Korden

Eit krevjande år for skulen

Det nærmar seg jol og me legg bak oss eit krevjande år der kombinasjonen av Coronavirus og innføring av ny læreplan har gitt mange lærarar større arbeidsbyrde enn vanleg. Det har vore vanskeleg å gje elevar eit fullgodt pedagogisk og sosialt tilbod, særleg då skular var stengde. Erfaringane har òg vist at ein må ta medvitne grep i lærarutdanninga. Arbeidskrav knytt til praksisperiodane og den nye femårige lærarutdanninga, der alle studentar skal skriva masteroppgåve, kan føra til stort press på skular og lærarar fordi studentar er forventa å samla data gjennom intervju, observasjon eller elevarbeid.

Samstundes møter lærarar aukande arbeidskrav gjennom omfattande møteverksemd, corona-relatert ekstraarbeid og dokumentasjon, og dei skal ta etterutdanning. Lærarutdanninga må ta omsyn til at arbeidskapasiteten til lærarar er under press, og det bør mellom anna få konsekvensar for krava til studentar si datainnsamling. Alle kan ikkje intervjua lærarar. Masteroppgåver kan byggja på analyse av politiske styringsdokument, læreplanar og læreverk. Det kan til dømes vera fruktbart å samanlikna norske og utanlandske lærebøker eller ulike digitale læremiddel. Studentar kan samarbeida om datainnsamling og velja ulike vinklingar på masteroppgåvene eller skriva i lag, eller dei kan inkluderast i forskingsprosjekt og få tilgang til data som allereie er samla inn. Kravet om at alle lærarstudentar skal ha master er ein styrke fordi studentar vert kvalifiserte gjennom forskingsbasert innsikt i praksis. Men det er krevjande og krev klokt samspel mellom lærarutdanning og skule der ein har respekt for lærarar sine arbeidsvilkår. Målet må vera gjensidig kompetanseheving der samarbeidet er til støtte for skulen sin praksis.

Eit døme på kompleksiteten i *lærar*yrket kjem fram i det Dalvang skriv om matematikkvanskar. Ho viser til fleire paragrafar i Opplæringslova om tiltak og rettigheiter for elevar med matematikkvanskar. For å førebygga matematikkvanskar er god matematikkundervising eit viktig svar, men *lærarar må òg* kunna kartlegga eventuelle vanskar og finna årsaker og gode tiltak i samarbeid med skuleleiing og rådgjevar, pedagogisk-psykologisk teneste (PPT) og helsevesen (barne og ungdomspsykiatri, BUP).

Etter eit år som dette vert Holmboe-prisen ekstra viktig. Det er ein årleg pris som går til ein lærar eller ei lærargruppe som utmerkar seg med engasjement og gode grep for å legga til rette for elevar si matematikklæring og utvikling av eit positivt syn på faget. Du kan lesa meir om prisen i dette bladet. Alle kan nominera, så me oppmodar elevråd, foreldre, kollegaer og skuleleiing til å tenkja på aktuelle kandidatar!

Risøy

«Matte er alt»

Intervju med elever fra 5. trinn på Krokstad skole

Vi er i gang med et nytt skoleår som for oss som skole innebærer harmonisering inn i ny kommune, gult nivå med hensyn til korona og ny læreplan. Det var ikke helt slik vi hadde sett for oss oppstarten til LK20, men vi tar grep og er på god vei med fagplanene i matematikk. Vi ser på det som en stor fordel at vi har vært tilknyttet Nedre Eiker kommune og har vært aktivt med i realfagssatsingen som realfagskommune i 2,5 år. Det ble interessant å «måle temperaturen» hos elever på 5. trinn for å høre litt hva de tenker om matematikkfaget. Vi ønsker å ta hensyn til elevenes stemme når vi nå skal flette overordnet del, verdier, tverrfaglighet, dybdelæring, fagplaner og kjerneelementer sammen til lærernes praksis i klasserommene. Det er i tråd med overordnet del av LK20, som viser til at: «Elevmedverknad må prege praksisen i skolen. Elevane skal både medverke og ta medansvar i læringsfellesskapen som dei skaper saman med lærarane kvar dag» (Utdanningsdirektoratet, 2020b).

Jeg valgte å lage et spørreskjema til to av klassene på 5. trinn, hvorpå jeg i etterkant plukket ut fem elever som ga utfyllende kommentarer til det de hadde svart. Jeg har valgt å slå sammen de spørsmålene som fikk sammenfallende svar.

Inger-Lise Risøy
Krokstad skole
inger-lise.risoy@drammen.kommune.no

Spørsmålene var:

1. Hvordan vil du beskrive matematikk?
2. Bruker du matematikk utenom skolen? Til hva?
3. Hvorfor trenger du å lære om matematikk?
4. Hvordan liker du å jobbe i matematikktimene?
5. Hvilke oppgaver liker du å jobbe med?
6. Hva har du lyst til å prøve ut i matematikktimene?
7. Hvordan lærer du best? (Alternativer: Når læreren forklarer, når jeg samarbeider med læringspartneren eller gruppa mi, når jeg jobber digitalt, eller når jeg jobber alene.)

Jeg har skrevet et sammendrag av det elevene har svart skriftlig, og av den samtalen som jeg hadde med dem i etterkant. Bildene er tatt med utgangspunkt i hvordan de ser ut når de endelig har løst en vanskelig grublis!

Leah i 5D

«Jeg vil beskrive matte som et eget språk. Det er annerledes enn norsk, og når vi snakker i andre fag. Det blir et mattespråk, ofte med andre ord og tall, som kan være lett hvis man kan det fra før, eller vanskelig når vi lærer nye ting. Jeg bruker matte utenom skolen når jeg lager

mat, går i butikken, gjør lekser eller spiller et instrument. Når jeg spiller, bruker jeg noter og teller takter. Når jeg henger opp bilder, bruker jeg vinkler, og når mamma og jeg henger opp bilder, bruker vi en sånn rett ting (vater) med en boble inni. Når bobla er midt mellom strekene, er det rett. Jeg trenger å lære om matematikk, fordi matte er ALT. I alt vi gjør, liksom. Jeg liker best å jobbe med en samarbeidspartner eller i gruppe. Da kan vi snakke sammen og finne løsninger sammen. Når vi jobber med grubliser, syns jeg alltid det er best å ha noen å snakke med. Jeg lærer best når jeg kan snakke med andre. Jeg liker utfordringer, litt avanserte oppgaver i tillegg til utregninger, brøk, klokkeoppgaver, spill og mattekort.»

Hamza i 5D

«Jeg vil beskrive matematikk som en måte å finne ut tall på, og tenker at nesten all matematikk handler om tall. Jeg bruker matematikk for å finne ut når jeg må hjem, for da bruker jeg hoderegning for å regne tiden og finne ut når jeg må starte med å gå. Jeg bruker også hoderegning når jeg skal i butikken eller finne ut hva noe koster, for å finne ut hvor mye jeg skal betale eller få igjen. Hjernen jobber da. Jeg trenger å lære matematikk fordi nesten alt jeg og andre gjør, har noe med matematikk å gjøre.

Jeg liker best å jobbe alene i stillhet og lærer best når læreren forklarer, men jeg liker å lære bort til en læringspartner. Jeg liker vanskelige oppgaver, men jeg liker også mattekort.»

Pernille i 5A

«Matematikk er å bli varm i hue! Jeg finner det ikke ut med en gang, må tenke litt først, og det er slitsomt hvis det tar lang tid. Jeg bruker matematikk når jeg skal på cheerleadingtrening. Jeg vet når treninga starter, og hvor lang tid jeg bruker dit. Da må jeg regne på når jeg skal starte hjemmefra for å komme dit. Man trenger å lære

å regne. For hvis kassa på butikken blir ødelagt, da må jeg kunne regne selv. Jeg liker å samarbeide med andre, ikke alene. Jeg lærer når jeg hører hvordan andre tenker, og vi kan hjelpe hverandre. Oppgaver jeg liker å jobbe med, er pluss og minus, så liker jeg Kahoot. Jeg kunne tenke meg et matteprosjekt. Da kan vi samarbeide og holde på med oppgaver over lengre tid.»

Haakon i 5A

«Matematikk er noe som hjelper deg med nesten alt – tv og telefon er laget av matte. Fordi det må koding til for at vi kan bruke telefonen. Alle trenger å lære matematikk fordi alle jobber har matematikk i seg. Pappa bruker koding i sin jobb. Jeg bruker matematikk når vi kjører bil. Jeg ser på bensin- og dieselprisen på morgenen, og så ser jeg om den har endret seg, neste gang vi kjører. Da regner jeg ut forskjellen, noen ganger med overslag og andre ganger helt nøyaktig. Jeg bruker matematikk i butikken når jeg handler, for å finne ut hvor mye jeg må betale. Jeg lærer best når læreren forklarer, eller ved å jobbe i gruppe. Det er morsommere å jobbe sammen, og jeg kan forklare for andre. Jeg bruker også chatten på Teams og spør de andre eller læreren hvis det er noe jeg ikke skjønner med egentreningen som vi har hjemme. Jeg liker godt å jobbe med vanskelige oppgaver og med oppgaver hvor jeg må tenke mye.»

Julianne i 5A

«Jeg vil beskrive matematikk som regning, tall og masse grubling. Vi grubler ofte, mye mer enn på den forrige skolen min, og det er bra. Da blir vi smartere og kan komme oss videre i livet. Jeg bruker matematikk når jeg skal bake og lage mat. Da måler jeg med desiliter og liter. Hvis jeg bygger ting på sløyden, da bruker jeg centimeter, desimeter og meter. Og hvis jeg går eller sykler, kan det bli kilometer. Jeg syns det er gøy, og det er viktig å bruke matematikk mye for å klare ungdomsskolen og bli smart. På skolen liker jeg best å jobbe i gruppe, fordi de andre vet kanskje noe som ikke jeg vet. Da kan jeg lære noe av dem og de noe av meg. Hodet kommer liksom mer i gang. I går måtte jeg faktisk ringe søskenbarnet mitt, fordi jeg kom til en oppgave hjemme på Kikora som var skikkelig vanskelig. Men jeg skjønte ikke forklaringen ☺

Jeg liker å jobbe med de oppgavene som er litt vanskelige eller grubliser, for da lærer jeg mer. Jeg lærer ikke så mye når jeg kan ting fra før. Jeg koder litt på kode.org hjemme, og gleder meg til vi skal programmere og kode på skolen.» I spørreskjemaet spurte jeg også om hvordan de trodde det var å være matematikklærer. Her er noen av svarene som kom: «Det må være gøy, fordi når man vil bli mattelærer, må man jo syns det er gøy.» «Det må være vanskelig også, fordi alle elever forstår ikke med en gang, og da blir det litt jobb for at de skal forstå.» «Det må være stressende, for dere skal jo finne på ting og vanskelige ting også.» «Så kan det være travelt når flere skal ha hjelp samtidig. Så er alle forskjellige, og da kan det bli vanskelig å lage oppgaver.»

I etterkant har jeg reflektert over hva elevene har skrevet, og snakket med meg om. Jeg har bare spurt elever i to klasser på 5. trinn, og jeg kjenner at jeg blir nysgjerrig på å spørre flere. Jeg håper at det elevene har svart, kan være representativt for skolen vår. Da er vi godt i gang med LK20 sett i sammenheng med fagets relevans og verdier. Elevene skal få mulighet til å oppleve at faget er relevant, ved å reflektere, tenke, resonnere og stille spørsmål.

> Matematikk skal bidra til at elevane utviklar evne til å jobbe sjølvstendig og samarbeide med andre gjennom utforsking og problemløysing, og kan bidra til at elevane blir meir bevisste på si eiga læring. Når elevane får høve til å løyse problem og meistre utfordringar på eiga hand, bidreg dette til å utvikle uthald og sjølvstende. (Utdanningsdirektoratet, 2020a)

Det var interessant at nesten alle elevene i de to klassene svarte at de lærte best sammen med andre og likte å samarbeide. Vi skal fortsette å jobbe for et godt læringsmiljø og en positiv kultur, slik at elevene blir trygge og sammen tar ansvar for læringsfellesskapet. De erfaringene de har med læringspartnere og samtaler i matematikkfaget, tar de med seg i alle andre fag i skolen. *Elevar tenkjer, erfarer og lærer i samspel med andre gjennom læringsprosessar, kommunikasjon og samarbeid* (Utdanningsdirektoratet, 2020b).

Det blir viktig for oss som veiledere og lærere at samtalene med læringspartnere, i gruppe eller i hel klasse, blir målrettet og får en viss struktur. Kazemi og Hintz (2019) gir mange gode tips til dette i sin bok om målrettet samtale, hvor de viser til at klassesamtaler styres av fire prinsipper. De viser til at diskusjoner eller samtaler bør føre til at det oppnås matematiske mål, og elevene må lære hvordan de deler ideer på en måte som gjør at det blir nyttig for andre. Lærernes fokus blir da å veilede elevene slik at alle hører på hverandre og blir involvert i det felles matematiske målet. Det blir viktig at læreren fremhever at alles mening er verdifull og kan hjelpe til forståelse.

