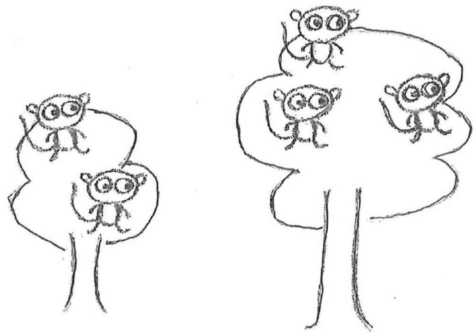
Fem aper – rike muligheter

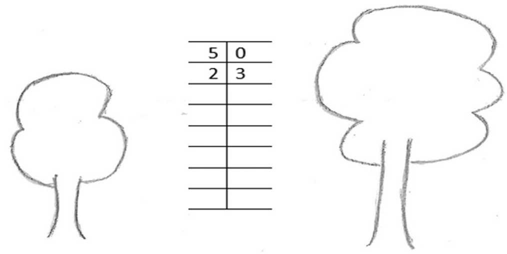
Tenk deg at du har to trær, et stort og et lite, og fem aper som leker i trærne. Alle apene vil være i trærne, og de hopper fra tre til tre. Hvordan kan apene fordele seg i de to trærne?



Figur 1: Apene i trærne

Ved første øyekast ser oppgaven enkel ut for elever på småtrinnet, men ved noen små, enkle grep gir den mulighet for å utfordre elevene i algebraisk tenkning. Utvidelsen vil gjøre oppgaven til en *rik oppgave*, «en problemløsningsoppgave som byr på muligheter til samtaler med andre når det gjelder ideer til løsninger og forståelse av matematiske begreper» som Matematikksenteret skriver på sine nettsider om rike oppgaver. Oppgaven er brukt av flere forskere til å belyse og drøfte både matematikk og matematikkdidaktikk.

Gerd Ånestad
Høgskolen i Oslo Akershus
gerd.anestad@hioa.no



Figur 2: Tegning av oppgaven «apene i trærne»

Cobb, Boufi, McClain og Whitenack (1997) skriver om en lærer som gav oppgaven til elever om høsten i første trinn. Læreren presenterte oppgaven på overhead; et bilde av to trær og fem aper. Elevene ble fulgt av forskningsteamet til Cobb, som observerte samtalen som utspant seg i gruppen. Etter hvert som elevene fant måter apene kunne fordele seg i de to trærne på, fylte læreren ut svarene i en tabell plassert mellom trærne på overheaden som vist i figur 2.

Her følger vi samtalen etter at to løsninger er foreslått (se tabellen i figur 2) (Cobb mfl., s. 262–263).

Anna Jeg tror at tre kan være i det lille treet, og to kan være i det store treet.

Ånestad, G. (2017). Fem aper – rike muligheter. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(4), 4–7

Lærer	OK, tre kan være i det lille treet, to kan være i det store treet (skriver 3 og 2 inn i tabellen). Så, fortsatt tre og to, men de er i forskjellige trær denne gangen: tre i det lille og to i det store. Linda, har du en annen måte?
Linda	Fem kan være i det store.
Lærer	OK, fem kan være i det store (skriver 5) treet. Hvor mange vil det være i det lille da?
Linda	Null.
Lærer	(Skriver 0). En annen måte? En annen måte, Jan?
Jan	Fire kan være i det lille treet, en i det store treet.

Etter det sier en annen elev at det også kan være fire i det store treet og en i det lille treet. Tabellen som læreren skrev, så nå slik ut (tabell 1).

Samtalen fortsetter:

5	0
2	3
3	2
0	5
4	1
1	4

Tabell 1 Nedtegnelse av elevenes forslag

Lærer	Er det flere måter? Elizabeth?
Elizabeth	Jeg tror ikke det finnes flere måter.
Lærer	Hvorfor ikke?
Elizabeth	Fordi det er alle måter som de kan være på.
Lærer	Kan vi finne en fremgangsmåte som gjør at vi kan være sikre på å ha funnet alle muligheter?
Jordan	(går opp til overheaden og peker på skjermen mens han snakker) Se, hvis du har fire i det (store) treet og en i det (lille) treet, og en i det (store) treet og fire i det (lille) treet, kan det ikke være flere måter. Hvis du har fem i det (store) treet og ingen i det (lille) treet, kan du få en til. Men du har allerede fått det her (peker på 5 og 0). Og hvis du får to i det (lille) her og tre i det (store) her, men du kan ikke gjøre det fordi det er to (lille) her og tre (store) her, og da er det ingen flere måter, tror jeg.

