Utvikling og iverksetting av nye læreplanar

Dette temanummeret av Tangenten har fokus på korleis lærarar kan ta i bruk og utvikla dei nye læreplanane. Renate Jensen, leiaren av læreplangruppa i matematikk, legg vekt på at planane ikkje berre er noko som skal implementerast. Dei skal utviklast gjennom ein praksis som legg til rette for at elevar samarbeider, utforskar, reflekterer kritisk, stiller spørsmål og lyttar for å utvikla eit rikt og presist matematisk språk. Ein praksis der det vert lagt til rette for samtalar, gjerne ved bruk av autentiske kontekstar, slik at elevar kjenner behov for å argumentera om matematiske samanhengar.

Fleire av tekstane rettar fokuset mot kjerneelementet utforsking og problemløysing. Nybø skriv om elevar som får i oppdrag å tolka ein graf utan verdiar og namn på aksane samt finna ein praktisk situasjon som grafen kan representera. Elevane viste stort engasjement og kom opp med gode kontekstar som opna for matematisk modellering og meiningsfylt bruk av matematikk. Nybø legg vekt på motivasjon når ho viser korleis elevar kan arbeida utforskande, utvikla djupare matematisk forståing og oppleva matematikk som relevant. Fyhn rettar på same vis fokus mot utforsking og problemløysing, når ho skriv om korleis det samiske spelet Sáhkku kan inkluderast i undervisinga for å motivera elevar.

I 2017 kom det ny rammeplan for barnehagen. Den har fleire fokus til felles med dei nye planane for grunnskulen, mellom anna problemløysing. Fosse, Lange og Meaney har samtala med barnehagelærarar om korleis born engasjerer seg i undersøkande leik med matematiske problem. Sentrale aspekt er born sine evner å forklara og tenkja hypotetisk, i kva grad aktivitetar er rutineprega, om dei bruker kjende eller ukjende løysingsstrategiar, om dei fylgjer reglar eller er meir undersøkjande, og om dei forklarar med kroppshandlingar eller ord. Døma i teksten er viktige fordi dei lyfter fram korleis matematisk problemløysing er del av kvardagsleik. Eit anna fokus som er felles for barnehage og skule er rekneforteljingar. Berggren og Næsje koplar norsk og matematikkdidaktisk kompetanse når dei utviklar eit rammeverk til hjelp for å få innsyn i rekneforteljingar som didaktisk tilnærming.

Men kva tenkjer eigentleg lærarar om dei nye læreplanane? Smestad spurde fleire lærarar om kva dei gleda seg til å fokusera meir på no framover, og mange nemnde argumentasjon, problemløysing, djupnelæring, utforsking og tverrfagleg arbeid. Programmering vart lyfta fram av fleire, og eit konkret døme på korleis programmering kan integrerast i matematikkundervising får du i Eidsvig sin tekst. God lesnad og lukke til med utvikling og iverksetjing av dei nye planane!

Rune Herheim

Jensen

Kunnskapsarbeid – kreativt og forstyrrende

Våren 2020 stengte skolene. Det viste oss nye muligheter for samarbeid for lærere og elever, og det gav oss økt digital kompetanse. Samtidig førte det til forsinkelse i planlagt og påbegynt arbeid knyttet til nytt læreplanverk – LK20. Koronasituasjonen vi har vært og er utsatt for, kunne vi ikke forutsi, vi kunne ikke planlegge for den. Det vi sitter igjen med, er verdifulle erfaringer om å mestre i ukjente sammenhenger. Det vi sitter igjen med, er verdifulle erfaringer om å mestre i ukjente sammenhenger.

LK20 er utviklet gjennom omfattende prosesser og innføres for elever fra 1. trinn til 9. trinn og vg1 i august. Det har vært et mål at planen skal utvikles gjennom stor grad av åpenhet. Engasjementet har vært stort, og tilbakemeldingene i innspillsrunder og i høringer har vært viktige for oss som har arbeidet med kjerneelementer og læreplaner i matematikk. Etter at LK20 ble vedtatt, har engasjementet fortsatt på skoler, konferanser og i sosiale medier. Man spør

Renate Jensen
Etat for skole, Bergen kommune
renate.jensen@bergen.kommune.no

Renate Jensen var med i gruppen som utarbeidet kjerneelementer i matematikk og leder for gruppen som arbeidet med læreplaner i matematikk.

Kort om fagfornyelsen og LK20

Fagfornyelsen er navnet på prosessen med å fornye læreplanene i Kunnskapsløftet. Det har vært en åpen og involverende prosess og alle har kunnet gi innspill til læreplanene i ulike faser. Det har vært et stort engasjement, og totalt har Utdanningsdirektoratet og Kunnskapsdepartementet mottatt over 20 000 innspill.

Det nye læreplanverket gjelder fra og med skoleåret 2020, og blir innført trinnvis over en periode på tre år:

- Skoleåret 2020–21 tar 1.–9. trinn og Vg1 i bruk nye læreplaner.
- Skoleåret 2021–22 tar 10. trinn og Vg2 i bruk nye læreplaner.
- Skoleåret 2022–23 tar Vg3 i bruk nye læreplaner.

I 2017 fastsatte Kunnskapsdepartementet en ny overordnet del av læreplanverket. Den utdyper verdigrunnlaget i skolens formålsparagraf og beskriver prinsippene for skolens praksis. Læreplanene i fag har fått ny struktur:

1. Om faget
   - Fagets relevans og sentrale verdier
   - Kjerneelementer
   - Tverrfaglige tema
   - Grunnleggende ferdigheter
2. Kompetansemål og vurdering
3. Vurderingsordning

Det er innholdet i fagene som blir nytt. Skolen skal med noen få unntak tilby de samme fagene som i dag. Unntakene gjelder på yrkesfag, der noen av utdanningsprogrammene blir nye og noen fag slås sammen.

Utdanningsdirektoratet har jobbet sammen med grupper av lærere, pedagoger, forskere og andre fagfolk for å utarbeide kjerneelementer i alle fag i perioden høsten 2017 til våren 2018. Kjerneelementer er det viktigste elevene skal lære i hvert fag. Det kan være kunnskapsområder, metoder, begreper, tenkemåter og uttrykksformer. Kjerneelementene ble fastsatt av Kunnskapsdepartementet i 2018, og utkastene til læreplaner som ble sendt på høring var basert på disse. Fra høsten arbeidet grupper med lærere, pedagoger, forskere og andre fagfolk sammen med Utdanningsdirektoratet om å utvikle læreplanene i fag. Disse ble fastsatt november 2019.

hverandre om råd og innspill og deler erfaringer og gode oppgaver. Norsk skole har vel aldri vært bedre forberedt og mer villig til å endre praksis. Samtidig opplever mange at matematikkplanene stiller store krav, og flere har uttrykt i høringen at retningen som faget tar, er ønsket, men at de mangler kompetanse på områder som for eksempel utforsking, algoritmisk tenking og modellering. Det har også blitt poengtert at det nye læreplanverket krever at det tenkes nytt om organisering, timeplaner og eksamen.

De viktige bestillingene til gruppene som har bidratt i fagfornyelsen, er at LK20 skal legge til rette for at elevene gjennom fordypning og god progresjon skal kunne oppnå økt mestring og forståelse i fag og på tvers av fag. Overordnet del og læreplaner i fag med tverrfaglige tema, kjerneelementer, kompetansemål og fagspesifikke omtaler av vurdering fremhever at elever som medvirker og lærer i samspill med andre, evner å regulere egen læring og i større grad har mulighet til å sitte igjen med relevant kompetanse. Opplæringen skal sette elevene i stand til å kunne reflektere kritisk, til å vurdere vedtatte sannheter, stille spørsmål og yte motstand på egne og andres vegne. *Hva skal alt dette bety i hverdagen for en matematikklærer*?

Bjørn Bolstad fra FIKS (Forskning, innovasjon og kompetanseutvikling i skolen) ved UiO skriver i sin blogg at skoler og kommuner ikke implementerer ny læreplan, men at de utvikler og innfører ny læreplan, og at innføringen av ny læreplan er kunnskapsarbeid (Bolstad, 2019). Arbeidet fremover består ikke i at skoler skal ta i bruk noen arbeidsmåter eller teknikker som er ferdig beskrevet. Lærere, skoleledere, skoleeiere og lærerutdannere må arbeide for en felles forståelse av LK20 som del av sitt kontinuerlige arbeid. Dette innebærer at vi må våge å prøve, feile og justere. Den østerrikske sosiologen Karen Knorr Cetina har definert kunnskapsarbeid til å være i *praksiser der man etablerer en relasjon til en kompleks oppgave, der denne relasjonen oppleves som kreativ og forstyrrende på samme tid*. Det er et slikt kunnskapsarbeid vi er i gang med når vi leser, tolker, drøfter, prøver ut, analyserer og konkretiserer LK20. Innføring av læreplanen innebærer at utvikling og endringer ikke kan forstås som prosesser styrt ovenfra og ned. Vi tar i bruk læreplanene ut fra erfaringer og praksis vi kjenner. For å lykkes med slik innføring blir det viktig å sette noen tydelige mål for hva endringene skal bidra til, og å skape felles forståelse for behov for endring. Hva skal til for at endringer i læreplanverket skal få betydning for praksis og for elevenes læring? Hvordan organiserer vi at endringene tas i bruk? Oppfølging av tiltak og justering av kursen som utvikles gjennom erfaringer med det som er satt i gang, blir viktig.

Utfordringer er forskjellige fra skole til skole, men betydningen av dialog og samarbeid legges til grunn for å få bedre sammenheng og helhet i læringsarbeidet. Beskrivelsen av tverrfaglige tema og kjerneelementer gjelder for alle årstrinn, samarbeid blir nødvendig for å utvikle progresjon i fagene. I utgangspunktet kan det dreie seg om å få felles forståelse av viktige begreper i planene – begreper er det alltid mange av i planer. Ordskyen i Figur 1 er laget fra læreplan i matematikk (*Læreplan i matematikk 1.–10. trinn* (*MAT01-05*) – fra teksten om *Fagets relevans og sentrale verdier*). Selv om begrepene er kjente, vil det ofte være nødvendig å møte dem med nytt innhold og å se dem i nye sammenhenger. Begreper kan virke nye i sammenhenger som de blir brukt i, og det er vesentlig å bruke tid på å få felles forståelse som grunnlag for å arbeide i retningen som den nye læreplanen beskriver.

Gjør et stopp nå i lesingen av denne teksten og bruk noen minutter på å velge tre ord og tenk på hvorfor disse ordene er viktige for å lære matematikk. Hva vil en kollega svare på det samme spørsmålet?

Har dere en felles forståelse for hva for eksempel *utforsking* eller *argumentasjon* må bety i faget?

Vi som har arbeidet med matematikkfaget i fagfornyelsen, har en ambisjon om at elever skal snakke mer matematikk, fordi dette bidrar til bedre forståelse i faget. Hvordan sikrer vi en strukturert ord- og begrepsutvikling for elevene i fag og på tvers av fag? Å utvikle et matematisk språk med bruk av presise ord og begreper er avgjørende for å lære og kommunisere matematikk. Elevene må få tilgang til dette språket både skriftlig og muntlig. Det er krevende å lære et språk og et fag samtidig, og mangel på ord og begreper hindrer elevene i å få vist sine matematiske kunnskaper. Faget har mange nye og vanskelige ord, og det er gjerne fagbegrepene som får oppmerksomhet i undervisningen. Men for å kunne forstå og bruke matematikken må elevene også få med seg hverdagsordene, de ordene man ofte tar for gitt at de kan. Gjennom å legge til rette for at elevene får muligheter til å sette ord på tenkemåter og strategier, vil vi som lærere også få bedre oversikt over hvor elevene er i sin språkutvikling. Det krever samtaler av god kvalitet – utforskende samtaler. Gjennom

Figur 1: Ordsky fra læreplan i matematikk.

utforskende samtaler diskuterer læreren matematikk sammen med elevene i grupper eller i hel klasse. Elevene stimuleres til å bruke begreper, sette ord på egne tanker og lytte til andres innspill. Det krever forberedelse og trening å lede slike samtaler eller diskusjoner. Det kan være enkelt å starte diskusjoner med å spørre elevene om hvordan elevene tenker. Men hvordan følge opp og inkludere flere elever? De nye læreplanene i matematikk legger vekt på selve prosessen, det å argumentere for ulike løsningsstrategier og for å se sammenhenger i faget. Matematiske diskusjoner og kommunikasjon fremheves som avgjørende for elevers forståelse og læring i matematikk. Carpenter, Franke og Levi (2003, s. 6) påpeker: «Students who learn to articulate and justify their own mathematical ideas, reason through their own and others' mathematical explanations, and provide a rationale for their answers develop a deep understanding that is critical to their future success in mathematics and related fields.»

For å få elever som stiller spørsmål, lytter, samarbeider, kommuniserer og tenker kritisk, trengs det et læringsmiljø der det er greit å undre seg og å prøve ut, og der feil blir utforsket som mulighet for å lære. Viktige spørsmål kan være: Hvordan legger vi til rette for at elever er trygge i læringen og opplever anerkjennelse i et fag der det tradisjonelt har vært større fokus på løsningene enn på prosessen? Hvilke oppgaver og hvilken vurdering kan vi velge for å få elever til å delta i matematikksamtaler og stå i utfordringer over tid?

Det blir viktig å samarbeide om kjerneelementene for å få en slik retning. Kjerneelementene skal prege innholdet og progresjonen i faget, de skal bidra til at elever over tid utvikler forståelse. I matematikk må det bety at elever får bruke tid på et tema, være involverte, jobbe variert og reflektere over løsningsmetoder og svar. Kjerneelementene i fag må diskuteres på langs, fordi de er felles for alle trinn i skolen. Hvordan kan utforsking og problemløsning se ut på 1. trinn eller på 9. trinn, og hvordan arbeide med progresjon knyttet til kjerneelementene? Hvordan bruke kjerneelementene til å finne tverrfaglige muligheter? For at elever skal kunne tilegne seg forståelse, trenger de mye tid til å arbeide med fagets kjerneelementer. Hvilke aktiviteter skal vi velge? Og hva skal lærerens rolle være i arbeidet? Hva må vi velge vekk for å gi tid til å gå i dybden? Hvordan involvere elevene i langsiktig kompetansebygging og progresjon?

Utforsking og problemløsning er sentralt i faget. Utforsking legger vekt på elever som leter etter mønster, finner sammenhenger og diskuterer seg frem til en felles forståelse. Strategier og fremgangsmåter er viktigere enn løsninger. Argumentasjon, resonnering og det å vurdere om løsninger er gyldige, må gjennomsyre hele opplæringsløpet. Vi trenger elever som medvirker, og lærere som veileder. Overordnet del av læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2017) sier mye om hvilke kvaliteter skolen skal utvikle hos elevene, bl.a. i pkt. 1.3, der det står at *skolen skal bidra til at elevene blir nysgjerrige og stiller spørsmål*, og pkt. 1.4, som sier at *skolen skal la elevene utfolde skaperglede, engasjement og utforskertrang*. Alt dette forutsetter at elevene ønsker å medvirke og blir selvstendige. Selvstendige mennesker våger å stille spørsmål, er nysgjerrige og utforskende.

Vi vet fra undersøkelser (Wæge & Nostrati, 2018) at det virker positivt inn på barns motivasjon i matematikk å få arbeide med problemløsningsoppgaver, praktiske utfordringer og aktiviteter fra dagliglivet. Videre vet vi at det er viktig at barn får samarbeide, og at de tilbys muligheter til å utvikle egne måter å løse oppgaver på. Til sist er det avgjørende med kommunikasjon

der den voksne behandler barn med respekt og lytter til og verdsetter deres ideer. Det handler om elever som får mulighet til å lære i dybden.

I starten av arbeidet med fagfornyelsen var det algoritmisk tenking og programmering som fikk mye oppmerksomhet i innspillsrundene. Det var en bestilling til gruppen som arbeidet med kjerneelementer, at dette skulle inn i læreplanen i matematikk. Mange aktører gav tilbakemelding på at dette ville føre til stofftrengsel, og at det i tillegg var et område som lærere i matematikk manglet kompetanse i. Etter hvert som planene ble skrevet, var det merkbart at holdningen endret seg, innspillene gikk fra «dette vil vi ikke» til «dette kan vi ikke». Algoritmisk tenking går ut på å gi elever gode begreper og effektive verktøy for å løse oppgaver og problemer. Dette kan gjøres med kropp, konkreter, tegning og digitale verktøy, og elever må engasjeres i læringen gjennom lek og eksperimentering. Elever får introduksjon til sentrale begreper i programmering i matematikkfaget, men de skal lære og anvende kompetansen også i andre fag. Det er nødvendig med samarbeid mellom fagene som eksplisitt har fått mål knyttet til algoritmisk tenking og programmering. Skoler må bruke tid på å lage planer både for intern kompetanseheving og for elevenes progresjon. Hvordan møter vi utfordringen med at LK20 innføres for 1. trinn til 9. trinn samme året?

Bruk av digitale verktøy må handle om forståelse, utforsking og rom for læringsfremmende matematikksamtaler. Målet er at elever i stadig økende grad mestrer å formulere og løse problemer ved hjelp av ulike problemløsingsstrategier og digitale verktøy. Denne måten å jobbe på stimulerer kreativitet, nysgjerrighet, selvtillit og vilje til å prøve ut ideer og løse problemer.

Utdanningsdirektoratet har samlet alle ressurser som kan støtte arbeidet med innføring av nye læreplaner, på sin side om *Støtte til innføring av nye læreplaner*. Her beskrives forventning og ansvar, demo av læreplanvisning, kompetansepakker, planleggingsverktøy og Facebook-grupper. Her er også lenke til kjennetegn på måloppnåelse for standpunkt på 10. trinn. Disse sammen med vurderingstekstene etter hvert trinn med kompetansemål kan være til hjelp for å reflektere over hva tverrfaglige tema, kjerneelementer og verdier fra overordnet del må bety i læringsarbeidet. Det er et stort og viktig arbeid vi har foran oss. Det krever at vi sammen ser på læreplanverkets ulike deler, og ser etter helhet og sammenheng. Det er den samlete kompetansen til elevene vi må være opptatt av, ikke det enkelte fag. Verdiene i overordnet del skal være med i planlegging og gjennomføring av hver eneste økt. Og vi må ta elevene med i arbeidet, de skal være hovedaktør i egen kompetanseutvikling.

Referanser

Bolstad, B. (2019, 29. november). *Nei, vi skal ikke implementere nye læreplaner* [Blogginnlegg]. Hentet fra: https://bbolstad.wordpress.com/?s=implementering

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth, UK: Heinemann.

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01–05)*. Hentet fra https://udir.no/lk20/mat01-05

Utdanningsdirektoratet (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/

Wæge, K. & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk*. Oslo: Universitetsforlaget.

Nybø

Utforskning av graf

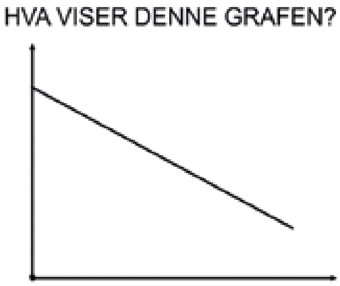
Motivasjon er et viktig element i klasserommet, kanskje spesielt det siste året på barneskolen. Dette undervisningsopplegget bygger opp under utforskende matematikk, som er svært sentralt i ny læreplan. Ved at elevene selv kan styre mesteparten av aktiviteten, erfarer vi at de blir mer motiverte og ivrige i arbeidet. Ved å jobbe i et utforskende arbeidsmiljø vil elevene selv oppdage utfordringene og be om veiledning. Jeg er overbevist om at dette fører dem til dypere forståelse og læring. Som lærer gir det også rikelig med anledning til å finne hver enkelt elevs utfordringer. Det kan altså brukes som en form for underveisvurdering i et emne, og viser hvor man bør gå videre med de aktuelle elevene i dette emnet. Som lærer gjelder det å tørre å slippe kontrollen. Kompleksiteten i slike aktiviteter kan bli stor. Du vet ikke på forhånd hvor det ender. Det vil kreve at læreren lytter aktivt til det elevene sier, for å forstå og veilede dem videre fra akkurat der de er til enhver tid.

Utforskende tilnærming gir elevene mulighet til å oppleve at de selv i stor grad styrer aktivitetene, mens læreren beholder ansvaret for læringsmålet og for å veilede elevene mot målet (Nosrati & Wæge, 2015, s. 12). Gjennom denne typen arbeid, heller enn å trene på innlærte prosedyrer, får elevene prøve seg på utfordringer slik at de opplever et behov for den matematikken de skal lære. De får diskutere sine metoder, ta tak i eventuelle feil, og få veiledning fra læreren heller enn å få opplæring, noe som fører dem til dypere forståelse, og til at læringen skjer på elevenes premisser. Som lærer kan du bruke denne arbeidsformen for å stimulere elevers motivasjon. De får mulighet til å bestemme hvordan de går frem, og du får vite hvor du bør gå videre med de aktuelle elevene i emnet. Du ivaretar elevene samtidig som du veileder dem mot læringsmålet. Alle disse aspektene taler for en utforskende tilnærming, men arbeidsformen innebærer visse utfordringer for læreren.

Det empiriske grunnlaget som denne artikkelen er bygget på, viser muligheter og utfordringer som inngår i en utforskende tilnærming. Utgangspunktet er et undervisningsopplegg som jeg har gjennomført med en klasse på 7. trinn. Elevene fikk se en graf og ble utfordret til å beskrive en praktisk situasjon som passet til grafen, samtidig som de kunne støtte seg på noen konkrete spørsmål (Figur 1).

Elevene arbeidet i grupper på 4–5 elever. Oppgaven elevene fikk, var altså å tolke en lineær graf som verken hadde diagramtittel, aksetitler eller verdier på aksene (figur 1). Slik måtte de selv ta mange vesentlige avgjørelser. Spørsmålene som fulgte med, var en måte å

Ann Kristin Stustad Nybø
Skoger skole
ann.kristin.stustad.nybo@drammen.kommune.no



Hva står x-aksen for?
Hva står y-aksen for?
Finn tittel på grafen.
Lag en T-tabell.
Kan dere lage en formel som passer?

Figur 1

ramme inn oppgaven på slik at den var åpen, men likevel styrt mot læringsmålet; å bygge opp forståelse for grafbegrepet. Spørsmålene ledet de ulike gruppenes oppmerksomhet mot ulike aspekter ved grafen. Ved at elevene selv valgte konteksten, håpet jeg at de ville oppnå en grundigere forståelse av graf som begrep.

Målene for denne undervisningsøkten var, foruten å jobbe utforskende med matematikk, at elevene skulle få erfaring med å oversette mellom de ulike representasjonsformene graf, tabell og verbal presentasjon. For å klare det må de se sammenhengene mellom disse. Slike prosesser kan knyttes til kjernelementet modellering og anvendelse i LK20. Valget av en graf med negativt stigningstall og et konstantledd var bevisst, da dette er grafer som elevene på barnetrinnet ikke møter så ofte. Dermed krevde det mer utforskning og diskusjoner i gruppene. Jeg ønsket at elevene skulle finne mønstre i materialet, og muligens komme frem til en formel. Det å finne en formel var ikke vesentlig fra mitt perspektiv, men å lete etter mønster og overføre informasjon fra grafen og inn i en tabell fordret mer funksjonell tenkning (se sammenheng mellom de to variablene *x* og *y*) enn rekursiv (se sammenhengen mellom ulike verdier av *x*, og separat sammenhengen mellom ulike verdier av *y*) (Solem, Alseth, Eriksen, & Smestad, 2017, s. 351).

Jeg regnet med at arbeidet ville gi ny innsikt på ulike nivåer, samtidig som noen av ideene ville danne et felles grunnlag for kommende undervisningsøkter. I tillegg regnet jeg med anledninger for læring gjennom å avdekke misoppfatninger i løpet av undervisningsøkten. Noen av disse kunne jeg ta tak i umiddelbart, og noe kunne jeg ta opp igjen senere.

De seks gruppene knyttet grafen til svært forskjellige kontekster, se tabellen (figur 2) som i stikkordsform viser hvilke matematiske utfordringer som kom til overflaten og utgjorde det matematiske fokuset for de ulike gruppenes arbeid. Kompleksiteten i elevenes besvarelser kan ses tydelig, sentrale begreper som definis-

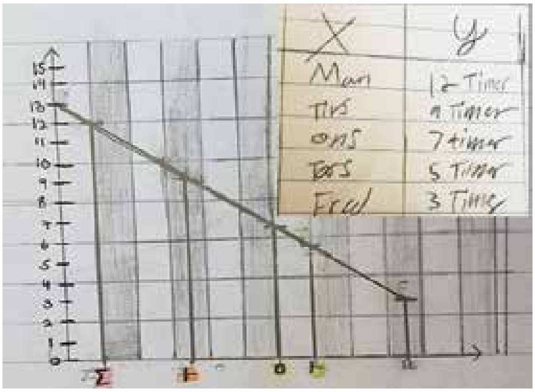
Gruppe	Kontekst	Matematisk fokus
Gruppe 1	Spilletid pr. dag, nedtrapping.	Hvordan tolke grafen? Graf som kontekst.
Gruppe 2	Aldri mer kontanter.	Kontinuerlig vs. ikke-kontinuerlig funksjon.
Gruppe 3	Snøsmelting.	Konstante avstander mellom punktene på aksene.
Gruppe 4	Dyr solgt pr. år – nedtrapping.	Gir formel mening ved få begrensede verdier på x-aksen (definisjonsmengde)?
Gruppe 5	Forbruk fossilt brensel.	0-punktet.
Gruppe 6	Befolkningstall under svartedauden.	Hvordan fortsetter ev. grafen?

Figur 2: Sammendrag fra de ulike gruppenes arbeid

jonsmengde og kontinuitet springer ut av problemstillingene som disse elevene på 7. trinn selv ble opptatt av, noe som gjør at når læreren senere introduserer terminologien, vil den oppleves som nyttig, et svar på elevenes behov.

De forskjellige gruppene fikk ulike matematiske fokusområder, noe jeg skal gå grundigere gjennom under. Litteraturen viser til ulike utfordringer som man kan forvente av elevens møte med arbeidet med funksjoner (Hattikudur et al., 2012). Mange strever med å forstå skjæringspunktet mellom aksene, å forstå en jevn endring og forskjell på et linjediagram og trappefunksjon (Glazer, 2011). Som vi skal se videre, dukket da også alle disse problemområdene opp i dette undervisningsopplegget.

Elevene på **gruppe 1** hadde liten erfaring med funksjoner fra tidligere, noe som viste seg tidlig da de begynte med å beskrive grafen ved hjelp av linjalen. «X-aksen står for lengde 11,5 cm, Y-aksen står for høyde 9 cm, grafen er 11,3 cm og ligner på en trekant.» Læreren brøt da inn og tegnet et nytt aksesystem på tavla, med en graf som gikk opp og ned. Her forklarte hun dem hvordan grafen kan forstås som punkter i planet og viser sammenhengen mellom tallparene som aksene viser, og at disse igjen kan leses av ved hjelp av grafen. Det virket som de forstod den forklaringen raskt. De bestemte seg for at de skulle bruke sin graf til å vise nedtrapping av spilletid for et barn. Her begynte de med 12 timer på mandag, 9 timer tirsdag, 7 timer onsdag, 5 timer torsdag og 3 timer fredag. Problemet oppstod når de skulle forklare sammenhengen mellom tabellen og grafen. De brukte sine tidligere erfaringer med søylediagrammer og utformet dagene på x-aksen som intervaller fremfor punkter (figur 3). Da læreren spurte hvordan de visste at det var akkurat 9 timer på mandag, løste de det ved å tegne en linje vertikalt fra grafen akkurat der den stemte med tabellen for hver dag. Læreren oppfordret dem til å markere det tydelig, så grafen stemte med tabellen. Den ene eleven begynte å skrive av grafen i en ny tabell for å se og forstå sammen-



Figur 3

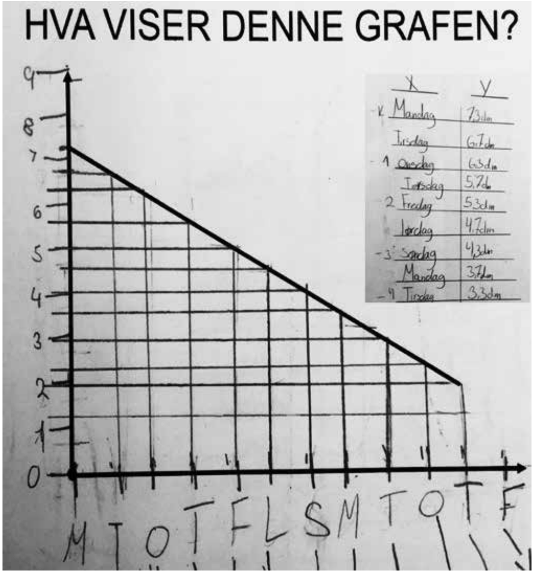
hengen mellom variablene, og for å få flere erfaringer med å overføre mellom representasjonsformene. Dette var nyttig trening for denne eleven, der han opplevde mestring samtidig som han lærte noe nytt. Eleven fikk også i oppgave å forklare det for de andre på gruppa. Fokuset å lese av grafen som punkter og ikke intervaller ga disse elevene en begynnende forståelse av graf som begrep.

