

Anne Birgitte Fyhn, Vilde Therese Teig,  
Steffen Skogvang Pedersen

## Musikk og fotball – matematisering i småskolen

Farmor skulle besøke en tredjeklasse og presentere jobben sin, hun er matematikkdiraktiker. Hun visste at det var noen-og-tjue elever i klassen, og at om lag to tredeler av dem var fotballgutter. Hun visste også at elevene brukte å synge sammen med kontaktlærer Kristin Bjørklid. Her så farmor Anne muligheter for å la elevene velge om de ville jobbe med fotball eller sang. Her var muligheter for undervisning som bygger på elevenes interesser. Hun fikk en dag til å arbeide med utforskende matematikk sammen med elevene, der fokus for undervisningen var elevenes forståelse av musikk og fotball. De to tredjeårs lærerstudentene Vilde og Steffen ble med. Vilde gikk musikklinja på videregående skole, og hun hadde musikk som fag på lærerutdanninga. Steffen spiller fotball på byens førstedivisjonslag. Studentene ble rekrut-

tert ut fra spisskompetanse i musikk og i fotball. Kristin er en rutinert lærer, og Borgtun skole er vant til å ta imot studenter.

Opplegget bygger på Freudenthals (1973) begrep *matematisering*, en aktivitet som går ut på å organisere emner fra virkeligheten og/eller emner fra matematikk, se figur 1. Elevenes forestillingsverden er utgangspunkt og premiss-leverandør. Freudenthal påpeker at matematikk ikke er et ferdig system, men en aktivitet som veksler mellom å finne opp nye ting og å organisere det man har oppfunnet. Lærerens oppgave er å veilede elevene til å «gjenoppfinne» matematikk som andre har kommet fram til fra før. Freudenthal skiller mellom konkretisering og matematisering, og han går så langt som å si at konkretisering er ensbetydende med å plassere vogna foran trekkdyret i stedet for bak. Han vektlegger at elevene skal «gjenoppfinne» matematikk slik matematikken opprinnelig kunne bli til, gjennom utforskning og systematisering av virkeligheten. «The learner shall invent some-

### Anne Birgitte Fyhn

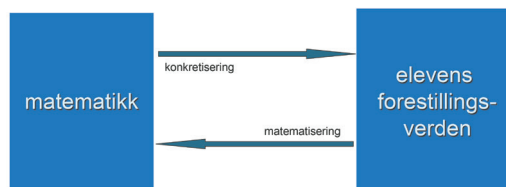
UiT – Norges arktiske universitet  
anne.fyhn@uit.no

### Vilde Therese Teig

UiT, lærerstudent  
vte002@post.uit.no

### Steffen Skogvang Pedersen

UiT, lærerstudent  
steffen\_93\_7@hotmail.com



Figur 1. Matematisering og konkretisering (Freudenthal, 1973).

thing that is new to him but well-known to the guide» (Freudenthal, 1991, s. 48).

Teksten vår gir innspill til hvordan elevers matematisering av kjente situasjoner fra musikk og fotball kan gi mening til de sentrale matematiske begrepene *vinkel* og *brøk*. Vilde og Steffen fikk presentert en skisse for opplegget, og de ble bedt om å komme med innspill. Deretter hadde de en uke på seg til forberedelser. Elevene skulle velge å arbeide med fotball eller med musikk. Selv om det er overvekt av fotballgutter i klassen, så er ikke alle interessert i fotball. Selv om Kristin har sunget med klassen fra de begynte på skolen, så er ikke alle like glad i å synge. For begge gruppene gjaldt det at fagstoffet skulle knyttes til matematikk-læreplanens kompetansemål innenfor et begrenset område. Musikkgruppa skulle fokusere på introduksjon til brøk, mens fotballgruppa skulle fokusere på introduksjon til vinkler. Elevene skulle først utforske en situasjon, deretter skulle de utforske matematikken i situasjonen. På slutten av dagen skulle de to gruppene oppsummere arbeidet sitt hver for seg og deretter presentere arbeidet for hverandre. De fikk velge presentasjonsform selv. Musikkgruppa skulle utforske muligheter for å synge noen kjente sanger som kanon. Fotballgruppa skulle utforske hvor det var best å stå for å skyte mål.