På vår skole ser vi fram til å fortsette å arbeide aktivt med LK20 i samarbeid med engasjerte og reflekterte lærere og elever.

Referanser

Kazemi, E. & Hintz, A. (2019). *Målrettet samtale. Hvordan strukturere og lede gode, matematiske diskusjoner*. Oslo: Cappelen Damm AS.

Utdanningsdirektoratet (2020a). *Fagrelevans og sentrale verdiar*. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/fagets-relevans-og-verdier

Utdanningsdirektoratet (2020b). *Overordna del. Eit inkluderande læringsmiljø*. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/3.-prinsipper-for-skolens-praksis/3.1-et-inkluderende-laringsmiljo/?kode=mat01-05&lang=nno

van Bommel, Palmér

Matematik i soffan

Kombinatorik i förskoleklass

Intressanta elevsamtal uppstår när olikfärgade björnar ska kombineras. Ett systematiskt utforskande i en välkänd kontext leder till resonemang och argumentation i arbetet. Elevernas egna dokumentationer visar att de både använder och går mellan olika representationsformer.

På hur många olika sätt kan man kombinera tre smaker i en kulglass? På hur många olika sätt kan man kombinera två par byxor med tre tröjor? Frågorna utgår från två relativ vanliga kontexter för formell introduktion i kombinatorik. I den här artikeln vill vi dela med oss av erfarenheter från projektet *Problemlösning i förskoleklass*. En av de genomförda problemlösningsuppgifterna med matematikinnehållet kombinatorik var följande:

> På hur många olika sätt kan tre björnar sitta i en soffa?

Denne teksten er tidligere trykt i Nämnaren, nr. 3, 2016.

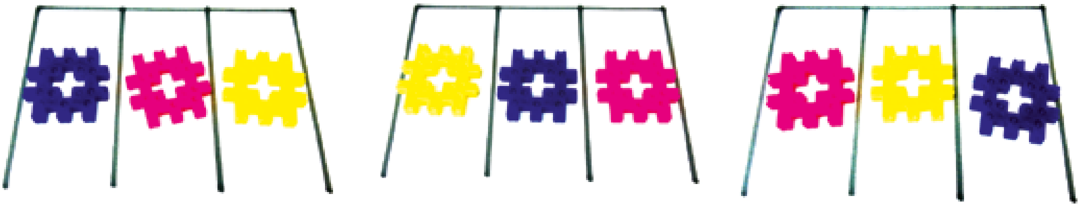
Jorryt van Bommel
Karlstads universitet
jorryt.vanbommel@kau.se

Hanna Palmér
Linnéuniversitetet
hanna.palmer@lnu.se

Totalt arbetade vi med åtta förskoleklasser och cirka 145 elever. Just denna uppgift genomfördes av 87 elever. Vi berättar här om genomförandet, analys av elevlösningar samt om en digital vidareutveckling av uppgiften.

Kontextens betydelse

Problemuppgiften introducerades genom att vi berättade om tre björnar som ville sitta i en soffa med tre platser. Kontexten blev således en välkänd situation vilket Geetha Ramani och Celia Brownell har visat påverkar elever positivt när det gäller engagemang, lärande och samarbete. I ett tidigare projekt i förskoleklass använde Hanna Palmér och Andreas Ebbelind en kombinatorikuppgift kopplad till tre olikfärgade bilar som skulle ställas bredvid varandra i ett garage. Tre elever fick då agerade bilar som ”parkerade sig” i garaget, vilket bestod av tre stolar. På en interaktiv skrivtavla fick de bokföra genom att parkera ”sin bil” på motsvarande ställe där de själva hade suttit. Engagemanget var stort men vid genomförandet verkade eleverna som agerade bil inte ha samma överblick över möjliga lösningar som de elever som var publik. Eleverna som agerade bilar utgick oftast enbart ifrån sig själva och om de hade suttit på de tre olika stolarna så var de nöjda. Det resulterade i att de många gånger ansåg sig klara med uppgiften efter att ha hittat tre av de sex olika möjligheterna, så som ”bilarna” på bilderna på nästa sida.



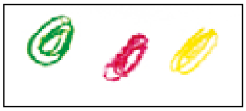
När fler sätt efterfrågades kunde eleverna ge förslag som att sätta sig under stolen, att parkera baklänges eller sidledes. Kanske var det upplägget, kanske kontexten som försvårade för elever att veta vad de skulle fokusera på, vilket även Niklas Pramling och Ingrid Pramling Samuelsson kom fram till när de analyserade förskolebarnens illustrationer till (räkne)sagor. Vad betyder det att parkera en bil på olika sätt?

Glassexemplet i inledningen kan ge liknande kontextberoende problem. Är en glass med en kula citronglass och en kula jordgubbsglass ”samma glass” som en glass med en kula jordgubbsglass och en kula citronglass, eller är det två olika glassar? Kontexten med björnar i en soffa valde vi för att den förhoppningsvis skulle vara mer bekant för eleverna än att parkera bilar och för att undvika de kontextproblem vi hade upplevt tidigare.

På hur många sätt kan tre björnar sitta i en soffa?

Problemuppgiften introducerades för eleverna och illustrerades med hjälp av tre plastbjörnar i tre olika färger. Eleverna fick varsitt papper för att dokumentera sina lösningar. Eleverna jobbade först enskilt, sedan parades de ihop för att jämföra sina lösningar. Under både det enskilda arbetet och pararbetet pågick många intressanta elevsamtal. Ett exempel är en elev som satt för sig själv och pratade intensivt med björnarna: *Nej nu är det din tur att sitta i mitten och du får blåis och gulis som kompisar bredvid dig. Så, det var roligt, nu är det blåis tur att sitta här …* Ett annat exempel är två elever som jämförde sina lösningar och upptäckte att lösningarna var olika, *fast om vi vänder på mitt blad är de lika.*

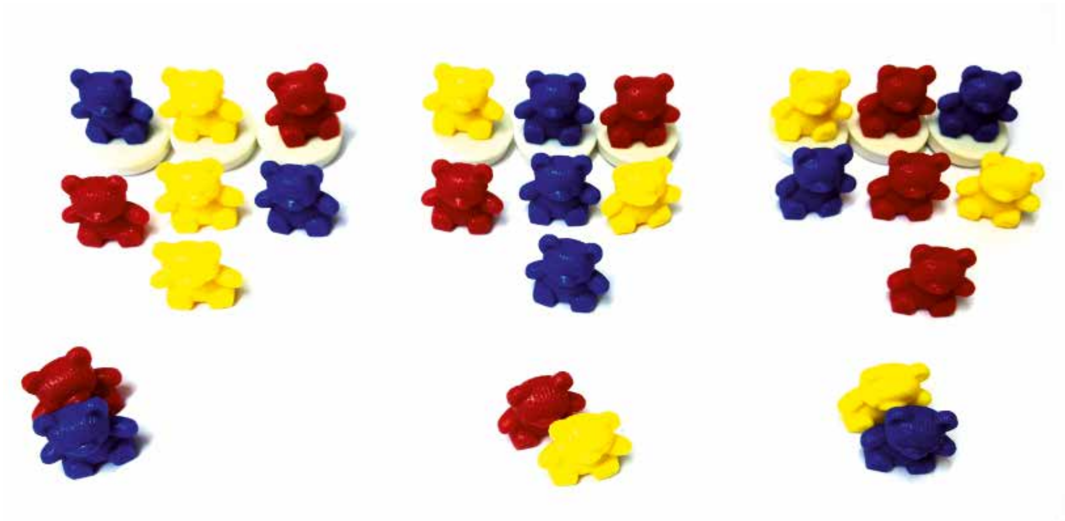
Slutligen genomfördes en helklassdiskussion med fokus på två delar:



1. lösningar och det matematiska innehållet
2. olika sätt att dokumentera sin lösning.

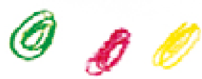
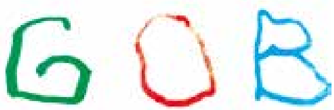
Hur många lösningar hittade eleverna?

Uppgiften var svår för eleverna och i det enskilda arbetet var det enbart två elever som hittade samtliga sex kombinationer. Hur går man tillväga när man vill prata med dessa unga elever om det matematiska innehållet? Kan elever i förskoleklass hantera ett matematiskt innehåll som vanligtvis ligger några årskurser



högre? Vi valde att strukturerat gå igenom de möjliga lösningarna med eleverna utifrån deras dokumentationer. Först ställde vi fram björnar som visade en lösning utifrån en elevs förslag.

Eleverna fick sedan föreslå en ny lösning, med en annan björn i mitten. Sedan en till med ytterligare en ny björn i mitten. På följdfrågan om det fanns fler björnar som kunde sitta i mitten kunde eleverna motivera varför det inte var möjligt. Det resonemanget kunde de använda igen, lite senare. När dessa tre kombinationer var framställda fick eleverna frågan om de kunde hitta ännu ett nytt sätt att ställa björnarna på. Beroende på vilket förslag eleven gav ställdes det framför den kombination som hade en björn av samma färg i mitten. Framför

Konkret	Fysiska björnar/plastbjörnar	
Halvkonkret	Avbilda björnar (rita av/rita egna)	
Halvabstrakt	Prick/streck el dyl i samma färg som björnen	
Abstrakt	Symboler (t ex bokstäver)	

Tabell 1

		Halv-konkret	Växling halvkonkret-halvabstrakt	Halv-abstrakt
Inga nya kombinationer	Eleven har enbart ritat kombinationen som visats i introduktionen av läraren	3		2
Unika kombinationer A	Eleven har ritat unika kombinationer, dock inte alla.	15 (4)	8 (3)	24 (10)
Unika kombinationer B	Eleven har ritat alla 6 unika kombinationer och inga dubbletter.			2
Dubbletter	Eleven har ritat flera olika kombinationer där vissa är dubbletter.	3		30 (1)
Totalt		**21**	**8**	**58**

Tabell 2

den första lösningen med en blå björn i mitten ställs en ny lösning med en blå björn i mitten.

Att tydliggöra en struktur för elever gör att några av dem direkt kan komma med förslag på ytterligare en kombination, och en till … Med sex olika kombinationer framför sig uppstår den spännande frågan: finns det fler sätt? Resonemang, liknande det som användes för att förklara varför inte fler olika björnar kunde sitta i mitten, framfördes nu för att motivera varför det inte kan finnas fler kombinationer.

Målet med den här delen av lektionen var inte att förklara att man kan räkna ut antal kombinationer genom att använda sig av fakultetsräkning ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$) utan att ge eleverna erfarenhet av systematiskt utforskande samt att de fick argumentera för att de hade hittat alla kombinationer – eller inte.

Representationer

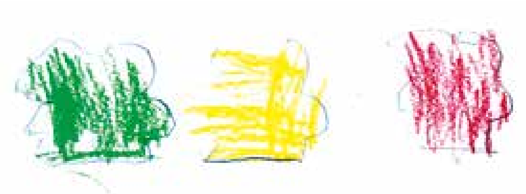
Elevernas dokumentationer erbjöd möjlighet att dels titta på hur de hade valt att *strukturera* sina lösningar, dels att titta på *abstraktionen* i deras representationer. Flera forskare har försökt beskriva och schematisera olika representationsformer: Piaget skriver till exempel om ”symbols” och ”signs”, där symbols är (elevers) egna och signs är konventionella. Heddens är en av dem som tidigare har skrivit om halvkonkret och halvabstrakt medan Hughes delar in i ”pictographic”, ”iconic” och ”symbolic”. I vår artikel *Exploring the role of representations when young children solve a combinatorial task* har vi beskrivit detta och vi valde att titta på representationerna i termer av *konkret – halvkonkret – halvabstrakt – abstrakt* (se Tabell 1). Dokumentationsformen stimulerade eleverna att starta på den halvkonkreta nivån. Vi kunde se att ett fåtal elever växlade mellan halvkonkreta och halvabstrakta representationer och i en pågående följdstudie har vi även sett enstaka fall av abstrakt nivå där elever använder bokstäver fast fortfarande i korresponderande färger.

Representationer kopplat till lösningar

När vi tittade på eventuella samband mellan abstraktionen i representationerna och elevernas lösningar fick vi ett intressant resultat att fundera kring. Det visade sig finnas skillnader om eleverna använde sig av ett halvkonkret eller halvabstrakt sätt att dokumentera. Från de 87 elever där vi har elevdokumentation, såg vi följande (se Tabell 2).

Antalet i parentes anger hur många elever som hade unika kombinationer på så sätt att alla björnar hade suttit på ett ställe en gång. En sådan dokumentation kan, som i ”Unika kombinationer A”, tyda på att eleven tolkat ”annat sätt” som att inget i den nya kombinationen får vara likt de tidigare kombinationerna. Det indikerar även någon form av systematisering.