Gruppe 2 ønsket å velge seg noe fra virkeligheten, og etter hvert falt de ned på utviklingen av bruk av kontanter. De søkte på nett og fant en artikkel der det ble hevdet at kontantbruken hadde sunket med 20 % på et år, og at kortbruk hadde tatt over. De satte derfor at grafen startet på 80 % og fortsatte å synke lineært til at det er slutt på kontanter i år 2030 (figur 4). Som lærer

Figur 4

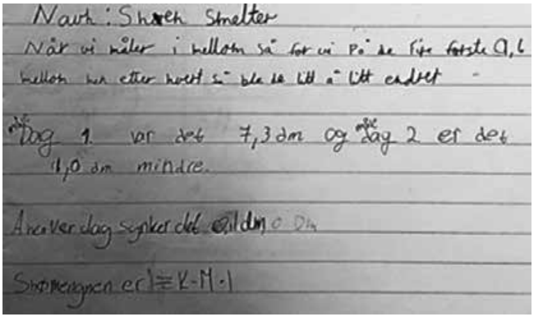
noterte jeg meg at de ikke skilte mellom prosent og prosentpoeng, en misoppfatning å legge i «senere»-boksen. De fortsatte grafen helt ned til den krysset x-aksen, og var bevisste på at dette var 0-punktet til y-aksen og dermed slutten på kontantbruken. For dem var det en selvfølge at grafen ville fortsette i samme utvikling som den hadde tidligere. Denne gruppen tegnet også hvert år som intervaller. Dette kunne jo fungert greit da kontantbruken kunne synke i løpet av året, men så satte de likevel inn kun hvert tredje år. Fokus i samtalene med denne gruppen ble å drøfte konstante avstander mellom verdiene på hver akse. Læreren spurte: «Hvor kan jeg se hvor stor kontantbruken blir i 2028 på denne grafen?» På den måten problematiserte læreren det for dem, for at de selv skulle se behovet for å se x-aksen som en hel sammenhengende tallinje.

Gruppe 3 hadde en fiffig måte å delvis konkretisere konteksten for seg selv på. De målte y-aksen til å være 7,3 cm. Så vurderte de hva det kunne bety. De bestemte seg for at det kunne ses som 7,3 dm snø. Videre så de at snøen smeltet til den etter noen dager ble helt borte. De bestemte seg for at den første dagen (kalt kontrolldag) hadde 7,3 dm snø. Så satte de inn dagene fremover med relativt konstant avstand på aksen. Etter å ha satt verdiene som de leste av grafen inn i en tabell, så de fort et mønster (figur 5).



Figur 5

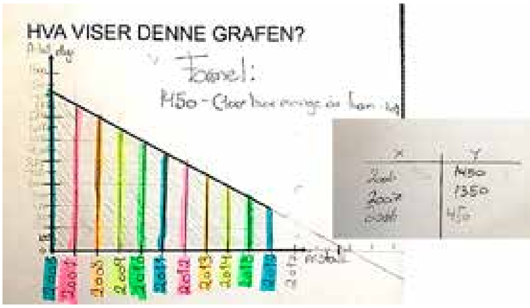
Når de så rekursivt i tabellen (endring i mengde snø fra én dag til neste), så de at tallene sluttet med samme siffer annenhver dag. Altså 1 dm nedgang annenhver dag. Dette førte til fine diskusjoner på gruppa der de fant ut at de kunne bruke kontrolldagen og trekke fra 1 dm for annenhver dag. Så ved å kalle kontrolldagen for K (7,3 dm snø) og regne annenhver dag som (måledag 1, 2) osv. kunne de begynne på en formel. De satte at $K - M \cdot 1$ ville gi dem snømengden på de ulike måledagene (figur 6). Læreren veiledet gruppa på slutten av timen ved å spørre dem om mønsteret kunne brukes uansett hvilken dag de ønsket å vite snømengden. En ny diskusjon oppstod da de så at de hadde henholdsvis 0,4 og 0,6 dm nedgang for hver dag. Her oppdaget elevene selv at nøyaktighet er viktig når noe skal fremstilles grafisk. Ved å begynne på nytt og være mer nøyaktig fant de også ut at det smeltet 0,5 dm hver dag. Gruppa



Figur 6

ble derfor ivrige i å finne en korrekt formel for hver eneste dag. På figur 6 ser vi hvordan gruppa jobbet mot en formel.

Gruppe 4 var opptatt av dyrevelferd og ville ha frem noe som passet til det. De valgte salg av dyr, noe de ønsket det skulle bli mindre av så dyr skulle slippe å bytte hjem så ofte. Alle var enige om at det ikke var så viktig med en ekte sak, de ville bare bruke fantasien. Gruppa bestemte seg for at antallet salg av dyr det første året skulle være 1450 dyr, videre gikk det ned 100 for hvert år (figur 7). Vi ser av tabellen at de kun tar et år før de hopper ti år frem i tid. Dette skyldes lærerens veiledning for å få dem til å tenke funksjonelt, å legge merke til sammenhengen mellom variabler. Med 100 færre dyr solgt hvert år ble det ikke bare enkelt å regne, men mønsteret ble enkelt å se. En elev var rask med å finne formelen: 1450 – (100 · antallet år frem i tid). Det førte til en stor diskusjon på



Figur 7

gruppa, da en elev ikke kunne se fordelen med en formel.

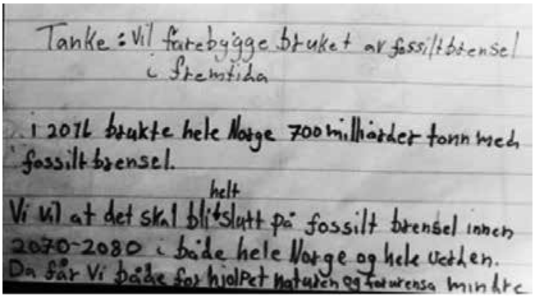
Lærer: Hvordan kan dere vite hva salget ble i 2025, da?

Elev 1 Det er jo bare å ta 100 mindre for hver gang det.

Elev 2 Ja, men med formel er det mye lettere å hoppe langt frem i tid.

Elev 1 Ja, men det gir ikke mening under 0.

Her ser vi at det er flere ting som spiller inn. Elev 1 tenkte at dette var et så begrenset definisjonsområde (kun tallene 1, 2, 3, …, 14 gir mening i formelen i denne konteksten) at en formel ikke kunne gjelde. Han mente at en formel alltid må gjelde for alle tall. Videre hadde de valgt –100 i stigningstall, noe som var så lett å regne med at en formel var unødvendig. Det var like greit med hoderegning. Her var det en god diskusjon som avdekket mye dypere forståelse enn det læreren hadde sett på forhånd. Ved at elevene forsøkte å overbevise læreren og ikke



Figur 8

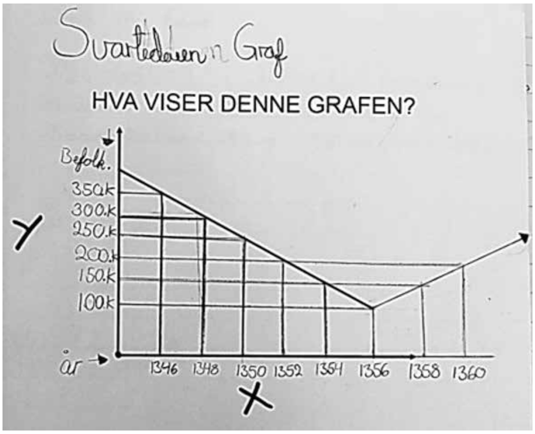
minst hverandre om sitt standpunkt fikk alle på gruppa dypere forståelse og innsikt.

Elevene på **gruppe 5** hadde et sterkt miljøengasjement. De ønsket å lage en prognose, en ønskegraf for fremtidig forbruk av fossilt brensel (figur 8). Målet var 0-forbruk, så de var raskt ute med å fortsette grafen slik at den forble lineær

Figur 9

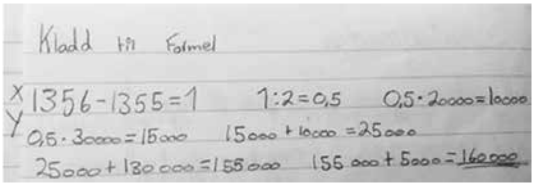
(figur 9). De søkte på nettet og fant reelle tall fra SSB. (Læreren har i ettertid ikke sjekket tallmaterialet i kildene.) I 2016, der de fant de siste tallene, brukte Norge 700 millioner tonn fossilt brensel på et år. De tenkte seg at Norge skal slutte fullstendig med fossilt brensel innen 2070–2080. Utfordringen for denne gruppa var å se 0-punktet på y-aksen. De diskuterte og prøvde seg frem lenge. Det var vanskelig for læreren å få ordentlig tak i utfordringen, men det viste seg til slutt at de hadde problemer med å se at når x-aksen startet på 2016, så startet y-aksen likevel på 0. Denne gruppa trengte tabellen for å forstå grafen. De regnet da at 0-målet i gruppas prognose vil oppnås i

2086. Jeg så at de trengte veiledning for å forstå at de fleste grafene kun er et lite utsnitt av et stort koordinatsystem. Dette er noe jeg ønsker å løfte i hele gruppa, så det ga enda et punkt i «senere»-lista.

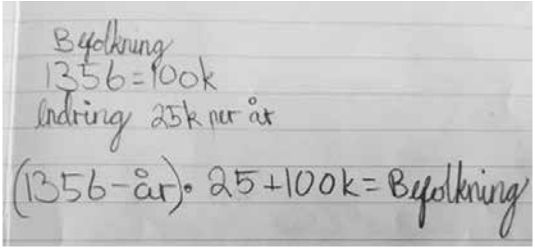


Figur 10

Gruppe 6 så for seg at grafen viste nedgang i befolkningen i Norge under svartedauden, en historisk begivenhet de hadde jobbet med i samfunnsfag. De lette etter reelle tall og forsøkte å tilpasse virkeligheten til grafen (se figur 10). Så begynte jakten på en formel. For denne elevgruppa ble det vanskelig å se hvordan de kunne lage en formel som skal ta hensyn til et negativt stigningstall. De valgte derfor å fortsette grafen ved å speile grafen om en vertikal linje for å modellere befolkningsveksten etter slutten på svartedauden. Som en elev sa: «Befolkningen måtte jo øke etterpå, da.» På den måten ble det enklere for dem å se hvordan formelen kunne se ut. De brukte år 1356 som utgangspunkt (konstanten) med sine 100 000 innbyggere, så økte befolkningen med 25 000 pr. år. De fant også ut at avviket i befolkningen pr. år var på 25 000, uansett om det var før eller etter 1356. Det var store diskusjoner og mye regning i denne gruppa (figur 11). De regnet ut for mange ulike år for å finne et generisk eksempel. Til slutt endte de opp med en formel som passet for alle årene både før og etter år 1356 (figur 12).



Figur 11



Figur 12

Stoltheten lyste da de fremførte sin løsning for klassen.

Det viktigste for meg med artikkelen om dette undervisningsopplegget er å vise at vi som matematikklærere må våge å tre litt tilbake og la elevene få mer medvirkning på matematikken i timene. Elevene var meget engasjerte, og mens de undersøkte kontekster som lot dem modellere virkeligheten med en lineær, synkende graf, traff de på mange utfordringer som gjorde matematikken meningsfylt. Dette er kun et eksempel på utforskende arbeid i matematikk, og helt i tråd med kjerneelementer i ny læreplan. Jeg opplever denne tilnærmingen som en motiverende måte å undervise på. Engasjementet smitter fra lærer til elever, fra elev til elev og ikke minst fra elever til lærer. Lite er vel mer engasjerende for en lærer enn motiverte elever.

Referanser

Glazer, N. (2011). Challenges with graph interpretation: a review of the literature. *Studies in Science Education*, 47(2), 183–210.

(fortsettes side 18)

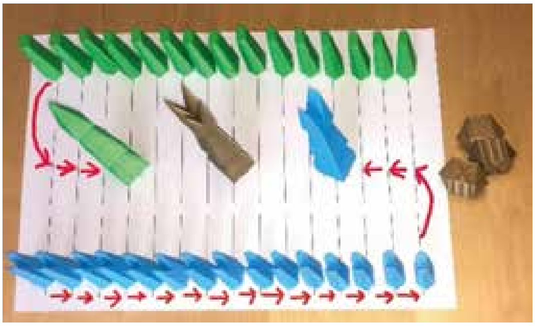
Fyhn

Sáhkku – et spill for fagfornyelsens kjerneelementer

«Vet du at det finnes et gammelt samisk spill, et brettspill? Har du hørt om *Sáhkku*?» Ordene kom fra Magnhild Mathisen. I 2011 besøkte jeg henne i Unjárga/Nesseby, der hun blant annet viste meg rundt på Várjjat Sámi Musea/Varanger Samiske Museum. Magnhild fortalte at *Sáhkku* var flere hundre år gammelt og tidligere var det svært utbredt i Unjárga/Nesseby. Hun poengterte at dette spillet måtte være relevant for dem som er interessert i matematikk. I 2019 fikk jeg en ny henvendelse om *Sáhkku*. Matematikeren Trygve Johnsen ved UiT deltok i en kombinatorikk-konferanse i Danmark, der det var et foredrag om det samiske spillet *Sáhkku*. Trygve foreslo at *Sáhkku* kunne egne seg til masteroppgaver på lektorutdanningen. På det tidspunktet var Carita E. Varjola og jeg involvert i SUM-prosjektet[1] sammen med Unjárgga Oahppogáldu/Nesseby Oppvekstsenter. Lærerne tok godt imot vårt forslag om å inkludere *Sáhkku* i prosjektet. I følge Overordnet del av læreplanverket (Kunnskapsdepartementet [KD], 2017) skal alle elever lære om samisk kultur og historie. *Sáhkku* åpner for at matematikklærere kan bidra til å oppfylle denne delen av læreplanen.

Anne Birgitte Fyhn
UiT – Norges arktiske universitet
anne.fyhn@uit.no

De to ildsjelene Edmund Johansen og Mikkel Berg-Nordli har jobbet systematisk over tid med revitalisering av *Sáhkku*. Berg-Nordli (2019a; 2019b) har utarbeidet flere oversiktlige presentasjoner av *Sáhkku* og vi anbefaler den interesserte leser å se på disse. Reglene varierer fra sted til sted, det er til dels store lokale forskjeller. Vi følger Laksefjordreglene. Rent umiddelbart kan *Sáhkku* fremstå som en slags mellomting mellom Backgammon og Sjakk. Hver spiller i *Sáhkku* har 15 soldatbrikker (menn og kvinner), pluss ei dronning. Brettet består av 45 linjestykker eller felter, fordelt på tre rader med 15 felter i hver. Soldatbrikkene flyttes mot høyre eller venstre, i motsatt retning av hverandre, slik de røde pilene på Bilde 1 viser, flyttemønsteret ligner på bokstaven S. Spillerne har langsiden av brettet mellom seg, slik det fremgår på Bilde 2. Bilde 1 viser grunnoppstillingen, der soldatene er plassert på spillernes hjemmerad. For at en brikke skal kunne begynne å gå, må den være aktivert. Soldatbrikkene aktiveres i rekkefølge, du må starte med den som står lengst til høyre på din hjemmerad. Brikken aktiveres ved at du får X på en terning. Brikken flyttes da ett steg «fremover» i den retningen den kan gå. I motsetning til soldatene, kan konge- og dronningbrikkene også gå baklengs og til siden, men de kan ikke skifte retning mens de går det antall steg en enkelt terning viser. Lander du på et felt der det står en aktivert brikke som tilhører mot-



Figur 1: *Sáhkku* brett og brikker.

standeren, så slår du den ut. Du kan ikke stå på et felt der det står brikker som ikke er aktivert. Blir du fri for soldater, har du tapt.

I *Sáhkku* spiller du med tre *birccut,* terninger. Enten bruker du alle terningene til å gå med én brikke, eller så bruker du terningene på forskjellige brikker. Som Figur 1 viser, har terningene tolv sideflater. I motsetning til vanlige terninger, kan *Sáhkku birccut* kun lande på fire av sideflatene. På de to resterende sideflatene har de en pyramideformet utvekst. Kast med én terning har derfor fire mulige utfall: 'Blank', II, III og X. 'Blank' tilsvarer null. II tilsvarer 2 og III tilsvarer 3. Symbolet X, *Sáhkku*, kan brukes på flere måter. Du kan bruke det til å aktivere en brikke, du kan gå ett steg med en brikke, eller du kan kaste X-terningen om igjen i håp om å få et mer ønskelig utfall. Når du har kastet, så må du først bruke den eller de terningene som viser X, deretter III og til sist II. Hvis brikkene dine står ugunstig plassert, kan du i verste fall risikere å miste hele eller deler av trekket ditt. Det er kun én konge i *Sáhkku* og på Figur 1 står den midt på brettet. Lander en av dine brikker der kongen står, er kongen din. Med andre ord, kongen kan bytte eier flere ganger i løpet av spillet. På Bilde 2 har Jan akkurat erobret kongen.

Dronninga er utfordrende: Den er veldig effektiv, men hvis du mister den, har du tapt selv om du har soldater igjen. Da vi hadde funnet ut av reglene og prøvde vårt første parti *Sáhkku*, satte jeg dronninga i spill etter få trekk. Strategien var å meie ned flest mulig av Caritas brikker før hun rakk å komme seg i posisjon. Strategien viste seg å være elendig. Jeg ble tvunget til å fokusere på forsvar av min egen dronning og kom raskt på defensiven. Dagen etter spilte Carita mot en elev. Hun fikk straks flere oppmuntrende forslag om å sette dronninga i spill, men lot seg ikke lure. Hun visste at dette var en dårlig strategi.

Sáhkku og matematikk

Det er tre aspekter ved matematikk som er særlig fremtredende i *Sáhkku*: i) bruk av strategier og strategisk tenking, ii) problemløsing og iii) kombinatorikk. Strategiene inngår når ulike problemer som oppstår i løpet av spillet må løses. Problemløsing og strategier er med andre ord nært knyttet til hverandre. Polya (1945/1973) beskriver problemløsing som en prosess i fire faser. Først må vi forstå problemet, ellers kan vi ikke løse det. Fase 2 går ut på å få oversikt, og lage en plan. I Fase 3 gjennomføres planen og i Fase 4 ser vi tilbake på løsningen og diskuterer den. Denne fire-fase-prosessen kan også anvendes på problemløsing innenfor områder som brettspill og andre spill, for eksempel sjakk. Gjone (1998) hevder at det å løse sjakkproblemer er en matematisk aktivitet, fordi det har mye til felles med matematiske bevis.

Strategier

I følge Berg-Nordli (2019b) er *Sáhkku* et spill der både strategi og flaks inngår. I spill vil strategi ofte være ensbetydende med en handlingsplan. En slik plan inneholder gjerne sekvenser der flere valg inngår: «Hvis motspilleren gjør A, så vil jeg gjøre X. Hvis motspilleren gjør B, så vil jeg gjøre Y». Utarbeiding av slike planer inngår i Fase 2 i Polyas (1945/1973) problemløsingsprosess. Etter hvert som du blir bedre kjent med spillet, kan du utvikle strategiene dine og komme frem til nye og bedre strategier.

En sentral problemstilling er hvordan du kan erobre kongen og beholde den. Én mulig strategi for å løse problemet er å aktivere noen egne brikker og lage et ledig felt på egen hjemmerad. Der kan kongen ligge på lur, slik gjedda ligger på lur i sivet for å fange fisk som svømmer forbi. Schoenfeld (2000) påpeker at det ikke er tilstrekkelig at elevene har faktakunnskaper og at de kan redegjøre for definisjoner og prosedyrer i matematikk. De må også være i stand til å anvende matematisk kunnskap og problemløsingsstrategier på en god måte. Den som ofte lykkes med å erobre og beholde kongen, har trolig anvendt flere problemløsingsstrategier på en god måte. En annen problemstilling er å finne ut hvor mange brikker det er lurt å flytte fremover i samlet tropp, fordi én brikke alene kan vise seg å være sårbar. De fleste har meninger om problemstillingen «når er det optimalt å aktivere dronninga?» Målsettingen med denne og de andre problemløsingsoppgavene er å øke mulighetene for å vinne.

Utvikling av strategier inngår i kjerneelementene i Fagfornyelsen, blant annet som ingrediens i 'Utforsking og problemløsing' (KD, 2019). Det å diskutere ulike *Sáhkku*strategier med andre, er en muntlig aktivitet som også omfatter tre andre kjerneelementer: i) 'representasjon og kommunikasjon', ii) 'resonnering og argumentasjon', og iii) 'abstraksjon og generalisering'. Du kommuniserer dine resonnementer til andre og argumenterer for hvorfor du tror din strategi er god. Hvis du finner en strategi som fungerer godt i en situasjon, så kan du prøve å generalisere den, slik at den også gjelder for andre og lignende situasjoner. Problemløsingsaktiviteter kan med andre ord bidra til at elevene jobber med flere kjerneelementer på samme tid, der vektlegging av Polyas fjerde fase gir rom for muntlig aktivitet. Problemløsing i læreplanen handler blant annet om «... å analysere og forme om kjende og ukjende problem, løyse dei og vurdere om løysingane er gyldige» (KD, 2019, s. 2). Målsettingen med slik problemløsing er at elevene kan øke sine muligheter for å vinne. Dette kan være motiverende for dem som liker å vinne eller å konkurrere. Problemløsingsoppgaver fra *Sáhkku* kan brukes for å variere undervisningen og spillet tilbyr lærere mange muligheter til arbeid med de kjerneelementene som omfatter strategisk tenking. Elever som misliker tekstoppgaver, er velkomne til å delta på linje med resten av klassen fordi dette handler om muntlig resonnering og argumentasjon.

Kombinatorikk

Sáhkku byr blant annet på problemstillinger i kombinatorikk. Fordelen med å inkludere disse problemstillingene i matematikkundervisningen, er at de inviterer elevene til å prøve seg frem mer eller mindre systematisk, uten krav til forkunnskaper fra formell matematikk. Du må tørre å prøve og det er lov å gjøre feil. Du trenger ikke kunne mer matematikk enn å telle til tretti for å spille Sáhkku, og her stilles ingen krav til skriftlige ferdigheter. Sriraman (2004) bruker eksempler fra kombinatorikk til arbeid med problemløsing i skolen. Han betrakter problemløsing som en prosess, som bidrar til at elevene tenker matematisk.

Kast med tre *Sáhkku birccut* gir $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ muligheter, men flere av utfallene er like. Ungdomsskoleelever har ingen kjent formel for å finne fram til hvor mange *forskjellige* kombinasjoner de kan få med de fire symbolene 'blank', II, III og X på tre terninger. Terskelen for å prøve seg frem er imidlertid lav, fordi det er nærliggende å starte med systematisk telling. Første steg er å få oversikt over mulige utfall av kast med to *birccut*. Der kan du telle deg fram til 10 forskjellige kombinasjoner. Dette er en kjent oppgave for mange elever. Det blir imidlertid betydelig mere krevende å finne ut hvor mange forskjellige kombinasjoner du kan få ved å kaste tre *Sáhkku birccut*. Terskelen for å prøve seg fram er lav, men det kan fort vise seg å være svært tidkrevende å komme fram til en løsning som inkluderer alle muligheter. En strategi som fører fram, er å starte med å telle opp alle muligheter for å få tre like, det blir 4. Deretter teller du opp antall forskjellige utfall dersom to terninger er like, slik Tabell 1 viser.

Til slutt gjenstår å telle antall forskjellige utfall dersom de tre terningene er ulike, det er kun de fire mulighetene som fremstår i høyre kolonne i Tabell 1. Elever i høyere klassetrinn kan prøve å finne et generelt uttrykk for dette.

X X X	0 0 0	II II II	III III III	X 0 II
X X 0	0 0 X	II II X	III III X	X 0 III
X X II	0 0 II	II II 0	III III 0	X II III
X X III	0 0 III	II II III	III III II	0 II III

Tabell 1: Mulige forskjellige utfall av kast med tre *Sáhkku birccut.*

Etter at du har fått oversikt over alle forskjellige kombinasjoner du kan få med tre terninger, er det også interessant å finne ut hvilke kombinasjoner som er mest sannsynlig. Dette er en del av strategien for å vinne. Kunnskap om dette er relevant for utforsking av når det vil være lurt å kaste om igjen hvis en eller flere terninger viser *Sáhkku*. En annen interessant problemstilling er å finne ut hvor det er tryggest å stå, hvis du nærmer deg en av motpartens brikker – hvor nært tør du å stå. Dette kan elevene utforske ved å prøve seg frem og telle. Denne oppgaven kan forenkles ved å eliminere kongen og dronninga.

Sáhkku ved Unjárgga Oahppogáldu/Nesseby oppvekstsenter

De to ildsjelene Berg-Nordli og Johansen var på Vuonnamárkanat/ Varangermarkedet i 2018 hvor publikum fikk prøve spillet (Eira, Johnsen & Aslaksen, 2018). Sáhkku var derfor kjent blant lærerne, som kunne fortelle at brett og brikker sto fremme på bygdas museum. I følge Berg-Nordlie (2019a) har disse brikkene og brettet tilhørt Isak Saba, den første samiske stortingsrepresentanten. Han var fra Unjárga/ Nesseby og satt på Stortinget fra 1907–1912. Lærerne var positive til å inkludere *Sáhkku* i SUM-prosjektet, men de manglet brikker og brett. Skolens inspektør, Kåre Lervåg Aasprong, tok utgangspunkt i Facebook-gruppa 'Daabloe-Sámi board games', der fant han oppskrifter. Neste steg var å finne ut hvem som kunne lage klassesett med brikker. Løsningen ble Vardø videregående skole, elevene på linja for IKT-samferdsel stilte opp og laget brikker til skolen (Kofoed, 2019). Først lagde de testbrikker i to størrelser, som skolen prøvde ut. Spillebrett tegnet lærerne opp på papir som ble skrevet ut på A3-ark. Lærerne kontaktet Berg-Nordli og fikk tilsendt spilleregler.

Lærernes plan gikk ut på at elevene på ungdomstrinnet lærte seg spillet først, samiskelevene spilte på samisk og de andre spilte på norsk. Deretter skulle ungdomsskole-elevene lære opp elevene på mellomtrinnet. Etter hvert som de lærte seg spillet, laget elevene en liste over regler. Reglene var utformet som korte setninger på under ei linje. Deretter startet de opplæring av elever på mellomtrinnet. Carita fulgte samiskelevene og senere på dagen var Barbara[2] med mens jeg og Carita fulgte den norsktalende gruppa.

Vi oppsummerte dagen i et møte sammen med fire fornøyde lærere, se Figur 2. Lærerne merket seg at ungdomsskoleelevene presenterte spillet ved å stille opp brikkene på brettet, og så gikk de rett i gang med å la de yngre medelevene spille. Det var ingen gjennomgang av regler og slikt først. I følge Kristian var det artig å se «når det var to som ikke var kjent med spillet, hvordan de i starten på en måte spiller på lag for å forstå, før de går i gang med å kverke hverandre. Det er jo en utvikling som skjer. Det var en interesse for å forstå, før man gikk i gang». Øyvind var imponert over at elevene faktisk klarte å holde på i halvannen time og at de fleste klarte å konsentrere seg. Læreplanen har ingen eksplisitte formuleringer knyttet til konsentrasjon og konsentrasjonstrening, men slik vi ser det, er konsentrasjon viktig i arbeid med problemløsing.

Lærerne gjorde flere elevobservasjoner i forhold til problemløsing og strategier. Anne Gro beskrev det slik, «det blir nesten som å spille sjakk. Setter vi den bonden fram der så kan vi

Figur 2: Lærerne (fra venstre) Anne Gro Stadheim, Kristian Bergstø, Øyvind Bruhn Munkebye og Matti Dikkanen etter en dag med mye *Sáhkku.*

gjøre sånn og sånn. Og det blir jo og det samme med dette spillet.» Kristian brukte en litt annen formulering: «Du må jo forholde deg til det den andre gjør, og egentlig prøve å dekke opp for det den andre kanskje kan komme til å gjøre. Og du må ta hensyn til hva er muligheten din for å få hva, av verdier og sånt». Det er med andre ord to ting du må passe på hele tiden: i) dekke opp for det motspilleren gjør (problemløsing og strategier) og ii) hva er sannsynligheten for å få ulike verdier på terningene (kombinatorikk). Dessuten må du prøve å finne en offensiv strategi slik at du kan vinne. Lærerne bemerket at læreplanen primært fokuserer på problemløsing og strategier relatert til algebra.

