gangetabellen fylte kunne ryddes sammen til ei rad av stadig større tetraedere. Og så jeg som aldri har vært god til å rydde!

Jeg studerte visst matematikk på den tida, og strevde med en formel om kvadratet av trekanttallene. Det der måtte da kunne sies lettere! Halve formelen var jo gangetabellen. Den andre halvdel var summen av kubikktallene. Jeg så det for meg. Jeg ryddet og stablet inni meg. Jeg smilte sikkert der jeg satt og ikke hørte etter på noe. Kun så det for meg, inni meg.

Jeg gikk rett hjem og bestilte 3025 colabokser fra Coca Cola Company til Mathematical Circus på ICME som skulle arrangeres i København den sommeren. Jeg nevnte nok også at jeg kunne klare meg med tusen mindre hvis jeg tok bort 10-tabellen.

Fikk aldri noe svar på den mailen. Der gikk verden glipp av The Coke Wall, den store flata av sukkerholdige produkter som skulle trylles om til kuber og tetraedere. Men jeg slapp å bygge tallene av Cola-sylindere, og kunne konsentrere med om isoporkuler i stedet.

Kuler er kult, og den beste

form til å bygge tetraedere. Pakking er en egen «gren» av matematikken. Kubikktallene er jo selvfølgelig lettest å bygge med kuber som enheter, men tetraedertallene er vakrere. De er så trekanta. Og sett fra visse vinkler er de også fullstendig kvadratiske. Take a look!

Nå er det også slik at sammenhengen mellom kubikktall og gangetabellen var kjent og påtalt i tallæra, men sammenhengen mellom tetraederne og gangetabellen hadde jeg ikke sett før. Ikke før jeg så det. Jo, ideen hadde jeg fått via et pussel – *The ancient puzzle of the Nile* – så da var det nok ingen nylig oppdagelse. Men hvem sto bak?

Tida går. Og noen år seinere fikk jeg hjelp av Frode Rønning og Christoph Kirfel. De klarte å spore opp at en av de gamle filosofer (antakelig Nicomachus of Gerasa, eller noen før han) sannsynligvis må ha oppdaget det før meg. Skulle bare mangle, så opplagt det virker, for oss som har sett det. – Det som er dumt, synes jeg, er at vi er få som har gjenoppdaget den sammenhengen.

I still have that dream

Jeg gir ikke opp drømmen om at alle barn skal få leke med gangetabellen og gjenoppdage noe av det samme som jeg. Da må vi bare lage den i kuler først. Da vil de for eksempel ikke bare se at 4 er 2+2, men at 4 er et kvadrat med 2x2 kuler, og at 4 er et tetraeder med 1 og 3 kuler. Sånn er 4. Sånn ser 4 ut, og på grunn av den første egenskapen treffer vi 4 i alle slags møbler og mange dyr, ja alt som har 4 bein. Barna må møte tallene som noe annet enn sifre på papir eller Smart board.

4 er et godt tall. Det er sammensatt. Eratosthenes fløy visstnok rundt med sila si og fant alle primtall. De tok han med seg for at matematikerne skulle få leke med dem. Resten, de sammensatte tallene, lot han ligge til elevene. Seinere har noen funnet ut at de kan pugge dem utenat. Men skyld ikke på Eratosthenes. Han ville bare leke med tallene. Det vil vi også. Fordi det er gøy.

Når barna leker med tallene kan vi pedagoger smile i skjegget og si: Nå lærer barna. «Det vi lærer mens vi har det *gøy*, kommer vi til å huske hele livet,» sier *Walt Disney*. «Spenning og *engasjement* er en forutsetning for all læring» sier *Asbjørn Flemmen*, og «*Har du det morsomt, blir du god*» – sa *en skater* på Dagsnytt 21, 31. juli i år.

Jeg har flere rare drømmer. I noen av drømmene får jeg besøk av Eraensthenes. Han er venn med hvert tall han. Eratoshenes ser bare på partallene, mens Eratresthenes og Erasyttenthenes er de eneste som bryr seg om 51. Ikke engang Team Antonsen har oppdaget dette. De endte opp med hundrevennen til 51 i sin filmsnutt om Den lille gangetabellen.

Den lille? Den er ikke liten. Den er uendelig. Og ikke bare det. Den inneholder alle kvadrat-, kubikk, trekant- og tetraedertall. Alle primtallene også, langs de to sidene: «en-gangen».

I Pascals «talltrekant» – som er like to-kanta som gangetabellen – finner du svaret på mange regnestykker, som bl.a. antall kamper i seriespill. Antall forbindelser i hjernen sikkert også. Det ligger for øvrig et kjempegodt undervisningsopplegg om «talltokanten» på www.matematikk.org.

Pascal legger to og to tall sammen. Så enkelt og systematisk. Tallet 1 danner sidelinjene, og resten er bare summer. Gangetabellen er produkter. (De naturlige tall danner der sidelinjene. Utenfor dem er det ingenting!) Er det bare slik tabellen skal presenteres? Som et produkt. I realfagsdidaktikk lærer vi at elevene også må få oppleve prosessene i fagene.