## Oppleggets faglige forankring

Ifølge van Hiele (1986) kan vi skille mellom matematisk tenkning på fem ulike nivå. I denne teksten fokuserer vi på de to første nivåene.

Nivå 1: Visuelt, kjenne noe igjen.

Nivå 2: Deskriptivt, beskrive noe.

På nivå 1 er elevene i hovedsak styrt av intuisjon. Hvis en elev som har nådd nivå 1 med hensyn til for eksempel kvadrater, blir spurt om hvorfor noe er et kvadrat, så er et typisk svar at «slik er det bare». Vårt undervisningsopplegg er rettet mot elever som er på vei mot nivå 1. En målsetting med opplegget er at elevene skal

gjengi situasjonene med en tegning eller på annet vis, slik at de etter hvert kan utvikle ideer om at «noe» er en vinkel eller en brøk. Niss og Højgaard Jensen (2002) kaller det å lage slike representasjoner representasjonskompetanse.

Anne påpekte at læreplanen burde ha et kompetansemål i geometri som omhandler å gjenkjenne noe som en vinkel, van Hieles nivå 1. Læreplanen er formulert slik at det er underforstått at elevene skal beherske dette på forhånd. Norsk skole har tradisjon for at elevene blir introdusert for vinkelbegrepet ved å måle vinkler før de vet hva en vinkel er (Fyhn, 2007). Læreplanen har heller ikke kompetansemål som går ut på å kunne gjenkjenne noe som en brøk før elevene skal beskrive og bruke enkle brøker i praktiske sammenhenger.

Vårt opplegg tar utgangspunkt i kulturbasert utforskende arbeid med matematikk i skolen, slik for eksempel Fyhn et al. (2015a, 2015b) har gjennomført på Snåsa. Elevene utforsker emner fra en kjent kultur og beskriver resultatet ved hjelp av matematikk. Disse arbeidene bygger på Bishop (1988), som sier at matematikk er et kulturelt produkt utviklet av mennesker. Bishops perspektiv har til felles med Freudenthal (1973, 1991) at begge betrakter matematikk som en aktivitet. Freudenthal (1991) bygger sitt arbeid med matematisering på Van Hieles (1986) nivå-tenkning<sup>1</sup>. Van Hiele påpeker at framgangen fra ett nivå til det neste, avhenger mer av instruksjon enn av alder og biologisk modenhet.

Ifølge Bishop (1988) kan ikke matematikkutdanning være *utdanning* uten å bidra til utvikling av verdier. Derfor spør han om forskjellen på matematikk-*trening* og matematikk-*utdanning* handler om utvikling av verdier. Opplegget vårt har som intensjon å bidra til å utvikle elevenes forståelse av musikk og fotball på henholdsvis musikkens og fotballens premisser. Fotballens og musikkens verdier må tas vare på og respekteres. Under kyndig ledelse av studenter som har spisskompetanse innen musikk og fotball, skal elevene utforske sin egen virkelighet. Der den tradisjonelle skolematematikken

ville støttet seg på konkretiseringer, vil vårt opplegg støtte seg på selve aktiviteten og det språket elever og lærerstudenter bruker for å beskrive og forklare selve aktiviteten. Elevenes matematisering består i dette. En annen målsetting med opplegget er at matematikk kan bidra til at elevene utvikler sin forståelse av henholdsvis musikk og fotball.