Mellomtrinnselevene lærte spillet med kyndig veiledning fra ungdomstrinnet og ved å prøve seg frem. Etter hvert kom de frem til strategier som lønte seg. Matti observerte at «etter noen få runder så ser du at de fleste oppdager at det er lurt å vente med å aktivisere dronninga til brettet er ganske rydda.» Elevene fikk utvikle strategier basert på sine egne erfaringer. Dette er i tråd med avsnittet «Fagrelevans og sentrale verdier» i den nye læreplanen i matematikk: «Når elevane får høve til å løyse problem og meistre utfordringar på eiga hand, bidreg dette til å utvikle uthald og sjølvstende» (KD, 2019, s. 2).

Når lærerne ble utfordret til å finne eksempler på flere strategier som de trodde elevene kunne formulere med ord og si høyt, så trakk Matti trakk umiddelbart fram kongen. Han observerte at kongen spilte en annen rolle hos de mest avanserte spillerne, alt etter om motspillerens dronning var aktivert eller ikke.

> Så kongen vil være haien i spillet så lenge ikke dronningen er aktivert. Men samtidig så risikerer du å miste kongen, men du kan spille relativt «safe» for det, som hai. Men når motstanderen har satt dronninga i spill så er ikke kongen din trygg lenger, for dronningen kan springe etter kongen overalt og prøve å ta den.

Sluttord

Da lærerne tok ekstraarbeidet med å skaffe til veie brikker, brett og spilleregler, viste de i handling at spillet *Sáhkku* har verdi. Skolen jobber her på lag med bygda, ved at matematikkfaget anerkjenner en aktivitet som foregår på Varangermarkedet. Overordnet del av læreplanen vektlegger slikt arbeid: «Innsikt i vår historie og kultur er viktig for utvikling av elevenes identitet og skaper tilhørighet til samfunnet» (KD, 2017, s. 5). Dette møtet med *Sáhkku* i skolen konkluderer med at spillet egner seg godt til bruk i matematikkfaget. Trolig må lærerne ta initiativ til at elevene får trene på å formulere strategier med egne ord og til å diskutere hvilke strategier som funker og ikke funker. Kristian påpekte at en utfordring for lærerne er at elevene ser ikke uten videre at strategisk tenking fra *Sáhkku* kan overføres til andre områder. For oss utenforstående ser det ut til at spillet kan bidra til å bygge klassemiljø. Vi observerte i alle fall en svært trivelig atmosfære i rommet mens elevene spilte *Sáhkku*. Jeg konstaterer at innføringen av kjerneelementer åpner nye muligheter for lærere som vil utvikle oppgaver til muntlig eksamen. For eksempel kan eksamen starte med et parti *Sáhkku*.

Takk til …

Dette arbeidet inngår i forskningsprosjektet SUM ved UiT-Norges arktiske universitet. Pro-

sjektet støttes av Forskningsrådets program FINNUT og av Unjárgga gielda/Nesseby kommune. Takk til Magnhild Mathisen for å stå på i forhold til å kombinere *Sáhkku* og matematikk.

Noter

1 SUM-prosjektet, Sammenheng gjennom Utforskende Matematikkundervisning. Et FINNUT prosjekt ved UiT.

2 Barbara Jaworski er med i International Advisory Board for SUM-prosjektet. Hun var med til Nesseby i forbindelse med et opplegg for småskolen og seksåringer i barnehagen, men fikk også med seg litt *Sáhkku*.

Referanser

Berg-Nordlie, M. (2019a). *Sáhkku-regler fra Unjárga*. UiT: Reaidu. Hentet fra https://result.uit.no/reaidu/sahkku_unjarga/

Berg-Nordlie, M. (2019b). *Sáhkku*. UiT: Reaidu. Hentet fra https://result.uit.no/reaidu/sahkku/

Eira, B. R., Johnsen, A. I. & Aslaksen, E. A. (2018). *Slik spiller du det ursamiske spillet «Sáhkku»*. NRK Sápmi. Hentet fra https://www.nrk.no/sapmi/slik-spiller-du-det-ursamiske-spillet-_sahkku_-1.14196821

Gjone, G. (1998). Matematikk på frimerker. Sjakk og matematikk. *Tangenten – Tidsskrift for matematikkundervisning, 9*(3), 20–23.

Kofoed, R. (2019). *IKT – lager brikker til samisk brettspill.* Vardø videregående skole/Várggáid joatkkaskuvla. Hentet fra http://www.vardo.vgs.no/siste-nytt/ikt-lager-brikker-til-samisk-brettspill.604860.aspx

Kunnskapsdepartementet (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen.* Oslo: Utdanningsdirektoratet. Hentet fra https://www.udir.no/Udir/PrintPageAsPdfService.ashx?pdfId=150459

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn.* Oslo: Utdanningsdirektoratet. Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Polya, G. (1973). *How to solve it. A New Aspect of Mathematical Method*. NJ: Princeton: Princeton University Press. Første utgave i 1945.

Schoenfeld, A. H. (2000). Chapter 5. What is Mathematical Proficiency and How Can It Be Assessed? I A. H. Schoenfeld (red) *Assessing Mathematical Proficiency* (s. 59–74). CA: Berkely: MSRI. DOI: https:// doi.org/10.1017/CBO9780511755378.008

Sriraman, B. (2004). Discovering Steiner Triple Systems through Problem Solving. *The Mathematics Teacher, 97*(5), 320–326.

(fortsatt fra side 12)

Hattikudur, S., Prather, R. W., Asquith, P., Alibali , M. W., Knuth, E. J., & Nathan, M. (2012). Constructing graphical representations: Middle schoolers' intuitions and developing knowledge about slope and y-intercept. *School Science and Mathematics*, *112*(4), 230–241.

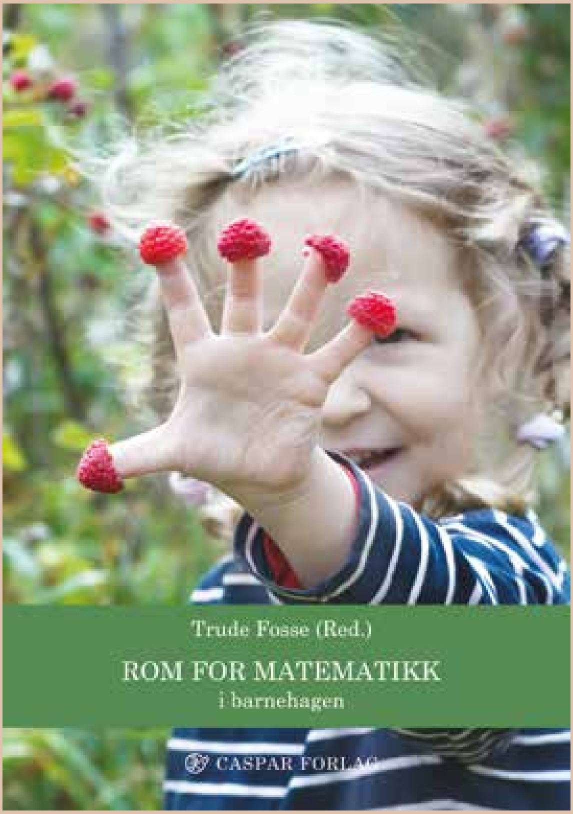
Nosrati, M., & Wæge, K. (2015). Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk. Hentet fra https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/resource/sentrale_kjennetegn.pdf

Solem, I. H., Alseth, B., Eriksen, E. & Smestad, B. (2017). *Tall og tanke 2. Matematikkundervisning på 5.–7. trinn.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Trude Fosse (Red.)

Rom for matematikk

Rom for matematikk – i barnehagen kommer her i ny og revidert utgave. Boka retter seg mot arbeid med matematikk i barnehagelærerutdanningen. Forfatterne viser ulike matematikkdidaktiske innfallsvinkler til fagområdet matematikk og barn. Fagstoffet blir presentert med nærhet til praksisfeltet samtidig som det blir satt inn i faglige og historiske sammenhenger. Boka utfordrer og bevisstgjør leserne til å se muligheter i barns matematiske verden.



Bidragsytere:

Magni Hope Lossius:
Bildenes betydning – for små barn

Gert Monstad Hana:
Varians og invarians

Leif Bjørn Skorpen:
Utforskande tenking og samtale

Line I. Rønning Føsker:
Grip rommet!

Vigdis Flottorp og Torgunn Wøien:
Barns klassifisering og pedagogens muligheter

Elena Bøhler:
Matematikk i barnehagen: en historie

ISBN 978-82-93598-06-0

184 sider · 430,–

Bestill på ordre@fagbokforlaget.no

Caspar Forlag AS · www.caspar.no

Fosse, Lange, Meaney

Å formulere og løse problemer i barnehagen

Barn i barnehagen er gjerne aktive og engasjerer seg i lek og daglige gjøremål, og ansatte i barnehagen ser og legger merke til det barnehagebarna gjør. Siden den nye rammeplanen (Kunnskapsdepartementet, 2017) legger sterkere vekt på problemløsing enn den forrige, ønsker vi å se nærmere på hva barnehagelærere[1] legger merke til av små barns løsning av problemer. Dette gir informasjon om hva slags kontekster, leker og aktiviteter som støtter barn i å formulere, ikke nødvendigvis med ord, og å løse problemer. Det forteller oss også om det kan være pedagogiske praksiser som barnehagelærere kan utvikle videre for å støtte barn i å delta i problemstilling og problemløsing. For å gjøre dette bruker vi en modell som vi utviklet ved å analysere barnehagelærere sine fortellinger, se figur 1.

Trude Fosse
Høgskulen på Vestlandet
trude.fosse@hvl.no

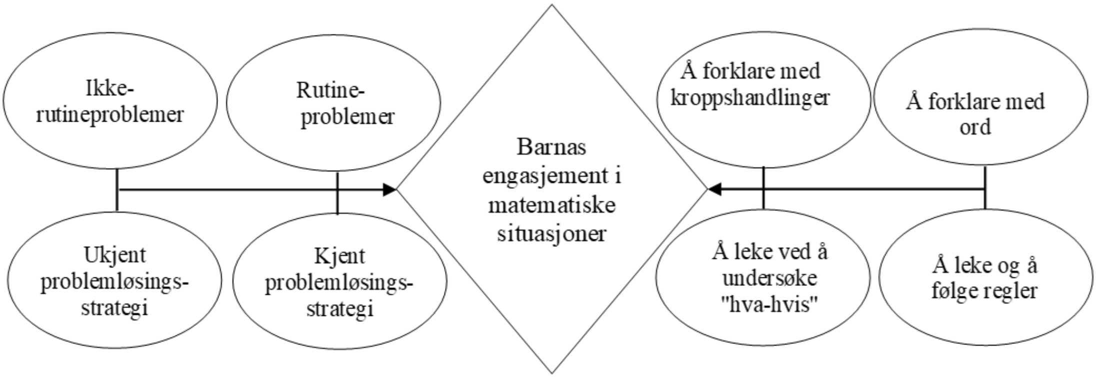
Troels Lange
Høgskulen på Vestlandet
troels.lange@hvl.no

Tamsin Jillian Meaney
Høgskulen på Vestlandet
tamsin.jillian.meaney@hvl.no

Modellen identifiserer forskjellige aspekter ved problemløsing som vi fant var nært knyttet til problemstilling.

Vi ba barnehagelærere i en barnehage ta rundt fem bilder av barn som de anså var engasjert i situasjoner som inneholdt matematisk aktivitet. Deretter ba vi dem snakke sammen i grupper om hva de så barna gjøre på noen av bildene. Vi fortalte dem ikke hva vi mente matematikk for barnehagebarn var, men ga dem muligheten til å bestemme dette selv. Barnehagelærernes fortellinger om bildene tyder på at det å løse problemer var nært knyttet til det å formulere og løfte problemer. Det så også ut til at problemstilling og problemløsing var knyttet til hvordan barnehagelærerne tolket barnas handlinger og kommunikasjon.

I historiene som barnehagelærerne fortalte om barnas engasjement i matematiske situasjoner, så vi en rekke spørsmål som kobler problemstilling og problemløsing til to av Bishops (1988) matematiske aktiviteter *å forklare* og *å leke*[2]. Kort sagt kan man se *forklare* som svar på spørsmål om *hvorfor* og *leke* som svar på spørsmål om *hvordan*. I vår analyse identifiserte vi fire sammenhengende komponenter som lærerne var oppmerksomme på i fortellingene. Disse komponentene er vist i figur 1; om problemer var rutine eller ikke-rutine problemer, om løsningsstrategier var kjente eller ukjente, om



Figur 1: Komponenter av problemstillinger og problemløsing fra barnehagelærernes historier (Fosse, Lange & Meaney, 2020).

barna forklarte seg med kroppshandlinger eller ord, og om de lekte ved å utforske forskjellige scenarier eller ved følge regler.

Figur 1 viser hvordan barns strategier for å løse problemer er knyttet til typen problemer de ønsker å løse. Dermed er problemstilling nært knyttet til problemløsing. Å formulere problemer er sjeldent diskutert i forbindelse med matematikk for små barn. Clements og Sarama (2007) bemerket at svært få studier om små barns læring av matematikk diskuterer problemstilling og problemløsing til tross for at «problemer som kommer fra barnet selv, ser ut til å være en effektiv måte for barna å uttrykke sin kreativitet og integrere læring» (s. 143).

Selv om forskere kanskje ikke har undersøkt når små barn formulerer problemer, hvilke de formulerer og hvordan, så har barnehagelærere kunnskap om dette, som det kan bygges videre på. Barnehagelæreres fortellinger om hva de legger merke til at barna gjør når de engasjerer seg i matematiske situasjoner forteller mye om hvor problemstilling og problemløsing finner sted og hvordan de skjer.

Å formulere og løse problemer

Når den matematiske aktiviteten *å leke* handler om å undersøke hva som skjer om noe i leke-situasjonen endres, kan man se leken som en form for hypotetisk tenkning, som nettopp handler om å forestille seg noe som ikke er tilfellet akkurat nå, men som kanskje kunne være det. «Bøtten er for tung til at jeg kan vende den på hodet, men *hva nå hvis* jeg tar ut noe av sanden? Kanskje det da går og vende på den». Å forestille seg noe som ikke er, dvs. å tenke hypotetisk, er koplet til å abstrahere, dvs. å velge ut trekk i situasjonen som er viktige for det man gjerne vil få til, og se bort fra andre som ikke betyr noe her. «Det er mengden av sand i bøtten som gjør det vanskelig å vende på den, ikke bøttens farge eller graveskjeens form». Hypotetisk tenkning og abstrakt tenking er dermed knyttet nært sammen, og disse former for tenkning inngår i å formulere problemer og i å løse dem. Alle er de deler av å leke som matematisk aktivitet (Helenius et al., 2016).

Tilsvarende kan problemløsing knyttes til å forklare ved at det krever abstrakt tenking for å bevege seg utover det konkrete i en situasjon. Å trekke ut, dvs. abstrahere, relevante aspekter av en problemsituasjon, mens man lar irrelevante ligge, er sentralt i utviklingen av barns tenkning. Man kan si at det å abstrahere er å skape en modell av en problemsituasjon der bare de deler av situasjonen som man tror er relevante, inngår. Carpenter, Ansell, Franke, Fennema og Weisbeck (1993) fremhever at, «modellering viser seg … å være en naturlig problemløsingsprosess for små barn» (s. 428). Modellering kan innebære forskjellige fysiske representasjoner direkte knyttet til situasjonen. Når barn undersøker en problemsituasjon ved å formulere og forsøke å løse spørsmål konstruerer de sin matematiske kunnskap og utvikler sin problemformulerende og problemløsende kompetanse.

Nedenfor gir vi tre eksempler på hva barnehagelærere la merke til, og hvordan dette henger sammen med modellen. Eksemplene viser hvordan de forskjellige aspektene ved problemstilling og problemløsing ble koblet sammen i barnehageansattes fortellinger. Vi tror at disse fortellingene vil kunne gjenkjennes av andre barnehagelærere.

Eksempel 1. Ikke rutineproblem – ukjent problemløsingsstrategi

I det første eksemplet har en lærer tatt et bilde av et regnestykke som barnet selv har skrevet, se figur 2. Barnehagelæreren forteller hvordan problemet var koblet til en butikklek som var satt opp i barnehagen. Seksåringen hadde lekt i butikken og kjøpt varer for 10 kroner stykket.

Figur 2: Et regnestykke som et barn skrev etter en butikklek.

Senere skrev han problemet om å legge sammen 3 mengder på 10 og løsningen på papiret. Samtidig med problemet på figur 2, formulerte og skrev barnet et annet, vanskeligere problem, som han kanskje ikke hadde vært i stand til å besvare uten lærerens hjelp.

T2[3] Dette var jo en sånn veldig grei … det var en seksåring da som satt stille og rolig for seg selv og så holdt han på og så sa han «T2? 10 + 10 + 10 + 10 + 10 hvor mye er det?» «Oi, oi, oi da må du telle 10 + 10 + 10 + 10» og så skulle han skrive det ned. Han er veldig opptatt av tall. Og så har vi jo hatt butikk og det var da han lærte hvor mye 30 var, så da måtte han ta 10 + 10 + 10 …
Så han brukte også fingrene samtidig som han brukte en tallrekke som han ser på når han skriver. Og så hadde vi jo butikken og der har vi priser og sånne ting. Så han har lekt en god del med tall, da. Øvd seg på å skrive og å sette opp regnestykker …
Så da satt han med konkreter og så satt han med fingrene sine. «Ok, jeg skal telle tre ganger over alle fingrene.» Og han kan telle til hundre, sant.

T6 Og den R-en der da, hva er det?

T2 Det er kroner.

T6 Ja.

T2 Det koster tretti kroner. For det var i forbindelse med butikkjøp. Så var det 10 + 10 + 10. Bra resonnering.

…

Så det var tatt ut ifra hverdag hvor de holder på med butikk, kjøp og salg pluss og minus. Så han var opptatt av å klare å legge sammen og trekke fra. Da gir vi ham litt hjelp med det underveis på det.

For dette barnet er dette ikke et rutinemessig problem (i det minste ikke ennå). Han satte opp en «hva-hvis»-situasjon, som han ikke visste svaret på ifølge barnehagelæreren. Dette tyder på at han var engasjert i hypotetisk tenking og så «lekte» med forskjellige kombinasjoner av ti.

Selv om barnet hadde en viss kunnskap om hvordan han skulle representere regnestykket med matematiske symboler, trengte han fortsatt å forstå hva symbolene representerte. I dette tilfellet var problemet det skriftlige regnestykket, men det dannet også en forklaring slik at barnehagelæreren, som så på papiret, forsto problemet. I samarbeid med barnehagelæreren kunne barnet øke sin forståelse av hva symbolene stod for ved å bruke en kjent løsningsstrategi som å telle på fingrene. Ved å gi svaret forklarte barnet, både for seg selv og for andre. Barnet brukte kroppen, her fingrene (3 ganger 10 fingre), for å forklare sin strategi.

Eksempel 2. Rutineproblem – kjent løsningsstrategi

I dette eksemplet diskuterer en barnehagelærer en problemløsing i en morgenrutine hun har etablert. Når barna kommer inn i barnehagen må de plassere et fotografi av seg selv ved et av tallene fra 1 til 9. Bildet i Figur 3 er av et barn som alltid plasserte sitt fotografi mot sifferet ni.

T8 Jeg tok bildet da det ene barnet kom om morgenen. Så har vi laget et hus med tall på hvor mange barn som kommer. Så tok vi bilde da barnet hengte opp sitt bilde. Da får det på en måte forståelse for eller være med i en gruppe, og det at vi har visuelle tall som hun på en måte kan se. Hun henger sitt tall på ni. Hun kunne henge det hvor hun ville, og så talte vi hele veien ned etterpå. Tall er jo på en måte i seg selv litt matte. Og at hun får plassere det der hun ønsker.
…
Det er en fast rutine vi har på Stillestein.

T5 Men da teller dere alle barna som har kommet sammen med det barnet, så da blir det jo en telleregle. …

I Så det barnet har telt til 9?

T8 Ja, og hun vil være på 9, for det er P, motsatt vei av P, og det er for Pappa Gris.
[latter]
Så derfor skal hun henge på 9 hver dag, uansett hvor mange barn det er. Men da teller vi helt ned til 9. …

Figur 3. Barnet plasserer et fotografi av seg selv ved symbolet for ni.

I Og det gjør de hver dag?

T8 Ja, når de kommer inn om morgenen. Så når neste barn kommer, så kan det se hvem som har kommet. …

I Og sifrene, går de nøyaktig til 9, eller fortsetter de?

T8 De går bare til 9. Det er bare 9 barn, så da stopper vi på 9.

I dette eksemplet var det et rutineproblem, hvor barnet skulle plassere bildet sitt. Hans løsningsstrategi var basert på at han likte Pappa Gris, ikke på noen matematisk forståelse, og den kan derfor betraktes som en kjent strategi. Barnehagelæreren brukte imidlertid aktiviteten til å gi barna en mulighet til å telle til ni og relatere dette til antall barn i gruppen. Ved å telle med de andre lekte barnet med reglene som læreren satt opp. Barnets forklaring på hvor mange barn i gruppen var den verbale tellingen til ni.

Eksempel 3. Å forklare med kroppshandlinger – å leke med å undersøke «hva–hvis»

Barnas handlinger ble ofte tolket av barnehagelærere som matematisk ved at lærerne kunne identifisere et problem som barn løste, og hvilken strategi som ble brukt til å løse det. I dette eksemplet diskuterte barnehagelærerne barnets beslutning om hvor skarp spissen av blyanten må være for at hun skal kunne fargelegge forskjellige deler av tegningen. Som det kan sees i barnehagelærernes diskusjon om bildet under, vurderte de at dette handlet om den matematiske aktiviteten *å måle* (tykkelse på en spiss) og i sammenheng med hvordan dette påvirket tegningsmulighetene. Videre er situasjonen interessant fordi barnet løser problemet og forklarer løsningen i konkret handling.

Figur 4

T5 Blyantspissing og fargelegging, og hun er fem år. Det å måtte spisse blyanten for å få spissen tynn og komme innenfor strekene. Hun er veldig flink å fargelegge, men av og til er det bare sånne fine små ting hun skal fargelegge, og da må hun ha en spiss blyant. Og da må hun beregne å spisse blyanten for ikke å komme utenfor de strekene, tenker jeg. Det er matematisk beregning på å fargelegge …

T5 På litt større flater behøver hun ikke spisse, for da bruker hun blyanten som den er. Da skal hun ha en stor flate å jobbe på. Men når det er små flater, må hun ha spiss blyant.

T7 Det er jo det å forstå bruken av et redskap. Det er jo teknologi i den, et hjelpemiddel. Hun har skjønt når hun trenger å bruke det. …

T5 Hun er jo opptatt i sin egen verden og sitter der. Hun tenker nok ikke på noe annet enn «Nå må jeg spisse, for nå skal jeg farge der.» Hun tenker vel ikke matematikk egentlig, men det er jo matematikk i det hun gjør. …

T5 Beregne hvordan hun skal få den spisset.

T8 Og hvor lenge hun må gjøre det før, sånn som du tenkte.

Fra et barnehagelærerperspektiv så det ut til å være et rutinemessig problem for barnet, siden hun møtte det hver gang hun ønsket å fargelegge på en tegning. Hvis tegningen hadde små områder som skulle farges, skulle man gjøre blyantspissen veldig skarp. Hvis hun ville fargelegge et stort område, var det bedre å ha en sløv blyantspiss. Å måle som matematisk aktivitet handler ofte om å løse hverdagslige oppgaver. I dette tilfellet var det å fargelegge ulike områder av tegningen og å skaffe rett tykkelse på blyantspissen.

Ifølge barnehagelæreren viste barnet at hun brukte en kjent strategi for å løse problemet ved å vise hvordan hun brukte blyantspisseren, slik at spissen fikk den rette skarpheten. I beskrivelsen av tegningen gjentok ikke læreren noe av det barnet sa, bare det hun tolket omkring det som skjedde. Barnehagelæreren vurderer trolig at barnets forklaring gjøres ved hjelp av kroppsspråk og hennes bruk av blyantspisseren. I forklaringen vektlegger barnehagelæreren at barnet gjorde bevisste grep for å sikre at hun løste problemet med å fargelegge de forskjellige delene av tegningen. Fordi barnet så ut til å ha en kjent strategi for hvordan man skulle sikre at det ville være det rette skarpheten, kan det sies at hun fulgte sine egne regler. Kanskje var det slik, da hun først forsto at tykkelsen på blyantsspissen påvirker hennes fargeevne, at hun engasjerte seg i «hva-hvis»-scenarier, men når løsningsstrategier ble kjente, så det ut til at hun brukte sine egne «regler» for å løse dette problemet.

Konklusjon

I fortellingene viser barnehagelærerne oppmerksomhet omkring forskjeller mellom problemsituasjoner. De identifiserer mange ulike situasjoner, som inneholder matematikk, og hvordan situasjonene er knyttet til å formulere, ikke nødvendigvis med ord, og å løse problemer. Her har vi fremhevet tre eksempler knyttet til barns arbeid med ulike problemstillinger og problemløsing. Dette er nyttig å ta med oss på grunn av den nylige økte vektleggingen av problemløsing i Norge gjennom innføringen av ny læreplan (Kunnskapsdepartementet, 2017).

Denne informasjonen gir grunnlag for å støtte og utvikle den lekbaserte tilnærmingen som skal ligge til grunn for barnehagenes arbeid med matematikk. Barns naturlige engasjement og undersøkende lek kan gi grunnlag for å formulere og løse matematiske problemer. Å støtte barns lek står sentralt for barnehagelærere og gjennom eksemplene i artikkelen ønsker vi å fremheve de matematiske situasjonene som oppstår i barns hverdag.

Analysen vår løfter fram fire komponenter (rutine/ikke-rutineproblem; kjent/ukjent problemløsingsstrategi; å forklare med kroppshandling / med ord; Å leke ved å undersøke «hva-hvis» / å følge regler) som barnehagelærerne ga oppmerksomhet til, og som er vist i figur 1. Disse komponentene viser hva barnehagelærerne er oppmerksomme på. Samtidig kan modellen også peke på pedagogiske praksiser som kan utvikles videre. Vi ser det ligger et potensiale i å gi mer oppmerksomhet til barns utvikling av verbalspråk, med henblikk på å formulere og løse problemer. Det er også utviklingsmuligheter for lærerne til å oppmuntre barn til å utforske forskjellige varianter av problemer eller løsningsstrategier som de blir opptatt av. Her ser vi behov for mer forskning på hvordan andre barnehagelærere ser på og arbeider med matematiske problemstillinger og problemløsing sammen med små barn. I lærerutdanningen er det viktig at vi lærer av praksisfeltet.

Takk til …

Denne artikkelen kommer fra forskning som er en del av BARNkunne, Senter for barnehageforskning ved Høgskulen på Vestlandet.

Noter

1 Alle ansatte i barnehagen betegnes i denne artikkel som barnehagelærere.

2 De øvrige fire av Bishops (1988) seks fundamentale matematiske aktiviteter og de tilhørende spørsmål er *å lokalisere* (hvor?), *å designe* (hva?), *å måle* (hvor mye?), og *å telle* (hvor mange?).

3 I transkripsjonene er T1, T2, osv. barnehagelærere og I er intervjueren.

Referanser

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation. A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht Kluwer.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E., & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving. A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(5), 438–441.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2007). Effects of a preschool mathematics curriculum: Summative research on the Building Blocks Project. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 136–163.

Fosse, T., Lange, T., & Meaney, T. (2020). Kindergarten teachers' stories about young children's problem posing and problem solving. I M. Carlsen, I. Erfjord & P. S. Hunderland (Red.), *Mathematics education in the early years. Results from the POEM4 conference, 2018* (s. 351–368). New York: Springer.

Helenius, O., Johansson, M. L., Lange, T., Meaney, T., Riesbeck, E. & Wernberg, A. (2016). What is play as a mathematical activity for preschool children? I T. Meaney, O. Helenius, M. L. Johansson, T. Lange & A. Wernberg (Red.), *Mathematics education in the early years. Results from the POEM2 Conference, 2014* (s. 139–156). New York: Springer.

Kunnskapsdepartementet (2017). *Rammeplan for barnehagen*. Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Berggren, Næsje

Kom, hør en regnefortelling!