Den drømmen har jeg om gangetabellen. Bli med familien Eratallsthenes og gjenoppdag gangetabellen.

Kan drømmer bli til virkelighet?

Vitenfabrikken i Sandnes vil lage gangetabellen som modell som elevene kan leke med. Vitenfabrikken arrangerer også finale i First Lego League i Rogaland. I årets prosjekt, World Class, (www.hjernekraft.org) handler klasseforskninga om nye metoder å lære på. Kanskje vårt lag, *First for fight*, går inn for å ha det gøy med å lære gangetabellen. (Ja, de gjør. I dag var vi med Eratosthenes og fant faktorene til tallene, og så hvilke tall som er primtall (og dermed «aldri» svar på gangestykker) og hvilke som er rike og dermed hyppige svar på sånne oppgaver. Og så fikk elevene arbeide med isoporkulene og ta bilde av sin lykkelige lærer!)

Min hjemby Egersund, har et rom – Bykjernen – som vi vil fylle med innhold. Min drøm om å lage Matematikkens hus i Egersund blir aldri en realitet. Jeg gidder ikke. Det er for slitsomt. Men en vakker dag i oktober – og det må vel bli den 28., for det er et fullkomment tall – presenterer jeg *Alle elsker gangetabellen*.

Alle har et forhold til gangetabellen, men de færreste har nok samme godfølelse som jeg. For noen er den en pest og en plage, for andre et mål de nådde. For noen en kilde til feil og frustrasjon og febrilsk leting etter en kalkulator. For mange en selvfølge. Den bare er der. Uten 51 antakelig. For meg er den et mønster. En kilde til undring og oppdagelser. Et vakkert leketøy.

Se det for deg! Drøm søtt!

Sove? Nei, Dom Hélder Câmara skal visstnok ha sagt: *Dersom ett menneske har en drøm, er den en utopi. Dersom en million mennesker deler den samme drømmen, er den en realitet*.

Referanser

Kurt Klungland: Tetraedere og kuber i gangetabellen, *Tangenten* 1/2004

Alistair McIntosh: *Alle Teller*!, Matematikksenteret 2007

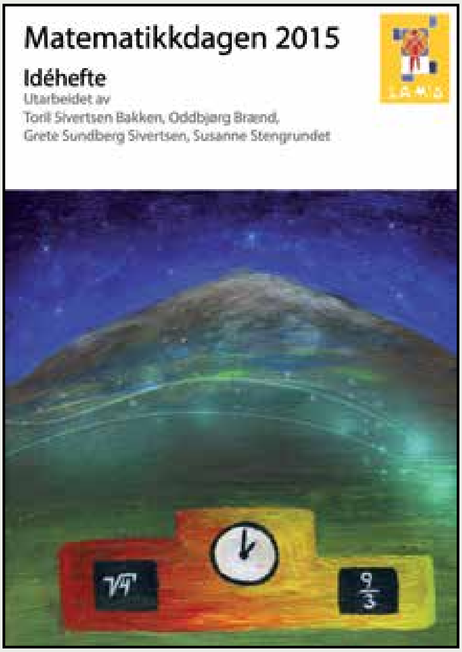
www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Nicomachus.html

Matematikkdagheftet 2015

Oddbjørg Brænd

Matematikkdagheftet for 2015 er laget av LAMIS Fjellregionen. Tre av de fire forfatterne av sitter i styret for lokallaget. Det er derfor bildet på framsida av årets hefte har et stort fjell sentralt plassert. Lokallaget Fjellregionen dekker kommunene Holtålen, Røros, Os, Tolga, Tynset, Alvdal, Folldal og Rendalen. Forfatterne Toril Sivertsen Bakken, Grete Sundberg Sivertsen og Oddbjørg Brænd har erfaring fra småtrinn, mellomtrinn og eller ungdomstrinn. Ettersom ingen av de tre hadde noen erfaring fra videregående, måtte vi få inn en ekstern person. Gro tipset om Susanne Stengrunnet. I tillegg til erfaring fra videregående, hadde hun også gode kunnskaper og ferdigheter i og om GeoGebra. Hun skulle egentlig bare hjelpe oss med disse tingene, men ble raskt en naturlig del av gruppa fordi hun likte arbeidet med heftet veldig godt. Kreativiteten til de andre på laget imponerte og inspirerte henne og hun ble med på alle deler av arbeidet frem til ferdig hefte.

Framsida av heftet er laget av Oda Helene Berg fra Opphaug. Hun går tredje året på Fosen VGS med fordypning i realfag. Men hun har alltid vært interessert i tegning og maling og har vært elev i kulturskolen på Visuelle kunstfag i mange år. Foruten fjellet som skal symbolisere Fjellregionen, er det med en seierspall dekorert med en klokke, et rottegn og en uekte brøk, som hentyder noe av hovedinnholdet i heftet.



