Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

Nybø

Utforskning av graf

Motivasjon er et viktig element i klasserommet, kanskje spesielt det siste året på barneskolen. Dette undervisningsopplegget bygger opp under utforskende matematikk, som er svært sentralt i ny læreplan. Ved at elevene selv kan styre mesteparten av aktiviteten, erfarer vi at de blir mer motiverte og ivrige i arbeidet. Ved å jobbe i et utforskende arbeidsmiljø vil elevene selv oppdage utfordringene og be om veiledning. Jeg er overbevist om at dette fører dem til dypere forståelse og læring. Som lærer gir det også rikelig med anledning til å finne hver enkelt elevs utfordringer. Det kan altså brukes som en form for underveisvurdering i et emne, og viser hvor man bør gå videre med de aktuelle elevene i dette emnet. Som lærer gjelder det å tørre å slippe kontrollen. Kompleksiteten i slike aktiviteter kan bli stor. Du vet ikke på forhånd hvor det ender. Det vil kreve at læreren lytter aktivt til det elevene sier, for å forstå og veilede dem videre fra akkurat der de er til enhver tid.

Utforskende tilnærming gir elevene mulighet til å oppleve at de selv i stor grad styrer aktivitetene, mens læreren beholder ansvaret for læringsmålet og for å veilede elevene mot målet (Nosrati & Wæge, 2015, s. 12). Gjennom denne typen arbeid, heller enn å trene på innlærte prosedyrer, får elevene prøve seg på utfordringer slik at de opplever et behov for den matematikken de skal lære. De får diskutere sine metoder, ta tak i eventuelle feil, og få veiledning fra læreren heller enn å få opplæring, noe som fører dem til dypere forståelse, og til at læringen skjer på elevenes premisser. Som lærer kan du bruke denne arbeidsformen for å stimulere elevers motivasjon. De får mulighet til å bestemme hvordan de går frem, og du får vite hvor du bør gå videre med de aktuelle elevene i emnet. Du ivaretar elevene samtidig som du veileder dem mot læringsmålet. Alle disse aspektene taler for en utforskende tilnærming, men arbeidsformen innebærer visse utfordringer for læreren.

Det empiriske grunnlaget som denne artikkelen er bygget på, viser muligheter og utfordringer som inngår i en utforskende tilnærming. Utgangspunktet er et undervisningsopplegg som jeg har gjennomført med en klasse på 7. trinn. Elevene fikk se en graf og ble utfordret til å beskrive en praktisk situasjon som passet til grafen, samtidig som de kunne støtte seg på noen konkrete spørsmål (Figur 1).

Elevene arbeidet i grupper på 4–5 elever. Oppgaven elevene fikk, var altså å tolke en lineær graf som verken hadde diagramtittel, aksetitler eller verdier på aksene (figur 1). Slik måtte de selv ta mange vesentlige avgjørelser. Spørsmålene som fulgte med, var en måte å

Ann Kristin Stustad Nybø
Skoger skole
ann.kristin.stustad.nybo@drammen.kommune.no

Nybø, A. K. S. (2020). Utforskning av graf. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(3), 7–12.

www.caspar.no/tangenten

Hva står x-aksen for?
Hva står y-aksen for?
Finn tittel på grafen.
Lag en T-tabell.
Kan dere lage en formel som passer?

Figur 1

ramme inn oppgaven på slik at den var åpen, men likevel styrt mot læringsmålet; å bygge opp forståelse for grafbegrepet. Spørsmålene ledet de ulike gruppenes oppmerksomhet mot ulike aspekter ved grafen. Ved at elevene selv valgte konteksten, håpet jeg at de ville oppnå en grundigere forståelse av graf som begrep.

