Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

Kristensen

Utforsking av kvadratiske funksjoner

Tor Espen Kristensen fikk Holmboeprisen for 2022. Se begrunnelsen side 2.

I denne artikkelen vil jeg dele erfaringer og tanker fra et opplegg jeg har gjennomført med elever i Matematikk 1T. Et av målene i læreplanen er at elevene skal kunne

> utforske og beskrive eigenskapane ved polynomfunksjonar, rasjonale funksjonar, eksponentialfunksjonar og potensfunksjonar

Målet med opplegget er at elevene i første omgang skal kunne utforske og beskrive viktige egenskaper til andregradsfunksjoner. Som en utvidelse av opplegget skal vi også se på egenskaper til rasjonale funksjoner.

Med dynamisk geometriprogram har vi fått nye muligheter til å gjøre utforskinger av ulike objekter. En vanlig måte å utforske andregradsfunksjoner på er å gi elevene følgende oppgave:

Bruk GeoGebra til å utforske hvordan ulike verdier av a, b og c påvirker grafen til funksjonen

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Hva skjer når vi endrer c? Hva med b og a?

Tor Espen Kristensen
Stord vidaregåande skule
Tor.Espen.Kristensen@vlfk.no

Her kan elevene lage glidere for a, b og c og så kunne beskrive hvordan disse påvirker grafen til f. En slik tilnærming har sin verdi, men den har sine begrensninger. I en studie fant Dikkartin Ovez (2018) at elever som hadde jobbet med GeoGebra til å utforske kvadratiske funksjoner, viste bedre forståelse for viktige begreper knyttet til andregradsfunksjoner enn en tilsvarende kontrollgruppe. Elevene får se mange eksempler og kan oppdage sammenhenger. En svakhet med et slikt opplegg er at det fort kun blir en beskrivelse av disse egenskapene. Elevene *ser* at grafen flyttes opp/ned når c endres. Elevene *ser* at grafen flytter seg når b endres, og at a påvirker formen til grafen. Men slik oppgaven er formulert, inviterer den ikke så mye til resonnement og forklaringer. Dersom denne oppgaven brukes ved innføring av andregradsfunksjoner, så er elevene ennå ikke introdusert for funksjonens symmetriegenskaper, nullpunkter og

Kristensen, T. E. (2022). Utforsking av kvadratiske funksjoner. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(4), 4–7.

www.caspar.no/tangenten

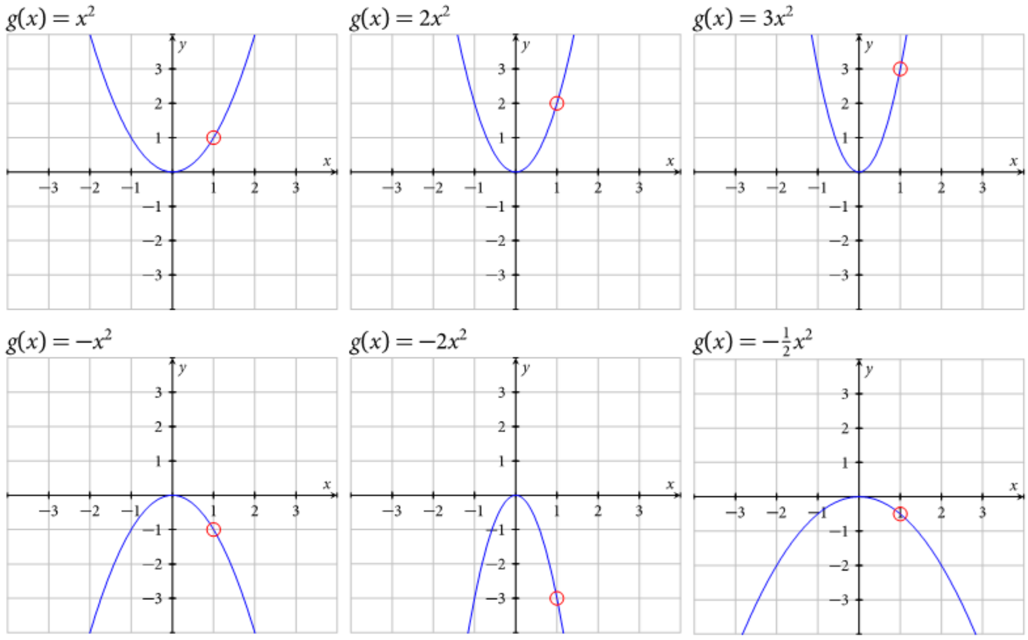
ekstremalpunkt, noe som gjør det svært vanskelig for dem å begrunne hvorfor for eksempel grafen flyttes langs en parabel når b endres. Å utforske hva som for eksempel skjer med topp-/bunnpunktet når a og b endres, er først interessant å se på når elevene har jobbet med og fått mer innsikt i slike funksjoner.