Det var i 2013 at Gro Berg kom med forespørsel om lokallaget kunne tenke seg å lage Matematikkdagheftet for 2015. Tja, kunne vi greie den jobben? Den gang virket tida frem til høsten 2014 veldig lang, og når alt kom til var det en spennende oppgave som de fire styremedlemmene ikke greide å si nei til. Å få æren av å lage en slik oppgavesamling virket forlokkende. Derfor fikk Gro et ja fra Lamis Fjellregionen. Det var fire fra lokallaget med i starten, men en måtte dessverre takke nei til å være med på prosessen.

Første utfordring når man skal lage et Matematikkdaghefte er: Hva skal temaet eller temaene i heftet være? Vår leten etter dette gjorde at arbeidet gikk litt tregt i starten. Leder Toril var på dette tidspunktet redd for at vi hadde tatt oss vann over hodet. Ettersom vi hadde med Susanne, så måtte det bli en del GeoGebra-oppgaver. Vi visste at elever på landsbasis gjør det dårlig når det gjelder oppgaver med klokke og tid på nasjonale prøver og til eksamen. Derfor ønsket vi ha med oppgaver som kunne trene disse ferdighetene. Spill måtte vi naturligvis ha med. Toril og Grete ivret veldig for spill og utforskende oppgaver. Om vi hadde noen ideer om hva vi ville fylle heftet med, så var vi likevel på let etter spennende oppgaver. Det løsnet veldig da Grete kom på ideen om å lage Matematikkens Mester. En ide fikk hun da Mesternes Mester gikk på TV. Konseptet med mange forskjellige øvelser som tester mange ulike ferdigheter passer matematikkfaget bra.

I heftet finnes en oversikt over hvilke oppgaver som passer for de ulike trinnene. Det finnes også en oversikt over hvilke kompetansemål og grunnleggende ferdigheter som hver enkelt oppgave dekker. En oversikt det kan være fint å ha når en ønsker å krydre ordinære matematikktimer. Her er det lett å finne oppgaver som dekker kompetansemål som ligger til grunn i den ordinære undervisningen.

Ettersom alle i gruppa bodde i hver sin kommune, ble det allerede ved oppstart opprettet ei lukket Facebook-gruppe og Dropbox. På Facebook kunne en legge inn beskjeder og spørsmål, i Dropbox ble oppgavene lagt. Litt spennende å se mengden av oppgaver som til stadig vokste. På slutten av arbeidet med heftet gjorde vi en del erfaringer med fordeler og ulemper med en Dropbox. Det ble en del dobbeltarbeid fordi flere var inne og rettet i samme dokument samtidig. Pluss at maskinene våre kunne behandle sideoppsettet på forskjellige måter. På slutten var det bare redigerer Grete som fikk lov til å endre på ting for å unngå unødvendige overraskelser.

Underveis i arbeidet med heftet hadde vi flere møter. Tynset ble vårt samlingssted. Gro var også med noen ganger. Hun var en veldig god veileder når det gjaldt mange praktiske ting en bør passe på. Hun har vært med på produksjonen gjennom flere år og hadde mange erfaringer å bidra med. Grete ble den som skulle redigere alle sideoppsett slik at disse ble like. Hun har gjort en fabelaktig jobb. Å lage eller finne oppgaver er en ting, å redigere og lese korrektur er en annen ting. Vi måtte ha to møter og en del tid med alenejobbing før vi kom i mål med disse oppgavene. Vi har drøftet formuleringer og finpusset setninger, rettet opp skrivefeil , mangler og feiloppsettinger. Til slutt måtte vi si at nok er nok.

Spill og andre opplegg

Vårt mål for heftet var at det skulle være morsomme og lærerike opplegg hvor det var noe for alle trinn å hente til bruk på matematikkens dag. Lengre oppgaver som krevde mer for- og etterarbeid og «sitte på stolen og skrive»-oppgaver ble redigert bort. I dette arbeidet var det ingen som eide oppgaven og gruppa bestemte. De lengre oppgavene ble redigert bort til fordel for kortere opplegg, slik at man rekker å gjøre litt forskjellig på matematikkdagen. Vi var alle enige om at vi måtte ha med spill i heftet, at vi måtte ha med mange opplegg der elevene må røre litt på seg og samarbeide. I tillegg ville vi gjerne ha med noen ideer til hvordan man kan bruke GeoGebra i undervisningen. Vi så det som viktig at elevene gjennom ulike oppgaver kan bli kjent med programmet. Spesielt viktig nå da graftegner fra og med vårens eksamen blir obligatorisk og geometrisk programvare tillatt.

Vi har plukket ut spill som vi mener er gode. Mange av spillene vil sikkert være kjent for de fleste. I heftet finnes Plump, Juniper Green, Håp på tallet 2, Algebraspill og Lag en hel. Plump og Algebrastigespillet finnes i ulike versjoner slik at de passer fra barnehage til videregående. Under «Andre opplegg» har vi samlet oppga-

ver som ikke passer inn under noen av de andre kategoriene vi har valgt å dele oppgavene våre opp i. Felles for alle disse oppgavene er, at om det ikke blir tid på matematikkdagen, så setter læreren av noen matematikktimer til etterarbeid. At elevene får være med på å formulere hva de har lært, hvilke oppdagelser og erfaringer de har gjort og hva de syntes var vanskelig, er svært viktig for læringsutbyttet av en slik dag. Alle klokkeoppgavene har vi laget som spill. Her kan ulike kort kombineres og er med på å gjøre oppgavene varierte.