En av de store endringene i fagfornyelsen er innføring av kjerneelementer i alle fag. Disse legger føringer for innholdet i læreplanene og for hvordan eleven skal utvikle sin kunnskap over tid. Kjerneelementer i matematikk er blant annet argumentasjon og kommunikasjon. For å kunne argumentere og kommunisere i matematikk er både den skriftlige og muntlige tekstskapingen helt sentral. I norsk er skriftlig tekstskaping og muntlig kommunikasjon to av kjerneelementene som definerer faget. Disse kjerneelementene fra matematikk og norsk åpner for nye innfallsvinkler og arbeidsmåter i arbeidet med fagene, både hver for seg og på tvers. Selv om matematikk er kjent for å ha et eget språk som for mange er ganske fjernt fra det språket vi omgir oss med i hverdagen, vil innholdet i kjerneelementene gjøre at norsk og matematikk kan få en ny møteplass som i større grad legger til rette for å utvikle de fem grunnleggende ferdighetene lesing, skriving, muntlighet, regning og digitale ferdigheter. I norskfaget står den muntlige og skriftlige fortellingen sterkt. Når vi spiller på denne tradisjonen, vil det narrative i fortellingen kunne skape et engasjement og motivasjon. Dette kan igjen, sammen med gode kunnskaper i muntlighet, lesing og skriving, skape en god inngangsport for å utvikle den matematiske forståelsen. Gjennom arbeid med regnefortellinger skaper man en arena hvor alle de fem grunnleggende ferdighetene utvikles og kan benyttes samtidig.

Stein Berggren
Høgskolen i Østfold
stein.a.berggren@hiof.no

Ragnhild Næsje
Høgskolen i Østfold
ragnhild.l.nasje@hiof.no

Hva sier forskningen at en regnefortelling er?

I litteraturen blir regnefortellinger tolket på mange ulike måter. Enge og Valenta (2013) fremstiller regnefortellinger som en representasjon som ofte avsluttes med et spørsmål. Dette spørsmålet prøver elevene å svare på ved å lete etter tall og signalord for å finne ut hvilken regneoperasjon som er mest hensiktsmessig å bruke. Månsson hevder at regnefortellinger er en hverdagskonkretisering av matematikken, og at «en regnefortelling til regnestykket (1 + 2) + 3 er at man har 1 ball sammen med 2 baller i en pose og legger 3 baller i posen» (Månsson, 2014, s. 13). Grevholm, Norén og Löfwall (2014) skriver at elevene kan bruke egne erfaringer til å lage en fortelling, men at de også kan ta utgangspunkt i matematiske uttrykk og lage en fortelling fra dagliglivet. Birkeland, Breiteig og Venheim (2018) tolker det slik at tekstoppgaver er «enkle oppgaver der det er situasjoner som elevene skal fortolke og løse ved å bruke matematikk», og videre at det å «arbeide med tekstoppgaver blir en del av det å bruke regnefortellinger» (s. 53). Fosse har løftet frem Bottens definisjon av regnefortellinger: «Regnefortellinger er kortere eller lengre historier som inneholder matematiske opplysninger. Ofte ligger det oppgaver mer eller mindre skjult i fortellingene» (Fosse, 2019, s. 14).

Vårt inntrykk er at regnefortellingen ofte blir laget med utgangspunkt i en ren matematikkoppgave. På denne måten blir det en tekst som inneholder en matematikkoppgave, ikke en historie som skaper nysgjerrighet og et genuint ønske om å finne svaret. Et svar elevene kunne ha kommet frem til på mange ulike måter, noe som i sin tur kunne ha bidratt til differensiering og mestringsfølelse hos flere elever. Vi velger å la den måten Bjørnestad, Kongelf og Myklebust (2013) beskriver sammenhengen mellom regnefortellingen og tekstoppgaven på i læreboken *Alfa for grunnskolelærerutdanningene*, vise behovet for en tydeliggjøring av begrepet regnefortellinger:

> Nå er det noen som vil hevde at regnefortellinger og tekstoppgaver er helt forskjellige ting. Det går an å si at i regnefortellingen er selve sammenhengen vektlagt, mens i tekstoppgaven er problemet det viktigste. Men noen autorativ språkbruk har vi ikke her. (s. 47)

Med dette i bakhodet har det blitt tydeligere gjennom vår forskning og undervisning at det er behov for en presisering av begrepet, noe vi håper kan bidra til å åpne opp for det potensialet for læring som ligger i regnefortellinger. Som grunnmuren i vårt rammeverk har vi laget vår egen definisjon av regnefortellinger der motivasjon og tverrfaglighet vektlegges:

«En regnefortelling bygger på en narrativ tankegang, hvor fortellingen er sentral for å skape nysgjerrighet, motivasjon og et ønske om å løse et problem. Løsningen av problemet avslutter fortellingen og krever bruk av matematisk kunnskap.»

Vi velger å løfte frem betydningen av fortellingen i definisjonen av regnefortellingen. Fortellingen som sjanger har en kjent struktur med en forteller, tiden er ofte et strukturerende element, og begivenhetene står i en årsakssammenheng som ofte bygges opp mot et klimaks hvor det avrundes (Larsen, 2018). Dette er en struktur som er kjent for de fleste elever i skolen. De har møtt fortellingen som sjanger fra de var små, enten i barnehagen, på skolen, på sengekanten hjemme eller i andre sammenhenger. «Narratologi har blitt en grunnleggende metode i analyse av fortellende tekster – ikke bare i litteraturfaget, men også i andre fagdisipliner» (Larsen, 2018, s. 47). Narratologi, eller læren om hvordan fortellingen er bygd opp, mener vi er en god inngangsport til å skape motivasjon både for lærere og elever for systematisk å kunne jobbe med de grunnleggende ferdighetene.

Vi tror at arbeid med regnefortellinger kan styrke elevenes leseferdigheter og bidra til å utvikle deres evne til avkoding av tekst slik at de blir bedre rustet til å finne ut hvilke regneoperasjoner eller matematiske strategier som trengs for å løse oppgavene. Fortellingen vil også kunne bidra til å vise at det er en sammenheng mellom matematikk og opplevelser som er kjent for elevene fra dagliglivet.

Når vi sier fortellingen i regnefortellingen indikerer det at det ikke er synonymer. Generelt sier man at en fortelling er bygd opp rundt en handlingsrekke i tid og rom. I tabell 1 har vi i satt opp og tolket regnefortellingens analogi til en fortelling. Merk at det i denne sammenheng er helt sentralt å løse problemet. Løsningen markerer slutten på fortellingen, og uten svaret blir regnefortellingen ufullstendig, og avslutningen står åpen.

I Tabell 2 har vi gitt et eksempel på en regnefortelling og vist hvordan regnefortellingen følger tolkningen av regnefortellinger som vi har gitt i Tabell 1.

	Generell fortelling	Regnefortelling
Eksposisjon – innledning	Personer, sted og konflikten presenteres	Problemet settes inn i en ramme – hvem, hva, hvor, når
Komplikasjonen – midtdelen	Konflikten trappes opp	Opplysninger som er sentrale for problemet presenteres sammen med selve problemet
Resolusjonen – slutten	Løsningen på konflikten	Problemet løses, og markerer avslutningen på fortellingen

Tabell 1: Regnefortelling tolket opp mot generell fortelling.

	Regnefortelling
Eksposisjon – innledning	Per og Pål går i 6. klasse på Trollstigen barneskole. En helt vanlig skoledag kan plutselig få en dramatisk vending når diskusjonene tar overhånd og ender i håndgemeng. En dag etter lillefri kom Pål løpende inn med blødende nese, mens Per kommer tuslende etter med en fortann i hånda. Pål ble sendt til helsesøster, men Per måtte til tannlegen for å få orden på tanna si. Da de kom tilbake på skolen dagen etter måtte læreren få klarhet i hva som faktisk hadde skjedd. De setter seg ned sammen alle tre og snakker sammen om hva som gikk galt i friminuttet dagen før.
Komplikasjon – midtdelen	Pål buser ut: «Vi krangla om hvem som får mest i ukelønn», Per nikker samtykkende og er helt enig med Per. «Vi blir aldri mer venner hvis vi ikke blir enige om dette» snufser Pål. Læreren rynker panne og sier «Dette må vi finne ut av, fortell meg nå hvor mye dere får i ukelønn hver». Pål forteller: «Jeg får 10 kr hver gang jeg går ut med søpla etter middag, 10 kr hver gang jeg setter i oppvaskmaskinen etter middag og 20 kr for å støvsuge to ganger i uka.» og Per sier med gråten i halsen: «Jeg får 200 kr i uka for å rydde rommet mitt og tømme oppvaskmaskinen.» Han pusser nesen, tørker tårene og fortsetter «Pål sier han kan tjene mer enn meg, han kan bare gå ut flere ganger med søpla og sette i oppvaskmaskinen flere ganger. Men jeg er ikke enige for det er ikke så mange dager i uka.» «Hmm, her har vi et problem vi må finne ut av» svarer læreren trøstende. «Kan du hjelpe meg med å komme til bunns i dette slik at Per og Pål kan bli venner igjen? Hvordan kan vi forklare Per og Pål hva som er riktig?»
Resolusjon – slutten	Løsningen kan for eksempel være: Per får fast 200 kr per uke. Pål: vil kunne variere avhengig av om han går ut med søpla, setter i oppvaskmaskinen og støvsuger. Maks han kan gå ut med søpla og sette i oppvaskmaskinen 7 dager i uka, da tjener han 140 kr. Hvis han i tillegg støvsuger 2 dager i uka får han i tillegg 20 kr. Totalt kan han tjene 160 kr i uka. Løsningen på problemet er at Per tjener mest. Problemet er løst, regnfortellingen avsluttes, og Per og Pål blir venner igjen.

Tabell 2: Eksempel på regnefortelling koplet til tolkningen i tabell 1.

Undersøkelse

Vi har gjennom tidligere forskning blitt kjent med lærerstudenters utfordringer med å lage gode regnefortellinger. For å få et inntrykk av hvordan lærere ser på regnefortellinger, gjennomførte vi et kort prosjekt hvor 19 lærere som tar videreutdanning i matematikk, deltok. Først ble de spurt om hva de legger i begrepet regnefortellinger, og de fikk i oppgave å lage noen. Det viste seg at alle laget det som kan klassifiseres som tradisjonelle tekstoppgaver, hvor det ikke ble lagt vekt på fortellingen, at den må inneholde en tydelig komposisjon hvor svaret er løsningen på problemet, tilsvarende løsningen på konflikten i en fortelling.

Deretter hadde vi en kort undervisningsøkt med dem, hvor vi presenterte vår forståelse og definisjon av regnefortellinger, hvor vi legger vekt på fortellingen.

Etter undervisningsøkten ble de utfordret til å si sin mening om vår tolkning av regnefortellinger, de alle fleste fant den interessant og mente at regnefortellinger tolket på denne måten kunne bidra til større tverrfaglighet. Mange mente også at vår fremstilling bidro til et tydeligere skille mellom regnefortellinger og tekstoppgaver. De gav også uttrykk for at denne utvidede tolkningen ville gjøre det mer utfordrende å lage gode regnefortellinger, og at de derfor ønsket ferdige regnefortellinger som de kunne bruke i undervisningen.

Rammeverk for regnefortellinger

Det kan være en utfordring å lage gode regnefortellinger som fanger elevenes interesse og motiverer dem til å ønske å løse problemet som presenteres. Derfor har vi laget et rammeverk som viser hvilken kunnskap man trenger i arbeidet med å lage gode regnefortellinger. Inspirasjonen til å lage rammeverket fant vi i TPCK-modellen til Mishra og Koehler (2006). Rammeverket er illustrert og forklart i Tabell 3.

Som det fremgår av Tabell 3 og Figur 1, trenger man kunnskap innenfor mange ulike områder, områder som tradisjonelt ikke har samarbeidet. Det er kanskje urealistisk å tenke seg at en og samme lærer innehar eller tilegner seg kunnskap på alle områdene. Det vil nok være mer realistisk å tenke samarbeid på en ny måte, hvor tverrfaglighet er det som binder gruppen sammen. Hver og en på gruppen er spesialist på sitt fagområde, men hvor man har som mål at

Spesialisert matematikkunnskap – vet at problemet kan angripes og løses på ulike måter, og at løsningen ligger innenfor det man kan forvente av elevene på trinnet.

Kunnskap om problemløsing – velger noe som er et problem for elevene på trinnet, og vet at de forstår problemet.

Kunnskap om regnefortellinger – kjenner oppbygningen til en fortelling og hvordan narrativer kan brukes som virkemiddel.

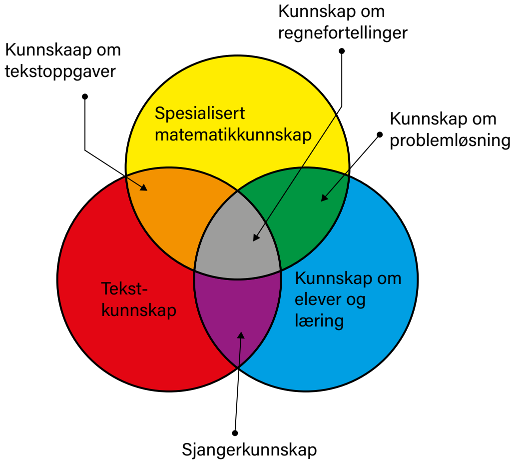
Sjangerkunnskap – kjenner til ulike sjangre og vet hva som kjennetegner regnefortellinger.

Tekstkunnskap – kan skape ulike tekster til ulike formål og målgrupper, bruker språket på en god måte.

Kunnskap om tekstoppgaver – kan lage og kjenne igjen en tekstoppgave, vet hva som skiller den fra en regnefortelling.

Kunnskap om elever og læring – kan sette problemstillingen inn i sammenhenger som gjør den forståelig og interessant for elevene.

Tabell 3



Figur 1

man i fellesskap kan skape gode og motiverende regnefortellinger.

Referanser

Birkeland, P. A., Breiteig, T. & Venheim, R. (2018). *Matematikk for lærere 1*. Oslo: Universitetsforlaget.

Bjørnestad, Ø., Kongelf, T. R. & Myklebust, T. (2013). *Alfa. Matematikk for grunnskolelærerutdanningene 1–7 og 5–10* (2. utgave). Bergen: Fagbokforlaget.

Enge, O & Valenta, A. (2013). Varierte representasjoner. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 24*(1), 8–12.

Fosse, T. (2019). Regnefortellinger. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 30*(3), 14–18.

Grevholm, B, Norén, E. & Löfwall, S. (2013). Kommunikasjon og læring i matematikk. I B. Grevholm (Red.), *Matematikkundervisning 1–7* (s. 239–260). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Larsen, A. S. (2018). Fortellerteori. I A. S. Larsen, B. Wicklund & I. Sørensen (Red.), *Norsk 5–10. Litteraturboka* (s. 47–70). Oslo: Universitetsforlaget.

Mishra, P. & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017–1054.

Månsson, A. (2014). *Grunnbok i matematikk for grunnskolelærerutdanningen*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Utdanningsdirektoratet (2020a). *Kjerneelementer i norsk*. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/nor01-06/om-faget/kjerneelementer

Utdanningsdirektoratet (2020b). *Kjerneelementer i matematikkfaget*. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer

Utdanningsdirektoratet (2017). *Kjerneelementer – fag i grunnskolen og gjennomgående fag i vgo*. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/kjerneelementer

Eidsvig

Å forstå formel for volum

Innføringen av LK20 vil gi oss lærere større muligheter for å gå mer i dybden i matematikk. Målet med artikkelen er å vise en metode som kan gi elevene forståelse for hvorfor vi dividerer med 3 i volumformelen for en pyramide med kvadratisk grunnflate. Utledning av formelen for volum for en pyramide gjøres vanligvis ved bruk av integrasjon, men jeg vil her vise hvordan man kan komme frem til samme resultat ved bruk av figurtall, programmering og enkel volumregning. Siden matematikk har fått ansvar for programmeringen, kan det gi elevene flere muligheter til å utforske selv. Utprøving av modell ble gjort i en 9. klasse i en klokketime.

Bakgrunn

Det brukes mange forskjellige strategier for å hjelpe elever å utvikle forståelse for formlene for areal, volum, omkrets og overflate i opplæringen. For å visualisere arealberegning av et rektangel kan det brukes rutenett. Videre kan det vises at et rektangel kan deles i to like trekanter. For å bestemme volumet av et rett prisme kan man bruke kuber. Når for eksempel sidelengder for en kube endres, kan volumendringen undersøkes ved å brette esker (Karlsen, 2017, s. 87). Det som derimot ikke forklares like bra i opplæringen, er volumet av en pyramide og en kjegle. For å utlede formelen i sin helhet kreves det som nevnt bruk av integrasjon. Kombinerer vi derimot programmering i Python og enkel volumregning, kan vi komme frem til volumformelen uten bruk av integrasjon.

Siden elevene skal få tid til mer dybdelæring, og elever allerede fra 6. trinn skal «*bruke variablar, lykkjer, vilkår og funksjonar i programmering til å utforske geometriske figurar og mønster*», ligger mye til rette for at vi kan la elevene få utforske mer. For 9. klasse står det blant annet «*utforske og argumentere for formler for overflateareal og volum av tredimensjonale figurar*», samt bruke programmering til «å utforske matematiske *eigenskapar og samanhengar*».

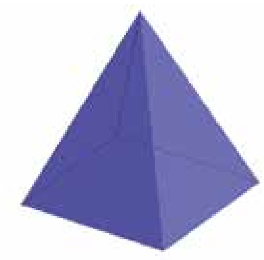
Ser en til forskningen så viser den at elever med dyp forståelse av kjerneelementene i faget er flinkere til å overføre, anvende og reflektere over kunnskap i ukjente situasjoner, hvor også dybdelæring er viktig for elevenes fremtidige kompetanse (Sawyer, 2014; NRC, 2000; Pellegrino & Hilton, 2013). I tillegg gjør den raske teknologiske utviklingen det stadig vanskeligere å vite hva som er viktig av kompetanse og kunnskap i fremtiden. Det er derfor viktig at elevene lærer å kombinere teknologi og kreativitet. I LK20 kommer dette klart frem ved at elever på slutten av barnetrinnet skal få mer forståelse gjennom programmering og eksperimentering,

Pål-Erik Eidsvig
Universitetet i Sørøst-Norge
pei@usn.no

hvor algoritmisk tenking står sentralt. Det at elevene skal kunne behandle data, modellere og feilsøke i vitenskapelige sammenhenger er like viktig som å kunne lese, skrive og regne (Wing, 2017). Dersom vi klarer å vise elevene at programmering både er anvendbart og kan være tidsbesparende i ulike sammenhenger, vil programmering kunne bli et nyttig element i matematikktimene, både for matematikklæring og for anvendelse i samfunnet.

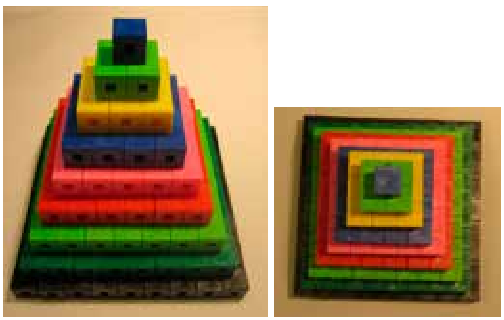
Oppbygging av en spesifikk pyramidemodell

For å komme frem til formelen for volumet til en pyramide med kvadratisk bunn, se figur 1 a, gjør jeg først noen forenklinger. Forenklingene i første omgang består i at vår modell deles inn i regulære kuber, med sidelengder 1 hvor kubene bygger opp kvadratiske flater, se figur 1 b og figur 1 c. I første omgang velger jeg en pyramide med lengde, bredde og høyde lik 9.

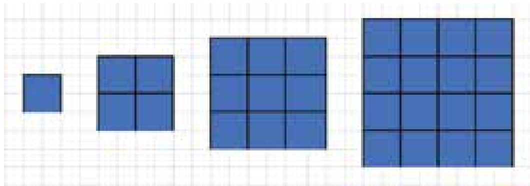


Figur 1 a

For å finne volumet av vår modell multipliserer jeg totalt antall kuber med volumet til hver kube. Antall kuber i etasjene øker kvadratisk når jeg går fra toppen og nedover i pyramiden, se figur 1 c og figur 1 d. I hver etasje legger jeg til en kube i lengden og en kube i bredden. Figur 1d viser at vi har 1^2 kube i øverste etasje, 2^2 kuber i nest øverste etasje, 3^2 kuber i tredje øverste etasje, helt til vi i nederste etasje har 9^2 kuber. Ser vi nærmere på figurtallene vi har fått, så kjenner vi dem igjen som kvadrattallene, hvor kvadrattall nummer n er gitt ved den eksplisitte formelen $K_n = n^2$.



Figur 1 b (til venstre) og c (til høyre)



Figur 1 d

Totalt antall kuber blir for vår modell:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 8^2 + 9^2 = 285.$$

Siden totalt antall kuber er lik 285 og volumet til hver kube er gitt ved $V_{\text{kube}} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, blir volumet av vår pyramidemodell antall kuber multiplisert med volumet til kuben. Vi får $V_{\text{total}} = 285 \cdot 1 = 285$.

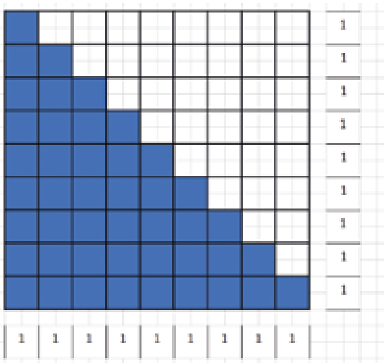
Dersom jeg bruker formelen for volumet av en pyramide gitt ved

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

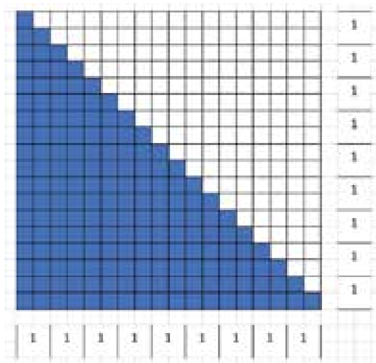
får jeg med våre mål $V = \dfrac{9 \cdot 9 \cdot 9}{3} = 243$.

Vi observerer at utregningene gir oss forskjellig svar. Volumet av vår kubemodell har gitt et for stort volum i forhold til bruk av formelen. For å bedre vår tilnærming lar jeg størrelsen på kubene bli mindre. Alle sidelengder på hver kube blir nå halvert. Vi får nå 18 kuber som danner sidene i grunnflaten, og 18 kuber i høyden. Jeg observerer blant annet at hvert trinn ikke blir så høyt og dypt, se figur 2 b.

Volumet til hver kube blir nå:



Figur 2 a



Figur 2 b

$$V_{\text{kube}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Totalt antall kuber kan nå uttrykkes som 12 + 2^2 + 3^2 + … + 18^2, som gir summen 2109. For å illustrere summen av kvadrattallene er det for eksempel i Nelsen (1997, s. 77) satt sammen kubiske enheter for å utlede formelen for summen av kvadrattallene. Andre måter å finne denne summen på kan for eksempel være ved hjelp av regneark eller Python. Det totale volumet til pyramiden blir da

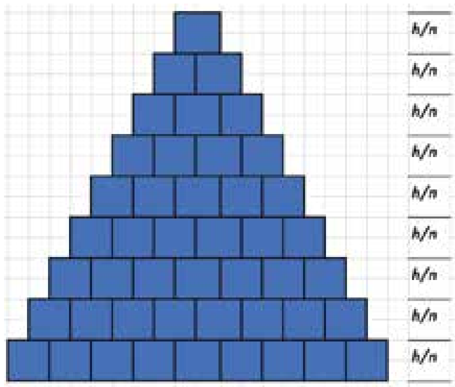
$$V_{\text{total}} = 2109 \cdot \frac{1}{8} \approx 263{,}6\,.$$

Ved å ha delt inn pyramiden i 18 deler er jeg kommet enda nærmere det faktiske volumet på 243. Jeg ser da at ved å dele vår pyramide inn i flere og flere kuber så vil vi nærme oss det reelle volumet.

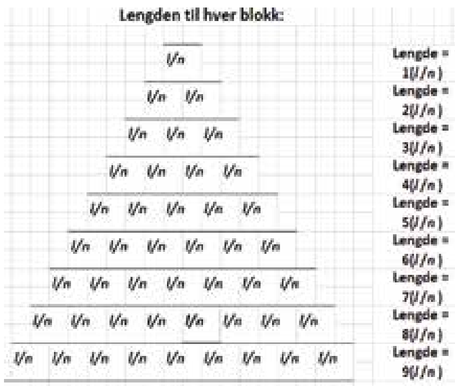
Oppbygging av en generell pyramidemodell med kvadratisk grunnflate

Jeg generaliserer det jeg har gjort til nå. Lengdene til pyramidens grunnflate setter jeg lik l, og høyden setter jeg lik h. Lengden til hver prismeblokk blir da lengden l i grunnflaten til pyramiden dividert med antall prismeblokker n. Dette skriver jeg som l/n, se figur 3b. Høyden til hver prismeblokk skriver jeg som total høyde dividert med antall prismeblokker, altså h/n, se figur 3 a.

Volumet av en prismeblokk kan nå skrives som: $V_p = \frac{l}{n} \cdot \frac{l}{n} \cdot \frac{h}{n}$.



Figur 3 a



Figur 3 b

Vi vet fra tidligere at øverste etasje består av 1 prismeblokk, nest øverste etasje består av 2^2 prismeblokker, mens nederste etasje nå består av n^2 prismeblokker.

Antall prismeblokker i pyramiden kan nå skrives som $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

Totalt volum blir dermed

$$V = \frac{l}{n} \cdot \frac{l}{n} \cdot \frac{h}{n} \cdot \left(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right).$$

Dette gir

$$V = l^2 \cdot h \cdot \frac{\left(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right)}{n^3}. \qquad (1)$$

Vi har nå funnet en generell formel for volumet av en pyramide satt sammen av n antall prismeblokker i lengden og bredden. Vår pyramidemodell består av «uendelig mange» slike prismeblokker. For å finne ut hva brøken går mot når n går mot uendelig, lager vi følgende program i Python.

```
kvadratsum=0
i=1
n=int(input(' n= '))
while i <= n:
    kvadratsum=kvadratsum + i*i
    i= i + 1
svar=kvadratsum/n**3
print(svar)
```

Jeg starter med å deklarere en variabel `kvadratsum`, som senere blir summen til kvadratene av de naturlige tallene opp til n. Deretter lager jeg en input slik at man kan velge n i formelen på nytt hver gang programmet kjøres. Jeg lager en løkke som kjører igjennom alle heltall fra 1, og opp til det valgte tallet. Når i er blitt større enn n, bryter programmet ut av løkka (man må skrive n+1, siden løkka går til og ikke til og med valgt grense). Jeg dividerer dette på n^3, som det siste uttrykket viser.

Jeg legger inn forskjellige verdier for n, og får resultatene i tabell 1:

n	$\frac{\left(1+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)}{n^3}$
1	1,0
5	0,44
100	0,33835
10000	0,333383335
10000000	0,333333383333335

Tabell 1

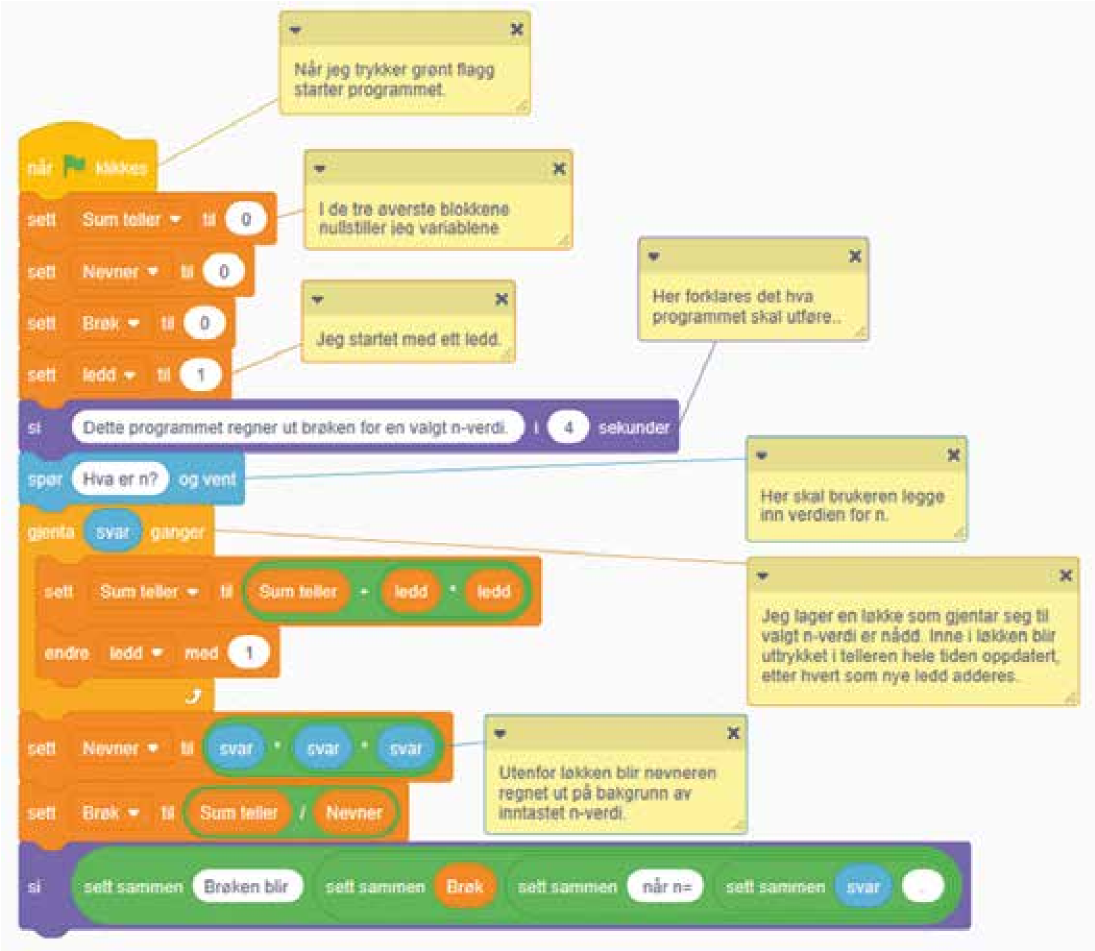
Vi ser av tabell 1 at når n blir relativt stor, så nærmer uttrykket $\frac{\left(1+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)}{n^3}$ seg $\frac{1}{3}$.