Vidare kunde vi se att ett antal elever växlade från halvkonkret till halvabstrakt.Det vi fann intressant var att dubbletter förekom i mycket större utsträckning hos elever som använde sig av en halvabstrakt representation. Olika anledningar till detta har vi reflekterat över. En möjlig orsak skulle kunna vara att det går mycket fortare att rita en prick än en björn och därmed skulle det snabbare bli fler möjligheter. En annan möjlighet är att eleverna som ritar björnar, dvs en halvkonkret representation, inte har lämnat kontexten på samma sätt och är närmare problemet, vilket var på hur många olika sätt björnarna kan sitta. För några av de elever som ritar prickar kan uppgiften ha utvecklats till att rita tre prickar av olika färg på rad.



Att anpassa problemet

Efter projektets första genomförande såg vi behov av att anpassa problemet både för att förenkla och fördjupa. Några sätt att förenkla inom samma kontext var att hålla sig till två björnar på en tresitssoffa, eller tre björnar på en tvåsitssoffa. Sådana anpassningar gör det möjligt att återkomma till ett liknande problem men där eleverna inte nödvändigtvis direkt ser att det kommer att finnas sex lösningar igen.

Två björnar på en tvåsitssoffa blir inte givande eftersom en systematisering av kombinationerna inte är möjligt.

En digital variant

Under våren 2016 hade vi möjlighet att göra en digital variant av uppgiften, där dessa möjligheter till förenkling och fördjupning av problemet finns inbyggda i applikationen CombiBears, www2.kau.se/jorrbomm. Lärare och elever kan nu välja hur många platser som ska finnas i soffan och hur många björnar som ska sitta där. Efter varje genomförd kombination kan eleverna spara sina lösningar genom att ”ta kort” och slutligen jämföra korten systematiskt för att se om de har hittat alla kombinationer eller inte.

I projektet är nästa steg att studera om den systematiska delen av att hitta kombinationer kan utmanas mer effektivt genom den digitala

En fördjupning av problemet är möjligt genom att utvidga antal björnar eller soffplatser. Fyra björnar på en tresitssoffa, eller fyra på en fyrsitssoffa. Men även fyra björnar på en tvåsitssoffa!

versionen. Den halvkonkreta situationen i applikationen ska testas och vi vill veta om elever kommer att kunna ta steget till ett systematiskt sätt att hitta kombinationerna. Att sedan kunna gå till nästa nivå – halvabstrakt, verkar vara ett logiskt steg, men inte förrän systematiken först har fått stå i fokus.

Litteratur

Palmér, H. & Ebbelind, A. (2012). Matematiklärande. I Herrlin, K., Frank, E. & Ackesjö, H. (red). *Förskoleklassens didaktik. Möjligheter och utmaningar.* Stockholm: Natur & Kultur.

Palmér, H. & van Bommel J. (2016). *Exploring the role of representations when young children solve a combinatorial task*. Paper presenterat på Madif 10, Karlstad.

Pramling, N. & Pramling Samuelsson, I. (2008). Identifying and solving prob-lems: Making sense of basic mathematics through storytelling in the pre-school class. *International Journal of Early Childhood*, 40(1), 65–79.

Ramani, G.B. & Brownell, C.A. (2014). Preschoolers' cooperative problem solving: Integrating play and problem solving. *Journal of Early Childhood Research*, 12(1), 92–108.

Projektet i sin helhet beskrivs i boken *Problemlösning som utgångspunkt – Matematikundervisning i förskoleklass,* se Vi har läst i detta nummer, sid 59.

Zanna

Holmboeprisen 2021

Vil du være med og nominere neste års matematikklærer?

Norsk matematikkråd har gleden av å invitere alle til å nominere kandidater til Holmboeprisen 2021. Prisen gis til en lærer eller en gruppe lærere i grunnskole eller videregående skole som har utmerket seg i sitt arbeid med matematikkfaget. Prisen, som er på 100 000 kr, er finansiert av Abelfondet, og skal deles likt mellom prisvinneren og skolen som han eller hun kommer fra.

Alle kan nominere kandidater til Holmboeprisen, og vi ber skolen om hjelp til å formidle denne invitasjonen videre til alle dem som kan være interessert i å foreslå kandidater, f.eks. til avdelingsleder for realfag og til elevrådet.

Det er mange måter å være en fremragende matematikklærer på, og Norsk matematikkråd er opptatt av å få frem mangfoldet. Det er imidlertid ett krav som er ufravikelig, og det er at undervisningen skal fungere i klasserommet – vi ønsker å gi Holmboeprisen til en aktiv lærer som brenner for faget, og som formidler entusiasme, kunnskaper og holdninger til sine elever. Holmboeprisen er oppkalt etter Bernt Michael Holmboe (1795–1850), som var Abels matematikklærer, og som nedla et stort arbeid for faget både som lærer, lærebokforfatter og fagmann. Prisen deles ut ved en seremoni ved Oslo katedralskole (Holmboes og Abels gamle skole) i april/mai hvert år. De siste årene har det vært kunnskapsministeren og vinneren av Abelprisen som har overrakt Holmboeprisen.

Hvordan nominerer man?

Det er utarbeidet to nominasjonsskjemaer for Holmboeprisen, ett for nominasjon av enkeltlærere og ett for nominasjon av grupper av lærere. Disse skjemaene finner man på prisens nettsted:

http://holmboeprisen.no/nominasjon/

Skjemaene kan sendes inn både elektronisk og per post (adresser står på skjemaene). For å unngå unødvendig kopiering ønsker vi helst elektroniske nominasjoner, men dersom dette er vanskelig på grunn av vedlegg, tar vi gjerne nominasjoner på papir. På Holmboeprisens nettsted finner man også utfyllende opplysninger om prisen og omtaler av tidligere vinnere. Renominasjon: Hvis du har foreslått en kandidat som ikke har fått prisen i tidligere år, og det er noe du vil legge til i nominasjonen, oppfordrer vi deg til å renominere kandidaten din.

Fristen for å nominere er 15. desember 2020.

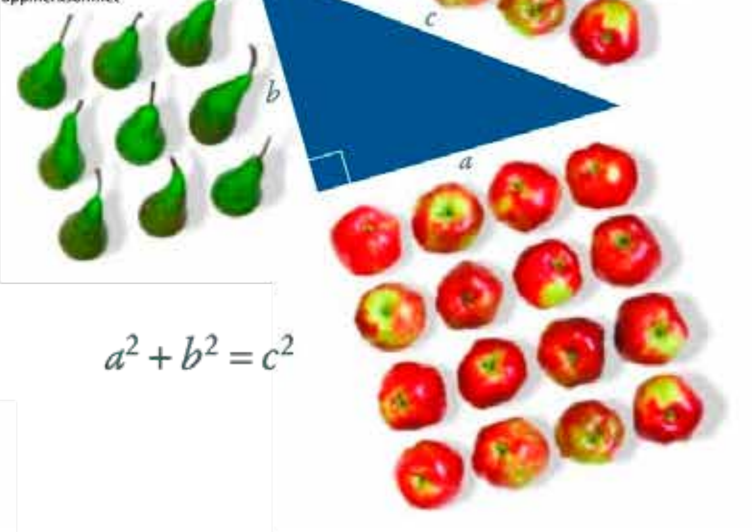
Antonella Zanna
Universitetet i Bergen
antonella.zanna@uib.no

Bernt Michael Holmboes minnepris

Norsk matematikkråd har opprettet Bernt Michael Holmboes minnepris, som vil bli delt ut første gang våren 2005. Holmboeprisen kan gis til en eller flere matematikklærere i norsk grunnskole eller videregående skole. Prisen, som er finansiert av Abelprisen, er på 100 000 kr og skal deles mellom prisvinneren og skolen han eller hun kommer fra. Vi ønsker på denne måten å løfte frem gode matematikklærere som forbilder for alle som arbeider med undervisning. Utfordringen i matematikkfaget i dag er å skape et godt grunnlag av kunnskaper å bygge videre på, samtidig som elevene må føle at det de lærer er relevant og angår dem. De lærerne som greier dette har fått til noe som også andre bør få ta del i og lære fra.

Alle som vil kan nominere kandidater til Holmboeprisen. Det kan være nåværende eller tidligere elever, foreldre til elever, kollegaer eller rektorer som vil rette oppmerksomhet mot en matematikklærer som har gjort en innsats utover det vanlige. Legg ved en begrunnelse for hvorfor du mener at din kandidat bør få prisen, og navn på to referansepersoner som vi kan kontakte for å få ytterligere informasjon. Skjema og mer informasjon finner du på nettet:
www.holmboeprisen.no

Frist for nominasjoner: 15. desember 2020



$$a^2 + b^2 = c^2$$

BERNT MICHAEL HOLMBOE (1795-1850) var matematikklærer ved Christiania katedralskole. Det var han som oppdaget talentet til Niels Henrik Abel, og hjalp ham frem på begynnelsen av sin matematiske karriere. Gjennom hele Abels liv var Holmboe hans nære venn og støttespiller. Holmboe var også lærebokforfatter, og ble senere professor ved Universitetet.

ABEL PRISEN

Holmboeprisen er finansiert av Abelprisen

HOLMBOEPRISEN
BERNT MICHAEL HOLMBOES MINNEPRIS

Jahr

Volum av en pyramide

I Tangenten nr. 3/2020 er det en interessant artikkel av Pål-Erik Eidsvig om hvordan man kan få elever i 9. klasse til å forstå formelen for volumet av en pyramide. Jeg vil gjerne bidra med en annen metode, som krever betydelig mindre regning og algebra, men i stedet konsentrerer seg om rent geometriske betraktninger, spesielt romforståelse. Metoden er skissert i en oppgave i Breiteig og Venheim (1984). Her gir jeg en utførlig løsning av denne oppgaven.

Denne metoden leder til en formel som gjelder alle pyramider. Eidsvigs metode er i hans artikkel bare brukt på kvadratiske pyramider der høyden er lik en sidekant i grunnflaten. Skal denne kunne utvides til alle pyramider, må en vise at alle mangekanter kan tilnærmes så godt en vil med en samling kvadrater, samt at en måtte erstatte de små kubene med prismer av passende høyde. Begge metodene bruker en tankegang som ligger til grunn for integrasjon, men uten formelverket som hører til dette. Integrasjonstankegangen bruker jeg nå først for å begrunne det såkalte Cavalieris prinsipp, som har mange flere anvendelser enn akkurat denne. Når dette er etablert, er resten kun geometri.

Einar Jahr
Pensjonist
einjahr@hotmail.no

Vi tenker oss at vi har to helt like kortstokker, A og B. De har naturligvis samme volum. Nå erstatter vi hvert kort i kortstokk B med et kort med en annen form, men med samme areal og tykkelse. Hvert kort, og dermed også hele kortstokken, vil da ha samme volum som før, dvs. at kortstokkene A og B har samme volum. Vi tenker oss at begge kortstokkene ligger på et felles grunnplan p. Det som nå er oppnådd, er at om vi snitter kortstokkene med et plan q som er parallelt med p, så vil disse to snittene ha samme areal. Tenker vi oss litt om, ser vi at det er nettopp dette som garanterer at kortstokkene har samme volum. Den italienske matematikeren Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647) beskrev denne metoden i et verk fra 1635, og det kalles derfor *Cavalieris prinsipp*:

> Gitt to legemer og et fast plan p. Hvis ethvert plan q som er parallelt med p, skjærer de to legemene i flatestykker som har samme areal, så har de to legemene samme volum.

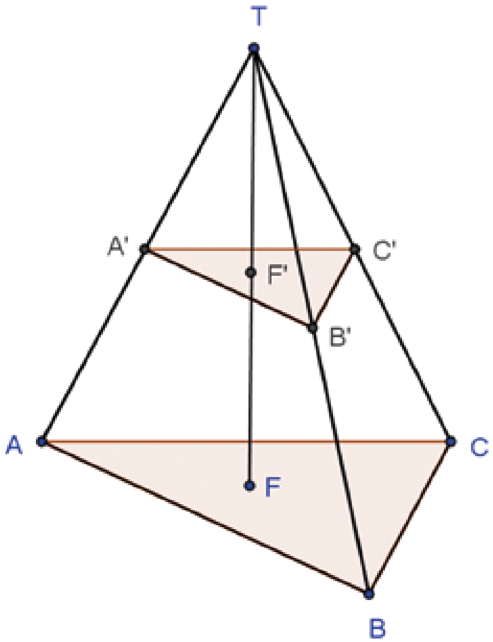
Jeg har ikke bevist dette helt strengt her. Til det kreves differensial- og integralregning, som ligger utenfor det denne artikkelen tar opp, og som ikke var utviklet på Cavalieris tid. Men ut ifra resonnementet med kortstokkene er det ikke vanskelig å forstå at det er korrekt, og det er bevist.