Matematikkens Mester

Ideen for dette opplegget er hentet fra Mesternes Mester. Dette er et konsept med mange forskjellige øvelser som tester mange ulike ferdigheter, passer matematikkfaget bra. Og så vil vi at dette skal være en morsom måte å jobbe med faget på. Det at deltagerne ryker ut av konkurransen, ville vi ikke ha med. Derfor endret vi det til en lagstafett. Hovedtanken er at oppgavene skal være varierte slik at ulike ferdigheter innenfor faget blir prøvd ut. Elever har alltid ulike styrker, og samarbeid vil være en nøkkel i flere av oppgavene. De som vinner vil kun få ett poeng mer enn neste lag. Derfor blir det aldri stor forskjell mellom det ledende laget og de som ligger sist. Alle lagene har derfor alltid en reell mulighet til å bli Matematikkens Mester. Det skjer gjennom en finalestafett med jaktstart. Vi har med fjorten oppgaver. Her kan lærere fritt velge oppgaver som de vet passer for sine elever. Hvor lenge de ønsker at stafetten skal vare, vil også spille inn når en skal velge oppgaver. Det er ikke meningen at alle skal gjøre alt! Det er heller ikke noe i veien for å velge en eller flere andre oppgaver i stafetten. Vi har anslått tidsbruken for hver oppgave. Matematikkens Mester går veldig mye ut på å ha en følelse for tid, lengde- og mengdemål, og å finne noen lure måter å beregne tid og lengder på.

Et tips er at det gjelder å være godt forberedt som leder av Matematikkens mester. Ha poengskjemaene klare og tunga rett i munnen under poengberegninger. Veldig nyttig med hjelpere som kan være med å sette fram og rydde vekk utstyr. Da går organiserings smertefritt og det blir gøy for elevene.

I tillegg til gruppestafetten Matematikkens Mester, så har vi også med en oppgavestafett med mange varierte oppgaver som passer fra småtrinn til videregående.

Det har vært lærerikt og morsomt å lage Matematikkdagheftet2015. Vi sjølve ble godt fornøyd med hvordan heftet ble til slutt. Og vi håper at vi har fått med oppgaver som passer for alle. Vi har også prøvd å lage flest mulig opplegg som man ikke behøver spesielt utstyr til. Sjølve er vi ganske fornøyd med at vi i stor grad har funnet løsninger som gjør at skolene kan bruke utstyr de allerede har.

Vi håper at lærerne bruker heftet som et utgangspunkt for å lage en morsom og lærerik matematikkdag for sine elever. Oppgaver fra heftet kan også være med på å krydre matematikktimer gjennom hele skoleåret.

Til slutt vil vi ønske alle lykke til med gjennomføringen av matematikkdagen i uke 11 2015 og vi håper alle finner noen passende opplegg i heftet.

Sommerkurset 2015

Kari-Anne Bjørnø Karlsen

Velkommen til Fredrikstad 7.–9. august

Matematikk i tiden

Faget matematikk i skolen er i endring! Dette kommer tydelig fram gjennom reviderte læreplaner i faget, og dette krever at vi som lærere tilegner oss ny fagdidaktisk kompetanse. LAMIS sommerkurs 2015 ønsker derfor å sette fokus på flere av disse endringene og tilbyr et variert kurs hvor algebra og digital matematikk står i sentrum.

LAMIS sommerkurs har blitt årets høydepunkt for flere matematikklærere rundt om i Norges langstrakte land. Kurset er en fantastisk mulighet til å bli kjent med gode ressurspersoner innenfor matematikkmiljøet, og mange skaffer seg venner og bekjentskaper for livet. I disse tre dagene står faglig oppdatering i sentrum, men dette gjøres på en sosial og spennende måte. Sommerkurset er dessuten en god mulighet for å tilegne seg undervisningsopplegg og undervisningsmetoder som kan knyttes direkte til egen praksis. La ikke denne muligheten gå fra deg, bli en del av LAMIS-familien du også!

Spennende forelesere og varierte verksteder

For oss er det viktig å kunne tilby varierte forelesere som har noe å tilby i alle skoleslag. Vi jakter derfor i disse dager på engasjerte verkstedholdere og plenumsforelesere til sommerkurset som avholdes i august. Noe er på plass, men vi ønsker oss fortsatt flere bidragsytere og har fortsatt plass til gode alternativer. Har du lyst til å delta på sommerkurset 2015 som verkstedholder, så send forslaget ditt til karikarl@online.no innen 28. februar.