Opplegget er forankret i Norges offentlige utredninger nr. 8 i 2015, Ludvigsenutvalgets rapport om fremtidens skole, som vektlegger dybdelæring og tverrfaglig arbeid. Utvalget påpeker at for å oppnå kompetanse er det viktig at elevene har kunnskap om og forståelse av a) det de har lært, b) hvordan de kan bruke det de har lært, og c) når de kan bruke det de har lært. Et mål med opplegget vårt var å ta høyde for disse tre punktene ved at matematikken ble integrert i utforskning av et interessefelt som eksempelvis musikk eller fotball på dette interessefeltets premisser. Utvalget hevder videre at å utvikle forståelse innenfor et fagområde eller på tvers av fagområder krever at elevene både reflekterer over det de lærer og setter det i sammenheng med det de kan fra før. Dette er i tråd med vårt opplegg.

Rapporten påpeker at dybdelæring ikke er dybde i alt for alle. For å kunne gå i dybden i enkeltemner må elevene ha mulighet for å gjøre valg. Å lære noe grundig og ikke overflatisk krever en aktiv involvering fra elevens side, men det er skolens ansvar å legge til rette for god læring. Vårt opplegg startet med å gi elevene mulighet til å velge mellom musikk og fotball. Elevene fikk oppgaver knyttet til aktiviteter de liker å holde på med, og de ble invitert til å gå i dybden på hva som skjer innenfor denne aktiviteten: Hva må egentlig til for å synge en sang som kanon? Hva skal til for at en fotballspiller står godt plassert med tanke på å skåre? Opplegget vårt var tenkt som en introduksjon til dybdelæring. Dersom studentene hadde fått følge klassen over tid, ville det vært naturlig at de stilte oppfølgingsspørsmål til elevene etterpå.

## Gjennomføring av opplegget

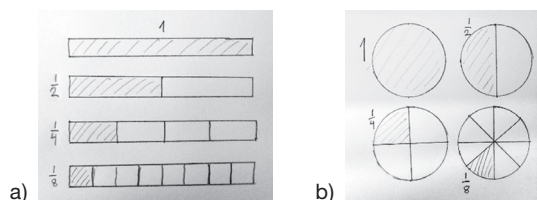
Fordi Vilde og Steffen har særlig interesse for musikk og fotball, var det en risiko for at undervisningen ville ende med mye kontekst og lite matematikk. Kolstø (2006) hevder i likhet med Ludvigsenutvalget at praktiske elevaktive arbeidsmåter forutsetter refleksjon over faginnhold for at aktiviteten skal kunne resultere i læring i faget.

Dagen etter undervisningen møttes Vilde, Steffen og Anne for å diskutere opplegget. Studentene hadde ikke vurdert å slå opp i en lærebok under forberedelsene. Steffen opplevde oppgaven slik at han sto forholdsvis fritt i tilnærming til vinkelbegrepet, derfor var det ikke nødvendig å studere lærebøkens tilnærminger. Han slapp risikoen for å bli påvirket av en lærebok som noen andre hadde skrevet. Steffen har flere ganger erfart at han kan bli litt låst og «farget» av opplegg som er gitt på forhånd, for eksempel i en lærebok. Uten lærebok måtte han i større grad ta i bruk sin egen faglige kompetanse og sine kunnskaper både fra fotball og fra lærerutdanningen. Slik fikk han designe og prøve ut et eget læringsløp. Steffen syntes dette var artigere enn å følge progresjonen i en lærebok. Vilde mente de hadde godt av å bli tvunget til å tenke gjennom hvordan de skulle legge opp timen. Læreboka framstår ofte som en fasit på hvordan stoffet skal presenteres, men i vårt prosjekt følte hun at «... jeg er mere den som har opplegget, som på en måte har kontroll helt, da».

