Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

Jahr

Volum av en pyramide

I Tangenten nr. 3/2020 er det en interessant artikkel av Pål-Erik Eidsvig om hvordan man kan få elever i 9. klasse til å forstå formelen for volumet av en pyramide. Jeg vil gjerne bidra med en annen metode, som krever betydelig mindre regning og algebra, men i stedet konsentrerer seg om rent geometriske betraktninger, spesielt romforståelse. Metoden er skissert i en oppgave i Breiteig og Venheim (1984). Her gir jeg en utførlig løsning av denne oppgaven.

Denne metoden leder til en formel som gjelder alle pyramider. Eidsvigs metode er i hans artikkel bare brukt på kvadratiske pyramider der høyden er lik en sidekant i grunnflaten. Skal denne kunne utvides til alle pyramider, må en vise at alle mangekanter kan tilnærmes så godt en vil med en samling kvadrater, samt at en måtte erstatte de små kubene med prismer av passende høyde. Begge metodene bruker en tankegang som ligger til grunn for integrasjon, men uten formelverket som hører til dette. Integrasjonstankegangen bruker jeg nå først for å begrunne det såkalte Cavalieris prinsipp, som har mange flere anvendelser enn akkurat denne. Når dette er etablert, er resten kun geometri.

Einar Jahr
Pensjonist
einjahr@hotmail.no

Vi tenker oss at vi har to helt like kortstokker, A og B. De har naturligvis samme volum. Nå erstatter vi hvert kort i kortstokk B med et kort med en annen form, men med samme areal og tykkelse. Hvert kort, og dermed også hele kortstokken, vil da ha samme volum som før, dvs. at kortstokkene A og B har samme volum. Vi tenker oss at begge kortstokkene ligger på et felles grunnplan p. Det som nå er oppnådd, er at om vi snitter kortstokkene med et plan q som er parallelt med p, så vil disse to snittene ha samme areal. Tenker vi oss litt om, ser vi at det er nettopp dette som garanterer at kortstokkene har samme volum. Den italienske matematikeren Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647) beskrev denne metoden i et verk fra 1635, og det kalles derfor *Cavalieris prinsipp*:

> Gitt to legemer og et fast plan p. Hvis ethvert plan q som er parallelt med p, skjærer de to legemene i flatestykker som har samme areal, så har de to legemene samme volum.

Jeg har ikke bevist dette helt strengt her. Til det kreves differensial- og integralregning, som ligger utenfor det denne artikkelen tar opp, og som ikke var utviklet på Cavalieris tid. Men ut ifra resonnementet med kortstokkene er det ikke vanskelig å forstå at det er korrekt, og det er bevist.

Jahr, E. (2020). Volum av en pyramide. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(4), 14–16.

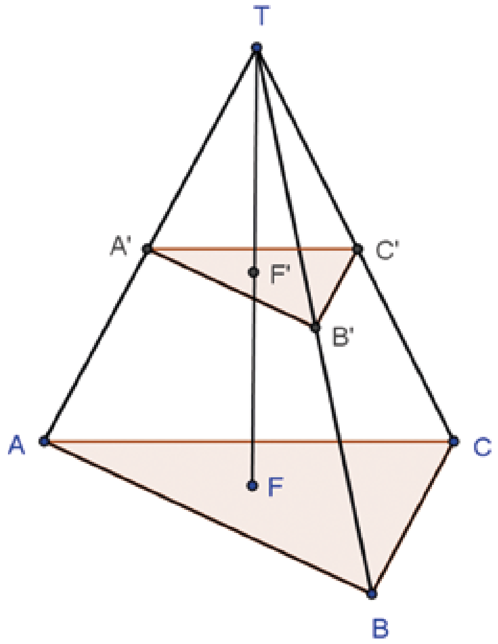
www.caspar.no/tangenten

Først viser vi følgende hjelpesetning ved hjelp av Cavalieris prinsipp:

> Volumet av en pyramide er entydig bestemt av grunnflatearealet og høyden.

Det er tilstrekkelig å vise det for en trekantet pyramide, for siden alle mangekanter kan deles inn i trekanter, kan alle pyramider settes sammen av trekantede pyramider.