Målene for denne undervisningsøkten var, foruten å jobbe utforskende med matematikk, at elevene skulle få erfaring med å oversette mellom de ulike representasjonsformene graf, tabell og verbal presentasjon. For å klare det må de se sammenhengene mellom disse. Slike prosesser kan knyttes til kjernelementet modellering og anvendelse i LK20. Valget av en graf med negativt stigningstall og et konstantledd var bevisst, da dette er grafer som elevene på barnetrinnet ikke møter så ofte. Dermed krevde det mer utforskning og diskusjoner i gruppene. Jeg ønsket at elevene skulle finne mønstre i materialet, og muligens komme frem til en formel. Det å finne en formel var ikke vesentlig fra mitt perspektiv, men å lete etter mønster og overføre informasjon fra grafen og inn i en tabell fordret mer funksjonell tenkning (se sammenheng mellom de to variablene x og y) enn rekursiv (se sammenhengen mellom ulike verdier av x, og separat sammenhengen mellom ulike verdier av y) (Solem, Alseth, Eriksen, & Smestad, 2017, s. 351).

Jeg regnet med at arbeidet ville gi ny innsikt på ulike nivåer, samtidig som noen av ideene ville danne et felles grunnlag for kommende undervisningsøkter. I tillegg regnet jeg med anledninger for læring gjennom å avdekke misoppfatninger i løpet av undervisningsøkten. Noen av disse kunne jeg ta tak i umiddelbart, og noe kunne jeg ta opp igjen senere.

De seks gruppene knyttet grafen til svært forskjellige kontekster, se tabellen (figur 2) som i stikkordsform viser hvilke matematiske utfordringer som kom til overflaten og utgjorde det matematiske fokuset for de ulike gruppenes arbeid. Kompleksiteten i elevenes besvarelser kan ses tydelig, sentrale begreper som definis-

Gruppe	Kontekst	Matematisk fokus
Gruppe 1	Spilletid pr. dag, nedtrapping.	Hvordan tolke grafen? Graf som kontekst.
Gruppe 2	Aldri mer kontanter.	Kontinuerlig vs. ikke-kontinuerlig funksjon.
Gruppe 3	Snøsmelting.	Konstante avstander mellom punktene på aksene.
Gruppe 4	Dyr solgt pr. år – nedtrapping.	Gir formel mening ved få begrensede verdier på x-aksen (definisjonsmengde)?
Gruppe 5	Forbruk fossilt brensel.	0-punktet.
Gruppe 6	Befolkningstall under svartedauden.	Hvordan fortsetter ev. grafen?

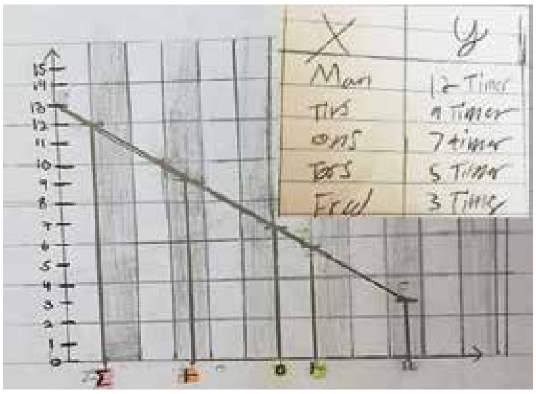
Figur 2: Sammendrag fra de ulike gruppenes arbeid

Nybø, A. K. S. (2020). Utforskning av graf. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(3), 7–12.

jonsmengde og kontinuitet springer ut av problemstillingene som disse elevene på 7. trinn selv ble opptatt av, noe som gjør at når læreren senere introduserer terminologien, vil den oppleves som nyttig, et svar på elevenes behov.

De forskjellige gruppene fikk ulike matematiske fokusområder, noe jeg skal gå grundigere gjennom under. Litteraturen viser til ulike utfordringer som man kan forvente av elevens møte med arbeidet med funksjoner (Hattikudur et al., 2012). Mange strever med å forstå skjæringspunktet mellom aksene, å forstå en jevn endring og forskjell på et linjediagram og trappefunksjon (Glazer, 2011). Som vi skal se videre, dukket da også alle disse problemområdene opp i dette undervisningsopplegget.