En av plenumsforeleserne vi er stolte av å kunne presentere er Lisbet Karlsen. Lisbet Karlsen er høgskolelektor i matematikkdidaktikk ved Høgskolen i Buskerud og Vestfold, der hun blant annet jobbet med grunnskolelærerutdanning for 5.-10. trinn og med etterutdanning av lærere. Hun har lang undervisningserfaring fra alle trinn i grunnskolen.

Lisbet vil ta for seg algebra og skal snakke om hva elever sliter med innen emnet. Hun vil belyse hvilke kritiske punkter vi kan finne i deres utvikling av forståelse for algebra, og hvordan vi som lærere kan legge til rette for en økt forståelse.

Vi forhandler også med flere andre plenumsforelesere, og kan love relevante og spennende foredrag i august!

Følg med på www.lamis.no

Program og annen informasjon blir lagt ut etter hvert som ting faller på plass. Påmeldingen åpner i slutten av mars / begynnelsen av april. Deltagere bestiller hotellovernatting selv, og vi har forhandlet fram gode priser med Quality Hotel Fredrikstad. Informasjon om bestilling finner du på lamis.no. Det er viktig at alle bestiller hotellrom innenfor den framforhandlede fristen slik at du sikrer deg den gode prisen vi har fått med hotellet.

GeoGebra-sertifisering

Kari-Anne Bjørnø Karlsen

Et lett tilgjengelig GeoGebrakurs for alle

Sommeren 2012 publiserte Utdanningsdirektoratet et forslag til revidert eksamensordning for sentralt gitt eksamen i matematikk (Udir). Denne revisjonen er som kjent vedtatt, og gjøres gjeldende fra våren 2015. Det er ikke lenger tilstrekkelig å ha tilgang til kalkulator i grunnskolen eller grafisk kalkulator i videregående opplæring, og minstekravet til bruk av digitale verktøy er endret. I alle eksamensoppgaver vil elevene bli presentert for oppgaver som skal besvares ved hjelp av digitale verktøy i form av regneark, graftegner og/eller CAS (Computer Algebra System). Det finnes flere plattformuavhengige programvareløsninger som tilbyr produkter som tilfredsstiller disse kravene, og vi finner både gratisprogramvare og lisensbasert programvare på markedet. Udir stiller ingen krav til hvilke produkter som benyttes, men forutsetter at elevene har fått opplæring i de ulike verktøyene (ibid).

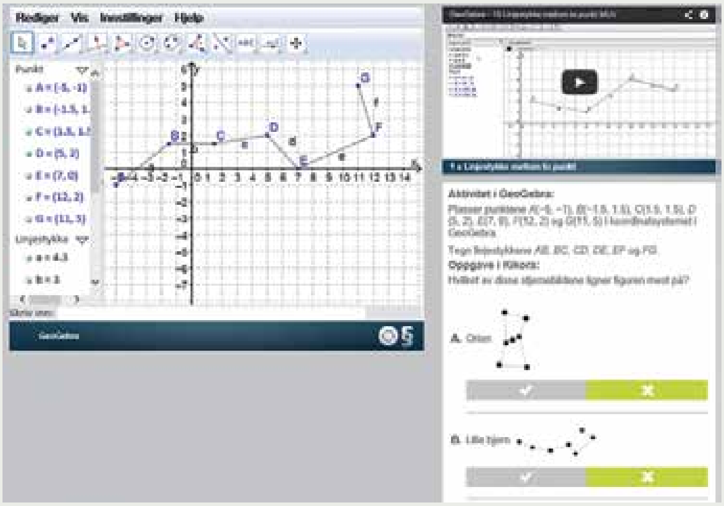
Revidert eksamensordning krever at skolene tar stilling til hvilke digitale verktøy som skal innføres ved skolen, og det stilles også krav til at lærerne innehar nødvendig kompetanse for å kunne gi elevene den innføring og opplæring de har krav på. I denne artikkelen vil jeg belyse et opplæringstilbud for lærere fra mellomtrinn til videregående opplæring hvor læreren presenteres for GeoGebra gjennom et interaktivt kurs via Kikora.

GeoGebra er et verktøy som benyttes ved mange skoler, og dette digitale verktøyet er gratisprogramvare som dekker verktøyene graftegner og CAS. For mange lærere er allikevel GeoGebra ukjent terreng, og gjennom GeoGebrasertifiseringen blir lærerne og elevene kjent med de grunnleggende funksjonene i programmet. Opplæringen er lagt opp som et kurs hvor man blir presentert for detaljerte videoer hvor man blir forklart de ulike funksjonene fra GeoGebra. Deretter gis det aktiviteter i GeoGebra og til slutt kontrollspørsmål i Kikora som tester at innholdet fra opplæringen er ivaretatt.

Kursopplegget er utviklet av matematikklæreren Sigbjørn Hals. Han holder i tillegg kurs i GeoGebra, og har skrevet sin masteroppgave knyttet til bruk av digitale verktøy i matematikkundervisningen. Videoene og resten av opplegget er innom mange mål fra læreplanen, og er delt inn i kurs for mellomtrinn, ungdomstrinn og videregående opplæring.