Vi ser på en trekantet pyramide:



Figur 1

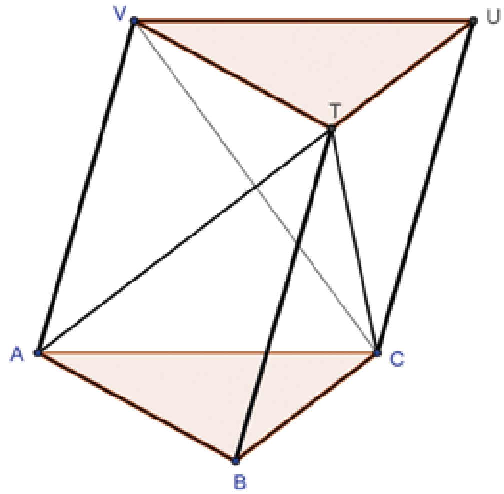
A'B'C' er et plant snitt parallelt med grunnflaten *ABC*. *TF* er høyde i pyramiden *ABCT*, og *TF'* er høyde i pyramiden *A'B'C'T*. Trekantene *ABC* og *A'B'C'* er formlike, siden $A'B' \| AB$ osv. En utfordring til leseren er nå å vise at målestokken for *A'B'C'* som bilde av *ABC* er $\frac{TF'}{TF}$.

Siden arealmålestokk er kvadratet av lineær målestokk, har vi at

$$\text{areal av } \Delta A'B'C' = \left(\frac{TF'}{TF}\right)^2 \cdot \text{areal av } \Delta ABC .$$

Det vil si at arealet av et plant snitt gjennom pyramiden, parallelt med grunnflaten, utelukkende er bestemt av arealet av grunnflaten og avstanden mellom snittet og grunnflaten. Cavalieris prinsipp gir da at volumet av pyramiden entydig er bestemt av grunnflatearealet og høyden.

Se nå på denne figuren:



Figur 2

ABCUVT er et prisme med grunnflate *ABC*. Figuren viser hvordan dette er delt i tre pyramider: *ABCT*, *ACVT* og *VTUC*. Vi vil vise at disse tre pyramidene er like store.

Pyramidene *ABCT* og *VTUC* kan betraktes med grunnflater hhv. *ABC* og *VTU*, og toppunkter hhv. *T* og *C*. Grunnflatene er kongruente. Høyden i begge pyramidene er avstanden mellom *ABC* og *VTU*, som ligger i parallelle plan. Pyramidene *ABCT* og *VTUC* har altså samme grunnflateareal og samme høyde, og har derfor samme volum.

Pyramidene *ACVT* og *VTUC* kan betraktes med grunnflater hhv. *ACV* og *UVC* og felles toppunkt *T*. Siden *CV* er diagonal i parallellogrammet *ACUV*, er grunnflatene *ACV* og *UVC* kongruente, og da har også disse to pyramidene

Jahr, E. (2020). Volum av en pyramide. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(4), 14–16.

samme grunnflateareal. Deres felles høyde er avstanden mellom planet *ACUV* og punktet *T*, og dermed har de samme volum.

Altså er $ABCT = VTUC = ACVT$ (dvs. de tre pyramidene har samme volum), og volumet av *ABCT* er en tredjedel av volumet av *ABCUVT*, dvs. grunnflate ganger høyde dividert med 3.

Siden som nevnt alle pyramider kan deles opp i trekantede pyramider ved oppdeling av grunnflaten, gjelder denne volumformelen for alle pyramider:

> Volumet V av en pyramide med grunnflateareal G og høyde h er gitt ved $V = \dfrac{G \cdot h}{3}$.

En kjegle kan oppfattes som en pyramide med sirkulær grunnflate. Siden en sirkel kan tilnærmes så godt vi vil med en mangekant, vil vi kunne tilnærme en kjegle så godt vi vil med en pyramide med tilstrekkelig mangekantet grunnflate. Dermed må formelen for volumet av en kjegle være den samme som for en pyramide.

Til å konkretisere disse betraktningene kan en bruke et prisme av f.eks. tre som er delt inn i tre pyramider som vist på figur 2. Hver pyramide kan legges på bordet på hvilken som helst av sine fire sideflater, noe som kan gi forståelse av at begrepene 'grunnflate' og 'høyde' for en trekantet pyramide ikke er entydig, men kan velges fritt mellom fire alternativer. Det er viktig for å kunne forstå resonnementet ovenfor. De tre del-pyramidene kan også veies, noe som gir en ytterligere opplevelse av at de må ha samme volum. Slike modeller er å få kjøpt, men det går også an å lage dem på sløyden. Det byr også på interessante utfordringer.

Referanser

Breiteig, T., Venheim, R. (1984). *Matematikk for lærere 1*. Oslo: Aschehoug/Tanum-Norli.

Eidsvig, P.-E. (2020). Å forstå formel for volum. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(3), 31–36.

Jahr, E. (2020). Volum av en pyramide. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(4), 14–16.