Elevene på **gruppe 1** hadde liten erfaring med funksjoner fra tidligere, noe som viste seg tidlig da de begynte med å beskrive grafen ved hjelp av linjalen. «X-aksen står for lengde 11,5 cm, Y-aksen står for høyde 9 cm, grafen er 11,3 cm og ligner på en trekant.» Læreren brøt da inn og tegnet et nytt aksesystem på tavla, med en graf som gikk opp og ned. Her forklarte hun dem hvordan grafen kan forstås som punkter i planet og viser sammenhengen mellom tallparene som aksene viser, og at disse igjen kan leses av ved hjelp av grafen. Det virket som de forstod den forklaringen raskt. De bestemte seg for at de skulle bruke sin graf til å vise nedtrapping av spilletid for et barn. Her begynte de med 12 timer på mandag, 9 timer tirsdag, 7 timer onsdag, 5 timer torsdag og 3 timer fredag. Problemet oppstod når de skulle forklare sammenhengen mellom tabellen og grafen. De brukte sine tidligere erfaringer med søylediagrammer og utformet dagene på x-aksen som intervaller fremfor punkter (figur 3). Da læreren spurte hvordan de visste at det var akkurat 9 timer på mandag, løste de det ved å tegne en linje vertikalt fra grafen akkurat der den stemte med tabellen for hver dag. Læreren oppfordret dem til å markere det tydelig, så grafen stemte med tabellen. Den ene eleven begynte å skrive av grafen i en ny tabell for å se og forstå sammenhengen mellom variablene, og for å få flere erfaringer med å overføre mellom representasjonsformene. Dette var nyttig trening for denne eleven, der han opplevde mestring samtidig som han lærte noe nytt. Eleven fikk også i oppgave å forklare det for de andre på gruppa. Fokuset å lese av grafen som punkter og ikke intervaller ga disse elevene en begynnende forståelse av graf som begrep.



Figur 3

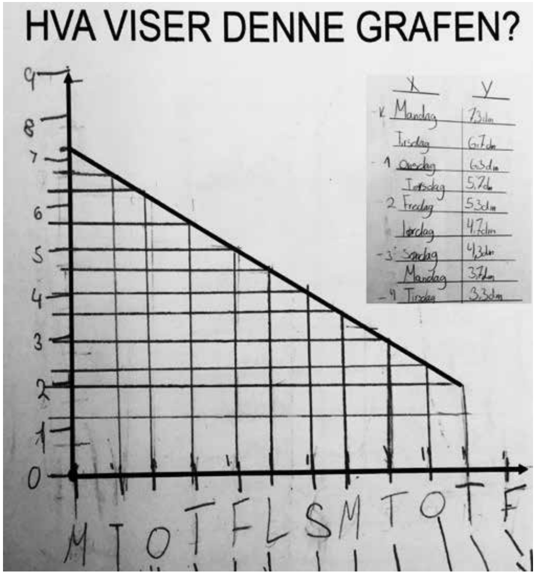
Gruppe 2 ønsket å velge seg noe fra virkeligheten, og etter hvert falt de ned på utviklingen av bruk av kontanter. De søkte på nett og fant en artikkel der det ble hevdet at kontantbruken hadde sunket med 20 % på et år, og at kortbruk hadde tatt over. De satte derfor at grafen startet på 80 % og fortsatte å synke lineært til at det er slutt på kontanter i år 2030 (figur 4). Som lærer

Figur 4

Nybø, A. K. S. (2020). Utforskning av graf. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(3), 7–12.