Erstatter jeg brøken i (1) med $\frac{1}{3}$, gir det volumformelen for pyramiden

$$V = l^2 \cdot h \cdot \frac{1}{3}.$$

Erfaringer fra en klokketime i en 9. klasse med 18 elever

Modellen på figur 1 b ble introdusert, og sammen bygde vi opp den samme modellen. Underveis i arbeidet oppdaget relativt mange elever at kvadrattallene representerte antall kuber i etasjene nedover i pyramiden. Elevene fikk i oppgave å summere totalt antall kuber som vår forenklede modell bestod av, og deretter multiplisere antallet med volumet av hver kube. Når det var gjort, fikk klassen spørsmålet: «Hva om vi halverer alle sidelengder?» Elevene ble deretter introdusert for kuber med halverte sidelengder, se figur 2 b. Flere rakte opp hånden og nevnte at det ble dobbelt så mange kuber som dannet sidene i kvadratet. Jeg viste summen av disse kvadrattallene og regnet så ut volumet. Klassen ble så spurt: «Hvordan skal vi få svaret enda nærmere svaret som volumformelen gir oss?» Det ble stille. Etter hvert hintet jeg om at kubene kunne bli enda mindre. Den generelle oppbyggingen ble vist, og sakte, men sikkert, ble det generelle matematiske uttrykket bygd opp. Elevene tok frem sin iPad, mens Python-pro-



Figur 4

grammet ble forklart linje for linje. Når elevene etter hvert fikk programmet til å kjøre, fylte de ut tabell 1 individuelt.

Tanker i etterkant

I undersøkelsen beskrevet i denne artikkelen var det begrensede tidsrammer for opplegget. Neste gang vil opplegget søkes gjennomført med betydelig bedre tid, og jeg vil gjøre noen endringer i det organisatoriske. Elevene skal gruppevis bygge pyramider med samme mål, men med to forskjellige kubestørrelser.

Etter hvert skal elevene få utforske uttrykket i likning 1 uten bruk av Python og beregne uttrykket for n-verdier opp til 10. Dette arbeidet vil motivere dem til å finne en mer effektiv metode å gjøre beregningene på når n øker. Underveis i arbeidet vil de få hjelpespørsmål fra meg.

Elevene vil deretter bli introdusert for simuleringer ved hjelp av «while»-formuleringer i kombinasjon med pseudokode, før en kjører programmet i sin helhet.

I klassen var det relativt få som hadde erfaring med programmering, men kun etter en halv time med tekstbasert programmering skjønte en del hvordan programmet var bygd opp. Skal jeg trekke frem noen erfaringer, så er det at mange elever syntes dette var spennende, og at de lærte noe nytt. I tillegg spiller tiden en viktig rolle for hva elevene mestrer etter en klokketime. Hadde elevene fått enda bedre tid til å utforske programmet og oppbyggingen, ville enda flere kunne følt mestring. Jeg har i den forbindelse også laget et program i Scratch som utfører det samme som programmet i Python, men med litt mer tekst rundt spørsmål og svar.

Python og Scratch

Dersom vi ser på vår kode i Python, ser vi at den er tekstbasert. Koden kan skrives inn i ethvert program som kan håndtere tekst, men programmet må kjøres i egne programmer som er tilpasset programmering. Når en jobber med tekstbaserte programmeringsspråk som Python, krever det mer nøyaktighet av brukeren enn for eksempel bruken av Scratch. Dersom tegnsettingen i løkken ikke er riktig, vil ikke programmet kunne kjøres, mens i Scratch er blokken for en løkke ferdig programmert. Det kan derfor være mer krevende når programmene skal kjøres, å tolke eventuelle feilmeldinger i tekstbaserte språk. En må bli vant til å lese feilmeldinger og ikke minst vant til å få dem. Det kan være en fordel å lære seg Python for dem som vil bli flinkere til å programmere, fordi det vil gi større fleksibilitet med hensyn til hva en kan programmere, samt at en vil kunne dra nytte av erfaringen inn i andre tekstbaserte programmeringsspråk.

Som vi ser på figur 4, er Scratch-programmet annerledes oppbygd. Programmet består av blokker som er ferdig programmert. De ulike blokkene er inndelt i ulike kategorier, for eksempel bevegelse, sansing og styring, noe som kan være med på å lette programmeringen. En liten ulempe kan likevel være at siden blokkene krever litt plass, kan programmet bli litt uoversiktlig dersom en skal lage større prosjekter. Dersom en har liten eller ingen erfaring med programmering, kan det være en fordel å starte opp med Scratch. Siden programmet har et enklere brukergrensesnitt enn Python, vil programmet lettere kunne tas i bruk på slutten av barnetrinnet enn Python. På ungdomstrinnet kan med fordel Python introduseres og bli det programmet som gradvis erstatter blokkprogrammeringen.

Etter innføringen av LK20 må vi matematikklærere sette av mer tid til å bruke programmering som verktøy for ulike temaer i matematikk. Dette kan for eksempel være programmer som løser enkle geometrioppgaver. Dersom vi i tillegg kan veksle mellom tekstbasert og blokkbasert programmering, vil trolig flere elever kunne tilnærme seg problemet på en systematisk måte. Dette kan gi oss lærere muligheter for å differensiere undervisningen enda mer. Selv enkle oppgaver kan være utforskende med det resultat at elevene får muligheter til å utvide sine tankeprosesser.

Referanser

Karlsen, L (2017). *Tenk det* (1.utg.). Oslo: Cappelen Damm akademisk.

National Research Council (NRC) (2000). *How people learn: Brain, mind, experience, and school: Expanded Edition*. Washington, DC: The National Academies Press.

Nelsen, R. B. (1997). Proofs without words. Exercises in visual thinking. (v.1).

Pellegrino, J. W., & Hilton, M. L. (2013). *Education for life and work: Developing transferable knowledge and skills in the 21st century*. Washington D.C.: National Academies Press.

Sawyer, R. K. (2014). Introduction. The new science of learning. I R. K. Sawyer (Red.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (s. 1–18). New York: Cambridge University Press.

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Hentet fra https://udir.no/lk20/mat01-05

Wing, J. M. (2017). Computational thinking's influence on research and education for all. *Italian Journal of Educational Technology, 25*(2), 7–14.

Smestad

Fagfornyelsens gleder

Innføring av en ny læreplan er en blandet fornøyelse – litt sorg over opplegg som har fungert godt som må legges vekk, litt irritasjon over ting som Utdanningsdirektoratet påstår er nytt, men som vi har drevet med i alle år, litt nervøsitet overfor nye temaer som vi er litt usikre på, og litt glede over spennende nye muligheter. Jeg hadde lyst til å gripe tak i gleden, og gjorde en uformell henvendelse til en del lærere om hva de gleder seg spesielt til nå som de skal ta i bruk de nye læreplanene i matematikk.

De fleste svarte naturligvis ikke – spørsmålet kom i en velfortjent sommerferie inneklemt mellom en koronapreget vår og en høst som vil stå både i Fagfornyelsens og koronaens tegn. Svarene jeg fikk, gir likevel noen inntrykk av hva en del lærere gleder seg til, og jeg har valgt ut noen sitater for å illustrere.

Argumentasjon og begrunnelse

«Jeg gleder meg til å ta fatt på kjerneelementene i matematikk, og spesielt prøve å jobbe godt med resonnering, argumentasjon og bevis», skriver Veronica Dolmen Karlsen. Hun har nettopp tatt et kurs hvor hun har satt seg inn i forskningen knyttet til argumentasjon og begrunnelse. Hun påpeker blant annet: «Det er mange tilnærminger man kan bruke som kan stimulere elevene til argumentasjon. Det er vanskelig å argumentere dersom elevene ikke har minst to konkurrerende ideer som kan forklare resultater, og læreren bør derfor ikke bare introdusere én idé eller ett svar, men etterstrebe å få frem ulike elevsvar slik at elevene selv opplever et ønske om å finne gode argumenter og bevis for at sin metode er riktig.» Nå er tida for å sette teoriene ut i praksis.

Bjørn Smestad
OsloMet – storbyuniversitetet / Høgskulen i Volda
bjorsme@oslomet.no

Problemløsning

Et annet kjerneelement er Utforsking og problemløsing, og det gir håp om å jobbe annerledes med matematikkoppgaver. Øyvind Sandbakk jobber i videregående skole, og skriver: «Jeg har i mange år forsøkt å få elevene med på den firetrinnsmodellen for oppgavejobbing som kort formulert blir forstå – planlegge – løse – evaluere. Min erfaring er at altfor mange elever bare gyver løs på oppgaver, ser på eksempel og kopierer metode, sjekker om de har samme svar som fasit, og så går videre. Så jeg ser fram til å få innprentet dem en mer strukturert tilnærming til problemløsning i matematikk. Få dem til å forstå at de må forstå oppgavene før de løser. Og at de må forstå hvorfor metoden virket, før de er fornøyd. Så jeg gleder meg til å få mer tid til å jobbe med dybdelæring.»

Flerfaglighet

Modellering og anvendelser er et av de andre kjerneelementene. I tillegg skal matematikkfaget bidra i de tverrfaglige temaene folkehelse og livsmestring og demokrati og medborgerskap. Dette gir mange muligheter for å vise matematikkens nytte på ulike områder.

«Jeg skal fra 6. til 7. trinn og gleder meg veldig til å i enda større grad bruke matematikk i flerfaglige og tverrfaglige temaer, og ikke minst å kunne ta elevenes interesser og hverdag mer inn i matematikkfaget. Det å jobbe utforskende, kreativt og i dybden blir også sentralt i dette arbeidet», skriver Anina Jeanette Fjelldal. Hun legger til: «Jeg er sikkert ikke alene om å kunne bli enda bedre på å kommunisere til elevene hvorfor matematikk er viktig i praksis, og vise tydelige eksempler på når det er viktig i praksis.»

Programmering

Programmering er nok det mest omtalte nye elementet i matematikkfaget, og det nevnes av mange. Mange av svarene var korte («Programmering 😊»), men Lars Rikard Stavrum svarte noe mer utdypende: «Jeg ser frem til å komme i gang med programmering, fordi jeg anser det for å være både en læringsaktivitet, verktøy og arbeidsmetode som kan bidra til ytterligere faglig utvikling hos elever. Matematikkfaget (i grunnskolen for min del) er en av flere arenaer for programmering – naturlig nok, siden algoritmer er kjent og kjær kost i matematikkfaget, enten man er bevisst på det eller ikke. Jeg ser frem til å arbeide med problemstillinger der programmering kan være hele eller deler av løsningen, fordi det krever en slags pinlig nøyaktighet i hele prosessen. På samme måte som «å skrive» omfatter mer enn det å produsere skrifttegn, så omfatter programmering mer enn syntaks, og det å skulle fortelle en datamaskin hva den skal gjøre, uten at datamaskinen kan tolke, forstå kontekst eller møte deg «på halvveien», tror jeg kan være veldig berikende i undervisningen.»

... og fine kombinasjoner ...

En ny læreplan gir muligheter for å plukke de elementene man tenner spesielt på, fordype seg ekstra i disse og knytte dem sammen til en ny praksis. Derfor er det ikke så overraskende at en del nevner flere temaer samtidig.

Thor-Erik Rødland peker på «Programmering, oppdagelse og utforskning» og Tom Jarle Christiansen skriver: «Jeg gleder meg til å jobbe mer utforskende med problemløsing! … og programmering så klart.» Et nytt tema som programmering gir kanskje enda større muligheter til å jobbe på nye måter enn temaer der tradisjonene er sterke?

Jane Merethe Braute skriver: «Å jobbe utforskende med problemløsning, færre temaer og ha mulighet til å gå i dybden. Håper samtidig på mer tverrfaglighet og at timeplaner endres så vi ikke bare har enkelttimer.» Den nye læreplanen gir nye muligheter, og forventninger til at organiseringen på skolene endres noe for å tilpasses disse mulighetene.

Inger-Lise Risøy skriver: «Jeg gleder meg til å videreføre undersøkende og utforskende undervisning, ha aksept i planene for å drive med programmering sett i lys av problemløsning, og prøve ut det å følge et tema over lengre tid – dybdelæring. Det blir spennende å prøve ut det å ha kompetansemål etter hvert trinn.»

Hun trekker frem formålet for Kunnskapsløftet. («Formålet med å fornye Kunnskapsløftet er å gjøre barn og unge i stand til å møte og finne løsninger på dagens og fremtidens utfordringer. Elever og lærlinger skal utvikle relevant kompetanse og gode verdier og holdninger som har betydning for den enkelte, i et samfunn preget av større kompleksitet, stort mangfold og rask endring.») «Det å hele tiden ha fokus på å gjøre elevene i stand til å finne løsninger på dagens og fremtidens utfordringer – da må vi som lærere stille oss undrende sammen med elevene og finne løsninger sammen.»

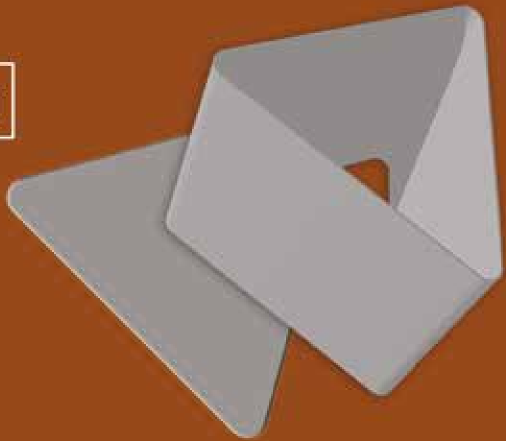
En oppfordring

Matematikklærere har mange ulike forståelser av begrepet «dybdelæring», ifølge et nylig gjennomført masterprosjekt (Fjelltvedt, 2019). Også når det gjelder Fagfornyelsen som helhet, vil den enkelte lærer ha sine egne fokusområder og inspirasjonskilder, og det tyder også denne uformelle rundspørringen på.

Det er altså mye å glede seg til: argumentasjon og begrunnelse, problemløsning, flerfaglighet, programmering og mye annet. Men hvordan blir fagfornyelseshverdagen i praksis? Jeg er spent på å få lese korte og lange glimt fra hva som skjer i klasserommene – med disse og mange andre temaer. Tangenten ønsker seg at enda flere lærere kaster seg utpå med beskrivelser av hva som skjer i deres klasserom – etter hvert som det vi gleder oss til, blir til virkelighet.

Referanser

Fjelltvedt, W. E. (2019). *Grunnskolelæreres forståelse av begrepet dybdelæring i matematikk: En fenomenografisk undersøkelse av hva grunnskolelærere legger i begrepet dybdelæring* (Masteroppgave). OsloMet – storbyuniversitetet. https://hdl.handle.net/10642/8720



Naylor

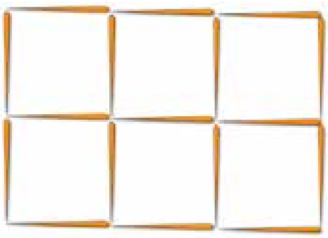
Tannpirkermatematikk

Tannpirkere passer veldig godt for mange fasinerende oppgaver, spill og puslespill. Vi skal se på mange forskjellige måter du kan bruke tannpirkere på kreative måter på for å leke med store ideer innenfor matematikk og matematikkdidaktikk. Svarene og diskusjoner om oppgavene fins nedenfor.

Oppvarmingsoppgaver

Det fins mange slike oppgaver med tannpirkere:

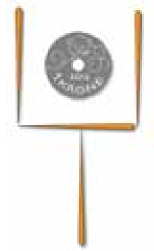
(1) Ta bort 5 tannpirkere slik at det blir nøyaktig 3 kvadrater.



Dette er kanskje ikke den vanskeligste. Her er tre tannpirkeroppgaver som er mer utfordrende:

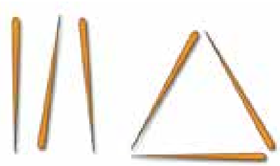
Mike Naylor
Matematikkbølgen
mike@matematikkbolgen.com

(2) Mynten: Flytt 2 tannpirkere slik at mynten ikke lenger er i glasset. (Glasset må være lik i form på slutten.)



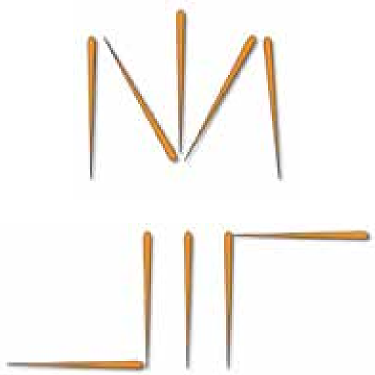
(3) Sjiraff: Flytt bare én tannpirker slik at sjiraffen vender i en annen retning.

(4) Fire trekanter: Med 6 tannpirkere, lag 4 kongruente, likesidige trekanter.



Quick-Pick

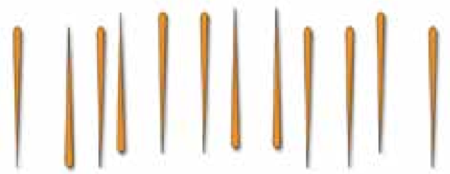
Elevene jobber to og to. Hver har 5 tannpirkere. Én arrangerer sine tannpirkere i et design og viser det til den andre i bare 3 sekunder. Da må hun bygge en kopi av designet med sine tannpirkere. Elevene skal diskutere hvordan de tenkte, og hva slags former det var i designet som hjalp dem til å huske plassering av tannpirkerne. Så kan de bytte roller.



Aktiviteten utvikler romforståelse, hukommelse og bruk av geometriske ord og begreper.

Enkelt Nim

I dette spillet skal to spillere spre 12 tannpirkere på bordet. I tur og orden får de ta bort 1 eller 2 tannpirkere. Spilleren som tar den siste tannpirkeren, vinner.



Oppgaven går ut på å utvikle en vinnerstrategi slik at den ene spilleren alltid vinner. Er det fordelaktig å starte først eller som nummer to i en vinnerstrategi?

Utvidelse:

(a) Hvem vinner når du bruker *n* tannpirkere i vinnerstrategien?

(b) I stedet for å ta bort 1 eller 2 tannpirkere kan spillerne ta bort 1, 2 eller 3 tannpirkere. Hva er vinnerstrategien da?

Spillet innholder gode matematiske begreper, inklusive tallforståelse og algebraisk resonnement.

Klassisk Nim

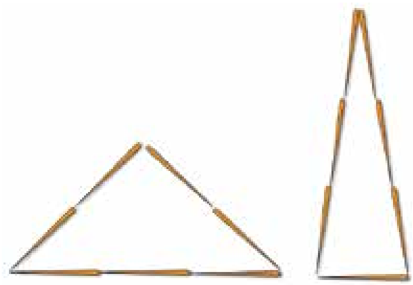
Den opprinnelige versjonen av Nim er et utfordrende og fasinerende spill. Lag tre rader med tannpirkere – en rad med 3, en rad med 5 og en rad med 7. Spillerne kan ta bort så mange tannpirkere som de vil, men bare fra én rad. Spilleren som tar den siste tannpirkeren vinner.

Se om du kan finne en strategi før du ser på diskusjonen nedenfor. (Det fins en overraskende strategi for å vinne.)

Aktivitet med trekanter

Dette er en rik oppgave for klasserommet som innebærer mange fine matematiske begreper.

Hvor mange trekanter kan du lage med 3 til 12 tannpirkere, slik at alle kantene består av hele tannpirkere som ikke overlapper, og som er lagt etter hverandre langs en kant? For eksempeler det mulig med 7 tannpirkere å lage to trekanter, en med sidelengdene 2, 2 og 3 og en med sidelengdene 3, 3 og 1.



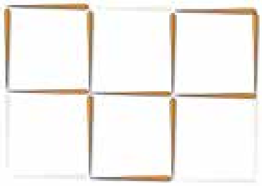
Her er noen spørsmål du kan bruke for å veilede elevene og sikre at de utforsker noen viktige ideer.

– Hvorfor kan du ikke lage en trekant av 4 tannpirkere?
– Hvorfor kan du ikke lage en trekant med sidelengder 5, 1 og 1?
– Hva er forholdet mellom antall tannpirkere og ulike typer trekanter som kan lages? For

eksempel: Hvilke antall tannpirkere er det mulig å lage likesidige trekanter med? Likebeinte? Rettvinklete?

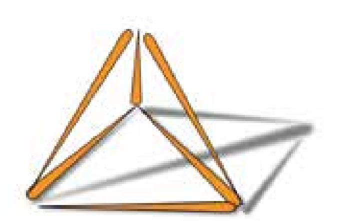
Elevene kan lime tannpirkerne på et ark og lage en utstilling med trekanter, egenskaper og de matematiske oppdagelsene sine.

Svarene til oppvarmingsoppgavene

(1)


(2)


(3)


(4)


… et 3D-tetraeder!

Enkelt Nim, diskusjon

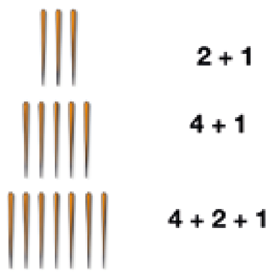
Tenk baklengs: Hvis du kan trekke slik at motstanderen har 3 tannpirkere igjen, vil du vinne. Hvis han tar 1, tar du 2, og motsatt. Hvordan kan du sikre at det blir 3 igjen? Trekk slik at motstanderen din har 6 igjen. Hvis han tar 1, tar du 2, og motsatt. Ved å fortsette kan vi se at det er mulig å vinne om du trekker slik at motstanderen har et multiplum av 3 tannpirkere igjen. For å vinne med 12 vil du at motstanderen din trekker først.

Hvis du endrer regelen slik at en spiller kan ta 1, 2 eller 3 tannpirkere om gangen, kan du sikre at antall tannpirkere fjernet per runde mellom motstanderen din og du er 4 (om de tar 1, tar du 3. Om de tar 2, tar du 2. Og om de tar 3, tar du 1). Da vil du oppnå at motstanderen din alltid har et multiplum av 4 før han trekker.

Strategien kan generaliseres.

Klassisk Nim, diskusjon

Vinnerstrategien er litt kompleks. Tenk på antallene i hver rad som en binær representasjon med 1-ere, 2-ere og 4-ere:



Første rad har 3 = 2 + 1, andre rad har 5 = 4 + 1, og tredje rad har 7 = 4 + 2 + 1.

Hver gang du trekker, sikrer du at det er et partall antall 1-ere, 2-ere og 4-ere til overs etter at du har trukket. I begynnelsen er det tre 1-ere, to 2-ere og to 4-ere. Om du trekker bort 1 tannpirker fra hvilken som helst rad, vil det bli et partall antall av 1-ere, 2-ere og 4-ere igjen.

Forsett med denne strategien, og du vil alltid vinne! Metoden generaliseres: Den fungerer for alle antall rader og alle antall tannpirkere i radene. En grundig forklaring av matematikken bak strategien kan finnes på nett. Her er en lenke: https://en.wikipedia.org/wiki/Nim

Aktivitet med trekanter, diskusjon

Aktiviteten bidrar til forståelse for trekantulikheten, som sier at summen av de to korteste sidene til en trekant alltid må være lengre enn den tredje siden. Da kan en trekant ikke lages med 4 tannpirkere. En trekant med sidelengdene 1, 1 og 2 er helt flat! Vi kan også finne noen artige regler, som:

– Hvis antall tannpirkere er et multiplum av 3, kan du lage en likesidig trekant.
– Oddetall antall tannpirkere ≥ 3 kan alltid lage likebeinte trekanter hvor en av sidelengdene er 1.
– Partall antall tannpirkere ≥ 6 kan alltid lage likebeinte trekanter hvor en av sidelengdene er 2.
– Oddetall antall tannpirkere ≥ 9 kan alltid lage likebeinte trekanter hvor en av sidelengdene er 3.

Opsal

Tekstoppgåve som fleirvalsoppgåve

Tekstoppgåver har vore nytta i matematikkundervisninga i fleire tusen år (Swetz, 2009; Verschaffel, Depaepe & Van Dooren, 2014). Det viktigaste målet med tekstoppgåver er å gi elevane erfaringar med å bruke det dei har lært i for eksempel aritmetikk, geometri eller algebra på skulen, i ein kvardagssituasjon. Andre mål med bruk av tekstoppgåver kan vere å motivere elevane for vidare studium i matematikk, å trene på å tenke kreativt, utvikle problemløysingsevner og utvikle nye matematiske omgrep og ferdigheiter (Verschaffel mfl., 2014). Gjennom elevane si løysing av tekstoppgåver, det eleven skriv, kan vi som lærarar få eit innblikk i korleis eleven har arbeidd med tekstoppgåva, kva eleven kan/forstår, og kva problem eleven eventuelt har med oppgåva.

Allereie i 1990-åra skreiv Silver (1992) at fleirvalsoppgåver var mykje brukt i matematikk i USA. I Australia dominerer fleirvalsoppgåver i vurderinga av matematikk i den vestlege delen av landet, nasjonalt og internasjonalt, som i TIMSS (Burfitt, 2019). Noreg deltar også i TIMSS og har no fått inn ein del fleirvalsoppgåver i for eksempel nasjonale prøver i rekning, sjå figur 1. Men bruken av fleirvalsoppgåver, og kva ein som lærar kan lese ut frå elevane sine svar på slike oppgåver, har vore lagt lite vekt på i Noreg.

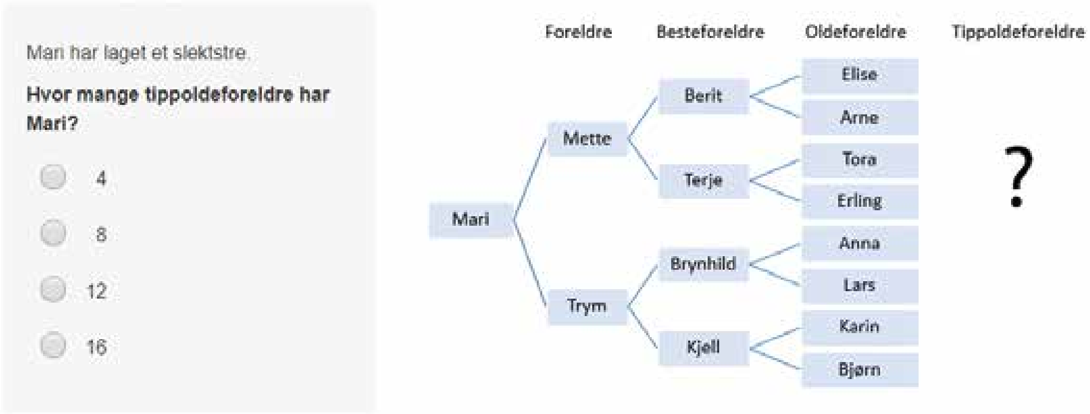
I denne artikkelen presenterer eg resultat frå to studiar, ein kvantitativ og ein kvalitativ. I begge studiane har elevar frå 5. trinn svara på ei tekstoppgåve med svaralternativ (fleirvalsoppgåve). I den kvantitative studien har 564 elevar svara på oppgåva ved å krysse av på eit ark. I den kvalitative studien har fire elevar svara på den same oppgåva. I tillegg har desse elevane vorte intervjua for å få fram korleis dei tenkte då dei løyste oppgåva. Med utgangspunkt i ei tekstoppgåve er målet å diskutere kva vi som lærarar kan lese ut frå elevane sine svar på oppgåva. Problemstillinga i denne artikkelen er: Når elevar på 5. trinn løyser ei tekstoppgåve i matematikk som er ei fleirvalsoppgåve, kva kan vi som lærarar lese ut frå svaret elevane gir?