Kursene er dessuten utformet på en slik måte at de tilfredsstiller krav gitt av det Internasjonale GeoGebra Institutt. Dette innebærer at brukeren får et automatisk generert GeoGebra-sertifikat utsted av Norsk GeoGebra Institutt. Dette sertifikatet er personlig, og forteller at innehaveren er en GeoGebrabruker. Elever kan også med fordel gå gjennom denne GeoGebrasertifiseringen enten som hjemmearbeid eller gjennom undervisningen på skolen.

Kurset er delt inn i 10 kapitler (8 for mellomtrinnet), og det er beregnet at dette skal kunne løses på 4-10 timer. Opplæringen krever ingen forkunnskaper, og tidsbruken avhenger av graden av modellering og eksperimentering underveis. Det er avgjørende at læreren har gått gjennom kurset før elevene slippes løs på opplegget. Videoene er dessuten fritt tilgjengelige på YouTube, og kan benyttes til repetisjon på et senere tidspunkt (ibid).



Figur 1: Skjermbilde av aktivitet under kapittel «Punkter».

Hva inneholder GeoGebrasertifiseringen?

Som nevnt tidligere er kurset delt inn i 10 kapitler for ungdomstrinn og videregående opplæring og 8 for mellomtrinnet. Disse kapitlene tar for seg ulike verktøy i GeoGebra, og gjennom disse kapitlene blir man godt kjent med programvarens muligheter. I tillegg til å friste brukeren med utallige bruksområder, gjør sertifiseringen brukeren i stand til å ta i bruk GeoGebra i egen praksis enten brukeren er lærer som skal undervise i bruk av programvaren eller elev som skal benytte GeoGebra som verktøy i undervisning og til eksamen.

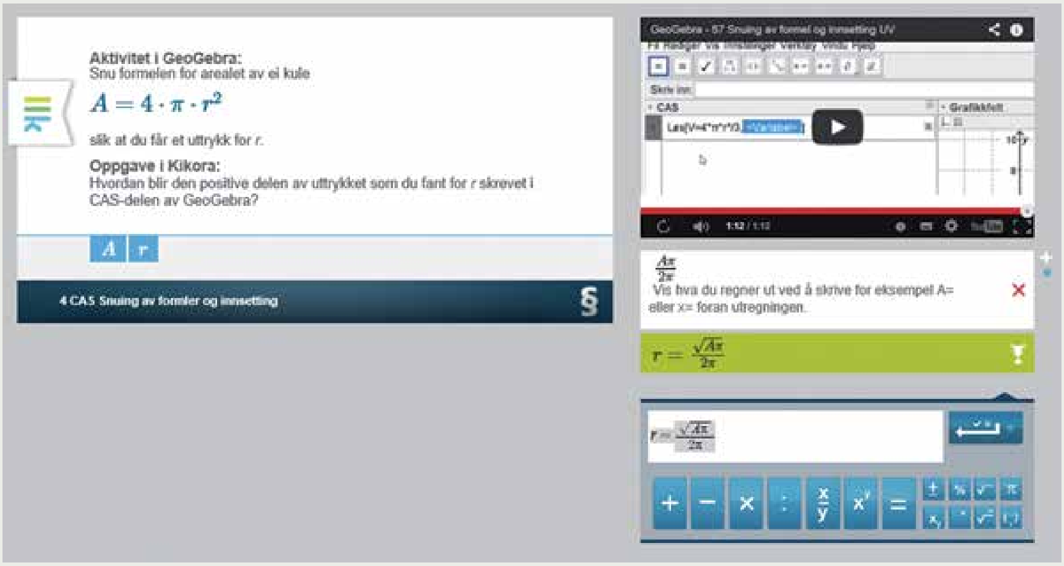
Oppgavene i GeoGebrasertifiseringen

Det første kapitlet vi møter er «Punkter». Her lærer brukeren å sette inn punkter i grafikkfeltet i GeoGebra. På denne måten blir man kjent med kommandolinjen i programmet, og man blir også kjent med hvordan oppbyggingen av kurset fungerer. Figur 1 viser hvordan skjermbildet ser ut når man arbeider med en av oppgavene i kapitlet. Øverst til høyre finner vi filmruten hvor introduksjonsvideoen er presentert. Til venstre ligger selve GeoGebrafeltet hvor brukeren utfører aktiviteten, og selve aktiviteten angis på høyre side under introduksjonsvideoen. Til slutt sjekker man at aktiviteten er løst korrekt ved å velge rett svar fra svaralternativene som angis. Ved rett svar presenteres man for ny oppgave, ved galt svar kan man forsøke på nytt.

Neste kapitel er «Linjer», og her blir man kjent med de ulike verktøyene programmet har for linjer. Ved å se litt nærmere på de ulike oppgavetypene ser man fort at det ikke kreves forkunnskap om GeoGebra eller generelt om dynamiske geometriprogram for å gjennomføre sertifiseringen. GeoGebrakurset er et lavterskeltilbud som kan gjøre det enklere for lærerne å tilegne seg den kompetansen som behøves for å sikre at elevene får den nødvendige opplæringen som Udir forventer. Kurset er lagt opp på en slik måte at man kan løse få oppgaver eller et helt kapittel av gangen. Det er helt opp til brukeren selv å bestemme tempoet i progresjonen, og på grunn av dette bør kurset være et godt utgangspunkt for faglig oppdatering.