I opplegget ba jeg elevene først om å tegne grafen til $f(x) = x^2$. For å gjøre dette brukte de kun papir og blyant. Målet her er at elevene skal bli kjent med selve funksjonstypen, og at de skal oppdage at grafen er symmetrisk. Dette er ikke så vanskelig med denne grafen, siden $f(-x) = f(x)$.

Da elevene var blitt kjent med denne grafen, utfordret jeg dem til å si noe om hvordan de tenkte grafen til $p(x) = x^2 + d$ ville se ut for ulike verdier av d. Her er det viktig at elevene ikke utforsker dette med GeoGebra, siden jeg ønsker at de skal resonnere seg fram til hva som skjer. Her møter de en viktig matematisk idé, nemlig å flytte/transformere grafer. Det er viktig at elevene får tid til å tenke, og at elevene får diskutert dette sammen, både i små grupper og i et klasseromsfellesskap.

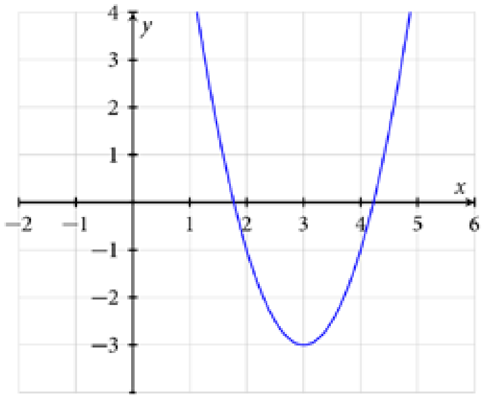
Neste utfordring var å se på $h(x) = (x + r)^2$ for ulike verdier av r. Også her er det snakk om å flytte grafen, men nå i horisontal retning. Her ble det en del gode diskusjoner i klassen. Mange av elevene hevdet at dersom r endres fra 0 til 4, så vil grafen flytte seg 4 enheter mot høyre. Noen elever argumenterte for hvilken verdi av x som gjør at vi får 0 som svar. Dersom r er 4, må x være -4 for at y-verdien skal bli 0. Det er min erfaring at det er viktig å bruke god tid på denne delen. Det vil betale seg senere, siden en god forståelse for dette vil hjelpe elevene med mange andre funksjoner. Hvordan vil for eksempel grafen til $F(x) = \sqrt{x-4}$ se ut? Den vil se ut nøyaktig som grafen til $G(x) = \sqrt{x}$, men er forskjøvet 4 enheter mot høyre. Vi har samme idé når vi i statistikk går fra en normalfordelt variabel til standard normalfordeling. Vi flytter på grafen slik at toppunktet blir der hvor $x = 0$.

Det er utfordrende for elevene å kunne forklare hva som skjer med grafen til $g(x) = ax^2$ når



Figur 1: Utforsking av funksjonen $f(x) = ax^2$ for ulike verdier av tallet a.

Kristensen, T. E. (2022). Utforsking av kvadratiske funksjoner. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(4), 4–7.



Figur 2: Her ser du grafen til en funksjon *f*. Bruk grafen til å bestemme funksjonsuttrykket *f*(*x*).

vi har ulike verdier for a. I slike tilfeller ønsker jeg at elevene skal kunne bruke ulike strategier. I dette tilfellet er det lurt å se på flere eksempler og se etter et mønster. Jeg vil med andre ord at elevene skal utforske hvordan grafen ser ut for ulike verdier av a.

På figur 1 ser du seks slike grafer. Jeg ønsker at elevene ut fra slike eksempler skal oppdage sammenhengen mellom tallet a og punktet på grafen som befinner seg 1 enhet til høyre for bunnpunktet.

Når elevene har oppdaget en slik sammenheng, er det viktig å utfordre dem til å argumentere generelt for resultatet. I den nye læreplanen er resonnering og argumentasjon et eget kjerneelement. Det er min erfaring at dette er noe som elevene opplever som krevende. I eksempelet med parabelen er det egentlig bare å regne ut

$$g(1) = a \cdot 1^2 = a.$$

Her er det ikke selve algebraen som er det vanskelige, men å kunne jobbe med det generelle tilfellet og konkludere ut fra det.