Dette er en oppgave der elevene, i utgangspunktet, finner ulike måter å dele opp mengden fem på. Dette er, slik jeg ser det, med på å gi elevene en *relasjonell tallforståelse* av tallet fem (Van de Walle, Karp & Williams, 2014), det å kunne se et tall i sammenheng med andre tall. Læreren utvider så oppgaven ved å spørre om det finnes en fremgangsmåte som gjør at vi kan være sikre på at vi har funnet alle løsningene.

Cobb mfl. (1997) analyserer denne samtalen i lys av det de kaller en «reflektiv diskurs». En reflektiv diskurs er en samtale karakterisert ved gjentatte fokusskifter. I samtalen, etter at læreren har tegnet tabellen, kommer det første fokusskiftet. Anne hevder at det kan være tre i det lille treet og to i det store treet, altså to og tre på en annen måte. Fokusskiftet går fra aper i trærne til utfylling av en tabell. Om Anne, eller andre i klassen, har kjennskap til kommutative egenskaper ved addisjon, at rekkefølgen av addendene er uvesentlig for svaret, vet vi ikke, men ved å delta i en slik reflektiv diskurs får hun og resten av klassen en gyllen mulighet til å oppdage det. Et nytt fokusskifte ser vi da læreren utvider oppgaven ved å be elevene begrunne at de har funnet alle løsningene. Her får elevene en ny utfordring. Jordan tar utfordringen og benytter seg av kommutative egenskaper ved addisjon i sin argumentasjon.

Bevis og argumentasjon er noe vi ofte forbinder med matematikk på høyere årstrinn, men

Ånestad, G. (2017). Fem aper – rike muligheter. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(4), 4–7

flere forskere hevder at bevis og argumentasjon bør være en del av skolematematikken hele skoleløpet (Stylianides, 2007). Allerede på første trinn kan en jobbe med dette, men da vil argumentasjonen nødvendigvis være annerledes enn på høyere trinn. Argumentasjonen må være gyldig, og den må være mulig å forstå for elevgruppen. Jordan bruker en argumentasjon som jeg mener vil være gyldig. Han benytter seg av kommutative egenskaper ved addisjon, uten å bruke begrepet. Likevel kommer det tydelig fram at det er nettopp den egenskapen ved addisjon han bruker. Argumentasjonen som Jordan bruker i sitt resonnement, er en systematisk gjennomgang som vil være forståelig for klassen. En slik argumentasjon er det vi kaller gyldig. *Empirisk argumentasjon*, for eksempel at «jeg finner ikke flere løsninger», vil ikke være et gyldig bevis eller en gyldig argumentasjon på noe trinn. Elizabeths utsagn er et eksempel på en slik argumentasjon.

Med utgangspunkt i Cobb mfl. (1997) kobler Yackel (1997) oppgavene til begynnende algebraisk tenkning. Algebraisk tenkning i tidlig skolealder handler ikke nødvendigvis om å benytte symboler til å representere ukjente tall eller variable størrelser, men om å utvikle måter å tenke på der bokstaver eller symboler vil kunne være et hjelpemiddel eller verktøy på et senere trinn. Et eksempel er kommutative egenskaper ved addisjon. At $2 + 3 = 3 + 2$, kan vi uttrykke algebraisk ved for eksempel å si at dette gjelder for alle tall. Vi kan skrive at $a + b = b + a$. Jordans tenkning er kvalitativt annerledes enn den numeriske tenkningen elevene til da hadde vært engasjert i. Jordan bygger på en forståelse av forhold mellom de mulige posisjonene til apene og mulig plassering av tall i en tabell. Om leserne er enige om å kalle Jordans tenkning algebraisk, er ikke viktig, skriver Yackel. Det viktige, sier hun, er nettopp det at Jordans tenkning er kvalitativt annerledes enn den numeriske tenkningen elevene til da hadde vært engasjert i.