## Sangen Fader Jakob

Åtte elever valgte å synge, og de kjente sangen Fader Jakob fra før. Først sang alle i lag, deretter delte Vilde dem i to grupper à fire elever som sang kanon. Så delte hun dem i fire grupper. Vilde tegnet hele sangen på tavla slik figur 1 viser. Først tegnet hun et langt og smalt rektangel som representerte tid, og deretter ble sangen representert ved en sirkel. Vilde matematiserte sangen for elevene. Elevene hadde regelmessige avbrekk med sang innimellom, slik at elever

som mistet fokus underveis, skulle få muligheten til å kobles på igjen.



Figur 2 a). Brøkene  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  og  $\frac{1}{8}$  framstilt som deler av et langt og smalt rektangel.

Figur 2 b). De samme brøkene framstilt som deler av en sirkel, slik Vilde viste på tavla.

Vilde tenkte musikken skulle hjelpe elevene med å forstå begrepene bedre. Hun observerte at mye av innholdet var vanskelig for elevene. Elevene tegnet og skrev på egne ark, men disse arkene ble kun brukt som støtteark til framføringen for klassen. Vildes første kommentar etter at timen var over, var at elevene burde skrive og tegne mer enn hun hadde lagt opp til. Vilde oppsummerte at hun kunne invitert elevene til å utvikle representasjoner av denne matematiseringen, ved at de selv måtte lage tegninger underveis. Dette hadde kanskje ført til bedre forståelse. Dersom Vilde hadde bedt elevene om å tegne sangen, kunne hun guidet dem til å tegne den som et bilde eller en representasjon av tid. Da hadde elevene stått for matematiseringen og Vilde vært guide, slik Freudenthal vektlegger.

Vilde ønsket at det skulle være rom for sammenlikning mellom ulike måter å representere brøk på, og hun ønsket å vise at en firedel ikke alltid ser ut som et lite rektangel. Her var det den ivrige matematikklæreren Vilde som overdøvet musikeren Vildes fornuft. Hun gikk over til sirkelrepresentasjonen for å fokusere på sentrale og grunnleggende aspekter ved brøk. Dette er fordi hun opplever at det er enklere å sammenligne halvparten, firedeler og åttedeler ved sirkelrepresentasjon enn ved et rektangel der delene ligger på rekke etter hverandre. Gjennkjennning av halve sangen som et rektangel, slik Figur 2 a) viser, er et eksempel på forståelse på

van Hieles (1986) nivå 1. Introduksjon av brøk som sirkelsektor i denne konteksten er arbeid som passer for elever på vei mot nivå 2. Det er med andre ord usikkert i hvilken grad figur 2 b) ga mening for elevene. Vilde kommenterer at hun neppe ville brukt sirkelfiguren hvis hun skulle gjøre opplegget om igjen, fordi den ikke er ideell for å representere hvor lenge deler av en sang varer. Hun vet ikke om elevene oppfattet at for eksempel en firedel kan representeres både som en sirkelsektor og som et rektangel.

Noen uker senere hadde Anne besøk av barnebarnet som var på Vildes gruppe. På spørsmål om han husket hva de gjorde, svarte han «ja, vi sang noe sånn kor. Det var musikk, noe sånn musikkmatematikk». Etter spørsmål om hva slags matematikk det var, fortalte han at det var noe med deling, og at de sang Fader Jakob. Anne spurte hvordan de sang Fader Jakob. Svaret var: «Vi delte det opp. Vi delte det i to og i tre og i fire». Da foreslo Anne å synge Fader Jakob, først vanlig, og etterpå kunne de dele sangen i to og tre og fire. Dette gikk fint til og med deling i to. Så spurte Anne hvordan de skulle dele sangen i tre. Det visste han ikke, han svarte «husker ikke». Etter en tenkepause sa han at han ble forvirret. For å gi gutten et svar sa Anne at Vilde delte sangen i to og i fire, men ikke i tre. Gutten var på vei mot nivå 1, men Anne gjorde den tabben at hun stilte spørsmål som hører hjemme for elever som er på vei mot nivå 2.