Først viser vi følgende hjelpesetning ved hjelp av Cavalieris prinsipp:

> Volumet av en pyramide er entydig bestemt av grunnflatearealet og høyden.

Det er tilstrekkelig å vise det for en trekantet pyramide, for siden alle mangekanter kan deles inn i trekanter, kan alle pyramider settes sammen av trekantede pyramider.

Vi ser på en trekantet pyramide:



Figur 1

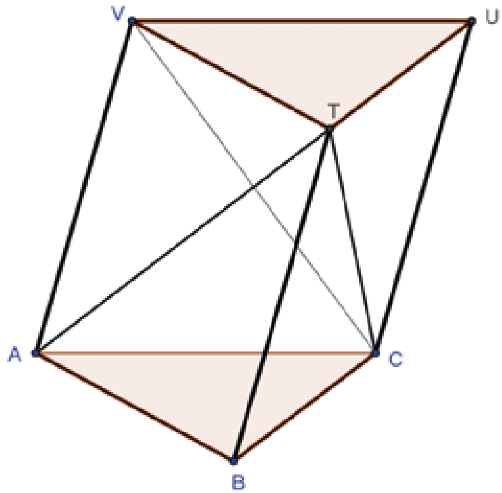
$A'B'C'$ er et plant snitt parallelt med grunnflaten ABC. TF er høyde i pyramiden $ABCT$, og TF' er høyde i pyramiden $A'B'C'T$. Trekantene ABC og $A'B'C'$ er formlike, siden $A'B' \| AB$ osv. En utfordring til leseren er nå å vise at målestokken for $A'B'C'$ som bilde av ABC er $\frac{TF'}{TF}$.

Siden arealmålestokk er kvadratet av lineær målestokk, har vi at

$$\text{areal av } \Delta A'B'C' = \left(\frac{TF'}{TF}\right)^2 \cdot \text{areal av } \Delta ABC.$$

Det vil si at arealet av et plant snitt gjennom pyramiden, parallelt med grunnflaten, utelukkende er bestemt av arealet av grunnflaten og avstanden mellom snittet og grunnflaten. Cavalieris prinsipp gir da at volumet av pyramiden entydig er bestemt av grunnflatearealet og høyden.

Se nå på denne figuren:



Figur 2

ABCUVT er et prisme med grunnflate *ABC*. Figuren viser hvordan dette er delt i tre pyramider: *ABCT*, *ACVT* og *VTUC*. Vi vil vise at disse tre pyramidene er like store.

Pyramidene *ABCT* og *VTUC* kan betraktes med grunnflater hhv. *ABC* og *VTU*, og toppunkter hhv. *T* og *C*. Grunnflatene er kongruente. Høyden i begge pyramidene er avstanden mellom *ABC* og *VTU*, som ligger i parallelle plan. Pyramidene *ABCT* og *VTUC* har altså samme grunnflateareal og samme høyde, og har derfor samme volum.

Pyramidene *ACVT* og *VTUC* kan betraktes med grunnflater hhv. *ACV* og *UVC* og felles toppunkt *T*. Siden *CV* er diagonal i parallellogrammet *ACUV*, er grunnflatene *ACV* og *UVC* kongruente, og da har også disse to pyramidene samme grunnflateareal. Deres felles høyde er avstanden mellom planet *ACUV* og punktet *T*, og dermed har de samme volum.

Altså er $ABCT = VTUC = ACVT$ (dvs. de tre pyramidene har samme volum), og volumet av *ABCT* er en tredjedel av volumet av *ABCUVT*, dvs. grunnflate ganger høyde dividert med 3.

Siden som nevnt alle pyramider kan deles opp i trekantede pyramider ved oppdeling av grunnflaten, gjelder denne volumformelen for alle pyramider:

> Volumet V av en pyramide med grunnflateareal G og høyde h er gitt ved $V = \dfrac{G \cdot h}{3}$.

En kjegle kan oppfattes som en pyramide med sirkulær grunnflate. Siden en sirkel kan tilnærmes så godt vi vil med en mangekant, vil vi kunne tilnærme en kjegle så godt vi vil med en pyramide med tilstrekkelig mangekantet grunnflate. Dermed må formelen for volumet av en kjegle være den samme som for en pyramide.

Til å konkretisere disse betraktningene kan en bruke et prisme av f.eks. tre som er delt inn i tre pyramider som vist på figur 2. Hver pyramide kan legges på bordet på hvilken som helst av sine fire sideflater, noe som kan gi forståelse av at begrepene 'grunnflate' og 'høyde' for en trekantet pyramide ikke er entydig, men kan velges fritt mellom fire alternativer. Det er viktig for å kunne forstå resonnementet ovenfor. De tre del-pyramidene kan også veies, noe som gir en ytterligere opplevelse av at de må ha samme volum. Slike modeller er å få kjøpt, men det går også an å lage dem på sløyden. Det byr også på interessante utfordringer.

Referanser

Breiteig, T., Venheim, R. (1984). *Matematikk for lærere 1*. Oslo: Aschehoug/Tanum-Norli.

Eidsvig, P.-E. (2020). Å forstå formel for volum. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(3), 31–36.

Begynneropplæringen

Matematikkdidaktikk - barnetrinnet
Av: Marit Johnsen-Høines

I den nye Begynneropplæringen viser forfatteren hvordan elevers uformelle språk og matematiske innsikt gir grunnlag for læring. Gjennom eksempler konkretiserer hun hvordan elever utvikler, bruker og overtar språk. Boken handler om dybdelæring og utforsking – særlig knyttet til tall og talloperasjoner.

Begynneropplæringsperspektivet dreier seg om at når elever lærer noe nytt, har de kunnskaper og språk de kan knytte læringen til. Det har betydning for hvordan de yngste elevene sosialiseres til matematikklæring, og er vesentlig for hele barnetrinnet.

Bokinformasjon:
ISBN 9788293598077 | Pris 449,-

Caspar forlag

Johannessen

Noen tips om logaritmer

Denne artikkelen tar for seg en del aspekter rundt logaritmebegrepet. Den gir noen kanskje uvante tips om hvordan det kan innføres på skolen. I tillegg pekes på spesielle anvendelser og hvilken rolle logaritmer har i dagens og gårsdagens matematikk.

Logaritmer ble oppfunnet i det 17. århundre som et beregningsverktøy av den skotske matematikeren John Napier (1550–1617). Han navnga ordet ut fra de greske ordene «Logos» og «Arithmos». Arithmos betyr tall/siffer, mens logos kan bety begrep, tale, forhold, resonnement, tanke, fornuft og universell verdensorden – ikke småtterier!

Logaritmer læres i videregående skole, normalt etter eksponential- eller «vekst»-funksjoner. Siden logaritme- og eksponentialfunksjonene er hverandres inverse funksjoner, slik kvadrering og kvadratrot er, er det også vanlig å ta i betraktning disse relasjonene. Ikke minst for å løse ligninger. I denne artikkelen tas denne bruken for gitt. I første omgang kan vi se på heltall – uten desimaler.

En heuristisk metode for å lære er å bruke avanserte kalkulatorer med LOG-funksjon, hvor 10 er implisitt grunntall.

Tor Hjalmar Johannessen
Pensjonist
tor.hjalmar.johannessen@gmail.com

Forslag til en «oppdagelsesreise»:

Slå først inn tallet 10. Trykk så på LOG-tasten, og du får 1. Gjenta for 100, 1000, 10000 osv. Trykk på LOG-tasten etter hvert tall, og du får 2, 3, 4 osv. Oppdagelsesreisen avslører at LOG-tasten gir det samme som antall nuller etter 1-tallet.

Her kan læreren komme inn og forklare at 10, 100, 1000 osv. kan skrives som 10^1, 10^2, 10^3, osv. Det er med andre ord eksponenten som er svaret når man trykker på LOG-tasten. Videre forklares at dette gjelder for eksponenter med 10 som grunntall. Årsaken er at LOG-tasten gir 10-er logaritmen, og burde egentlig skrives $\log_{10}$ for å markere dette. En vanlig konvensjon er ellers å skrive «lg» når grunntallet er 10, med andre ord. lg er sjelden/aldri å se på kalkulatorer.

Å ta logaritmen til 100 på denne måten kan derfor skrives lg(100) som gir 2 som svar. Alternativt: $\lg(10^2) = 2$. Eller på kalkulatoren: Tast først inn 100, og trykk på LOG-tasten.

Kjært barn har mange navn: Verbalt kan man uttrykke lg(100) eller $\log_{10}(100)$ slik: «Logaritmen med grunntall 10 til tallet 100», alternativt: «10-er logaritmen til 100». Noen vil si «med basen 10» i stedet for «med grunntall 10». For øvrig brukes også «Briggske logaritmer» for det samme, etter en matematiker som het Brigg.

En annen viktig ting å presisere er at logaritme er en funksjon som utfører en operasjon på et argument som skrives slik: log(argument), eller Log(x) hvis argumentet er x. Hvis man ikke indikerer grunntallet for Log så kan det være et hvilket som helst naturlig tall > 0. Men på kalkulatoren betyr tasten LOG uansett $\log_{10}$. Jeg kjenner ikke til unntak. Hvis grunntallet er forskjellig fra 10, for eksempel a, angis dette slik: $\log_a$

> Merk: Et argument er et begrep i matematikken i forbindelse med funksjoner. Argumentet til en matematisk funksjon er størrelsen som funksjonen virker på. Det vil si at for en funksjon $f(x)$ så er argumentet x.

At argumentet kan både være et simpelt tall eller selv en funksjon kommer fram av dette eksempel som er en funksjon av en funksjon: lg(lg(10 000 000 000)). Først beregnes den innerste parentesen (lg 10 000 000 000 = 10), og deretter den ytterste: lg(10), og svaret blir 1. Det samme får du ved å bruke kalkulatoren.

> Tast inn 10 000 000 000 (10 nuller) og trykk på LOG-tasten: du får 10. Trykk på LOG en gang til og du får 1. Du kan faktisk trykke på LOG-tasten enda en gang, og du får 0. Alt i tråd med at LOG-tasten gir antall nuller!

To ting kan bemerkes:

1. Man kan ta logaritmen av tall som ikke ender på null, også desimaltall. Men ikke av negative tall.
2. Det finnes andre eksponentuttrykk enn de med 10 som grunntall, faktisk uendelig mange.

Generelt kan eksponentuttrykk skrives slik:

$$\text{grunntall}^{\text{eksponent}} \quad \text{eller} \quad a^x$$

(den siste for den som er litt lat).

Et viktig eksempel er grunntallet 2. Det er også greit fordi eksponentiering, altså den inverse funksjonen til logaritme, lett kan gjøres i hodet (mer om inverse funksjoner nedenfor). $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, osv. Her kan vi utføre en praktisk øvelse med bretting av papirark, f.eks. A4:

- Hvor mange lag kommer oppå hverandre ved én bretting, hva med to, tre, osv? Dessverre er det en grense som skyldes at bunken blir tykk og stiv etter hvert. Med et vanlig A4-ark går grensen ved 7 brettinger.
- Ingen brett, dvs. null brettinger: antall lag i bunken = 1.
  Brett det en gang: antall = 2
  Brett det to ganger: antall = 4
  Brett det tre ganger: antall = 8
  Brett det fire ganger: antall = 16
  Brett til det ikke går lenger (trolig 7 ganger med et vanlig A4-ark) – altså en bunke med 128 lag.

Skriv deretter tallene som angir lag i bunken som eksponenter av 2:

$$1 = 2^0 \quad 2 = 2^1 \quad 4 = 2^2 \quad 8 = 2^3 \quad 16 = 2^4 \ldots 128 = 2^7$$

Å ta logaritmer med 2 som grunntall gjøres på samme måte som med grunntall 10 når de er skrevet på eksponentiell form: dvs. 2^4 i stedet for 16. På avanserte kalkulatorer kan man spesifisere grunntallet via $\log_a$-funksjonen, men for papirbrettingene er det enklere å «se» det direkte, såframt de er skrevet som ovenfor på eksponentialform med grunntall 2. Merk: i denne fasen får vi bare naturlige tall (heltall) i eksponenten. Men reglene gjelder også for desimaltall så lenge de er større enn null (positive), f.eks. $2^{7,5}$.

Hvis vi bruker lag i brettebunken som argument, og tar 2-erlogaritmen får vi:

$$\log_2(1) = 0 \quad \log_2(2) = 1 \quad \log_2(4) = 2 \quad \log_2(8) = 3$$

osv. inntil $\log_2(128) = 7$. Lag gjerne en tabell:

Antall brettinger	**0**	**1**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Antall lag i bunken	1	2	4				
Antall lag skrevet på eksponentialform	2^0	2^1	2^2				
$\log_2$ (antall brettinger)	0	1	3				

Tabell 1: Brettinger

Så tilbake til papirarket: Det spesielle er at 2-er logaritmen faktisk angir antall brettinger av arket, som alt er gjort!