Hilde Opsal
Høgskulen i Volda
hilde.opsal@hivolda.no

Dette er en fagfellevurdert artikkel på nivå 1. Tangenten er et sted der læreres og forskeres perspektiv på matematikkundervisning møtes og derfor har vi med praksisrelaterte forskningsartikler. Les mer i retningslinjene: www.caspar.no/nivaa1

Tekstoppgåver i matematikk

Ei tekstoppgåve er ifølgje Nortvedt (2012) ei oppgåve der «den matematiske problemstillingen presenteres i et tekstlig format» (Nortvedt,



Figur 1: Oppgåve 8 i Nasjonal prøve i rekning for 5. trinn i 2019 (Utdanningsdirektoratet, 2019).

2012, s. 213). I engelsk litteratur vert tekstoppgåver omtala som *word problems*. Björkqvist (2003) skriv at orda *tekstoppgåve* og *problemløysingsoppgåve* av og til brukt synonymt. Men ifølgje Björkqvist er det eit tilleggskrav til ei tekstoppgåve dersom ho også skal vere ei problemløysingsoppgåve. Dette tilleggskravet er at det ikkje skal vere opplagt for oppgåveløysaren kva løysingsstrategi han skal bruke. Det betyr at det er tekstoppgåver som også er problemløysingsoppgåver, og tekstoppgåver som ikkje er det. Tekstoppgåver som er problemløysingsoppgåver for éin elev, treng ikkje vere det for ein annan elev, det avgjerande er om han har lært korleis han skal løyse den typen oppgåve eller ikkje.

Det finst fleire ulike typar tekstoppgåver, og Nortvedt (2012) deler inn i tre kategoriar ut frå kva som skal til for å løyse oppgåvene. *Eitstegsoppgåver* kan løysast ved hjelp av ein av dei fire rekningsartane, *fleirstegsoppgåver* kan løysast ved ein kombinasjon av dei fire rekningsartane, og *algebraoppgåver* kan løysast ved å stille opp ei eller fleire likningar og løyse ho/dei.

Det å løyse ei tekstoppgåve, og då spesielt fleirstegsoppgåver og algebraoppgåver, vert av Verschaffel, Greer og De Corte (2000) sett på som ein samansett prosess i fleire steg. Først må oppgåveløysaren konstruere ein intern modell av situasjonen skildra i tekstoppgåva, for å forstå kva element som må vere med, og samanhengar mellom desse elementa. Deretter må oppgåveløysaren omforme den interne modellen av situasjonen til ein matematisk modell, der dei nødvendige elementa og relasjonane for løysinga er med. Den matematiske modellen kan for eksempel vere eit matematisk uttrykk. Etter å ha kome fram til ein matematisk modell må oppgåveløysaren utføre utrekningane og kome fram til eit svar. Til slutt må han vurdere svaret opp mot utrekninga og opp mot konteksten i tekstoppgåva og presentere løysinga si på ein hensiktsmessig måte.

Det har vore gjort ein del forsking på kva ulike faktorar har å seie for korleis elevar klarer å løyse tekstoppgåver. Desse faktorane kan vere språklege, handle om utrekning og korleis oppgåva er presentert (Verschaffel mfl., 2014). Det har også vorte forska på elevar sine vanskar med å løyse tekstoppgåver. Gooding (2009) deler vanskane inn i fem kategoriar: *problem med å lese og forstå teksta*, *konteksten*, *gå frå tekst til eit matematisk uttrykk*, *utføre den matematiske utrekninga* og *tolke svaret opp mot konteksten*. Elevar kan ha problem med teksta i oppgåvene fordi der er mange ord, og/eller der er vanskelege eller ukjente ord for elevane, og det kan vere meir informasjon i teksta enn det elevane treng for å løyse oppgåva. Elevane kan då ha problem med å plukke ut kva informasjon som er nødvendig i oppgåveløysinga. Om konteksten i tekstoppgåva er ukjent for elevane, kan det vere med på å gjere oppgåveløysinga vanskelegare. Dette vil også vere med på å gjere det vanskelegare for elevane å avgjere om svaret dei får, er rimeleg eller ikkje. For å kunne løyse ei tekstoppgåve må elevane setje om teksta til ein intern modell av situasjonen. Ifølgje Boonen, Van der Schoot, Van Wesel, De Vries og Jolles (2013) viser fleire studiar at å lage ein visuell skjematisk representasjon av situasjonen i tekstoppgåva er positivt for løysinga, medan å lage ein biletleg representasjon har negativ effekt på oppgåveløysinga. I oppgåva vist på figur 1 er ein visuell skjematisk representasjon av situasjonen gitt til elevane. Ein biletleg representasjon i denne oppgåva kunne vere ei teikning av nokre av forfedrane, utan at ein ser i biletet ein systematisk samanheng mellom dei. Elevar som har problem med å utføre den matematiske utrekninga, som er den fjerde av Goodings (2009) kategoriar, vil normalt også ha problem med oppgåver som ikkje er forma som tekstoppgåver.

Mange elevar opplever tekstoppgåver i matematikk som vanskelegare enn for eksempel ferdigoppstilte oppgåver. I SPEED-prosjektet (Haug, 2017) svara elevar frå 5., 6., 8. og 9. trinn frå to kommunar i Noreg på ei kartleggingsprøve i matematikk i 2013. Dei same elevane svara på den same prøva året etter. Totalt var det 2012 elevar som gjennomførte prøva begge åra. Opsvik og Haug (2017) har delt oppgåvene på kartleggingsprøva i tre kategoriar, *aritmetikk utan tekst*, *aritmetiske tekstoppgåver* og *lese diagram og tabellar.* Dei samanfattar resultatet frå denne kartleggingsprøva med «Alle elevane meistrar dei ferdig oppsette reknestykka betre enn dei oppgåvene dei sjølve måtte konstruere med bakgrunn i tekst, figurar og tabellar» (Opsvik & Haug, 2017, s. 345). Daroczy, Wolska, Meurers og Nuerk (2015) vektlegg at dei vanskane elevane har i å løyse tekstoppgåver, vert påverka av den språklege kompleksiteten og faktorar som gjeld tal, og samanhengar mellom dette. Det betyr for eksempel at tekstoppgåver med heiltal ofte er lettare for elevar å løyse enn tekstoppgåver med desimaltal eller brøk.

Opsal og Tonheim (2018) har samanlikna korleis elevar på 5. og 6. trinn med og utan tilfredsstillande leseferdigheiter svarar på tekstoppgåver i matematikk. Dei har sett på resultatet på fleirvalsoppgåver, gitt som reine rekneoppgåver og tekstoppgåver, innanfor temaet multiplikasjon. Elevar med ei tilfredsstillande leseferdigheit svara betre enn dei utan tilfredsstillande leseferdigheit både på tekstoppgåver og reine rekneoppgåver. Eit anna interessant resultat frå studien var at det var fleire av elevane på 5. trinn som svara rett på to av tekstoppgåvene, enn det var elevar som svara rett på éi oppgåve med eit ferdigoppstilt multiplikasjonsstykke utan tekst. Dette kan tyde på at teksta i tekstoppgåvene kan vere med på å hjelpe elevar som har svake leseferdigheiter, til å løyse oppgåver innanfor multiplikasjon. For elevane på 6. trinn, som hadde arbeidd meir med multiplikasjon, viste denne studien ikkje det same resultatet.

Fleirvalsoppgåver i matematikk

Fleirvalsoppgåver er som nemnt tidlegare kjent frå nasjonale prøver i rekning og mellom anna Kengurukonkurransen og Abelkonkurransen. I lærebøker er det derimot få fleirvalsoppgåver (Jensen & Svorkmo, 2017). Skilnaden på ei fleirvalsoppgåve og ei meir «vanleg» oppgåve er at fleirvalsoppgåvene har svaralternativ. Jensen og Svorkmo skriv at svaralternativa kan brukast både i forkant av løysingsprosessen og under løysingsprosessen, der ein kan samanlikne sitt svar med svaralternativa.

Formatet fleirvalsoppgåver på prøver/testar set krav til kva spørsmål det er mogeleg å stille elevane. Det er for eksempel ikkje mogeleg med spørsmål der dei må produsere eigne svar. Elevane får heller ikkje vist prosessen fram mot svaret, eller forklare tankegangen eller resonnementa som er knytt til svaret (Silver, 1992).

Helwig, Rozek-Tedesco, Tindal, Heath og Almond (1999) stiller spørsmål ved om prøver med fleirvalsoppgåver i matematikk måler dei mest nødvendige og viktigaste trekka ved matematikkferdigheitene utan å inkludere for mange uvesentlege moment. Dei har studert elevar frå 6. trinn i USA, totalt 247 elevar. Ein av testane i studien var todelt og inneheldt fleirvalsoppgåver som tekstoppgåver. Først fekk elevane oppgåver skriftleg, og deretter fekk elevane oppgåver skriftleg og lest opp på video. Resultatet viste at elevar med låg leseferdigheit og gode ferdigheiter i matematikk gjorde det betre når dei fekk lest opp oppgåvene. Testen viste også at i tillegg til matematikkferdigheiter vert også elevane sine evner til å kjenne igjen ord også målt på skriftlege prøver i matematikk. Likevel konkluderer Helwig mfl. (1999) med at ein ikkje kan ta vekk skriftleg kommunikasjon frå matematikken fordi tekstoppgåver har ein viktig plass i skulematematikken.

Metode

I denne artikkelen har eg tatt utgangspunkt i *ei* tekstoppgåve nytta i eit stort kvantitativt prosjekt og i eit lite kvalitativt prosjekt. I det kvantitative prosjektet, SPEED (Haug, 2017), som er nemnt tidlegare, vart det utvikla ei kartleggingsprøve i matematikk (Opsvik & Skorpen, 2017). Oppgåvene på kartleggingsprøva liknar på dei oppgåvene ein har på nasjonale prøver i rekning. Alle oppgåvene var fleirsvarsoppgåver med seks svaralternativ. I tillegg var det mogeleg å velje svaret «vet ikke». Det var elevar frå 5., 6., 8. og 9. trinn som svara på kartleggingsprøva våren 2013. I denne artikkelen ser vi berre på svara til elevar på 5. trinn, totalt 593 elevar.

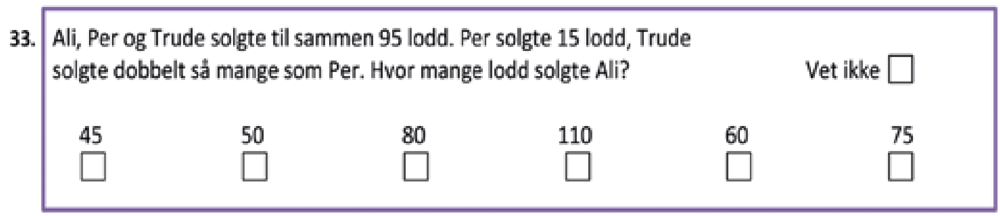
I den kvalitative studien gjennomførte tre forskarar ved Høgskulen i Volda oppgåvebaserte intervju (Goldin, 1993) med elevar, våren 2018. Eit oppgåvebasert intervju gjer det mogeleg for forskarane å få fram korleis elevar løyser ei oppgåve spontant. Ein får ikkje berre eleven si løysing av oppgåva, men også korleis dei forklarer løysingane. I eit oppgåvebasert intervju er det bra å gi elevane hint undervegs om dei står faste i oppgåveløysinga, slik at elevane får vist kva dei kan, og eventuelt kva som gjer at dei ikkje klarer å løyse oppgåva (Goldin, 1993).

I intervjua fekk elevane utdelt eit ark med oppgåva øvst på arket. Eventuelle utrekningar og mellomrekningar kunne dei skrive på arket. Elevane vart oppmuntra til å fortelje korleis dei tenkte under oppgåveløysinga. Alle elevane fekk tid til å løyse oppgåva før dei vart spurt om korleis dei hadde tenkt i løysingsituasjonen.

På intervjua sat eleven på den eine sida og forskaren på den andre sida av bordet. I alle intervjua vart det nytta lydopptakar og video, der ein filma bordet slik at ein såg kva eleven skreiv og eventuelt peika på. Ansiktet til eleven vart ikkje filma.

Det var i alt 24 elevar som vart intervjua, tolv elevar frå 5. trinn og tolv elevar frå 8. trinn. Vi hadde tre sett med oppgåver som vart brukt i intervjua, fem oppgåver i kvart sett. Alle oppgåvene som vart nytta under intervjua, var henta frå kartleggingsprøva i SPEED-prosjektet. I denne artikkelen ser eg berre på korleis dei fire elevane frå 5. trinn som fekk settet med denne eine tekstoppgåva, svarar på ho.

Oppgåva handlar om tre personar som har selt lodd (figur 2). Ein får opplyst kor mange lodd dei har selt til saman, og kor mange lodd


33. Ali, Per og Trude solgte til sammen 95 lodd. Per solgte 15 lodd, Trude solgte dobbelt så mange som Per. Hvor mange lodd solgte Ali? Vet ikke

45 50 80 110 60 75

Figur 2: Tekstoppgåve til 5. trinn, ei fleirvalsoppgåve med seks svaralternativ i tillegg til «vet ikke».

Per har selt. Ein får også vite at Trude har selt det dobbelte av Per, og elevane skal bestemme kor mange lodd Ali har selt. Oppgåva kan løysast ved for eksempel å sette opp ei likning:

$$15 + 2 \cdot 15 + x = 95$$

der x er talet på lodd som Ali har selt. Ein kan også løyse ho aritmetisk med først å bestemme kor mange lodd Trude har selt, som er det dobbelte av 15, som er 30. Deretter bestemme kor mange lodd Ali har selt, ut frå totalt selde lodd, som er 95 lodd, og så subtrahere lodda Per og Trude har selt. Ali har selt 50 lodd. Så langt eg kjenner til, er der ingen av svaralternativa i denne oppgåva ein kan kople direkte til kjente mogelege misoppfatningar.

Dette er ei fleirstegsoppgåve eller ei algebraoppgåve, alt etter som korleis elevane vel å løyse oppgåva. Teksta er forholdsvis kort og utan vanskelege/ukjente ord for dei fleste elevar på 5. trinn. Der er ingen unødvendig informasjon i teksta, alle tala treng ein for å kunne løyse oppgåva. Konteksten er kjent for dei fleste elevar. Det kan vere at elevar kan plukke ut nøkkelord som *til saman* og *dobbelt*, men desse nøkkelorda peikar i denne oppgåva mot rekneartane addisjon og multiplikasjon, som det er naturleg å bruke når ein løyser oppgåva.

Oppgåva kan også løysast med bruk av ein visuell skjematisk representasjon av situasjonen. Ein kan for eksempel nytte ei talline frå 0 til 95 som ein kan dele opp i tre delar, ein for kvar loddseljar. Ein biletleg representasjon kunne vere ei teikning av dei tre loddseljarane, kanskje med lodd i hendene. Den einaste informasjonen oppgåveløysaren får ut frå den biletlege representasjonen, er talet på loddseljarar, medan ein med visuell skjematisk representasjon i tillegg får informasjonen om at dei tre loddseljarane har selt 95 lodd til saman.

Kva svarar elevar på tekstoppgåva?

Eg vil først presentere resultat frå SPEED-prosjektet. Av dei 593 elevane som deltok på kartleggingsprøva, var det 564 som svara på denne oppgåva. Det var 255 elevar som svara rett (45 %) (tabell 1). Dei to tala som står i oppgåveteksta, er 95 og 15. Dersom ein adderer desse to tala, får ein 110, og dette svarar 3,3 % av elevane. Subtraherer ein 15 frå 95, får ein 80. 3,5 % har valt dette svaralternativet. Der var om lag 23 % av elevane som svara 45. Ei mogeleg forklaring kan vere at desse elevane har addert talet på lodd som Per og Trude har selt. Der var også 13,5 % som svara 60. Korleis elevar har tenkt for å kome fram til dette svaret, er uvisst. Det var relativt få, berre 6,4 %, av elevane som kryssa av for svaralternativet «vet ikke». Når under halvparten av elevane får rett på denne oppgåva, indikerer det at mange av elevane er usikre på korleis dei skal løyse ho. Likevel er prosenten som viser denne usikkerheita gjennom å velje dette svaralternativet, liten. Ei forklaring på det kan ligge i at dette er ei fleirvalsoppgåve der ein kan tippe på eit av svaralternativa. Sjansen for at ein får rett med seks svaralternativ er om lag 17 %. Og kan ein utelate nokre av svaralternativa som uaktuelle, så aukar denne sjansen.

Svaralternativ	Talet på elevar	Prosent
45	129	23
50	255	45
80	20	3,5
110	18	3,3
60	76	13,5
75	30	5,3
Veit ikkje	36	6,4

Tabell 1: Resultat frå den kvantitative studien som viser kor mange elevar på 5. trinn som kryssa av for dei ulike svaralternativa.

Resultatet frå den kvantitative kartleggingsprøva viser kor mange elevar på 5. trinn som har svara rett på denne oppgåva, og kor mange som har valt dei andre svaralternativa. Men dette resultatet fortel ikkje noko om kva tankar som ligg bak desse svara. Det er vanskeleg å seie om det er teksta i denne matematikkoppgåva som er problemet, eller om der er andre faktorar som påverkar elevane sine svar. Det kan vere at der er elevar som har svara rett på denne oppgåva ved for eksempel rein tipping. Der kan også vere elevar som svarar rett, men der løysingsmåten ikkje er rett, eller som får feil svar, men har tenkt (nesten) rett.

Den kvalitative studien, med oppgåvebaserte intervju, kan gi svar på slike spørsmål. Dei fire elevane som fekk denne oppgåva i intervjuet, har fått dei fiktive namna Olav, Arne, Knut og Leif.

Olav skriv først på arket 95 og strekar over det, deretter skriv han 80 og strekar over det, skriv så 50 og kryssar av for svaret 45. Han seier ingenting medan han løyser oppgåva.

Forskar	Du har kryssa av for 45 … kan du fortelje meg korleis du tenkte då du fekk 45?
Olav	Når der var 95 lodd … så var det minus 15, då blei det 80 … og 80 minus det dobbelte av 15 er 30, så då blir det 50 … og då er det igjen 45 … som då
Forskar	Du kom fram til … du sa at 95 minus 15 blir 80, og så trekte du ifrå det dobbelte av 15, som er 30, og då får du … 50 … og så sa du at det blir 45 … kvifor blir det 45, når du først hadde komme fram til 50?
Olav	Fordi det var det dei to hadde selt til saman … så han siste, han hadde selt 45

Olav løyser oppgåva som ei fleirstegsoppgåve der han først subtraherer 15 frå 95 og deretter 30 frå 80. Han argumenterer mot rett svar 50, men svarar 45. Ut frå forklaringa til Olav verkar det som om han blandar saman 45, som er talet på lodd dei to andre loddseljarane har selt, og 50, som er talet på lodd som Ali har selt. Kva som gjer at han blandar desse to saman, er uvisst.

Arne skriv først 95 – 30 og får 65. Det er ikkje eit svaralternativ, og han viskar difor vekk 30 og skriv i staden 45 der 30 stod, slik at han har reknestykket 95 – 45. Reknar ut dette og får eit svar (umogeleg å sjå på videoen kva svaret er) som han heller ikkje finn som eit av svaralternativa. Viskar difor vekk svaret han fekk.

Arne	Nei [medan han viskar vekk det han har skrive på arket]
Forskar	Kva du rekna no … no rekna du [avbroten]
Arne	95 minus 45
Forskar	Ja … og så var det først 5 minus 5, det er 0, og så 9 minus 4 er …
Arne	Det er det same som om at det er 10 minus 4 berre pluss 1 … og 10 minus 4 det blir 6, så 7 då … så det er 75? … nei … eh … er det lov å hoppe over?
Forskar	Ja, det er det. Du har lov å hoppe over … men du er heilt inne på det rette [eleven kryssar av på svaralternativet «vet ikke» og viskar vekk resten av det han har skrive på arket]. Altså det er … det du skreiv opp, var heilt rett. Med 95 minus 45. Men korleis kom du fram til 45?
Arne	Nei, fordi at 15 … han Per selde 15, og Trude selde dobbelt så mange. Og 15 pluss 15 er 30, og 30 pluss 15 er 45. Så 95 minus 45 … der var 95 til saman

Også Arne løyser oppgåva som ei fleirstegsoppgåve. Han startar med å finne ut at Trude hadde selt 30 lodd fordi det er det dobbelte av det Per har selt. Han legg så saman talet på lodd Per og Trude har selt, og kjem fram til 45. Men så stoppar han opp i løysinga og spør om han kan hoppe over oppgåva. Arne endar med å svare «vet ikke». Denne eleven har ikkje problem med teksta i tekstoppgåva, men Arne har problem med å subtrahere 45 frå 95. Han startar først med einarane, og det går greitt. Deretter skal han rekne ut «9 minus 4», noko han seier er det same som «10 minus 4, berre pluss 1». Men i staden for å addere 1 må han her trekke frå 1 sidan han har auka frå 9 til 10. Derfor endar han på 7 tiarar. Svaret Arne no har fått, er 70, som ikkje er eit av svaralternativa, og han endar med å svare «vet ikke».

Knut svarar 140. Dette svaret får han ved først å addere 30 og 15. Deretter adderer han 5 til og får 50. For så å addere dette til 90 og få 140. Han mumlar noko medan han reknar, men det er uråd ut frå lydopptaket å høyre kva han seier.

Forskar	Går det an? … Kor du tenkte? Først skreiv du … 30 … kva var det for noko?
Knut	Det var fordi at det … han Ali og Per … altså dei selde … han selde, Per han selde 15 lodd, og Trude selde dobbelt så mykje
Forskar	Så det blir 30
Knut	Mm
Forskar:	Mm, og så la du attåt 15. Og kva var det?
Knut	Han selde dobbelt så mykje … og då la eg til 15
Forskar	Ja … så det blir han Per og ho Trude … kor mange dei hadde selt, var det det?
Knut	Ja
Forskar	Då fekk du 45 … ja
Knut	Og då la eg på 5 … for der [peikar på 95 i oppgåveteksta] … og då blir det 90 igjen der … og då blei det femti … og så legge til 90
Forskar	Kvifor la du til 90 igjen?
Knut	Fordi at den der … men eg tok vekk ein 5-ar
Forskar	Å, ja, eg trudde det at du hadde fått 50 der av at du tok … at det var det som var igjen for å kome opp til 95, men det var ikkje det, altså
Knut	Hm … nei det var ikkje det
Forskar	Nei … men han Ali, kan han ha selt meir enn 95 lodd?
Knut	Nei

Eleven er samd i at Ali ikkje kan ha selt 140 lodd, som er meir enn dei 95 lodda dei hadde selt til saman. Knut prøver å løyse oppgåva ein gong til, og igjen endar han på svaret 140. Det ser ikkje ut til at Knut har problem med å lese og forstå teksta, fordi han svarar at Trude selde 30 lodd, som er det dobbelte av dei 15 lodda som Per selde. Konteksten i oppgåva ser også ut til å vere kjent for Knut. Problemet Knut har med å løyse denne oppgåva, ligg i at han ikkje ser at der er 95 lodd i alt. I staden adderer han 95 til talet på lodd som Trude og Per selde. Dersom vi i intervjuet hadde utfordra han på å teikne for eksempel ei talline som ein skjematisk representasjon av talet på lodd, så kan det vere at han hadde klart å løyse denne oppgåve rett. Han klarer å utføre dei matematiske utrekningane. Ein kan ikkje ut frå svara til Knut sikkert seie noko om kva intern modell han har av situasjonen i teksta. Men ut frå svara Knut gir, ser problemet ut til å vere å gå frå tekst til matematisk uttrykk som skal reknast ut.

Leif les oppgåva høgt og startar med å seie «ok». Deretter skriv han medan han forklarer 15 + 15 = 30 + 15 = 45 + 45 = 90 og svarar 45. Han forklarer løysinga si:

Leif	Ok … då er det 15 pluss … 15 pluss 15, det blir 30 … og då har vi 15 her. Vent, då tar eg berre det der … sånn … ok, då har vi svaret her. Og då må eg berre finne ut kor mange fleire som … kor mange Ali selde … og det blir eigentleg berre … 45
Forskar	Og det vart 45? … og det er svaret, det er der [peikar på svaralternativet 45 på arket]. Men då ser eg at … då har du enda opp med at han Per selde 15 lodd og ho Trude ho selde 30 lodd … og han Ali selde 45 lodd … og til saman så har dei selt …

Leif	90 lodd
Forskar	Men viss du ser … kva står i oppgåvetekst? Ali, Per og Trude selde til saman 95 lodd?
Leif	95
Forskar	Då manglar det 5 lodd … skal tru kven som selde dei …
Leif	[Viskar vekk krysset på svaralternativet 45] No trudde eg … Per selde 15 lodd, Trude selde dobbelt så mange som Per … då kan … då går det an at ho eller Ali tro … hadde 50 lodd

Leif er den einaste av desse fire elevane som forklarer kva han gjer, medan han løyser oppgåva. Han les «95 lodd» før han startar med oppgåveløysinga. Likevel reknar han seinare med 90 lodd. Når forskaren summerer opp løysinga som endar med «og til saman så har dei selt …», svarar eleven 90. Leif svarar truleg 45 fordi han har lese eit av tala i oppgåveteksta feil. Då han vert gjort merksam på at det er 95 lodd som er selt til saman, klarer han å resonnere seg fram til at Ali må ha selt 50 lodd. Vi ser at det er ingen av Gooding (2009) sine fem kategoriar som passar på Leifs løysing av denne oppgåva. Sidan han les oppgåva korrekt i første omgang, kan vi ikkje seie at han har problem med å lese teksta. Det verkar heller ikkje som han har problem med å forstå ho. Han klarer å gå frå tekst til matematisk uttrykk og utføre dei matematiske utrekningane. Rett nok så er der «misbruk» av likskapsteiknet i det han skriv. Sidan han også ser at svaret hans ikkje passar med 95 selde lodd, klarer han å justere svaret sitt slik at det passar med konteksten og vert rett.

Kva svar gir resultatet frå desse to studiane oss?

Resultat frå den kvantitative undersøkinga viste at under halvparten av elevane på 5. trinn (om lag 45 %) svara rett på ei fleirstegsoppgåve som er innanfor ein kjent kontekst utan vanskelege ord, og som kan løysast på fleire måtar. Dette resultatet kan gi oss ein peikepinn på kor mange av elevane som klarer å løyse denne typen oppgåver. Som nemnt tidlegare kan det også vere at enkelte av elevane har tippa på det rette svaralternativet. Der vil også vere usikkerheit om kvifor «dei andre» elevane vel feil svaralternativ.

Med fleirvalsoppgåver på ei kartleggingsprøve vil der vere ein del avgrensingar når det gjeld kva informasjon om elevane som er mogeleg å lese ut frå dei svara elevane gir. Når ein så likevel vel å bruke denne typen oppgåver, er det truleg fordi det går raskt å vurdere om elevane har svara rett eller feil. Men er det så interessant om svaret er rett eller feil, er ikkje løysingsprosessen viktigare enn svaret? Alle dei fire intervjua elevane i den kvalitative studien svara feil på denne oppgåva i første omgang. Å intervjue desse elevane etter at dei hadde løyst oppgåva, gav meir kjennskap til løysingsprosessen deira, det vil seie korleis dei tenkte når dei løyste oppgåva. Dette gir oss ei anna forståing for elevane sine tankar rundt løysing av tekstoppgåver enn berre eit valt svar blant seks svaralternativ. Det å skulle intervjue mange elevar er tidkrevjande, ein må difor vurdere denne tidsbruken opp mot kva han gir oss av informasjon.

Kva informasjon kan vi så lese ut frå intervjua med desse fire elevane? Ifølgje Gooding (2009) er der fem ulike kategoriar av vanskar elevar kan ha med løysing av tekstoppgåver. Den første kategorien er problem med å lese og forstå teksta. I intervjuet fekk elevane tilbod om at forskaren kunne lese teksta dersom det var ynskjeleg, men ingen av elevane tok imot dette tilbodet. Det var heller ingen av elevane som viste i intervjuet at dei hadde problem med å forstå teksta, og konteksten verka kjent for dei alle.

Ein av elevane, Knut, hadde kanskje problem med å løyse denne oppgåva fordi det var ei tekstoppgåve. Ut frå det han skreiv og forklarte etter at han hadde kome fram til eit svar, kan det hende at han hadde problem med å *gå frå tekst til matematisk uttrykk* (Goodings tredje kategori). Eleven fekk svaret 140, som ikkje var eit av svaralternativa. Kva denne eleven ville svara om dette hadde vore ei skriftleg prøve, er uvisst. Det kan vere at han hadde svara «vet ikke», fordi det svaret han enda på, ikkje var eit svaralternativ. Det kan også vere at eleven hadde sett at svaret ikkje kunne vere meir enn totalt selde lodd, som er 95. Ein del av prosessen når ein skal løyse tekstoppgåver, er å lage ein matematisk modell av teksta, ifølgje Verschaffel mfl. (2000). Ut frå reknestykket Knut har sett opp, passar ikkje den matematiske modellen til Knut til denne tekstoppgåva.