Etter å ha brukt god tid på rollen til tallene a, r og d var det på tide å se på eksempler der disse blir kombinert. Vi ville med andre ord se på ulike funksjoner på formen

$$f(x) = a(x + r)^2 + d \qquad (1)$$

for ulike verdier av a, r og d. Elevene hadde så langt gått fra ulike algebraiske representasjoner av funksjonen (ulike funksjonsuttrykk) til hvordan grafen ser ut. Nå ville jeg at vi skulle gå andre veien, fra graf til funksjonsuttrykk.

Elevene fikk nå oppgaver som i figur 2. Etter litt diskusjon kom elevene fram til at grafen er flyttet 3 enheter mot høyre og 3 enheter ned. Videre så de at om vi gikk 1 enhet til høyre for bunnpunktet, så måtte de gå 2 enheter opp for å komme til grafen. Ut fra dette måtte

$$f(x) = 2(x - 3)^2 - 3.$$

Neste steg var å knytte alt dette til den andre måten å representere andregradsfunksjoner på, nemlig som

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (2)$$

Å gå fra den ene formen til den andre vil bare si å multiplisere ut uttrykket som her:

$$f(x) = 2(x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2) - 3 = 2x^2 - 12x + 15$$

Å gå den andre veien handler om å fullføre et kvadrat. Fordelen med skriveformen elevene utforsket, er at de der lett kan se hvor grafen har et topp- eller bunnpunkt. De kan også lett bestemme nullpunktene til funksjonen. Disse er nå gitt ved

$$x = r \pm \sqrt{-\frac{d}{a}}$$

Nå var ikke veien lang til å argumentere for *abc*-formelen.

Alt dette synes jeg henger veldig fint sammen med kompetansemålet om at elevene skal kunne

> utforske samanhengar mellom andregradslikningar og andregradsulikskapar, andre-

Kristensen, T. E. (2022). Utforsking av kvadratiske funksjoner. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(4), 4–7.

www.caspar.no/tangenten

gradsfunksjonar og kvadratsetningane og bruke samanhengane i problemløysing

Den viktigste kompetansen elevene fikk med seg, var kanskje ideen om at du kan flytte på grafer. De strategiene elevene brukte i dette opplegget, ble senere dratt fram når de skulle jobbe med rasjonale funksjoner. Da startet vi med å se først på funksjonen $f(x)=\frac{1}{x}$. Etter å ha studert denne en stund kom elevene fram til asymptoteegenskapene til grafen. Så var det bare å gjenta opplegget, men denne gangen så vi først på

$$r(x)=\frac{1}{x}+c$$

for ulike verdier av *c*. Deretter tok vi for oss funksjoner på formen

$$h(x)=\frac{1}{x+r}$$

for ulike verdier av *r*. Til slutt så vi på

$$g(x)=\frac{a}{x}$$

Her oppdaget elevene at også nå kan vi bestemme tallet *a* ut fra grafen. Det er bestemt av hvor langt du må gå opp fra krysningspunktet til asymptotene når du går 1 enhet til høyre. På den måten kan vi ut fra grafen bestemme *a*, *r* og *c* i funksjonsuttrykket

$$f(x)=\frac{a}{x+r}+c \qquad (3)$$

Dette er en litt annen tilnærming til slike rasjonale funksjoner enn det lærebøkene legger opp til. Der blir det ofte tatt utgangspunkt i formen

$$f(x)=\frac{Ax+B}{Cx+D} \qquad (4)$$

Også her er det fint å kunne veksle mellom disse måtene å skrive opp funksjonsuttrykket på. Å gå fra formen (3) til den i (4) handler om å finne felles nevner og skrive som én brøk. Å gå andre veien kan gjøres ved å bruke polynomdivisjon (som er sentralt i 1T).

Min erfaring er at det er vel verdt å bruke god tid på slike opplegg. Elevene får oppdage mange sammenhenger, de får utviklet ulike strategier, og de blir utfordret til å resonnere og argumentere.

Referanser

Dikkartin Ovez, F. T. (2018). The Impact of Instructing Quadratic Functions with the Use of Geogebra Software on Students' Achievement and Level of Reaching Acquisitions. *International Education Studies, 11* (7), 1. https://doi.org/10.5539/ies.v11n7p1

Kristensen, T. E. (2022). Utforsking av kvadratiske funksjoner. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(4), 4–7.

www.caspar.no/tangenten