## Skåre mål

Steffen tegnet opp og beskrev situasjonen innledningsvis, før han spurte elevene om hvorfor noen plasseringer var bedre enn andre hvis du skulle skåre mål. Han opplevde nokså umiddelbart at dette var vanskelig stoff. Han fikk lite respons fra elevene. Noen visste hva 90 graders vinkel var, men stort sett ikke noe mer:

[...] da blei det litt krevende for mæ da, på en måte, å beskrive ... å fortelle kor mye, kor stor vinkel det va å skåre på. En sånn setning

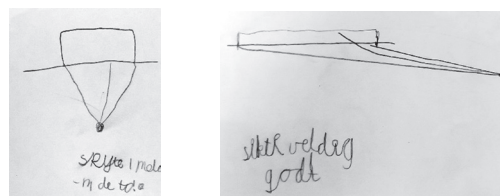
ville jo ikke dem ha skjont da. Derfor blei det jo litt sann ... at æ måtte bare, når æ sto der og ikke fikk noe fra dem, så måtte æ jo begynne å tenke litt på nytt da om korsen det egentlig kunne gjøres, og ... klart ... dem er jo helt på enkle begrepa som ... ja, mest plass på den sida og minst plass på den sida, og har ikke de begrepa.

Steffen opplevde dette som utfordrende, krevende og artig. Han visste rett og slett ikke hvilke ord han skulle bruke. Hadde det vært barmark, ville han gått til skolens ballbane for at elevene kunne prøve ut noen enkle skudd mens det sto en kjele i mål. Så kunne de forsøke å skyte fra ulike posisjoner for å se hvor det var størst mulighet for å skåre. De situasjonene kunne vært utgangspunkt for videre arbeid og videre samtaler. Slik kunne stoffet blitt mer virkelighetsnært for elevene og trolig også engasjert dem mer. Dette kunne også gitt grunnlag for tverrfaglig arbeid med kroppsvingsfaget. Ifølge van Hiele (1986) har hvert nivå ulikt språk og ulikt tankesett. Når Steffen ikke vet hvilke ord han skal bruke, så tyder det på at han forsøker sette seg inn i hvordan elevene tenker når de er på vei mot nivå 1. Det ville ikke gitt mening for elevene om han hadde brukt et språk som hører hjemme på nivå 2 eller nivå 3.

Figur 3 viser notater fra en elevgruppe. Elevene forklarte det som på fotballspråket heter skudd fra spiss vinkel, med at du må «sikte veldig godt». Et skudd rett på mål ble forklart som å «skyte mellom de to» stengene. Steffen tenker at det kan være interessant å snakke med elevenes fotballtrenere om språk og begrepsbruk, for eksempel hva det egentlig betyr å «legge ut 45 grader». Hvis elevene får fokus på dette når de er på fotballbanen, blir de kanskje mer bevisst på ordbruken, og de kan kanskje relatere vinkler til en kjent kontekst når de arbeider med temaet på skolen.

## Representasjoner

En tradisjonell lærebok presenterer først eksem-



Figur 3. På slutten av dagen spurte Anne en gruppe med tre elever om hvor det kunne være lurt å stå for å skyte, deretter ba hun elevene tegne opp skudd mot de to stolpene. Så spurte hun hvordan de ville skyte for å skåre, og ba dem også forklare dette med ord. Figuren til venstre viser elevenes tegning. Figuren til høyre viser samme oppgave når skytteren sto plassert til siden for mål.