Videre blir brukeren presentert for aktiviteter knyttet til mangekanter og vinkler. Her lærer man å måle lengder, areal, sirkelens omkrets og andre generelle funksjoner i programmet. Gjennom dette kapittelet tilegner brukeren seg kunnskap som gjør det mulig å utføre beregninger knyttet til geometriske figurer. Kurset viser oss dessuten muligheter for å drive med utforskende matematikk på et helt annet nivå enn om vi kun har tilgang til papir og blyant. Dette er igjen med på å la elever i større grad arbeide med sin matematiske forståelse framfor å pugge algoritmer.

Et annet godt verktøy i GeoGebra er bruk av glidere. Ved hjelp av glidere kan brukerne modellere og drive utforskende matematikk ved at tegnede figurer, grafer og uttrykk enkelt kan endres ved hjelp av en glider. Glideren er med på å synliggjøre hva som skjer når ulike størrelser forandrer seg, og kan vise teori i praksis. Gjennom sertifiseringen



Figur 2: Kikoras kontroll av oppgave utført i CAS.

blir vi bedre kjent med bruken av glidere, og ved hjelp av disse kapitlene er vi som lærere nå i stand til å ta i bruk GeoGebra som et godt hjelpemiddel i egen undervisningspraksis.

De siste fire kapitlene krever at brukeren laster ned desktopversjonen fra GeoGebra.org. Dette er gratis, og GeoGebra finnes i versjoner for både PC, Mac og nettbrett.

I GeoGebra finner man verktøyet CAS (Computer Algebra System), og sertifiseringsmodulen har et eget kapittel om dette. Kapittelet er beregnet for ungdomstrinnet og videregående opplæring, og for elever på ungdomstrinnet er ikke CAS en nødvendighet for å gjennomføre revidert eksamen. Til tross for dette er det flere fordeler ved å introdusere CAS allerede i ungdomsskolen. CAS-verktøyet er en avansert kalkulator som lar brukeren løse algebrautrykk og ligninger både numerisk og nøyaktig, og elevene kan sjekke at egne utregninger stemmer. CAS-verktøyet er også et godt hjelpemiddel ved faktorisering og når elevene skal multiplisere parenteser. CAS kan også benyttes for omgjøringer av formler, se figur 2. Revidert eksamen gir dessuten elevene mulighet til å benytte GeoGebra og andre digitale hjelpemidler gjennom hele del 2 av eksamen, og CAS-verktøyet gir elevene enestående muligheter for kontroll og utregning.

En annen fordel ved å introdusere CAS allerede på ungdomstrinnet er at elevene da er bedre forberedt før videregående skole. Her er CAS obligatorisk, og dersom elevene allerede er vant til å benytte verktøyet vil dette kunne lette overgangen mellom ungdomstrinnet og videregående opplæring. Erfaringsmessig fungerer CAS utmerket som en fasitkontroll ved hjemmearbeid og utregninger. Elevene har lært at læreverkets fasit ikke alltid er til å stole på, og ved beregning av kompliserte ligninger og algebrauttrykk får ofte elevene forskjellige resultat av utregningene sine. Kun få tastetrykk i GeoGebras CAS-verktøy gir fasitsvar, og elevene ser raskt nytten av dette verktøyet.

I kapitlene «Innstillinger og oppsett» og «Fullversjon og innleveringer» blir man kjent med hvordan brukeren kan skreddersy egne innstillinger i GeoGebra. Gjennom opplæringsvideoene vises blant annet språkinnstillinger og standardinnstillinger, og vi får også gode tips som navngivning av akser og skriftstørrelse for å gjøre arbeidet tydeligere i undervisningssituasjoner. Disse aktivitetene er med på å gjøre grensesnittet slik brukeren selv foretrekker å ha det. GeoGebra har en god del valgmuligheter når det kommer til utforming, og gjennom denne kursdelen får man kompetanse til å gjøre aktuelle endringer.

Erfaringer

Gjennomføringen av sertifiseringen er intuitiv og enkel å komme i gang med. Gjennom de første kapitlene har man ikke behov for annet enn en datamaskin med tilgang til internett. Her vil alle oppgaver løses i samme Kikorabilde gjennom nettversjonen av GeoGebra. Dette fungerer veldig greit, og man kommer raskt inn i hvordan kurset er lagt opp. Personlig har jeg gjennom sertifiseringsprosessen savnet tips og hjelpefunksjon underveis. Kikora krever helt nøyaktige input for å akseptere brukerens svar, og undervisningsvideoene gir ikke alltid svar på framgangsmåte. Dette gjør at man noen ganger kan bli sittende fast uten å umiddelbart komme videre i kursprogresjonen.