Analogt til logaritmer med grunntall 10 kan man nå utføre gjentatte logaritme-operasjoner med grunntall 2 (funksjon av funksjon av funksjon …). Men hvis dette skal tas i hodet må starttallene velges med litt omhu, f.eks. 16:

$\log_2(16) = 4$ $\log_2(\log_2(16)) = 2$, og

$\log_2(\log_2(\log_2(16))) = 1$.

Hvis man tar $\log_2$ enda en gang blir resultatet 0.

Eksperimentet med papirbretting kan brukes for innføring av logaritmer, og man viser samtidig at det er en matematisk sammenheng mellom vekstfunksjoner og logaritmer med et praktisk eksempel.

Inverse funksjoner – eksponentiering og å «ta» logaritme

Eksponentiering og logaritmetaking er inverse funksjoner, på samme vis som kvadrering og kvadratrot-uttrekk. Dette benyttes mye i løsning av ligninger med eksponentialuttrykk. Forutsatt at grunntallet er de samme for logaritme og eksponentuttrykk, som for 10^x og $\log_{10}$, eller 2^x og $\log_2$. Generelt: $\log_a$ og a^x – og alle argumenter er positive tall. Under: et eksempel med lg, altså implisitt med 10 som grunntall:

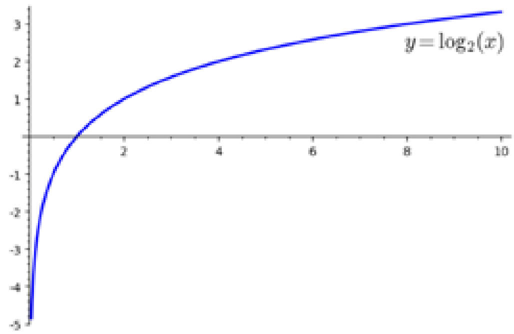
$$\lg(10^x) = x, \quad 10^{\lg(x)} = x.$$

Det samme vil gjelde for alle logaritmer uavhengig av grunntall, såframt det er det samme:

$$\log_a(a^x) = x, \quad a^{\log_a(x)} = x$$

Logaritmetaking og deretter eksponentiering medfører at funksjonene «opphever» hverandre, uansett rekkefølge. De kalles *inverse funksjoner.*

Noen vil kanskje spørre hvorfor det bare kan beregnes logaritmeverdi av positive tall. Forklaringen ligger i grensebetraktninger. En titt på en grafen til en logaritmefunksjon kan gi et hint: Slike grafer, uansett grunntall, går lenger og lenger nedover langs y-aksen når x nærmer seg null; $\log_a(x) \to -\infty$ når $x \to 0$. Pilen indikerer «går mot», og $-\infty$ betyr «minus uendelig». En alternativ enkel måte er å bruke kalkulatoren: det lar seg ikke gjøre å ta logaritmen verken av 0 eller av negative tall. Under vises en graf av logaritmefunksjon (med grunntall 2):



Figur 1: Logaritmefunksjonen med grunntal 2.

Men selv om man ikke kan ta logaritmen av et negativt tall som argument, så kan man få et negativt resultat eller svar, noe som er lett å vise med kalkulator: Trykk LOG for et tall mellom 0 og 1, eller se på figuren over, siden det gjelder for alle log-funksjoner uansett grunntall.

Anvendelser

For den som vil krydre sin kunnskap med 2-er-logaritmer ($\log_2$) kan vi trekke inn digitalteknikk, hvor nettopp logaritmer og potenstall med grunntall 2 er essensielle. Claude Shannon regnes som digitalteoriens og informasjonsteoriens far. Derfor: prøv å google på «Shannon» og «Entropy» (best på engelske sider), så finner man mange eksempler. Dessverre er matematikken nokså tung, så det kan være lurt å utsette til universitetet å gå dypere inn i dette. Allikevel: det viser at 2-er-logaritmer er sentrale innen moderne informasjonsteori.

Som alternativ til informasjonsteori, kan man bruke eksempler fra slektstavler. Kan du finne ut: hvor mange kjødelige foreldre, besteforeldre, oldeforeldre, tippoldeforeldre osv. de fleste har? Sett opp en tabell for antall aner:

Slektsledd (bakover) fra deg selv	1	2	3	4
Antall foreldre, besteforeldre, osv.	2	4	8	16
Antall, eksponentiell form	2^1	2^2	2^3	2^4

Tabell 2: Antall aner

Funksjonen for antallet i nederste rad er for øvrig en vekstfunksjon: $f(x) = 2^x$. Eksponentene til vekstfunksjonen – og med det 2-er-logaritmen – er lik slektsleddet.

På bakgrunn av dette får du en liten slektsforskningsoppgave. Forutsetning: det er bare «rene» slektslinjer ved at samme person bare opptrer en gang i grenene i slektstreet.

Oppgave: Hvor mange aner hadde du for ca. 1000 år siden? Forenkling: Vi antar at en generasjon er i snitt 25 år. 1000 år er derfor 40 generasjoner.

Løsningsforslag: Vi regner først antall aner for 250 år tilbake, altså 10 slektsledd. Vekstfunksjonen for 10 generasjoner gir antall: $2^{10} = 1024$. For enkelhets skyld setter vi dette til 1000.

Dersom samme idealiserte tankegang fortsettes: hva med 20 slektsledd, 30, og til slutt: 40? Vi bruker vanlige regneregler for multiplikasjon mellom eksponenttall:

$$2^{20} = 2^{10+10} = 1000 \cdot 1000,$$

altså en million (tilnærmet)

$$2^{30} = 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 = 1 \text{ milliard}$$

Og til slutt:

$$2^{40} = 1000 \text{ milliarder (1 billion, altså 12 nuller)}$$

og er altså antallet for 40 generasjoner siden, altså omtrent da Olav den Hellige levde; slaget ved Stiklestad fant sted i år 1030.

Man kan spørre seg hvor mange mennesker det i hele tatt levde på jorda den gang. Modellen har en viktig svakhet: gjentakelser av samme person i et slektstre er nok vanligere og vanligere desto lengre bakover man kommer, dermed blir antallet på nær så høyt. Samme person inngår i virkeligheten svært mange ganger på ulike grener. Treet blir mer og mer «grumsete» med krysskoblinger desto lengre det er tegnet bakover i historien. I nær fortid har man ofte mer oversikt, og her forekommer det trolig sjeldnere at samme person er oldefar på både mors og fars side. Men at samme tipp-tipp-tipp-tipp-tipp-tipp-tipp-oldemor opptrer på både mors og fars side er mer sannsynlig. Uansett, stilt på «hodet»: Spørsmål om man er i slekt med Harald Hårfagre, eller Julius Cæsar(?) kan besvares slik: Hvordan kan det være mulig å unngå med så mange aner – selv 1 % av tusen milliarder «bare» for 1000 år siden er mange. En forutsetning er at disse fikk barn: Snorres kongesagaer bekrefter dette for Kong Harald Hårfagre som fikk barn med sju ulike, navngitte kvinner (sikkert mange flere med ukjente kvinner). Det er også en måte å «samle Norge til ett rike»!

Spesielle anvendelser for logaritmer

I fysikken er entropi et viktig begrep, som også beskriver «kaos». Her inngår $\ln(x)$, som er den «naturlige» logaritmen til grunntall «e» (forklart lenger nede). I kryptoanalyse inngår logaritmer. Her er det logaritmer med grunntall 2 som er viktige.

I forbindelse med jordskjelv har vi hørt om Richters skala. Verdiene mellom 0 til 10 er logaritmiske (med grunntall 10). En styrke på 5 er 10 ganger sterkere enn 4, og 6 er 100 ganger sterkere enn 4 på skalaen. I lydsystemer oppgis ofte lydstyrken i Desibel. Desibel (dB) er selv en logaritmisk variabel og brukes mye for å angi støynivå.

I kjemien er begrepet pH kjent som surhetsgrad for en vannlig løsning. pH-verdiene varierer mellom 0 (veldig surt) og 14 (veldig basisk), pH = 7 er nøytralt (vann). Å gå fra ett heltall til neste betyr at konsentrasjonen av syre øker eller synker med en faktor på 10. pH 7 er 100 $(10 \cdot 10)$ ganger mer basisk enn pH 9, og pH 6 er 1000 $(10 \cdot 10 \cdot 10)$ ganger mer surt enn pH 3.

Endrede fagplaner – et historisk tilbakeblikk

Kunnskapskrav til beregninger med logaritmer har endret seg sterkt med årene. Før kalkulatorens tid var selve det å utføre multiplikasjoner og divisjoner nokså tungt. Fordi multiplikasjoner og divisjoner mellom eksponentialuttrykk kan utføres som addisjoner og subtraksjoner mellom eksponentene, fantes en måte å forenkle regningene på ved nettopp å overføre dem til eksponentialuttrykk – altså via logaritmer. Her ble 10 alltid brukt som grunntall. For å bli helt ferdig tok man «antilogaritmen» og fikk med det det endelige svar. Å finne antilogaritmen er det samme som eksponentiering (se inverse funksjoner over). Et viktig hjelpemiddel var logaritmetabeller, som viste logaritmen til et tall med 6 eller flere sifre. Ett eksempel: Beregn produktet $11{,}8 \cdot 5{,}6$. Det er lett med en lommekalkulator, men disse fantes ikke før ut på 1970-tallet). Tabellen i figur 2 gir at

$$\log(11{,}8) = 1{,}071882 \quad \text{og} \quad \log(5{,}6) = 0{,}748188.$$

Addisjon av logaritmene gir

$$1{,}071882 + 0{,}748188 = 1{,}820070.$$

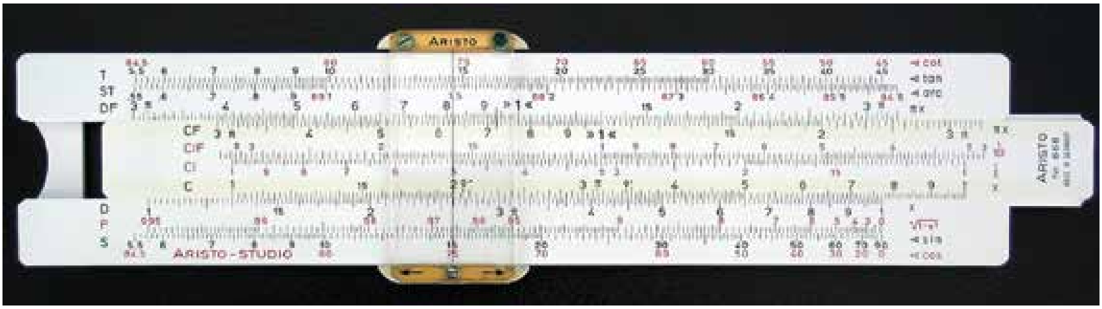
Antilogaritmen til dette (en annen tabell), dvs. $10^{1{,}820070}$, er avrundet lik 66,08.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
0	–	50	698 970	100	000 000
1	000 000	51	707 570	101	004 321
2	301 030	52	716 003	102	008 600
3	477 121	53	724 276	103	012 837
4	602 060	54	732 394	104	017 033
5	698 970	55	740 363	105	021 189
6	778 151	56	748 188	106	025 306
7	845 098	57	755 875	107	029 384
8	903 090	58	763 428	108	033 424
9	954 243	59	770 852	109	037 426
10	000 000	60	778 151	110	041 393
11	041 393	61	785 330	111	045 323
12	079 181	62	792 392	112	049 218
13	113 943	63	799 341	113	053 078
14	146 128	64	806 180	114	056 905
15	176 091	65	812 913	115	060 698
16	204 120	66	819 544	116	064 458
17	230 449	67	826 075	117	068 186
18	255 273	68	832 509	118	071 882

Figur 2: Utsnitt av logaritmetabell

I dag vil en kalkulator lett gi det samme svaret. Slike praktiske oppgaver var det mange av, og ikke bare med to multiplikander. Uten tabeller kunne et regnestykke ta svært lang tid, og svaret kunne også lett bli feil. Selv på språklinjene på videregående var logaritmelære obligatorisk og med i fagplanene til ut på 1970-tallet. Elevene måtte stille med logaritmetabeller for å besvare stykkene. Det var mye stryk pga. dette, og kalkulatorene kom som en velsignelse. Fagplanene ble endret og språkelevene pustet lettet ut. Strykprosenten i matematikk på språklinjene sank drastisk.

På reallinjen jobbet man med logaritmer, multiplikasjoner og divisjoner også på en annen måte. Der var den såkalte regnestaven i hyppig bruk. Skalaene på en regnestav er logaritmiske. Ved å legge sammen eller trekke fra slike lengder utførte man i prinsippet henholdsvis en multiplikasjon eller en divisjon. Kvaliteten på regnestaven varierte, de beste var dyre, men ga svar med mange sifres nøyaktighet. Realistene tok med seg regnestavene sine hvis de fortsatte på tekniske høyskoler og universitet.