pler på nytt fagstoff og deretter eksempler på oppgaver fra dette stoffet. Utgangspunktet er matematikken, og lærebokforfatteren har ofte konkretisert matematikken i eksempler og oppgaver. Elevene blir presentert for lærebokforfatterens representasjoner. Ved matematisering av elevenes interesseområder er situasjonen omvendt. Utgangspunktet og premissene tilhører virkeligheten, og matematiseringen kan starte med elevenes representasjoner av en situasjon. Sangen Fader Jakob ble først matematisert ved at Vilde representerte sangen med et langt, smalt rektangel som hun deretter delte i to. Når sangen ble delt i to, var det fire elever på hver gruppe, og når sangen ble delt i fire, var det to elever per gruppe. Fire elever representerte halvparten av gruppa, mens to elever representerte en firedel av gruppa. Vilde kunne stilt et ledende spørsmål om dette og bedt elevene vise hvor mange de er i hver gruppe når de synger kanon. På slutten ble elevene spurt om hva som var mest av to firedeler og en halv. Det visste de ikke. De visste at to elever var en firedel, og at fire elever var halvparten. De visste også at fire firedeler var hele sangen. Dette er eksempler på at elevene kjenner igjen de ulike representasjonene av brøkdeler. De er på vei mot det van Hiele (1986) kaller forståelse på nivå 1, forståelse som er nødvendig for at de skal kunne si at noe er en brøk. Steffens elever startet med å tegne



nettmasker i fotballmålet og hode og kroppsdeler på den som skulle skyte mål. Etter hvert representerte de fotballmålet som et rektangel og skytteren som et punkt. I tillegg tegnet de opp dødlinja. Figur 2 viser hvordan elevene representerte stolpeskuddene som linjestykker. De var innforstått med at stolpeskuddene representerte ytterpunktene for hvor det gikk an å skåre. Dette viser at elevene har lyktes med å representere personer som punkt og skudd som linjestykker. De er på vei mot nivå 1.

## Oppsummering

Både Vilde og Steffen opplevde det som spennende og utfordrende å arbeide med elevens matematisering av interesseområder som musikk og fotball. De var begge godt kjent med sitt eget interesseområde, og begge brøt ut i latter da de ble spurt om de trodde Vilde kunne undervist i fotball og vinkler, mens Steffen underviste i musikk og brøk. Vilde sier at hun lærte mye av å være med på prosjektet, og at det var nyttig å se så tydelig at det er mulig å kombinere et interessefelt med matematikk. Hun hevdet at dette tilfellet var et godt eksempel på at elevene ble mer interessert i undervisningen, og at det kan øke kompetansen på flere ulike felt samtidig. Vilde syntes det var befriende å gi slipp på lærebøkene og kun bruke kompetansemål og egne ideer i planleggingen av økta. For at et slikt opplegg skal fungere optimalt, burde hun ha bedre kjennskap til elevene og deres forutsetninger. Som nevnt tidligere, ville hun også lagt opp til mer tegning og skriving for elevene, slik at elevene fikk mulighet til grundigere utforskning og egen matematisering. Da ville det kanskje også dukke opp flere spørsmål, kommentarer eller tegninger, som i neste runde kunne bidratt til hennes forståelse av elevenes kompetanse. På det viset kunne hun blitt rustet til å hjelpe elevene videre.

Steffen hadde lært hvor viktig begreps- og språkbruken er for at elevene faktisk skal skjønne noe av undervisningen. Han har tidligere erfart at man ofte tar for gitt at elevene

skjønner begreper som voksne oppfatter som enkle. I tillegg har han lært at det er viktig å tenke gjennom hvilken respons han kan forvente seg fra elevene, før han går i gang med et undervisningsopplegg. Dette kan og bør han forberede seg på ved å se for seg hva elevene eventuelt kan svare. Dette er noe han ville tenkt og reflektert mer over dersom han skulle gjort det samme opplegget om igjen. Steffen har også lært og blitt mer bevisst på at man ikke alltid trenger en lærebok for å legge opp til god matematikkundervisning. Steffens opplegg lyktes med å få fram elevenes faglige ståsted: De visste ikke hva en vinkel var. I Vildes gruppe var ikke dette like tydelig. Tilsynelatende kunne man som tilskuer få inntrykk av at elevene forsto hva en brøk var, og at de var i stand til å sammenligne brøker av ulik størrelse.