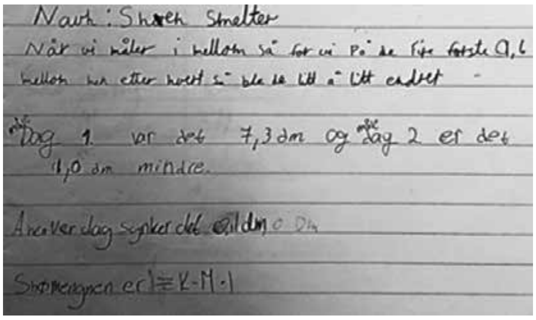
noterte jeg meg at de ikke skilte mellom prosent og prosentpoeng, en misoppfatning å legge i «senere»-boksen. De fortsatte grafen helt ned til den krysset *x*-aksen, og var bevisste på at dette var 0-punktet til *y*-aksen og dermed slutten på kontantbruken. For dem var det en selvfølge at grafen ville fortsette i samme utvikling som den hadde tidligere. Denne gruppen tegnet også hvert år som intervaller. Dette kunne jo fungert greit da kontantbruken kunne synke i løpet av året, men så satte de likevel inn kun hvert tredje år. Fokus i samtalene med denne gruppen ble å drøfte konstante avstander mellom verdiene på hver akse. Læreren spurte: «Hvor kan jeg se hvor stor kontantbruken blir i 2028 på denne grafen?» På den måten problematiserte læreren det for dem, for at de selv skulle se behovet for å se *x*-aksen som en hel sammenhengende tallinje.

Gruppe 3 hadde en fiffig måte å delvis konkretisere konteksten for seg selv på. De målte *y*-aksen til å være 7,3 cm. Så vurderte de hva det kunne bety. De bestemte seg for at det kunne ses som 7,3 dm snø. Videre så de at snøen smeltet til den etter noen dager ble helt borte. De bestemte seg for at den første dagen (kalt kontrolldag) hadde 7,3 dm snø. Så satte de inn dagene fremover med relativt konstant avstand på aksen. Etter å ha satt verdiene som de leste av grafen inn i en tabell, så de fort et mønster (figur 5).



Figur 5

Når de så rekursivt i tabellen (endring i mengde snø fra én dag til neste), så de at tallene sluttet med samme siffer annenhver dag. Altså 1 dm nedgang annenhver dag. Dette førte til fine diskusjoner på gruppa der de fant ut at de kunne bruke kontrolldagen og trekke fra 1 dm for annenhver dag. Så ved å kalle kontrolldagen for K (7,3 dm snø) og regne annenhver dag som (måledag 1, 2) osv. kunne de begynne på en formel. De satte at $K - M \cdot 1$ ville gi dem snømengden på de ulike måledagene (figur 6). Læreren veiledet gruppa på slutten av timen ved å spørre dem om mønsteret kunne brukes uansett hvilken dag de ønsket å vite snømengden. En ny diskusjon oppstod da de så at de hadde henholdsvis 0,4 og 0,6 dm nedgang for hver dag. Her oppdaget elevene selv at nøyaktighet er viktig når noe skal fremstilles grafisk. Ved å begynne på nytt og være mer nøyaktig fant de også ut at det smeltet 0,5 dm hver dag. Gruppa



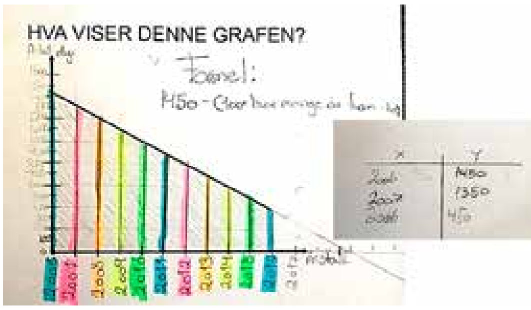
Figur 6

ble derfor ivrige i å finne en korrekt formel for hver eneste dag. På figur 6 ser vi hvordan gruppa jobbet mot en formel.