To av elevane fekk svaret 45. Dette var eit av svaralternativa, så dei hadde eit svaralternativ å krysse av for, men der er ulike årsaker til svaret 45. Olav tok utgangspunkt i at det var selt 95 lodd totalt, og subtraherer først 15 og deretter 30. Han fekk svaret 50 og sa: «Då er det igjen 45.» Grunngivinga han gav for dette svaret, var: «Fordi det var det dei to hadde selt til saman … så han siste, han hadde selt 45.» Det kan vere at også hans matematiske modell ikkje passa med tekstoppgåva, og det kan vere at også han har problem med å gå frå tekst til matematisk uttrykk. Leif svara 45 mest truleg fordi han las eit av tala i oppgåveteksta feil. Ut frå den forklaringa han gav på løysinga si, ser det ut til at han har lese talet 90 i staden for 95, som det står i oppgåveteksta. Då han vart gjort merksam på at det var 95 lodd som var selt til saman, klarte han å resonnere seg fram til at Ali må ha selt 50 lodd.

Ein av elevane svara *veit ikkje* fordi han hadde problem med å rekne ut eit oppstilt subtraksjonsstykke. Han kom fram til at for å finne ut kor mange lodd Ali har selt, måtte han subtrahere 45 frå 95, men denne subtraksjonen gav han opp. Eleven hadde problem med å utføre den matematiske utrekninga, som er Goodings fjerde kategori.

Det å bruke fleirvalsoppgåver vert meir og meir vanleg også i norsk skule. Bruken av fleirvalsoppgåver har så langt eg kjenner til, vore lite diskutert blant matematikklærarar i Noreg. Korleis vert elevane i desse to studiane påverka av at det er ei fleirvalsoppgåve? Resultatet frå den kvantitative studien viser at det er få elevar som svara «vet ikke» på denne oppgåva (berre 6,4 % av elevane på 5. trinn). Ved rein tipping er det om lag 17 % sjanse for å tippe rett når der er seks svaralternativ. Kor mange av elevane som har tippa på denne oppgåva, er umogeleg å vite. Jensen og Svorkmo (2017) skriv om fleire måtar elevane kan bruke svaralternativa på fleirvalsoppgåver på. Ein elev som har problem med subtraksjon, kan gjere denne oppgåva om til ei rein addisjonsoppgåve ved å addere lodda Per og Trude har selt, og deretter ta eitt og eitt svaralternativ og addere til ein kjem fram til 95 totalt selde lodd. Dette er kanskje berre ei løysing for ein elev som har problem med å utføre den matematiske utrekninga. Ein elev som har problem med å løyse tekstoppgåver fordi han ikkje klarer å lese og forstå teksta, vil ikkje kunne sjå at dette er ein måte å finne svaret på. Heller ikkje ein elev som har vanskar med å gå frå tekst til eit matematisk uttrykk.

Problemstillinga eg ville svare på i denne artikkelen, er: Når elevar på 5. trinn løyser ei tekstoppgåve i matematikk som er ei fleirvalsoppgåve, kva kan vi som lærarar lese ut frå svaret elevane gir? Ut frå denne studien ser vi at der er skilnad på svara vi får ut frå ein kvantitativ og ein kvalitativ studie. Når elevane set kryss for berre eitt av svaralternativa, kan det vere vanskeleg å vite kva som ligg bak dette krysset. Men det går raskt å sjå kor mange av elevane som svarar rett eller feil på ei oppgåve. Eg stiller meg litt undrande til om rett eller feil er det viktigaste. For meg er tankegangen bak svaret viktigare enn sjølve svaret. Her er nok eg på line med Silver (1992), som meiner at elevane ikkje får vist prosessen fram mot svaret i slike oppgåver. Då gir fleirvalsoppgåver, der elevane berre skal sette eit kryss på eitt av svaralternativa, oss som lærarar lite informasjon om elevane si forståing av innhaldet i tekstoppgåva. Men som eit utgangspunkt for ein samtale med ein elev, med ei gruppe elevar eller heile klassa kan fleirvalsoppgåver fungere godt. Med ein ny læreplan frå hausten 2020, med eit kjerneelement *resonnering og argumentasjon*, er kanskje ikkje det å auke bruken av prøver/testar med fleirvalsoppgåver vegen å gå.

Referansar

Björkqvist, O. (2003). Matematisk problemløsing. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (s. 51–70). Bergen: Fagbokforlaget.

Boonen, A. J. H., Van der Schoot, M., Van Wesel, F., De Vries, M. H. & Jolles, J. (2013). What underlies successful word problem solving? A path analysis in sixth grade students. *Educational Psychology, 38*, 271–279.

Burfitt, J. (2019). Cognitive interviews for reviewing multiple-choice items in mathematics. *Issues in Educational Research, 29*(2), 346–362.

Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D. & Nuerk, H.-C. (2015). Word problems: a review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology, 6*(Article 348), 1–13.

Goldin, G. A. (1993). Observing mathematical problem solving: Perspectives on structured, task-based interviews. I B. Atweh, C. Kanes, M. Carss & G. Booker (Red.), *Contexts in mathematics Education. Proceedings of the sixteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)* (s. 303–309). Brisbane: The Mathematics Education Research Group of Australasia.

Gooding, S. (2009). *Children's difficulties with mathematical word problems*. Paper presented at the British Society for Research into Learning of Mathematics, BSRLM, Loughborough.

Haug, P. (2017). *Spesialundervisning. Innhald og funksjo*n. Oslo: Samlaget.

Helwig, R., Rozek-Tedesco, M. A., Tindal, G., Heath, B. & Almond, P. (1999). Reading as an access to mathematics problem solving on multiple-choice tests for sixth-grade students. *The Journal of Educational Research, 93*(2), 113–125.

Jensen, A.-M. & Svorkmo, A.-G. (2017). Flervalgsoppgaver. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(3), 8–14.

Nortvedt, G. (2012). Bruk av tekstoppgaver på matematikktester og prøver: et kort review. I T. N. Hopfenbeck, M. Kjærnsli & R. V. Olsen (Red.), *Kvalitet i norsk skole* (s. 212–222). Oslo: Universitetsforlaget.

Opsal, H. & Tonheim, O. H. M. (2018). Students with low reading abilities and word problems in mathematics. I E. Norén, H. Palmér & A. Cooke (Red.), *Norma17. The eighth nordic conference on mathematics education* (s. 149–157). Stockholm: SMDF.

Opsvik, F. & Haug, P. (2017). Læringsutbytet i matematikk. I P. Haug (Red.), *Spesialundervisning. Innhald og funksjon* (s. 324–349). Oslo: Samlaget.

Opsvik, F. & Skorpen, L. B. (2017). Utvikling av kartleggingsprøver i matematikk. I P. Haug (Red.), *Spesialundervisning. Innhald og funksjon* (s. 256–271). Oslo: Samlaget.

Silver, E. A. (1992). Assessment and mathematics education reform in the united states. *International Journal of Educational Research, 17*(5), 489–502.

Swetz, F. J. (2009). Word problems: Footprints from the history of mathematics. I L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren & S. Mukhopadhyay (Red.), *Words and Worlds. Modelling verbal descriptions of situations* (s. 73–91). Rotterdam: Sense Publishers.

Utdanningsdirektoratet (2019). *Nasjonal prøve i regning*. Henta frå https://www.udir.no/eksamen-og-prover/prover/eksempeloppgaver-tidligere-nasjonale-prover/5.-trinn/regning/bokmal/?path=cefglhgcefglhdcefglhl

Verschaffel, L., Depaepe, F. & Van Dooren, W. (2014). Word problems in mathematics education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 641–645). Dordrecht: Springer.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger Publishers.

MENINGSFULL MATEMATIKK FOR ALLE

– et samspill mellom praksis, forskning og utvikling

Matematikksenteret, NTNU, vil bidra til at matematikkopplæringen tar utgangspunkt i barn og unges tenkning og bygger på deres interesser, bakgrunn, erfaringer og kunnskap. Målet er at barn og unge skal utvikle en matematisk kompetanse som består av fem komponenter.

Matematikksenteret vil arbeide for å fremme en matematikkundervisning i skolen hvor barn og unge blir møtt med høye forventninger. Læreren leder arbeidet mot læringsmålet for timen, og legger til rette for et godt læringsmiljø.

For barnehage vil Matematikksenteret bidra til at personalet inviterer barna til matematisk utforskning gjennom varierte aktiviteter og berikende samtaler.

Vi ønsker at barn og unge får arbeide med kognitivt krevende aktiviteter som fremmer resonnering og forståelse, og de får diskutere forskjellige løsningsstrategier med hverandre. Feil anses som en naturlig del av læringsprosessen. Slik kan barn og unge erfare at matematikk er engasjerende, utfordrende og meningsfullt.

Matematikksenteret sin virksomhet skal være et samspill mellom praksis, forskning og utvikling. Senteret skal utvikle praksis- og forskningsbaserte ressurser og modeller for kompetanseutvikling som våre målgrupper kan benytte, og bli inspirert av.

For å lykkes med dette må Matematikksenteret ha tett kontakt med praksisfeltet. Matematikksenteret skal drive med forsknings- og utviklingsarbeid i tett samarbeid med praksisfeltet. Senteret skal være oppdatert på nasjonal og internasjonal forskning i matematikkdidaktikk, og senterets arbeid skal være forskningsbasert.

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

NTNU

Utvikling av nye eksamener i matematikk

Fra høsten 2020 er nye læreplaner gjeldende i norsk skole, og dette medfører også endringer for fremtidens sentralt gitte skriftlige eksamener.

Våren 2020 lyste Utdanningsdirektoratet ut oppdrag om å bistå i arbeidet med å utvikle eksempeloppgaver og eksamensoppgaver med støttemateriell for matematikk på 10. trinn, Vg1 og i fellesfaget 2P/2P-Y på Vg2. Matematikksenteret ble tilbudt oppdraget, og vi er godt i gang med å utvikle nye eksamensoppgaver.

Utviklingen skjer i samarbeid med fagnemdene som tidligere hadde ansvar for å utvikle de årlige eksamenene. Eksamen etter ny læreplan skal gjennomføres på Vg1 i mai/juni 2021 og på 10. trinn og Vg2 i mai/juni 2022.

Ny læreplan og nytt digitalt system

De nye eksamenene skal være i tråd med de nye læreplanene og ta hensyn til de de endringene som ligger i ny læreplan. I tillegg er det en viktig forutsetning at eksamenene skal gjennomføres i Utdanningsdirektoratets nye, digitale gjennomføringssystem. Fremtidens eksamener i matematikk blir altså digitale. Dette medfører blant annet at dagens oppbygning med del 1 uten hjelpemidler og del 2 med hjelpemidler, forsvinner.

En viktig arbeidsoppgave i oppdraget Matematikksenteret har fått, er å utarbeide et såkalt «konstrukt» for eksamen og en beskrivelse av hvordan eksamen i matematikk skal se ut. Konstruktet skal si noe om hva eksamen i matematikk skal måle. Sentrale aspekter i konstruktet blir det nye kompetansebegrepet etter LK20 og kjerneelementene i matematikk. Eksamensoppgavene skal måle elevenes kompetanse i matematikk slik den kommer til uttrykk i kompetansemålene i det nye læreplanverket (LK20) for matematikk etter 10. trinn, Vg1 og Vg2 fellesfag på studieforberedende og eventuelt yrkesfaglig utdanningsprogram. Foreløpig er det er ikke tatt en endelig avgjørelse på om de yrkesfaglige utdanningsprogrammene skal ha sentralt gitt eksamen, men signalene så langt tyder på at dette blir innført.

Hva skal måles?

De nye eksamenene skal ivareta kompetansebegrepet som vi finner i overordnet del av læreplanverket:

«Kompetanse er å kunne tileigne seg og nytte kunnskapar og ferdigheiter til å meistre utfordringar og løyse oppgåver i kjende og ukjende samanhengar og situasjonar. Kompetanse inneber forståing og evne til refleksjon og kritisk tenking.»

Kompetansebegrepet sier mye om hvilken matematisk kompetanse som forventes av elevene, og dette blir utfyllende beskrevet i kjerneelementene. Kjerneelementer i fag er nytt i norsk sammenheng, og de sier noe om hva elevene må lære for å kunne mestre og anvende et fag. Kjerneelementene består av sentrale begreper, metoder, tenkemåter, kunnskapsområder og uttrykksformer. I matematikk har vi følgende kjerneelementer: utforsking og problemløsing, modellering og anvendelse, resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon, abstraksjon og generalisering og matematiske kunnskapsområder. Det siste kjerneelementet handler om de tradisjonelle faglige innholdsområdene, mens de fem første sier mer om hvilken matematisk kompetanse elevene skal oppnå.

Det er viktig at de nye eksamenene gjenspeiler beskrivelsene av kjerneelementene så godt som mulig. For eksempel står det under beskrivelsen av utforsking og problemløsing at elevene skal kunne lete etter mønster, finne sammenhenger og diskutere seg frem til en felles forståelse. På en skriftlig, digital eksamen kan elevene møte oppgaver der de må lete etter mønster og finne sammenhenger, men de har ikke mulighet til å diskutere seg frem til felles forståelse. Enkelte deler av kjerneelementene kan altså ikke måles på en slik prøve. Konstruktet for eksamen må si noe om hva som vil bli målt og hva som ikke kan bli målt i en skriftlig, digital prøve.

Omfattende utprøving

Beskrivelsen av eksamen i matematikk vil si noe hvordan eksamenssettene er bygd opp. Det innebærer blant annet hvilke oppgaveformater elevene vil møte, og hvordan de ulike formatene er vektlagt. For at elever og lærere skal ha mulighet til å bli kjent med de ulike oppgaveformatene vil det i løpet av høsten 2020 bli publisert eksempeloppgaver for alle aktuelle trinn på udir.no. Eksempeloppgavene vil forhåpentligvis også gi elever og lærere et godt bilde av hvilken faglig kompetanse som forventes på de fremtidige eksamenene.

For å sikre at de nye eksamenene blir reliable (troverdige) og valide (måler det de skal måle), vil de bli utviklet etter samme prinsipper som dagens nasjonale prøver i regning. Det betyr at alle oppgaver som er aktuelle for eksamenssettet vil bli utprøvd i minimum to omganger før endelig gjennomføring. Matematikksenteret håper at elever og lærere vil være positive til å være med på utprøvinger, slik at vi får et så godt som mulig grunnlag for å lage gode prøver. I etterkant av alle utprøvinger vil det bli kjørt grundige analyser for blant annet å luke ut oppgaver som ikke fungerer som de skal. Analysene gir oss også muligheten til å si noe om oppgavers vanskelighetsgrad før gjennomføring.

Utprøvingene vil også kunne gi oss svar på en del utfordringer vi står ovenfor med en digital prøve. Tidligere ble nevnt at del 1 uten hjelpemidler forsvinner, og det gjør at vi må utvikle andre typer oppgaver. Oppgaver som enkelt vil kunne løses ved hjelp av verktøy elevene søker opp på nett, vil neppe fungere godt i fremtiden. Forhåpentligvis vil vi fange opp slike oppgaver under utprøving. I tillegg er det viktig å se hvordan elevene klarer å kombinere bruken av det digitale gjennomføringssystemet og andre digitale programmer. Gjennomføringssystemet er fortsatt under utvikling, og vil den første tiden forutsette at elevene løser enkelte oppgaver i programmer som for eksempel GeoGebra og Excel. Løsningene vil da bli lastet inn som en fil i gjennomføringssystemet.

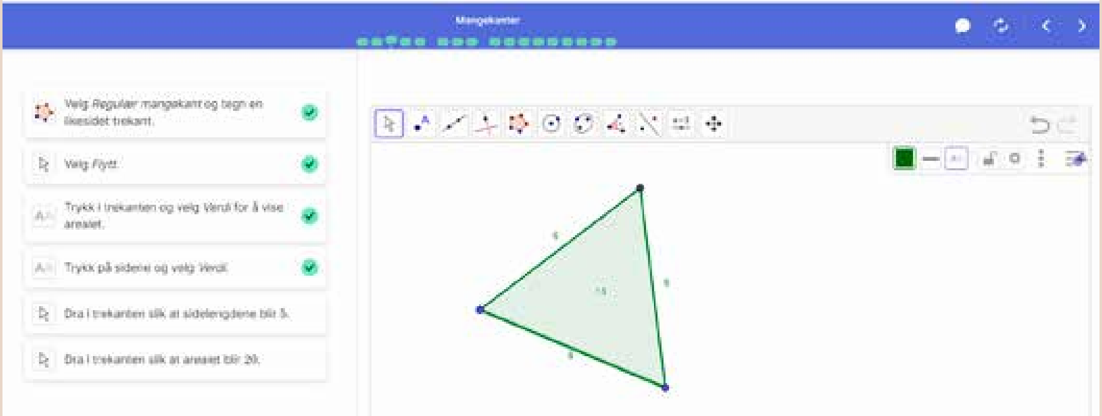
Nye GeoGebra-ressurser fra Matematikksenteret og Kikora

De to siste årene har Matematikksenteret og Kikora samarbeidet om å utvikle undervisningsopplegg i GeoGebra. Oppleggene er delt inn i to typer, Lær GeoGebra og Bruk GeoGebra, og består av oppgaver på Kikora.no og tilhørende lærerveiledninger på Matematikksenteret.no/GeoGebra. I denne artikkelen vil vi vise eksempler på oppgaver, samt hvordan arbeidet med oppgavene kan foregå i tråd med den nye læreplanen (LK20).

Kikora gir umiddelbar tilbakemelding underveis i oppgaveløsingen (Figur 1). Stegene er korte og konkrete, noe som gjør at elevene opplever mestring og motiverer dem til å fortsette.

Lær GeoGebra

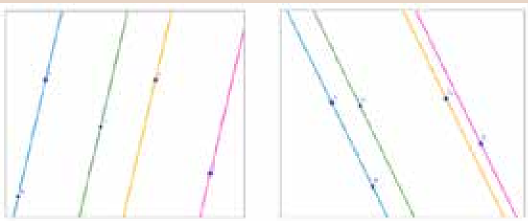
I Lær GeoGebra blir elevene kjent med verktøyene i GeoGebra. Målet er at de skal bli i stand til å bruke GeoGebra når de har behov for det. De første undervisningsoppleggene passer til alle elever, mens de siste er best egnet for elever på studiespesialiserende studieretninger. Lærerveiledningene sier noe om hva elevene må kunne på forhånd og hva de lærer om i opplegget. Vi anbefaler at alle elevene starter med



Figur 1: Oversiktsbilde i Kikora

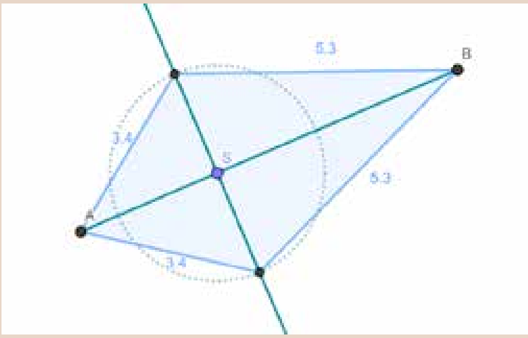
Geometri der de tegner figurer, endrer farger, viser navn og lignende. Vi oppfordrer til arbeid i par slik at elevene kan diskutere underveis.

Selv om Lær GeoGebra har fokus på opplæring i GeoGebra, legger mange av oppgavene opp til utforsking og samtale om matematiske egenskaper, noe som blir vektlagt i LK20. Elevene lærer å bruke verktøy i GeoGebra og å bevege på figurene for å observere hva som skjer. I Geometri skal for eksempel elevene tegne parallelle linjer og deretter bevege ulike deler av figuren (Figur 2). Elevene vil oppdage at linjene de har tegnet alltid er parallelle med den opprinnelige linjen, uansett hvordan de drar i figuren.



Figur 2: Parallelle linjer

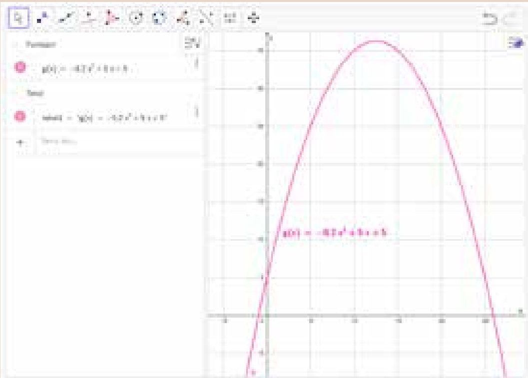
Et annet eksempel er i Mangekanter der elevene skal tegne og utforske en drage (Figur 3). Etter å ha lært om verktøyene de trenger for å tegne en drage i GeoGebra, skal de dra i dragen slik at den først blir en rombe og så et kvadrat. Elevene må bruke kunnskapene de har om geometriske figurerer for å resonnere seg fram til hva de må gjøre. De vil oppdage at dragen blir til et kvadrat når alle hjørnene ligger på sirkellinjen. Slik kan elevene erfare at alle kvadrater har en omskreven sirkel og et kvadrat er et spesialtilfelle av en drage og en rombe.



Figur 3: Drage

I mange av eksemplene skal elevene selv bevege på figurer, men i GeoGebra kan de også animere objekter. Små animasjoner er plassert i oppleggene for å hjelpe elevene med å forstå hva som skjer og hvorfor. Elevene kan lære mer om å animere objekter i Animasjoner.

Elevene skal kunne presentere arbeidet sitt i GeoGebra på en oversiktlig og ryddig måte. Det visuelle uttrykket har stor betydning og derfor skal elevene i mange av oppgavene endre farge, justere akser, gi nytt navn og lignende. I Funksjoner 1 skal for eksempel elevene dra funksjonsuttrykket fra Algebrafeltet til Grafikkfeltet og gi det samme farge som grafen (Figur 4). Da blir funksjonsuttrykket til en tekst som elevene kan plassere akkurat der de ønsker.



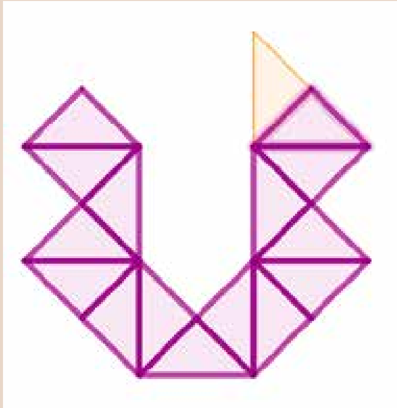
Figur 4: Graf med funksjonsuttrykk

Bruk GeoGebra

I Bruk GeoGebra er målet er at elevene skal utvikle en dypere forståelse av et matematisk tema. Lærerveiledningene til disse undervisningsoppleggene er grundige og viser hvordan oppgavene kan brukes i kombinasjon med klassediskusjon og andre aktiviteter. Det er likevel ikke noe i veien for at elevene kan gjøre oppgavene på egen hånd, selv om utbyttet ikke nødvendigvis blir det samme.

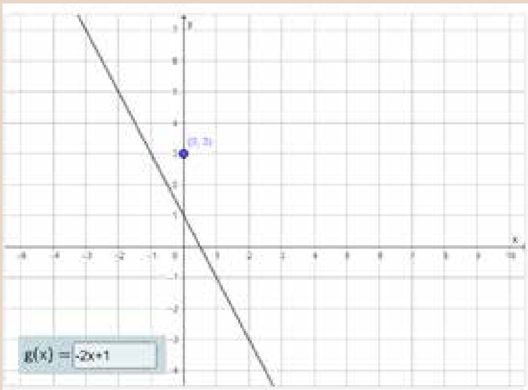
Undervisningsopplegget Speiling om linjer og sidekanter egner seg godt for barnetrinnet. Verktøylinjen i GeoGebra er tilpasset slik at elevene bare ser verktøyene som er nødvendige. I oppgavene kan de utforske speiling av punkter og figurer på en annen måte enn med papir og blyant. For eksempel skal elevene speile en figur slik at den dekker en annen figur. Det finnes mange måter elevene kan løse oppgaven på. Kikora vil godkjenne alle løsninger uansett hvor mange speilinger de gjør. Elevene kan gjøre oppgavene flere ganger og kanskje erfare at noen løsninger er mer effektive enn andre (Figur 5).

I Finn Funksjonsuttrykket 1 og 2 blir elevene kjent med stigningstall og konstantledd til



Figur 5: Speiling av trekant

lineære funksjoner på en annen måte enn med papir og blyant. For eksempel skal elevene finne en lineær funksjon som går nedover og gjennom et gitt punkt. Når elevene skriver inn et forslag til funksjonsuttrykk, tegner Kikora grafen. Da kan elevene se om grafen passer og eventuelt endre funksjonsuttrykket (Figur 6). Det finnes mange løsninger og Kikora godtar alle.



Figur 6: Finn funksjonsuttrykket

Oppsummering

I denne artikkelen har vi gitt noen eksempler på oppgaver hvor elevene lærer å bruke GeoGebra samtidig som de kan utvide sin matematiske forståelse. Oppgavene gir elevene varierte erfaringer mens de utforsker, resonnerer og argumenterer. GeoGebra støtter elevene i å utvikle sitt matematisk språk og gjør det naturlig å veksle mellom ulike representasjoner. Elever som lærer å kombinere ulike deler av programmet, vil ha et godt utgangspunkt for å utforske sammensatte problemer i matematikk. De kan for eksempel lage en funksjon for arealet til et rektangel og vise sammenhengen mellom areal og omkrets ved å kombinere Grafikkfeltet og Algebrafeltet.

På Matematikksenteret.no/GeoGebra ligger flere undervisningsopplegg som utfordrer elevene til å arbeide med flere matematiske kunnskapsområder samtidig, i GeoGebra. Samarbeidet mellom Kikora og Matematikksenteret vil fortsette og flere opplegg kommer.

Fra læreplan til praksis med MatteLIST

Vi oppfordrer alle til å bruke læringsformer med mulighet for samarbeid og høy elevaktivitet! Utforskende undervisning og LIST-aktiviteter er et godt utgangspunkt for å skape god praksis rundt overordnet del av ny læreplan.

www.mattelist.no

Gjennom MatteLIST-aktiviteter (www.mattelist.no) inviteres elevene til å bruke problemløsningsstrategier, de kan sammenligne og diskutere fremgangsmåter, bruke forskjellige representasjoner, forklare og begrunne, beskrive og argumentere. Og sist men ikke minst: Aktivitetene gir rom for å utforske – og å være kreativ!

Matematikksenteret har utviklet og prøvd ut utforskende undervisning med LIST-aktiviteter i mange år, og vi ser at dette styrker klasserommet som et læringsfellesskap hvor alle får mulighet til å bidra.

For både elever og lærere

Det finnes nå nærmere 450 LIST-aktiviteter på nettsiden www.mattelist.no. Aktivitetene er sortert på anbefalt trinn og nivå, og det er enkelt å navigere og søke på sidene. Det betyr at elevene selv kan gå inn og finne aktiviteter de syns er spennende å jobbe med.

Mange av Mattelist-aktivitetene har også en egen lærerveiledning som forklarer hvordan du kan jobbe best mulig med hver oppgave. Veiledningene er basert på metoder som gjør det enklere å følge opp og veilede elevene.

Dybdelæring

Når elevene jobber med LIST-aktiviteter, driver de med aktiv matematisk utforskning, og diskuterer egne løsningsstrategier med hverandre. Det finnes ikke noen enkel metode for å løse problemene. Elevene må resonnere og tenke selv. Og, om de tar feil, anses det som en naturlig del av læringsprosessen. Dette bidrar i stor grad til dybdelæring.

Utforsking

Når elevene får lov til å utforske et felt og diskutere hvordan de tenker – med hverandre – oppdager de at matematikk slett ikke er et fag som kun består av å huske hva læreren har sagt. I stedet blir det til et spennende og aktivt fag som består av utforskning på elevenes egne premisser.

Læringsfelleskap

Arbeid med LIST-aktiviteter handler også om å øve på å lytte til hverandres ideer, å stille spørsmål, å forsøke å forstå hva andre mener, og å komme med egne ideer: Alle elever skal få mulighet til å lære sammen, i et trygt læringsfelleskap.

Hva betyr LIST?
Som navnet sier, består MatteLIST av såkalte «LIST-oppgaver». LIST er en forkortelse for «Lav Inngangsterskel og Stor Takhøyde".
Det betyr at det skal være enkelt å komme i gang, samtidig som det er mulig å jobbe på et svært høyt matematisk nivå. Formålet med aktivitetene er at alle skal lære matematikk og oppleve mestring.
Aktivitetene er utviklet av NRICH ved University of Cambridge i England og Matematikksenteret.