Funksjoner er en del av algebraen, og denne oppgaven kan sees som en funksjon. Det jobbes med variabler. I funksjonslære snakker en om frie variabler (x) og avhengige variabler (y). Det første tallet som velges (antall aper i for eksempel det lille treet), velges fritt blant tallene fra og med 0 til og med 5, det neste tallet (antall aper i det store treet) er avhengig av antall aper i det lille. Tabellen er et eksempel på en funksjon der funksjonsuttrykket vil være $y = 5 - x$.

Carpenter, Franke og Levi (2003) har trolig også latt seg inspirere av oppgaven med apene. Konteksten deres er mus som kan bevege seg mellom to bur som henger sammen, et stort og et lite. De knytter oppgaven til algebraisk tenkning, slik Yackel gjør, men utvider oppgaven: Hva hvis det er 6, 7 eller 8 mus, på hvor mange måter kan da musene sees i de to burene? Elever som oppdager at det er én måte mer enn antall mus, uten å stille opp tallpar, er i startgropen til en *generalisering* av at det alltid er en måte mer enn antall aper.

Carpenter mfl. observerte en klasse der en slik generalisering ble gjort. Her følger vi samtalen mellom lærer og elever etter at elever i klassen hadde oppdaget denne generaliseringen:

Lærer	Hva med 324 mus?
Jamie	Det vil bli 325.
Anna	Ja, det blir alltid én mer enn antall mus. Det er lett.
Lærer	Ok, hva om det er *n* mus?
Anna	Det vil bare bli en mer enn det.
Lærer	Hvordan vil du skrive det? (elevene strevde med dette spørsmålet en stund før en elev svarer)
Carla	Vil det bli $n + 1$?

For at en argumentasjon eller et bevis skal være mulig å forstå for elevgruppen, må også representasjonsformene, eller uttrykksformene, være mulige å forstå. Ut fra det kan det diskuteres om det å innføre *algebraiske uttrykk* i en andreklasse er hensiktsmessig. Er dette mulig for de ulike elevene å forstå? Uansett vil en generalisering uttrykt verbalt, uten innføring av algebraisk uttrykk, være et ledd i utviklingen av

Ånestad, G. (2017). Fem aper – rike muligheter. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(4), 4–7

algebraisk tenkning.

Til slutt vil jeg tilføye at klassen som Cobb mfl. observerte, senere jobbet med oppgaver som lignet apeoppgaven. Da endret konteksten seg til å handle om toetasjes busser, samt at tallene ble gjort større. Etter hvert som elevene jobbet med slike oppgaver, skjedde det en endring i hva elever oppfattet som viktig i oppgavene. Det ble tatt for gitt at elevene skulle argumentere for antall løsninger. Læreren trengte ikke lenger å spørre om det. Det som blir tatt for gitt i en gruppe med hensyn på hva som forventes rent matematisk, kaller McClain og Cobb (2001) *sosiomatematiske normer*. På dette første trinnet ble arbeidet med apeproblematikken starten på det som etter hvert utviklet seg til en ny sosiomatematisk norm.

Oppgaven jeg har presentert ser, ved første øyekast, ut til å være en enkel oppgave på småtrinnet. Som vi har sett, kan den utvides til å utfordre elevene til algebraisk tenkning. Ved å la elevene delta i reflektive diskurser som byr på muligheter for diskusjon med andre, får elevene økt mulighet for læring av matematikk.

Referanser

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Pourtsmouth, N.H.: Heinemann.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 258–277.

McClain, K. & Cobb P. (2001). An analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(3), 236–266.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(x), 289–321.

Van de Walle, J., K. S. Karp & J. M. Bay-Williams (2014). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (Eight international edition). Essex: Pearson.

Yackel, E. (1997). A foundation for algebraic reasoning in the early grades. *Teaching Children Mathematics, 3*(6), 276–280.

Ånestad, G. (2017). Fem aper – rike muligheter. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(4), 4–7