Gruppe 4 var opptatt av dyrevelferd og ville ha frem noe som passet til det. De valgte salg av dyr, noe de ønsket det skulle bli mindre av så dyr skulle slippe å bytte hjem så ofte. Alle var enige om at det ikke var så viktig med en ekte sak, de ville bare bruke fantasien. Gruppa

Nybø, A. K. S. (2020). Utforskning av graf. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(3), 7–12.

bestemte seg for at antallet salg av dyr det første året skulle være 1450 dyr, videre gikk det ned 100 for hvert år (figur 7). Vi ser av tabellen at de kun tar et år før de hopper ti år frem i tid. Dette skyldes lærerens veiledning for å få dem til å tenke funksjonelt, å legge merke til sammenhengen mellom variabler. Med 100 færre dyr solgt hvert år ble det ikke bare enkelt å regne, men mønsteret ble enkelt å se. En elev var rask med å finne formelen: 1450 – (100 · antallet år frem i tid). Det førte til en stor diskusjon på



Figur 7

gruppa, da en elev ikke kunne se fordelen med en formel.

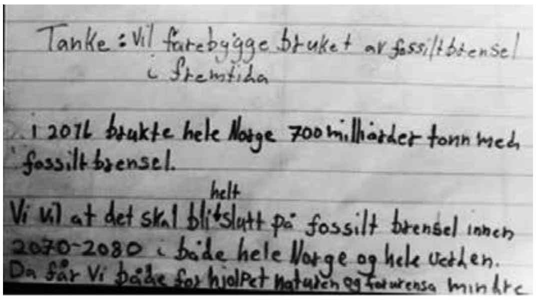
Lærer: Hvordan kan dere vite hva salget ble i 2025, da?

Elev 1 Det er jo bare å ta 100 mindre for hver gang det.

Elev 2 Ja, men med formel er det mye lettere å hoppe langt frem i tid.

Elev 1 Ja, men det gir ikke mening under 0.

Her ser vi at det er flere ting som spiller inn. Elev 1 tenkte at dette var et så begrenset definisjonsområde (kun tallene 1, 2, 3, …, 14 gir mening i formelen i denne konteksten) at en formel ikke kunne gjelde. Han mente at en formel alltid må gjelde for alle tall. Videre hadde de valgt –100 i stigningstall, noe som var så lett å regne med at en formel var unødvendig. Det var like greit med hoderegning. Her var det en god diskusjon som avdekket mye dypere forståelse enn det læreren hadde sett på forhånd. Ved at elevene forsøkte å overbevise læreren og ikke



Figur 8

minst hverandre om sitt standpunkt fikk alle på gruppa dypere forståelse og innsikt.

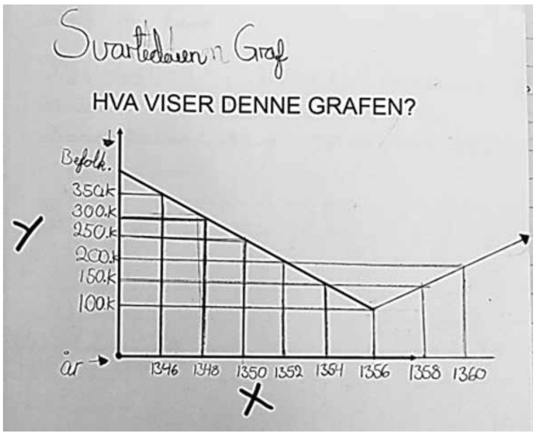
Elevene på **gruppe 5** hadde et sterkt miljøengasjement. De ønsket å lage en prognose, en ønskegraf for fremtidig forbruk av fossilt brensel (figur 8). Målet var 0-forbruk, så de var raskt ute med å fortsette grafen slik at den forble lineær