Noa så 12 ben som gikk ombord i arken. Hvor mange dyr kunne Noa ha sett på vei ombord i Arken – om alle hadde ett ben? Noa er en typisk «LIST-aktivitet», og er utviklet med utgangspunkt i utforskende undervisning, noe som er grunntanken i ny læreplan. Se www.mattelist.no/171

Realfagsløyper: Kompetanseutvikling tilpasset ny læreplan

Skal dere i gang med implementering av ny læreplan i matematikk? Modulene i Realfagsløyper er skreddersydd for samarbeid og kompetanseutvikling i lærerkollegiet.

www.realfagsloyper.no

Her er noen tips og anbefalinger som kanskje gjør det enklere å ta i bruk Realfagsløyper.

Realfagsløyper er en samling kompetanseutviklingspakker som handler om hvordan vi bør undervise i matematikk for å gjøre elever i stand til å utvikle metoder og tenkemåter som fremmer større forståelse i faget. Modulene er bygd opp etter en fast struktur hvor kollegiet kan dele erfaringer, reflektere sammen og prøve ut nye metoder og opplegg.

I Realfagsløyper belyses sentrale tema og begreper som: dybdelæring, kjerneelementer, tverrfaglige tema og grunnleggende ferdigheter. Samtidig beskriver det fagdidaktiske innholdet arbeidsmåter som fremmer skaperglede, utforskertrang og engasjement.

Få en god start

Modulene i pakken «Realfagene i skolen» er et godt utgangspunkt for arbeidet med å forstå de ulike delene av den nye læreplanen. Kanskje spesielt modulen «Matematisk kompetanse». Den fokuserer på Kilpatricks modell for matematisk kompetanse, en modell som er sammenfallende med kjerneelementene i sin helhet; her handler det om å forstå hva det vil si å ha god matematisk kompetanse.

Moduler i dybdelæring

Dybdelæring er et sentralt begrep i det nye læreplanverket, men hva er egentlig dybdelæring, og hva er undervisning som fremmer det? Temaet «Dybdelæring» kan være en fin, praktisk introduksjon til begrepet. Modulene tar blant annet for seg hvordan dere kan legge til rette for at elevene over tid kan utvikle sin begrepsforståelse.

Programmering – nytt for alle

Teknologi og algoritmisk tenkning er relevant i alle fag, og i tillegg kommer programmering inn i nye læreplaner for både matematikk og naturfag. I Realfagsløyper er det flere moduler som knytter sammen dybdelæring og teknologi i realfagene. Det finnes også moduler som kopler didaktisk refleksjon til programmering og algoritmisk tenkning i både matematikk og naturfag.

Dette er Realfagsløyper
Realfagsløyper er et nettbasert kompetanseutviklingstilbud i fagdidaktikk som er skreddersydd for utviklingsarbeid i profesjonsfaglige læringsfellesskap, og er utviklet av Matematikksenteret og Naturfagsenteret. Realfagløyper er bygd opp med en fast struktur (http://realfagsloyper.no/slik-bruker-du-realfagsloyper), der deltakerne får mulighet til dele erfaringer, reflektere sammen og prøve ut nye metoder og opplegg. Gjennom Realfagsløyper utvikles en rikere forståelse av god pedagogisk praksis.

Utematematikk: Eksperimentering, lek og læring!

Skolegården og nærmiljøet som læringsarena egner seg godt til utforskende, praktiske og problemløsende oppgaver. Med utematematikk kan du skape variasjon i skolehverdagen både når det gjelder læringsarenaer, arbeidsmåter, læremidler og organisering.

Utematematikk betyr at arbeid med det faglige innholdet flyttes ut i nærmiljøet. På en praktisk og enkel måte kan elevenes erfaringer med «skolematematikken» knyttes sammen med situasjoner fra dagliglivet. Eksempler på dette kan være å utføre ulike målinger, bygging, sportslige aktiviteter eller å oppdage matematiske sammenhenger gjennom spill og lek.

Hva er viktig i utematematikk?

Utematematikk er noe annet enn å løse tradisjonelle matematikkoppgaver utendørs. Når elevene får muligheter til å nærme seg fagstoffet på andre måter enn det klasserommet gir, kan det bidra til at de opplever matematikkfaget mer levende, kreativ og inspirerende.

Ved å oppdage og ta i bruk matematikken som er omtalt og vist i lærebøkene, kan elevenes forståelse av matematiske begreper bli styrket. Elever kan få i oppgave å gå en avstand de mener er kilometer og etterpå måle avstanden de har gått. De får en praktisk erfaring med hvor lang en kilometer er.

Læring i fokus

Selv om undervisningen flyttes ut av klasserommet, bør faglig læring være i fokus. Utematematikken i seg selv fører ikke nødvendigvis til læring. For at læring skal skje må det være tydelig rammer, læreren må styre prosessen og arbeidet må være målrettet. Når tema eller aktivitet er valgt, må læreren stille seg spørsmål som:

Hva er det elevene skal lære?

Hva vil være faglige utfordringer for elevene?

Hvordan vil elevene løse oppgaven? Hvordan veilede uten å forklare?

Hvilke praktiske eller sosiale utfordringer kan oppstå?

Hvordan oppsummere aktiviteten ute/inne?

Hvordan forberede elevene for oppgaven de har arbeidet med ute?

Oppgavene som blir gitt bør være egnet for samarbeid og diskusjoner, gi rom for ulike løsningsstrategier og gjerne ha flere løsninger. Elevene kan lage hypoteser og undersøke om de stemmer. Elevene må reflektere over egne og andres løsninger og strategier, diskutere om strategiene de har valgt er hensiktsmessig, om løsningene fungerer i de gitte situasjonene og vurdere om de kunne løst oppgaven på en annen måte. Den praktiske tilnærmingen til fagstoffet gir rom for individuelle tilnærminger, samtidig som elevene skal samarbeide med andre for å finne felles løsninger. Faglige diskusjoner, resonnement og argumentasjon for løsninger vil øke forståelsen og skape motivasjon for faget.

Hvordan arbeide videre med fagstoffet?

For at læringsutbyttet skal bli best mulig, bør uteaktiviteten settes i en sammenheng. Det kan skje gjennom å følge denne strukturen: forarbeid, uteaktivitet og etterarbeid.

Forarbeid

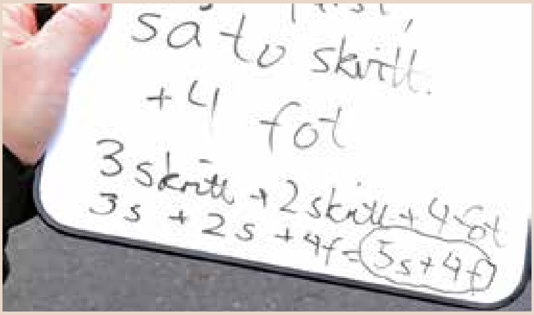
Lærer og elever planlegger og forbereder uteaktivitetene. Det kan for eksempel være arbeid med nytt fagstoff, repetisjon av begrep, lage eller finne fram utstyr.

Uteaktivitet

I uteaktivitetene arbeider elevene med praktiske oppgaver. Det kan for eksempel være å utforske omgivelsene (geometriske figurer), foreta datainnsamlinger, gjøre målinger, løse praktiske problem, eller gjennomføre en lek eller et spill. Elevene er fysisk aktive, kommuniserer og samarbeider, bruker ulike sanser, får opplevelser og gjør erfaringer. Læreren observerer, motiverer og kommer med hint eller spørsmål til hvordan elevene tenker.

Etterarbeid

Uteaktivitetene kan følges opp på ulike måter. Det kan skje gjennom diskusjon og videre arbeid knyttet til aktiviteten. Det gir grunnlag for refleksjon rundt det faglige innholdet og knytter det de gjorde ute til matematikken de arbeider med i for eksempel læreboka. Elevene trenger ofte hjelp til å se sammenhenger mellom aktivitet og teori og sammenhenger mellom de ulike temaene i matematikken.



Elevenes opplevelser har egenverdi

Alt som skjer ute trenger ikke alltid bli fulgt opp eller ha en direkte sammenheng med det som skjer inne i klasserommet. Opplevelsene elevene får knyttet til uteaktiviteter har også en egenverdi. Intensjonen bør likevel være å få fram en tydelig sammenheng mellom det som skjer inne og ute. Elevene bør oppleve at utematematikken og matematikken de arbeider med i for eksempel læreboka utfyller hverandre og egentlig er to sider av samme sak. Arbeidsformen gir muligheter for å tilpasse opplæringen til elevenes forutsetninger og gir elevene muligheter til å oppleve mestring. De erfarer at det finnes mange ulike tilnærminger til fagstoffet og at de kan ta i bruk flere sider av seg selv i arbeidet med å forstå matematikken.

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
Matematisk institutt UiO
Postboks 1053 Blindern
0316 OSLO

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det er en demokratisk rett å få en matematikkundervisning som setter en i stand til å delta aktivt som borger i et demokrati. Derfor vil Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) sette fokus på matematikk for alle.

Styret for LAMIS

Leder
Renate Jensen, Vestland

Barnetrinnet
Henrik Kirkegaard, Møre og Romsdal

Mellomtrinnet
Inger-Lise Risøy, Viken
Svend Eidsten, Viken

Ungdomstrinnet
Gerd Nilsen, Innlandet
Kari-Anne Bjørnø Karlsen, Viken

Videregående skole
Odd-Bjørn Lunde, Rogaland

Høgskole/universitet
Marianne Maugesten, Viken

Varamedlem
Hilde Svendsen

Medlemskontingent 2019

450 kr for enkeltmedlem
200 kr for husstandsmedlemmer
300 kr for studenter/pensjonister
975 kr for skoler/institusjoner

Organisasjonssekretær

Elin Unstad, org.sek@lamis.no

Lederen har ordet

Renate Jensen

Kjære LAMIS-kollega!

Dette nummeret av Tangenten har mange tekster som handler om viktige tema i LK20. Jeg håper at mange av tekstene er til nytte for deg i arbeidet med innføring av læreplaner i matematikk, og at tekstene i tillegg gir innspill som kan diskuteres sammen med kollegaer eller i lokallagsstyret.

2020 er året da alle som arbeider med skole er i læringsgropen. Det er våren da stengte skoler har vist nye muligheter for samarbeid for lærere og elever, og det har gitt oss økt digital kompetanse. Samtidig har det ført til forsinkelse i planlagt og påbegynt arbeid knyttet til nytt læreplanverk – LK20. Koronasituasjonen vi har vært og fortsatt er utsatt for kunne vi ikke forutsi, vi kunne ikke planlegge for den. Det gjelder ikke bare på skolene, men også LAMIS sitt arbeid. Denne våren og sommeren har vi måttet avlyse både finalearrangementet i UngeAbel og sommerkonferansen – to at de viktigste gjøremålene i årshjulet vårt. Novemberkonferansen 2020 er også avlyst, og der skulle LAMIS ha holdt to verksteder om blant annet tverrfaglig arbeid. Det vi sitter igjen med er likevel verdifulle erfaringer om å mestre i ukjente sammenhenger. Hvordan bruker vi disse videre? Og hvordan skal denne høsten og kanskje lenger se ut for en organisasjon som LAMIS?

Årsmøtet vårt den 14. september blir derfor svært viktig. Der vil vi legge frem arbeidsprogram med muligheter i året som kommer, det vil bli presentasjon av sommerkonferansen 2021 og et faglig innlegg av Anne Seland, som vant årets Holmboepris for sin innsats for matematikkfaget. Du kan lese mer om årsmøtet på side 58, og du finner viktige papirer på LAMIS sin hjemmeside. Vi håper å se mange på nett denne ettermiddagen. Verktøyet vi har for digitale møter har mange muligheter for innspill og spørsmål fra deltagerne.

I arbeidet med å ta i bruk læreplan i matematikk ønsker LAMIS å bidra med aktiviteter og tips til organisering. Hvordan arbeide med oppgaver som inkluderer så mange elever som mulig i det ordinære? Hva blir læreren sin rolle i oppgaver som har lav inngangsterskel men stor takhøyde – der elever er aktive og medvirkende? LAMIS har mange gode ressurser i vår digitale oppgavebank og i oppgavene i UngeAbel. «Alle i klassen kan være med å utforske!» er et utsagn hentet fra nettopp UngeAbel. På vår nettside finner dere ulike oppgavetyper fra innledende runder, semifinale- og finaleoppgaver samt fordypningsoppgaver, men felles er at oppgavene er problemløsende og utforskende, de har ofte flere løsninger og representerer ulike temaer. Fordypningsoppgavene utfordrer elevenes utholdenhet, krever at de skal uttrykke seg skriftlig og fordrer bruk av ulike representasjoner. LAMIS sentralstyre arbeider for tiden med søknader om midler for å kunne ruste opp vår digitale løsning. Vi er også i dialog med våre danske kollegaer om å oversette et flott materiell om tverrfaglige tema.

Ta kontakt med leder@lamis.no hvis du ønsker å engasjere deg i lokallagsarbeid eller har gode ideer til arbeid LAMIS bør engasjere seg i dette skoleåret. Vi må tenke på alternative løsninger sammen. På vår nettside finner du oversikt over våre lokallag. Det å være med i et lokallagsstyre gir gode kontakter og muligheter for faglig og didaktisk påfyll gjennom lokallagskvelder og deltagelse på LAMIS sin sommerkonferanse og nasjonale samlinger.

Tilslutt vil jeg ønske dere lykke til med oppstart av skoleåret og minne om UngeAbel for elever på 9. trinn som starter i november. Viktige datoer dette skoleåret er:

3.–27. november 2020: 1. runde nasjonalt gjennomføres

4.–28. januar 2021: 2. runde nasjonalt gjennomføres

9. april 2021: Frist for innlevering av fordypingsoppgave. Gjelder kun semifinaledeltakerne. Alle har mulighet til å jobbe med oppgaven, men det er kun de 16 semifinaledeltakerne som skal levere inn.

20.–22. april 2021: Semifinale og finale.

Løsninger på oppgaver fra UngeAbel

Utvalgt av Gerd Nilsen

Her er løsningen på de to oppgavene fra UngeAbel som sto på trykk i forrige nummer av Tangneten. Ny utfordring på side 72.

Oppgave 1: Ti mynter

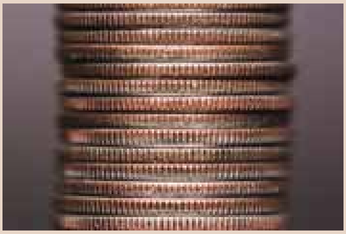
Myntenheten i Norlandia heter NOR, og 1 NOR tilsvarer 100 cent. Det fins fem ulike typer mynter i Norlandia, med verdiene 5 cent, 10 cent, 25 cent, 50 cent og 1 NOR.

Lise har ti mynter. Til sammen er myntene hennes verdt 6 NOR og 25 cent. Hvilke mynter kan Lisa ha? Finn så mange løsninger som mulig.

Løsning på oppgaven

Det er totalt fem løsninger, som vist i tabellen:

NOR-mynter	5	10	25	50	100	Antall	Verdi
Løsning 1	3	1			6	10	625
Løsning 2			5		5	10	625
Løsning 3	1	2		2	5	10	625
Løsning 4			3	3	4	10	625
Løsning 5			1	6	3	10	625



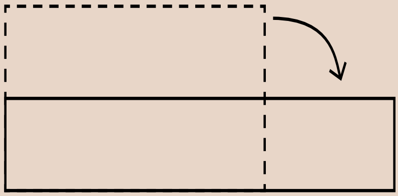
Oppgave 2:

Arealer som endrer seg

Lengden av den lengste siden i et rektangel øker med p %, mens lengden av den korteste siden i rektangelet minker med p %.

Med hvor mange prosent endrer rektangelets areal seg dersom p er 50?

Hvilken verdi må p ha for at rektangelets areal skal minke med 16 %?



Løsning på oppgaven

Hvis vi kaller de opprinnelige sidelengdene for a og b, blir arealet ab. Den nye langsiden blir da 1,5a og den nye kortsiden blir 0,5b, og det nye arealet blir $1{,}5a \cdot 0{,}5b = 0{,}75 \cdot ab$. Arealet minker altså med 25 %.

Med p % istedenfor 50 %, blir de nye sidelengdene lik $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ og $b\left(1-\frac{p}{100}\right)$, og det nye arealet dermed lik

$$ab\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)$$

$$=ab\left(1-\frac{p}{100}\cdot\frac{p}{100}\right)$$

$$=ab\left(1-\frac{p^2}{10000}\right)$$

En ønsket reduksjon på 16 % betyr at $\frac{p^2}{10000}=0{,}16$. Da må $p^2 = 1600$, det vil si at $p = 40$.

Et alternativ kan være å lage et regneark som, for ulike verdier av p, regner ut de nye sidene og det nye arealet på grunnlag av et konkret rektangel, f. eks $a = 10$ og $b = 7$.

Så kan man prøve seg fram med ulike p-verdier til man finner arealendring = 16%.

Gammel langside	Gammel kortside	Gammelt areal	p-verdi	Ny langside	Ny kortside	Nytt areal	Arealendring i %
10	7	70	10	11,0	6,3	69,3	1 %
10	7	70	20	12,0	5,6	67,2	4 %
10	7	70	30	13,0	4,9	63,7	9 %
10	7	70	**40**	14,0	4,2	58,8	**16 %**
10	7	70	50	15,0	3,5	52,5	25 %
10	7	70	60	16,0	2,8	44,8	36 %
10	7	70	70	17,0	2,1	35,7	49 %

Vinnere UngeAbel 2019–2020

Samfundets skole i Egersund fikk høyest poengsum etter de to innledende rundene i konkurransen. De ble dermed kåret til vinnere av dette spesielle året.

I slutten av april 2020 skulle nesten 80 elever og 20 lærere vært samlet til flotte dager på Gardermoen med semifinale og finale i UngeAbel. På grunn av situasjonen med korona måtte vi avlyse dette arrangementet.

LAMIS har derfor kåret førsteplass, andreplass og tredjeplass i konkurransen på bakgrunn av samlet poengsum i runde 1 og runde 2. I tillegg har vi sendt fylkesvinnerne en oppmerksomhet for å ha vunnet fylket sitt.

Førsteplassen gikk til 9. trinn på Samfundets skole i Rogaland. Andreplassen gikk til 9D på Ugla skole i Trøndelag. Tredjeplassen gikk til 9 Svart ved Verket skole i Østfold. Vi gratulerer både dem og alle de andre fylkesvinnerne.

Brev fra vinnergruppa

Det er åtte elever i gruppen som har deltatt i UngeAbel fra Samfundets skole i Egersund. Under forberedelsen til konkurransen har alle elevene løst oppgavene sammen. Som lærer har jeg meget gode erfaringer. Det er lærerikt og givende å observere når en hel gruppe arbeider sammen mot et felles mål. Dette gjelder både de to innledende rundene og arbeidet med fordypningsoppgaven, presentasjonen og utstillingen som klassen var godt i gang med.

Elevene sier blant annet:

- Klassen vår har lenge visst om at i 9. klasse pleier man å delta i UngeAbel, og mange har gledet seg til dette.
- De to innledende rundene i UngeAbel var krevende men utrolig lærerike.
- Vi synes det har vært både kjekt og sosialt.
- Vi har kommet fram til løsninger sammen, og fått en god mestringsfølelse.
- Det er gøy å bli satt litt på «prøve» av og til og måtte tenke litt «utenfor boksen».
- Alle var med og hjalp til. Vi tenkte høyt og alene, men mest av alt sammen.
- Jeg tror ikke vi hadde klart oss så bra uten det gode samarbeidet vi fikk oppleve under disse rundene.
- Det var gøy da vi fikk vite at vi hadde scoret full pott i del 1, og at vi var fylkesvinner.
- Jeg ble ekstra overrasket da vi fikk full pott i begge rundene.
- Vi har kost oss på veien og vært spente når vi har ventet på resultatene.

Vi synes har vært stas å være med i UngeAbel.

Hilsen lærer og elever ved Samfundet skole.

Digitalt årsmøte med faglig innlegg 14. september 2020

Renate Jensen, leder LAMIS

Årets sommerkonferanse i Sandefjord ble dessverre avlyst på grunn av situasjonen vi nå har i forhold til reise og store forsamlinger. Det var en vanskelig avgjørelse fordi sommerkonferansen er så viktig i LAMIS sitt arbeid. LAMIS sentralstyre vurderte likevel at det å utsette konferansen til for eksempel januar ikke var et godt alternativ. Sommerkonferansen handler om faglig input, men kanskje like mye om å danne nettverk og treffe gode LAMIS-kollegaer i sommervarme og fine omgivelser. Vi planlegger derfor sommerkonferanse i 2021, og håper å treffe både erfarne sommerkonferansedeltagere og mange nye i august neste år.

Årsmøtet 2020 vil bli arrangert digitalt den 14. september kl. 17–19. Årsmøtepapirene finner dere på vår hjemmeside. Der legges det også ut lenke til nettmøtet. Lenken blir også sendt til alle lokallag. Vi minner om at alle lokallag må stille med en deltager. Hvis det er mulig å gjennomføre på en trygg måte, oppfordrer vi lokallagene til å ha et lokallagsmøte denne ettermiddagen, og delta sammen på årsmøte som lokallagsstyre.

På årsmøtet vil det i tillegg til de vanlige sakene være presentasjon av neste års sommerkonferanse og et faglig innlegg av Anne Seland, årets vinner av Holmboeprisen.

Litt om Sommerkonferansen 2021

Det er LAMIS sitt lokallag i Oslo og Follo som i disse dager er i gang med planlegging av LAMIS sin sommerkonferanse i august 2021. I komiteen sitter disse flotte folkene: Tone Skori, Hilde Eik Svendsen, Tove Branæs, Brynhild Farbort, Anders Baumberger og Hanan M. Abdelrahman. Sentralstyret vil også bidra i arbeidet med det faglige innholdet og hjelp til påmelding og annet praktisk arbeid.

Tittelen på sommerkonferansen er "Matematikk på kryss og tvers", og hovedfokuset vil være tverrfaglighet. Arbeidet med programmet er i startfasen, men komiteen planlegger for interessante plenumsforedrag og verksteder der deltagerne får være aktive og medvirkende. Datoene er 6.–8. august, så noter i kalenderen, og så håper vi at det vil være mulig å arrangere neste sommer.

Komiteen har valgt et flott sted for konferansen, Sørmarka konferanse hotell og Lillebru Gård. På Sørmarka konferansehotell blir det faglig input om tverrfaglighet både som pedagogisk prinsipp og tema. Deltagerne vil få gode måltider og bo i vakre landlige omgivelser, men allikevel ganske sentralt. Det går direkte buss til hotellet fra bussterminalen i Oslo.

Det blir sosiale aktiviteter for

deltagerne på gården/låven til Anders Baumberger, og muligens en tur til utsiktstårnet Kjerringhøgda, et av de flotteste utsiktspunktene i Østmarka. Det blir også andre aktiviteter som katapultkasting. Det planlegges for vertikal jobbing på de store vinduene i låven, mens hester og muligens elg, hegre eller rådyr passerer forbi. Vi har virkelig noe å glede oss til faglig, og ikke minst mange muligheter for å snakke matematikk og knytte gode kontakter.

På årsmøtet vil Anne Seland ha et faglig innlegg. Hun fikk Holmboeprisen for 2020, og arbeider som lærer ved Flekkefjord videregående skole. Hun beskrives som en svært dyktig, grundig og engasjert lærer, med en uvanlig stor arbeidskapasitet. I sin undervisning er hun opptatt av å fremme elevenes matematiske forståelse fremfor pugging av formler. Hun er alltid på jakt etter nye undervisningsmåter som kan gi elevene en dypere forståelse av mønstre, systemer og sammenhenger i matematikkfaget. Vi gleder oss veldig til å høre Anne Seland den 14. september, og håper at mange er med oss på nett denne ettermiddagen.

Bank, bank – full av fart

Oppgavebank og skolestart

Henrik Kirkegaard

Da er vi klar for et nytt skoleår. Gjensynsgleden blant elevene er som regel stor, og de har mye å fortelle hverandre. Derfor er det fint å starte skoleåret med litt problemløsningsoppgaver. Elevene får samarbeide og får muligheten til å være sammen igjen.

Oppgavene kan gjøres utendørs eller innendørs, med hele klassen eller som stasjonsarbeid. De kan brukes fra 1. trinn til 7. trinn. Du som lærer tilpasser bare oppgavene etter trinn og nivå. Oppgavene er også en god start på tankegangen som fagfornyelsen legger opp til.

Jeg foretrekker å ha med meg hele klassen ut, selv om været kan være så mangt her på Nord-Vestlandet.

Oppgavene er hentet fra LAMIS sin egen oppgavebank (se www.lamis.no for mer informasjon.)

Bondesjakk

Tegn opp et kvadrat med kritt og del det i ni like store kvadrater. Du kan også markere det på andre måter ved for eksempel å plassere en stein i sentrum av hvert av de ni kvadratene.

Del elevene i grupper på fire. Gruppene spiller da to grupper mot hverandre. Etter noen spill bytter gruppene slik at de spiller mot noen andre elever.

Det skal ikke settes kryss og sirkel. Elevene er kryssene og sirklene. Første gruppe plasserer en spiller/kryss på en rute i kvadratet. Den andre gruppen plasserer nå en spiller/sirkel i en rute. Videre går det etter tur til alle spillerne er plassert. Den gruppen som først får tre spillere på rad vannrett, loddrett eller diagonalt har vunnet. Har ingen av gruppene klart dette, flytter de etter tur en av sine egne spillere til den ledige ruten. Det kan være lurt å begrense antall flytninger til fem per gruppe.

Undersøk: Er det best å spille tre mot tre, fire mot fire eller tre mot fire (hvor man byttes til å være tre eller fire)?

Klunse

Del elevene i grupper på tre eller fire.

Hver spiller får tre fyrstikker eller liknende. Alle tar hendene på ryggen. Hver spiller legger nå null, en, to eller tre fyrstikker i den ene hånden, knytter den og holder den frem foran seg. Ingen må se hvor mange fyrstikker det er i noen av hendene. Etter tur gjetter spillerne på hvor mange fyrstikker det er til sammen i de fremstrakte hendene. Når et antall er nevnt

kan dette antallet ikke velges av andre spillere.

Den som gjetter riktig antall, legger bort en fyrstikk. Vinneren er den som først blir av med fyrstikkene sine.

Hanois/Brahmas tårn

Tegn tre kvadrater med kritt etter hverandre. Klipp ut fem sirkler med ulik diameter. Enklest å bruke fem A3-ark, la det første arket være A3, klipp neste arket litt mindre i lengden og bredden, neste arket igjen klippes enda litt mindre og så videre. Da har du forhåpentlig fem rektangler i ulike størrelser.

Del elevene i grupper på to, tre eller fire.

Jenten/gutten over elven

Tegn med kritt en elv eller marker den på annen måte. En rokkering eller et hoppetau kan være båt.

Del elevene i grupper på fire. En elev blir jente/gutt, en elev blir hund, en elev blir katt og en elev blir fisk.

Erlend/Ida skulle besøke bestefaren sin som bodde på andre siden av elven og gi ham en kurv med fisk som han hadde fisket. Med seg på turen hadde han hunden og katten sin. Han hadde det ikke lett, for hunden ville gjerne ta katten og katten var ute etter fisken. Derfor kunne aldri hunden og katten være alene og heller ikke katten med fisken. Over elva måtte han ro den lille båten sin, og i den var det bare plass til han og hunden, eller han og katten eller han og kurven med fisk. Men over elva skulle han med alle sammen uansett hvor mange ganger han måtte ro.

Ja, hvor mange ganger måtte han ro over?

Legenden forteller

Ved jordens begynnelse plasserte Gud tre alen høye stolper på en messingplate ved tempelet Benares, verdens midtpunkt. På en av stolpene plasserte han 64 gullskiver. Den største lå nederst, og så ble platene mindre og mindre oppover søylen. Dette kalles Brahmas tårn eller Tårnet i Hanoi. Dag og natt, uten stans, flytter prestene gullskiver fra den ene stolpen og over på den andre etter Brahmas uforanderlige regler: Bare en plate kan flyttes av gangen, og det skal aldri ligge en større plate oppå en mindre. Målet er å få flyttet hele tårnet over til en av de andre stolpene. Når dette er gjort, vil verden gå under og bli til støv.

La elevene begynne med bare tre «plater», slik de forstår spillets gang. Når de er ferdige med dette, prøver de seg med fem «plater».

Undersøk: Hvor mange trekk trenger du med tre plater, fire plater, fem plater. Hva med ti plater?

Oppgave fra UngeAbel
Utvalgt av Gerd Nilsen

Ny utfordring

Denne oppgaven er hentet fra UngeAbel 2019-2020 innledende runde 1.

Osten

En ost har form som en kube og har et volum = 125 cm³.

a) Anta at osten skjæres med parallelle snitt i enten *to like store biter* eller *tre like store biter*

Finn det samlede overflatearealet for begge disse tilfellene.

b) Anta istedenfor at vi deler osten i like store biter med *n* parallelle snitt.

Finn et uttrykk for det samlede overflatearealet vi da får.