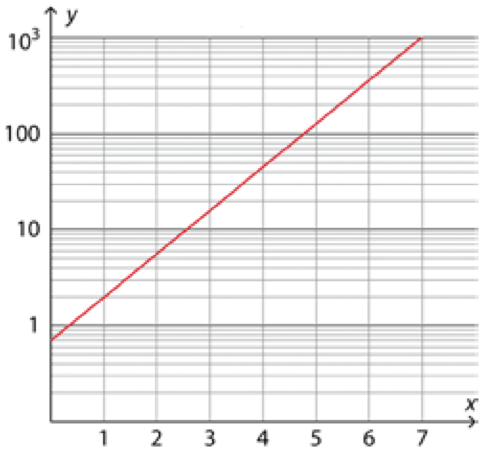


Figur 3: Regnestav

Figur 3 viser en vanlig regnestav – trolig på museum nå. Regneoperasjoner ble utført ved å flytte «skyvern» i midten til valgte spesielle posisjoner.

Logaritmisk papir

En annen bruk av logaritmer finner vi i grafikk: Hvis man skal plotte kurver for en eksponentiell funksjon, som 10^x, så øker funksjonsverdien fort slik at arket «sprenges» i y-retningen. Alle vekstfunksjoner har slike problem. Ved i stedet å plotte logaritmen av y-verdiene, blir kurvene mer rettlinjete og ikke så fort høye. Med det får man plass til en verdimengde som omfatter 1, 10, 100, 1000, 10000 osv. Selv verdien 10 milliarder (10 nuller) går da bare til 10 i y-retningen. Figur 4 viser et eksempel for e^x. Det spesielle tallet e er beskrevet lenger nede.



Figur 4: Plott av en eksponentiell funksjon (e^x) på et logaritmisk skalert papir.

Naturlige logaritmer og eksponentialfunksjoner med grunntall e

Logaritmer forekommer også hyppig som løsninger i derivasjon og spesielt i integralregning. Den viktige «naturlige logaritmen», ofte angitt ved «ln» eller $\ln(x)$ forekommer hyppig. Dette beror på egenskaper til eksponentialfunksjonen med e som grunntall: $f(x) = e^x$, hvor e er et reelt tall: e = 2,71828 med et uendelig antall sifre – også kalt «Eulers tall».

Poenget er at en kurve med formel $f(x) = e^x$ på ethvert punkt er like bratt (dvs. stigningsforholdet) som selve y-verdien. Stigningsforholdet angis som den «deriverte» av funksjonen:

Hvis $f(x) = e^x$ så er $f'(x) = e^x$

Altså: $f(x) = f'(x)$.

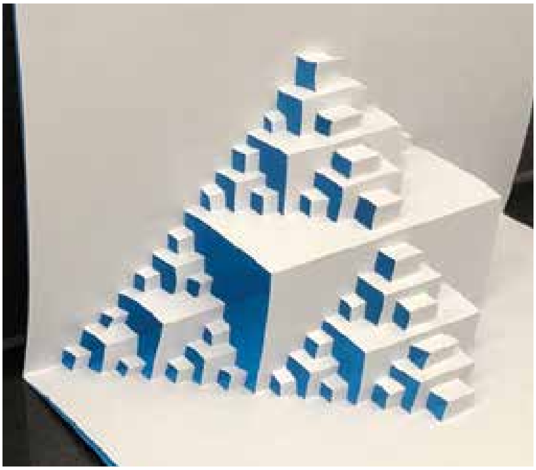
Den observante leser vil forstå at det stopper ikke der, men: $f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x)$ osv. Dette gir opphavet for løsninger av såkalte *differensialligninger* hvor både funksjonen og den deriverte av funksjonen (og/eller den dobbeltderiverte av funksjonen osv.) inngår. Matematikere har vært opptatt av slikt lenge, og mange teknologiske problemstillinger involverer slike ligningssystemer som må løses. Selv kvantemekanikken som beskriver forholdene hos atomer, kjerner og elektroner bygger på en slik ligning (Schrödingerligningen). Også innen økonomi er dette sentralt.

(fortsettes side 34)

Naylor

Fraktalt «sprett-opp»-kort

Dette er en fasinerende og populær aktivitet for klasserom eller hjem med mange muligheter for å utforske matematiske begreper. En mal er tilgjengelig for nedlasting som gjør aktiviteten enklere. I boksen på neste side beskrives hvordan en modell kan lages ved hjelp av en linjal. Figurer som illustrerer punktene finner du på sidene 25–27.



Mike Naylor
Matematikkbølgen
mike@matematikkbolgen.com

1. Brett et A4-ark i to og legg arket slik at bretten er nederst, som vist i illustrasjon 1.
2. Mål 4 cm fra hver side av arket og tegn korte streker på bretten.
3. Fra hver av disse strekene tegner du et 6 cm loddrett linjestykke opp fra bretten.
4. Klipp langs strekene med saks.
5. Brett opp den midterste delen med en skarp brett.
6. Brett den ned igjen.
7. Åpne papiret og trykk den midterste delen inn.
8. Brett sammen papiret igjen og press flatt.
9. Gjenta prosessen med den nye bretten i midten. Strekene skal nå tegnes 3 cm lange og skal være 3 cm fra hver sin kant av arket.
10. Klipp langs de loddrette strekene.
11. Brett opp den midterste delen med en skarp brett.
12. Brett den ned igjen.
13. Åpne papiret og trykk brettene inn. Det er enklere å få et godt resultat hvis du trykker og presser flat bare en brett om gangen.
14. Gjenta stegene med nye bretter i midten. Strekene skal nå tegnes 1,5 cm lange, og de skal være 1,5 cm fra hver sin kant. Klipp langs strekene.
15. Trykk brettene inn. Trykk inn en om gangen og press flat etter hver brett. Yngre barn kan stoppe etter dette steget.
16. Tegn og klipp de siste brettene, 0,75 cm inn fra sidene og 0,75 cm i lengden. OBS: Vær forsiktig med de siste klippene – papiret er ganske tykt!
17. Trykk inn alle brettene og press flat. Ferdig!
18. Du kan lime modellen på et stykke farget papir for en nydelig effekt.

Matematiske spørsmål og undersøkelser

1 Mens elevene klipper, kan du spørre: Hvor mange lag papir klipper vi nå? Hvor mange bretter lager vi nå? Dere kan lage en tabell på tavla som viser disse sammenhengene. Den kan igjen være utgangspunkt for videre undersøkelser.

2 Elevene kan undersøke former og mønstre i modellene. For eksempel kan følgende tabell lages:

Steg nummer	Nye blokker i modellen	Totalt antall blokker
0	1	1
1	2	3
2	4	7
3	8	15
4	16	31

3 Elevene kan undersøke hvor mange blokker det vil være på steg 20. Og om det er mulig å lage? Hva med steg n?

4 Videre undersøkelser kan for eksempel knyttes til volum. Dersom den minste blokken er 1 kubikkenhet, hva er volumet av de andre blokkene? Til hele modellen?

5 Utforsk med andre former. Hva skjer hvis du lager buede klipp? Klipp hvor lengdene på hver side er forskjellig? Flere klipp enn to på hvert steg?

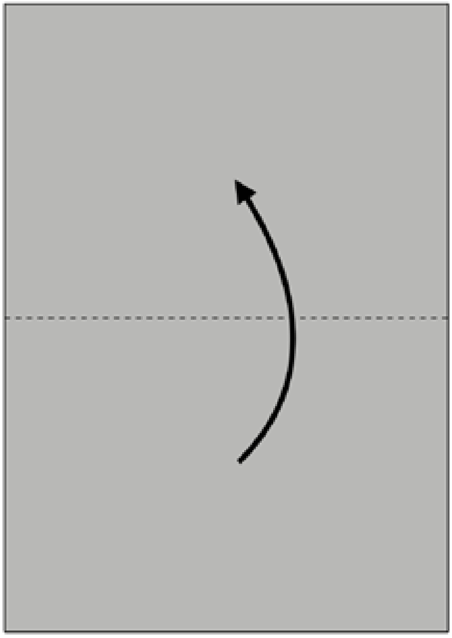
6 Kortene kan pyntes for å lage spennende kunst, som i «sprett-opp»-julekortet på side 23.

Mal og en avansert modell

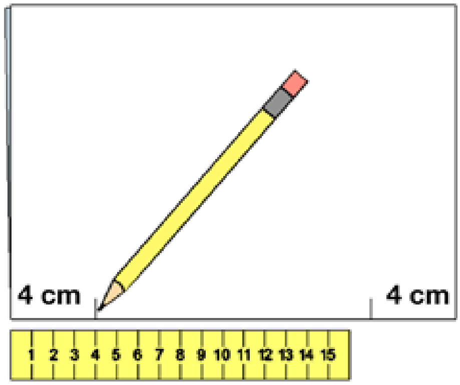
Kopieringsoriginaler med instruksjoner er tilgjengelig for nedlasting på www.abacabax.com.

PDF-en har to forskjellige maler, en som er lik den første modellen som beskrevet ovenfor, og en som kan brukes til å lage en veldig fin og komplisert modell hvor en Sierpinski-trekant er synlig på sidene (se bildet til venstre side 23). Legg ut noen kopieringsoriginaler til elevene og se hva som skjer!

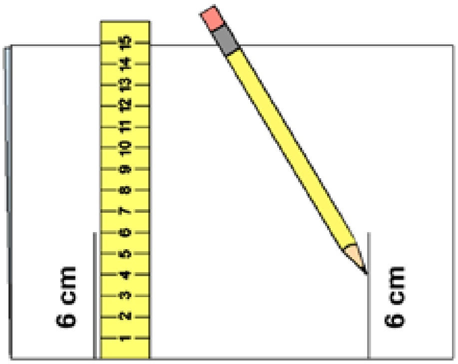
1.



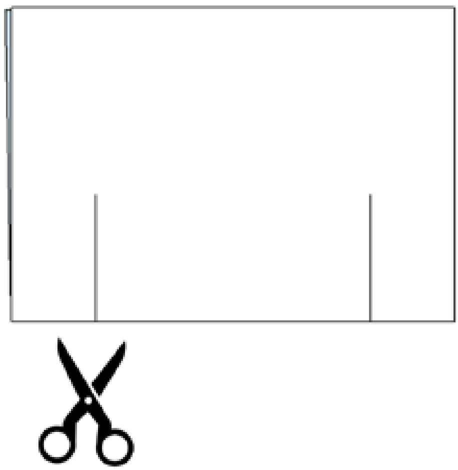
2.



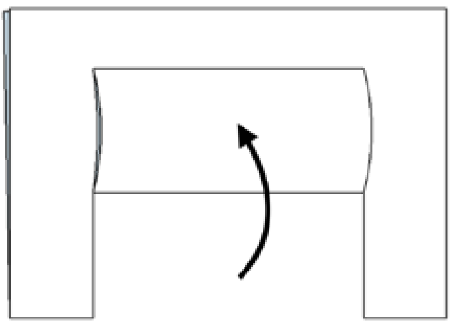
3.



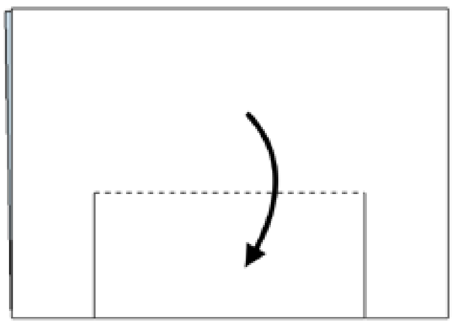
4.



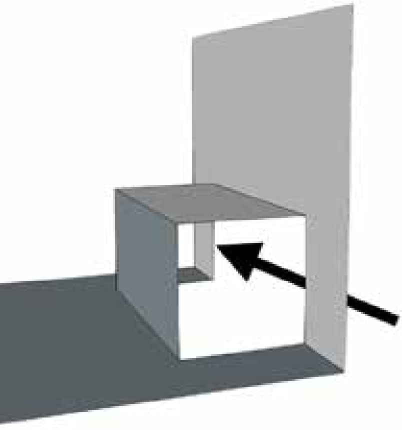
5.



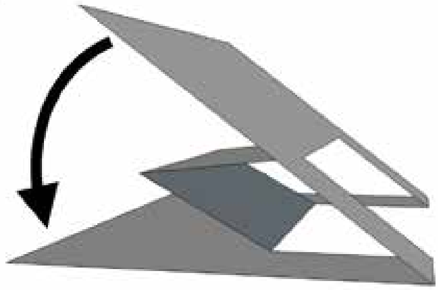
6.