Figur 9

(figur 9). De søkte på nettet og fant reelle tall fra SSB. (Læreren har i ettertid ikke sjekket tallmaterialet i kildene.) I 2016, der de fant de siste tallene, brukte Norge 700 millioner tonn fossilt brensel på et år. De tenkte seg at Norge skal slutte fullstendig med fossilt brensel innen 2070–2080. Utfordringen for denne gruppa var å se 0-punktet på y-aksen. De diskuterte og prøvde seg frem lenge. Det var vanskelig for læreren å få ordentlig tak i utfordringen, men det viste seg til slutt at de hadde problemer med å se at når x-aksen startet på 2016, så startet y-aksen likevel på 0. Denne gruppa trengte tabellen for å forstå grafen. De regnet da at 0-målet i gruppas prognose vil oppnås i

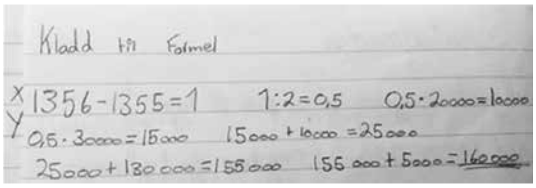
Nybø, A. K. S. (2020). Utforskning av graf. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(3), 7–12.

2086. Jeg så at de trengte veiledning for å forstå at de fleste grafene kun er et lite utsnitt av et stort koordinatsystem. Dette er noe jeg ønsker å løfte i hele gruppa, så det ga enda et punkt i «senere»-lista.

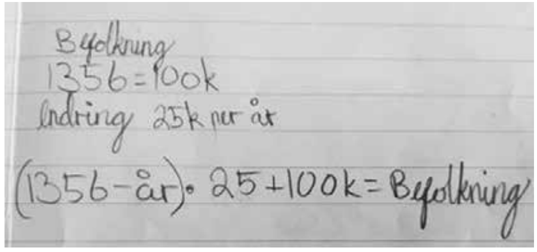


Figur 10

Gruppe 6 så for seg at grafen viste nedgang i befolkningen i Norge under svartedauden, en historisk begivenhet de hadde jobbet med i samfunnsfag. De lette etter reelle tall og forsøkte å tilpasse virkeligheten til grafen (se figur 10). Så begynte jakten på en formel. For denne elevgruppa ble det vanskelig å se hvordan de kunne lage en formel som skal ta hensyn til et negativt stigningstall. De valgte derfor å fortsette grafen ved å speile grafen om en vertikal linje for å modellere befolkningsveksten etter slutten på svartedauden. Som en elev sa: «Befolkningen måtte jo øke etterpå, da.» På den måten ble det enklere for dem å se hvordan formelen kunne se ut. De brukte år 1356 som utgangspunkt (konstanten) med sine 100 000 innbyggere, så økte befolkningen med 25 000 pr. år. De fant også ut at avviket i befolkningen pr. år var på 25 000, uansett om det var før eller etter 1356. Det var store diskusjoner og mye regning i denne gruppa (figur 11). De regnet ut for mange ulike år for å finne et generisk eksempel. Til slutt endte de opp med en formel som passet for alle årene både før og etter år 1356 (figur 12).



Figur 11



Figur 12

Stoltheten lyste da de fremførte sin løsning for klassen.

Det viktigste for meg med artikkelen om dette undervisningsopplegget er å vise at vi som matematikklærere må våge å tre litt tilbake og la elevene få mer medvirkning på matematikken i timene. Elevene var meget engasjerte, og mens de undersøkte kontekster som lot dem modellere virkeligheten med en lineær, synkende graf, traff de på mange utfordringer som gjorde matematikken meningsfylt. Dette er kun et eksempel på utforskende arbeid i matematikk, og helt i tråd med kjerneelementer i ny læreplan. Jeg opplever denne tilnærmingen som en motiverende måte å undervise på. Engasjementet smitter fra lærer til elever, fra elev til elev og ikke minst fra elever til lærer. Lite er vel mer engasjerende for en lærer enn motiverte elever.

Referanser

Glazer, N. (2011). Challenges with graph interpretation: a review of the literature. *Studies in Science Education*, 47(2), 183–210.

(fortsettes side 18)

Nybø, A. K. S. (2020). Utforskning av graf. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(3), 7–12.