Opplegget hadde som intensjon å bidra til elevenes forståelse av musikk og fotball på henholdsvis musikkens og fotballens premisser. Vilde sier følgende om dette: «Fokuset er delt i en slik time, og både matematikk og musikk er fokusområder. Men vi har likevel arbeidet med relevante ting i henhold til musikken, som det å synge i kanon, som jo kan være krevende, og som er nødvendig å øve på dersom man skal få det til. En musikk lærer vil nok være glad for at det er arbeidet med dette, men i en ren musikktime vil det være mange andre ting som må stå mer i fokus, for eksempel å synge rent og helt synkront.»

## Noter

- 1 Van Hiele påpeker at framgangen fra ett nivå til det neste avhenger mer av instruksjon enn av alder og biologisk modenhet. Han vektlegger at han ikke deler Piagets perspektiv på dette.

## Referanser

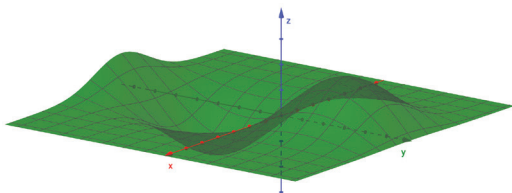
- Bishop, A. J. (1988). Mathematics Education in its Cultural Context. *Educational Studies in Mathematics*

(fortsettes side 7)

regner ut  $z$ -verdier over en mengde  $x$ ,  $y$ -kombinasjoner og lager et plott.

For å lage 3D må man bygge en funksjon i både  $x$ - og  $y$ -argumenter, for eksempel  $x \cdot y$ , som er den enkleste, eller ved å benytte de eksisterende intuitive funksjonene som *hump* eller *bølge*. Disse må nå skrives med  $x$  og  $y$ -argumenter:  $hump(x) \cdot bølge(y)$ . Figuren kan zoomes inn og ut samt dreies og ikke minst settes i rotasjon. Det er også mulig å endre fargene.

Her er bildet av  $hump(x) \cdot bølge(y)$ :



Ved å dreie en slik figur ser en at den har egenskapen for både *hump* og *bølge*, men i hver sin retning. Dette var tidligere universitetsstoff hvor vanskeligheten var å regne ut nok punkter til å tenke seg en flate. Nå gjør tegneverktøyet hele jobben.

En oppgave til slutt: Lag en humpfunksjon. Deriver den to ganger med CAS-verktøyet *Derivert*:

$$f(x) = \text{derivert}(\text{derivert}(hump)).$$

Se på denne i 2D-grafikk. Lag så en 3D-figur ved å angi  $f(x) \cdot f(y)$  og aktiver visning av 3D. Kos deg med figuren!

Takk til Agnes og Just Holck Hauglin for hjelp til uttesting.

(fortsatt fra side 13)

*tics*, 19, 179–191.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fyhn, A. B., Dunfjeld, M., Aagård, A. D., Eggen, P., & Larsen, T. M. (2015a). Utforsking av tradisjonell sørsamisk ornamentikk. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 26(3), 9–14.

Fyhn, A. B., Dunfjeld, M., Aagård, A. D., Eggen, P., & Larsen, T. M. (2015b). Muligheter og utfordringer ved sørsamisk ornamentikk i matematikkfaget. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 26(4), 5–11.

Fyhn, A. B. (2007). *Angles as Tool for Grasping Space: Teaching of Angles Based on Students' Experiences with Physical Activities and Body Movement* (Doktoravhandling). Universitetet i Tromsø. Hentet fra <http://munin.uit.no/handle/10037/994>

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*. Orlando: Academic Press.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriet. Lastet ned fra <http://pub.uvm.dk/2002/kom/hel.pdf>

Kolstø, S. D. (2006). Læring av matematikk gjennom prosjekter i teknologi og design, *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 17(4), 13–15.

NOU 2015:8 (2015). *Fremtidens skole. Fornyelse av fag og kompetanser*. Hentet fra <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/>