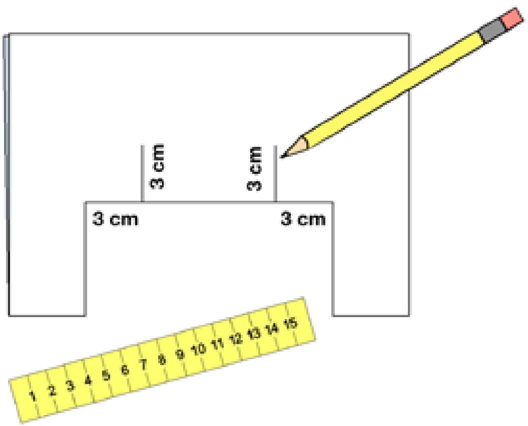
7.



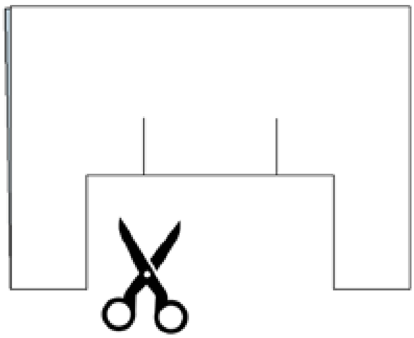
8.



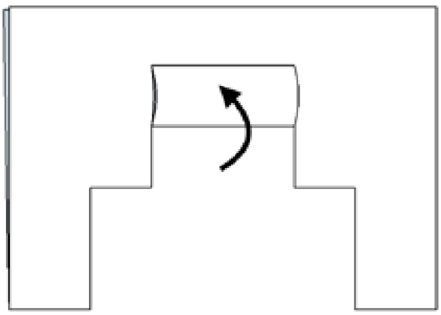
9.



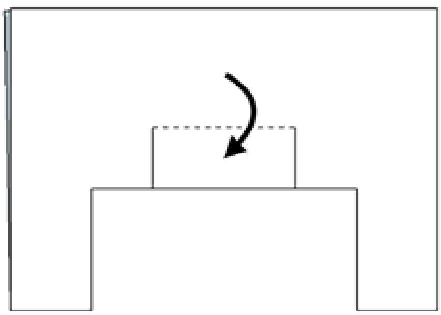
10.



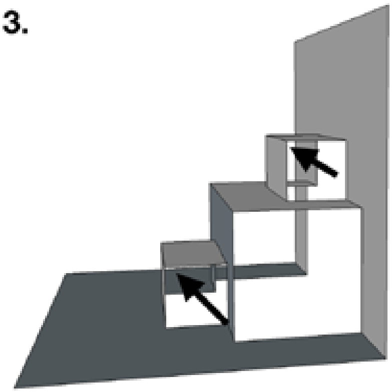
11.



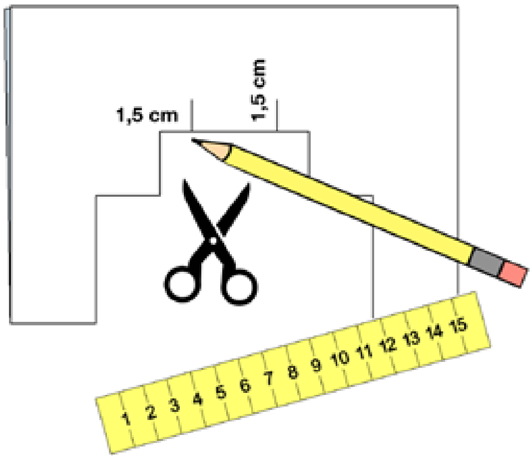
12.



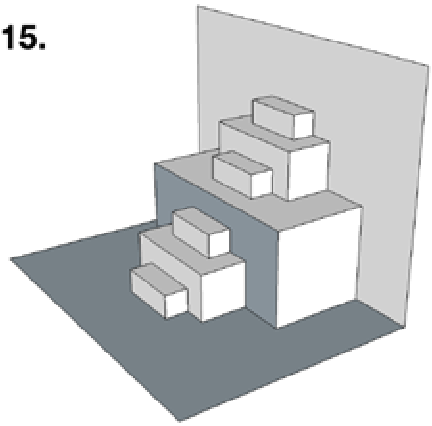
13.



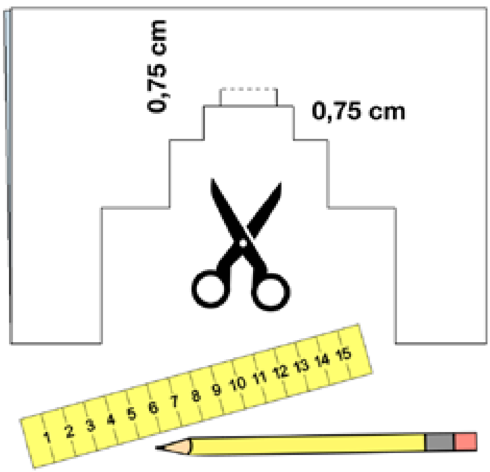
14.



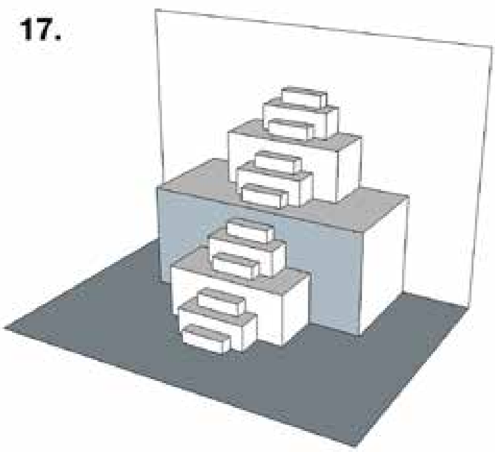
15.



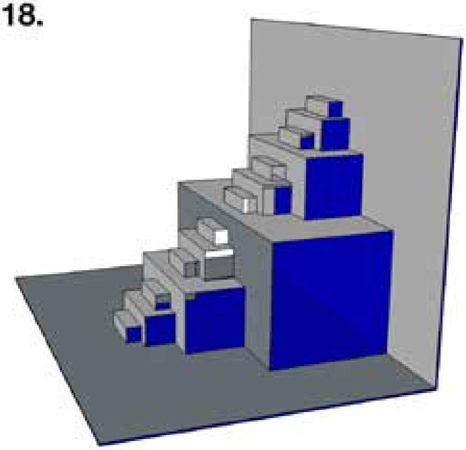
16.

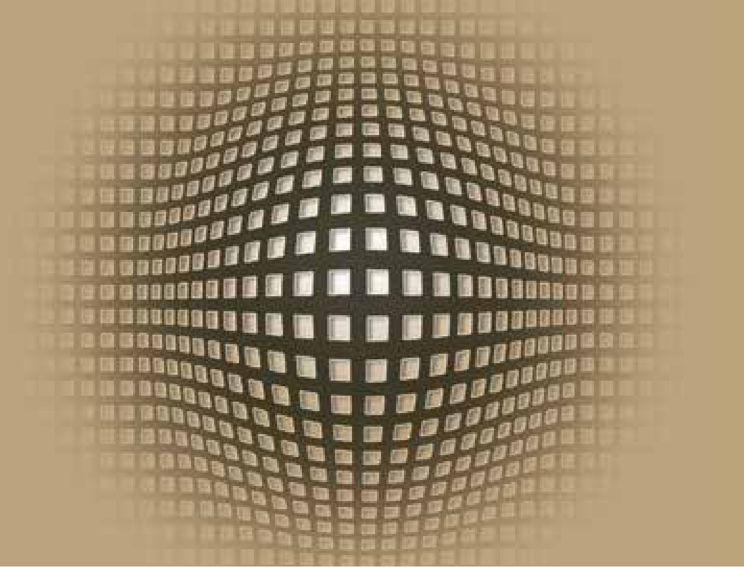


17.



18.

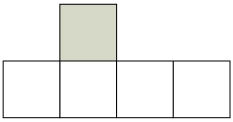




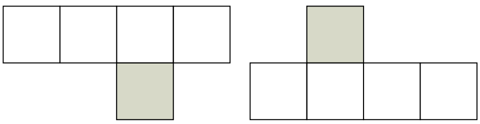
Torkildsen

Pentadomino

En pentadomino er en figur som består av fem like store kvadrater, og der hvert av kvadratene må ha minst en felles side med et annet kvadrat. Se eksempelet under:



1. Ved hjelp av rutepapir eller GeoGebra skal du tegne så mange ulike pentadominoer som mulig. Du får vite at det fins i alt 12 ulike pentadominoer. Hvis en pentadomino kan bli snudd og/eller flyttet slik at det gir en annen pentadomino, blir dette oppfattet som den samme pentadominoen. For eksempel er de to pentadominoene under den samme pentadominoen:



Ole Einar Torkildsen
Høgskulen i Volda
oet@hivolda.no

2. Siden alle pentadominoene består av fem like store kvadrater, vil alle pentadominoene ha det samme arealet. Men hva med omkretsen? Bestem omkretsen til alle de 12 ulike pentadominoene.
3. Lag en oversikt over omkretsene til alle figurene. Hva ser du?
4. Hvis en av pentadominoene blir utelatt, kan det fort trekkes en ukorrekt konklusjon. Hvilken pentadomino er dette, og hva tror du konklusjonen hadde vært? (Dette er et eksempel på at å generalisere i matematikk kan være «farlig».)
5. I noen eldgamle tidligere sivilisasjoner ble et landområde vurdert og prissatt etter at man hadde telt antall skritt man trengte for å gå rundt landområdet. Mener du dette er et godt eller rettferdig mål for å finne en pris for et landområde? Kommenter.
6. De 12 pentadominoene kan på flere måter settes sammen slik at de danner et rektangel. Forsøk å finne ett eller flere slike rektangel.

Ideen til oppgaven er hentet fra artikkelen «Why are mathematical investigations important» skrevet i 2010 av Lorna Quinnell og publisert i tidsskriftet *Australian Mathematics Teacher*.

Månsson

Brøk og divisjonstegn

Symbolbruk i Norge og Sverige

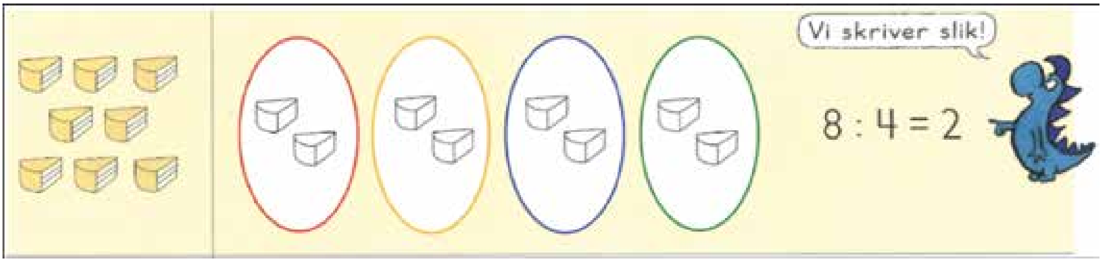
En brøk er et tall uttrykt på formen $\frac{a}{b}$ eller a/b der $b \neq 0$, og hvis både a og b er heltall, sier man at a/b er et rasjonalt tall (Kiselman & Mouwitz, 2008). For mange elever er brøk et vanskelig begrep (Ball, 1990; Behr et al., 1992). En grunn til det er at det finnes så mange ulike tolkninger, representasjoner og symbolske konvensjoner når det gjelder brøk, noe som gjør det til et av skolens mest bredspektrete og komplekse begreper (Fandinõ Pinilla, 2007; Post et al., 1993). Eksempelvis kan brøk representere og modellere:

– andel («to tredjedeler av ballene»)
– divisjon («to pizzaer delt på tre personer»)
– kvotient (resultatet av en divisjon)
– rasjonale tall (tall som kan uttrykkes som brøk der teller og nevner er heltall)
– tall på tallinja (symbol for et spesifikt tall på tallinja)
– operator ($\frac{2}{3}$ eller $\frac{2}{3}\cdot$ som en funksjon som tar tallet 12 og gir tilbake tallet 8)
– forhold, proporsjon («to av tre nordmenn», «kvinner og menn i gruppen forholder seg to til tre», «fart som er antall meter per sekund»)
– målestokk («1 : 1000 betyr at 1 cm på kartet tilsvarer 1000 cm i virkeligheten»)
– odds («oddsen er 1 til 5 for å få en sekser på en vanlig terning»)

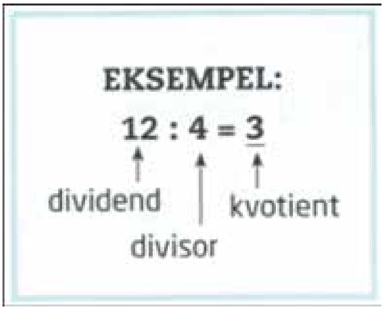
Anders Månsson
Universitetet i Sørøst-Norge
anders.mansson@usn.no

Forskningen på brøk og divisjon i skolen er altfor omfattende til å kunne dekkes grundig her. Hvordan man best bør forstå begrepet brøk, råder det heller ikke enighet om (Clarke, 2006; Pope, 2012). En mulighet hadde vært å bruke forskjellige tegn for de ulike representasjonene ovenfor. Men det å bruke samme tegn for nær beslektete begreper er vanlig i matematikken og gjør den enhetligere, mer overskuelig, og enklere å forholde seg til. Eksempelvis bruker man i matematikken også minustegn i flere forskjellige betydninger (Månsson, 2019).