De siste kapitlene er konstruert slik at man skal benytte seg av desktopversjonen av GeoGebra. Dette er den nedlastbare versjonen som finnes i versjoner for både Mac, PC og nettbrett. Denne versjonen er også gratis, og kan lastes ned via www.geogebra.org. Dette er i seg selv hensiktsmessig da det er denne versjonen elever presenteres for i en eksamenssituasjon. Onlineversjonen vil ikke være tilgjengelig siden dette er å anse som et kommuniserbart hjelpemiddel på grunn av tilgangen til internett. Dette er allikevel med på å gjøre kursprogresjonen tungvint dersom man velger å benytte seg av bærbar datamaskin. Grunnen til dette er at man må bytte skjermbilde mellom Kikora og kursprogresjonen og GeoGebravinduet. Det er heller ikke mulig å kopiere oppgaven fra Kikoravinduet og kopiere denne direkte inni GeoGebravinduet. Dette gjør at det blir en god del hopping fra vindu til vindu, særlig når likninger og uttrykk som skulle skrives inn i GeoGebravinduet ble ganske omfattende.

Til tross for dette er kurset et veldig godt tilbud for både de brukerne som er ukjent med GeoGebra og for de brukerne som har en del kunnskap fra før. Det krever lite planlegging, og man kan raskt arbeide seg gjennom et tema via et kapittel i kursopplegget. Alt man gjør underveis blir lagret, så man kan ta opp tråden igjen så snart man har tid og anledning til dette. Kurset kan dessuten gjennomføres hjemme i egen stue om man ønsker det.

Sertifiseringen er dessuten satt sammen på en slik måte at oppgavene brukeren får presentert er av direkte betydning for egen undervisning. Her møter vi oppgaver som er relevante og gjenkjennbare for aktuelt trinn. Dette gjør at kursopplegget føles nyttig og relevant.

Opplæringen passer godt for både lærere og elever, og jeg anbefaler lærere å gjennomgå kurset selv før de slipper til elevene. Etter endt gjennomføring vil både lærer og elever ha ny kompetanse som er overførbar til daglig bruk at matematikk, og har fått kjennskap til et svært godt verktøy!

Etter at man har gjennomført kursprogresjonen får man tildelt et personlig sertifikat. Dette forteller at man som innehaver av sertifikatet er en godkjent GeoGebrabruker, og at man er klar for å ta skrittet inn i den digitale matematikkhverdagen.

Kilder

http://www.udir.no/Upload/Eksamen%20endringer/Informasjon%20om%20revidert%20eksamensordning%20i%20matematikk.pdf?epslanguage=no, lest oktober 2014

https://bruk.kikora.no/img/Geogebra/GeoGebra_komigang.pdf, lest oktober 2014

Nominasjoner til Holmboeprisen 2015

Kjenner du en matematikklærer som fortjener en pris for sin undervisning? Noen som både brenner for sitt fag og greier å formidle det til sine elever? Noen som har gitt et løft for matematikkfaget og som fortjener større oppmerksomhet for det? Arvid Siqveland, leder i Norsk matematikkråd, inviterer alle til å nominere kandidater til Holmboeprisen for 2015. Prisen er på 100 000 kroner og deles ut 19. mai 2015 på Oslo katedralskole.

Holmboeprisen, som første gang ble utdelt i 2005, gis til en lærer eller en gruppe lærere i grunnskole eller videregående skole som har utmerket seg i sitt arbeid med matematikkfaget. Norsk matematikkråd har ansvar for utvelgelse av vinneren basert på innkomne nominasjoner. I statuttene for prisen heter det «ved tildeling av Holmboeprisen skal det vektlegges evne til å formidle matematikk og skape interesse for faget, tilrettelegging for god undervisning, samt innovasjon og nytenkning.» Det er mange måter å være en fremragende matematikklærer på, og Norsk matematikkråd er opptatt av å få frem mangfoldet. Det er ett ufravikelig krav, nemlig at undervisningen skal fungere i klasserommet. Norsk matematikkråd ønsker å gi Holmboeprisen til en aktiv lærer som brenner for faget, og som formidler entusiasme, kunnskaper og holdninger til sine elever.

Hvordan nominerer man?

Det er utarbeidet to nominasjonsskjemaer for Holmboeprisen, ett for nominasjon av enkeltlærere og ett for nominasjon av grupper av lærere. Disse skjemaene finner man på prisens nettsider http://holmboeprisen.no/nominasjon/. Skjemaene kan sendes inn både elektronisk og per post.

Prisen, som er finansiert av Abelprisen, er på 100 000 kr og skal deles likt mellom prisvinneren og skolen som han eller hun kommer fra. Holmboeprisen er oppkalt etter Bernt Michael Holmboe (1795–1850) som var Niels Henrik Abels matematikklærer og som nedla et stort arbeid for faget både som lærer, lærebokforfatter og fagmann. Prisen deles ut ved en seremoni på Oslo katedralskole, Holmboes og Abels gamle skole, i mai hvert år.

Nominasjonsfristen er 13. januar 2015