I denne artikkel ser jeg nærmere på det interessante faktum at Norge og Sverige har ulik bruk av symboler for divisjon og brøk. I Norge bruker man de tre symbolene : og – og / for divisjon og brøk, mens man i Sverige kun bruker de to symbolene – og /. Frem til 1960-årene ble kolon : også brukt i Sverige, men den ble avskaffet blant annet fordi den var belastet med betydningen målingsdivisjon (Kilborn, 1999). Derimot brukes kolon både i Norge og Sverige for å symbolisere målestokk og forhold. Symbolet



Figur 1: Multi 3A



Figur 2: Maximum 8

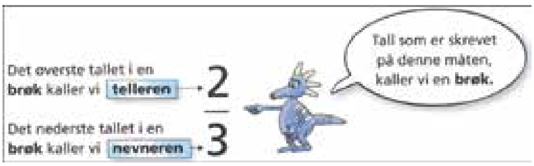
÷ brukes i Norge og Sverige kun som symbol for divisjon på kalkulatorer (Kiselman & Mouwitz, 2008). Jeg undersøker i denne artikkelen om forskjellig bruk av divisjonstegn i Norge og Sverige har noen signifikant betydning for hvordan norske og svenske grunnskolelærebøker i matematikk forholder seg til divisjon, brøk og relaterte begreper. Så vidt jeg kan se, har dette ikke blitt undersøkt tidligere.

Her har jeg undersøkt alle fysiske matematikklærebokserier for den norske grunnskolen tilpasset LK06: *Abakus*, *Faktor*, *Grunntall*, *Kodex*, *Matemagisk*, *Matte overalt*, *Mattestigen*, *Maximum*, *Multi*, *Nummer*, *Nye Mega*, *Radius*, *Septimus*, *Sirkel*, *Tetra*, *Trix* og *Tusen millioner*. Jeg har ikke hatt anledning til å analysere de nye lærebøkene til LK20, men siden artikkelen handler om notasjon som er stabil over tid, vil analyse av LK06-lærebøkene være relevant. Omfanget av svenske lærebokserier i matematikk for grunnskolen er større enn i Norge. For å begrense analysens omfang har jeg derfor gjort et tilfeldig utvalg av lærebokserier fra ulike forlag som retter seg mot ulike aldersgrupper i grunnskolen. Følgende fysiske lærebokserier i matematikk for den svenske grunnskolen har blitt undersøkt: *Formula matematik*, *Lilla Mattestegen*, *Matte Direkt Borgen*, *Matematikboken α–γ*, *Matematikboken X–Z*, *Matte Mosaik*, *Mattestegen*, *Mera Favorit matematik*, *Mondo*, *Pixel*, *Uppdrag Matte* og *Vektor*. Jeg har kun analysert det som står i elevversjonene av lærebøkene, fordi det ville vært mye mer omfattende å analysere lærerveiledninger og nettressurser i tillegg, og allerede analysen av lærebøkene viste interessante forskjeller på norske og svenske lærebøker.

Resultater

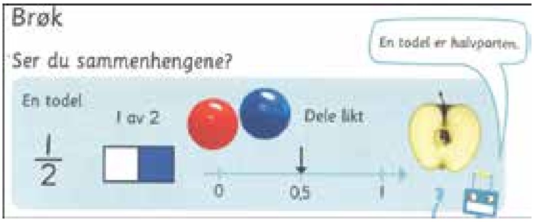
I den norske grunnskolens lærebøker i matematikk symboliseres divisjon først med et kolon (figur 1). Tallene som inngår i divisjonen kalles *dividend* og *divisor*, og resultatet av divisjonen kalles *kvotient* (figur 2).

Norske lærebøker symboliserer brøk med en horisontal eller en skrå strek. Tallene i brøkene kalles teller og nevner (figur 3). Figur 4 viser et eksempel på hvordan norske grunnskolebøker innfører brøk.



Figur 3: Trix 3B

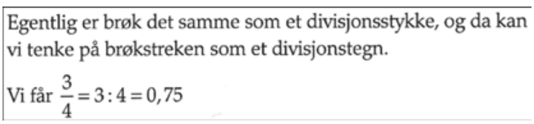
Legg merke til at man i figur 4 ikke eksplisitt sier at $\frac{1}{2}$ er det samme som 1 : 2. Eksplisitt



Figur 4: Matte overalt 3A

sammenkobling av divisjon og brøk skjer som regel ikke i norske lærebøker for de lavere trinnene. Men det forekommer unntak, som figurene 5 og 6 viser eksempler på. Men uansett om sammenkoblingen skjer tidligere eller seinere i lærebokseriene, begrunner man vanligvis ikke nærmere eller eksplisitt hvorfor divisjon og brøk i grunnen er det samme. Som regel konstaterer man bare at det er slik, med noe i stil med at «brøkstreken er det samme som et divisjonstegn» (figur 5–7).

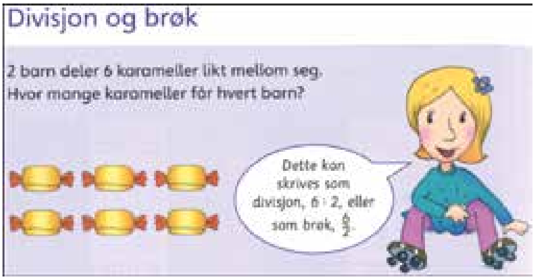
Figur 5: Tusen millioner 4A


Egentlig er brøk det samme som et divisjonsstykke, og da kan vi tenke på brøkstreken som et divisjonstegn.

Vi får $\frac{3}{4} = 3:4 = 0,75$

Figur 6: Nummer 8

I Sverige symboliseres divisjon og brøk med samme tegn allerede fra begynnelsen av lærebøkene, dvs. med en horisontal strek eller en skrå strek. Man bruker samme navn på tallene i en divisjon som man bruker på tallene i en brøk, nemlig *täljare* og *nämnare*. Man bruker vanligvis ikke ordet *kvot* ved innførelsen av brøk (bråk på svensk) i svenske lærebøker. Figurene 8 og 9 viser eksempel på hvordan svenske lærebøker i matematikk innfører brøk.



Figur 7: Radius 4B

Figur 8: Mera Favorit matematik 3B

Figur 9: Mattestegen A Vår

Heller ikke svenske lærebøker kobler eksplisitt sammen brøk og divisjon. Man kommenterer som regel ikke hvorfor man bruker samme tegn for divisjon og brøk, eller hvorfor man bruker samme navn for tallene som inngår i en divisjon og i en brøk. Overgangen mellom å bruke strek som tegn for divisjon og bruke strek som tegn for brøk, skjer som regel implisitt og uten nærmere kommentarer.

Frem til 1960-tallet ble kolon brukt som divisjonstegn også i Sverige. Kolon brukes både i Sverige og Norge i sammenheng med måle-

Skala 1:10 (ett till tio) betyder att 1 cm på ritningen är 10 centimeter i verkligheten

Figur 10: Mera Favorit matematik 3A

Målestokk 1 : 50
Det betyr at 1 centimeter på tegningen er 50 centimeter i virkeligheten.

Figur 11: Tusen millioner 4B

Vad menas med proportion?

På bilden ser du 6 gula och 8 gröna kulor. Vi säger då att *proportionen* mellan antalet gula och antalet gröna kulor är $\frac{6}{8}$.
Om vi förkortar med 2 får vi bråket i *enklaste form*. I enklaste form är alltså proportionen mellan antalet gula och gröna kulor $\frac{6/2}{8/2} = \frac{3}{4}$.
Det kan också skrivas 3 : 4 och utläses "tre till fyra". Ett annat sätt att uttrycka det är att antalet gula och antalet gröna kulor *förhåller sig* som 3 : 4.
Vi kan också vända på det och istället uttrycka proportionen mellan antalet gröna och gula kulor. Eftersom det är 8 gröna och 6 gula kulor får vi att proportionen är $\frac{8}{6} = \frac{8/2}{6/2} = \frac{4}{3}$. Det kan också kan skrivas 4 : 3 och uttalas "fyra till tre".

Figur 12: Matematikboken Z

Forholdet én til fem kan vi skrive slik:

1 : 5 eller $\frac{1}{5}$

Brøkstreken er her det samme som et divisjonstegn. Når vi skal finne forholdet mellom to størrelser, forkorter vi brøken så mye som mulig.

Figur 13: Faktor 9

Sträckan CD är avbildad i skala 1 :3.
Den är en tredjedel så lång.

Figur 14: Matte Mosaik 5A

Trekant **B** er et forminsket bilde av trekant **A.**

Målestokken er 1 : 3.

Den lengste siden i trekant **B** er
5 cm : 3 = 1,7 cm

Figur 15: Sirkel 10A

I den italienska flaggan är förhållandet mellan bredd och höjd 3 : 2.
Det betyder att bredden är $\frac{3}{2}$ av höjden.

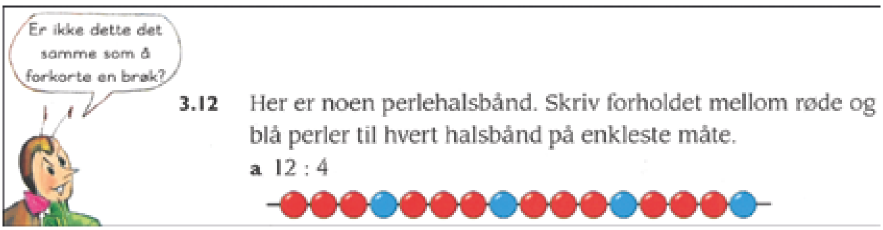
Figur 16: Pixel 6A

stokk, forhold og proporsjon. Figurene 10–13 viser noen eksempler.

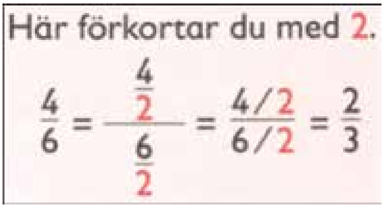
Som regel kommenteres eller begrunnes ikke eksplisitt at kolontegnet for målestokk, forhold og proporsjon er det samme som et divisjonstegn eller et brøktegn, hverken i svenske eller norske grunnskolelærebøker. Derimot finner man implisitte sammenkoblinger, både i svenske og norske grunnskolelærebøker (se figurene 14–17 for noen eksempler).

Siden svenske lærebøker bruker en strek både som divisjonstegn og som et brøktegn, blir det visuelt sett en enklere og mer enhetlig bruk av tegn i svenske lærebøker enn hva det blir i norske lærebøker. Figurene 18 og 19 viser eksempel på dette ved forkortelse av brøk. Legg merke til at man i den svenske læreboka altså bare bruker strek, mens man i den norske læreboka bruker både strek og kolon.

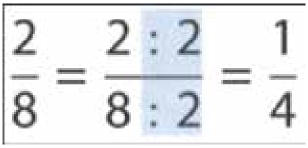
Figur 20 er hentet fra en norsk lærebok, der brøk, divisjon og målestokk forekommer i en og samme utregning. Et slikt skifte mellom forskjellige tegn kan forvirre elever.



Figur 17: Multi 7A



Figur 18: Mera Favorit matematik 5A

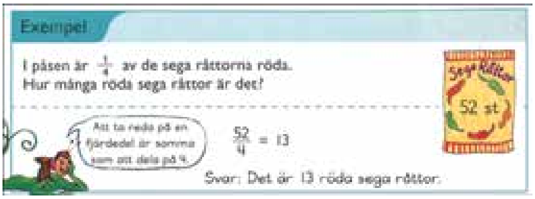


Figur 19: Faktor 8

Figurene 21 og 22 viser to i prinsippet tilsvarende regneeksempler. Det ene eksemplet er hentet fra en svensk lærebok, og det andre eksemplet er hentet fra en norsk lærebok. I den svenske læreboka blir overgangen mellom brøken $\frac{1}{4}$ og divisjonen $\frac{52}{4}$ visuelt sett enklere enn i den norske læreboka, der man går fra brøken $\frac{1}{4}$ til divisjonen $20:4$.

Men det finnes også fordeler med å symbolisere divisjon og brøk med ulike tegn, som man gjør i norske lærebøker. For $2:3$ og $\frac{2}{3}$ er prinsipielt sett to forskjellige ting. Eksempelvis tilsvarer de to forskjellige regnefortellinger (dvs. hverdagskonkretiseringer av matematikken). På den ene siden representerer $2:3$ hvor mye pizza hver person får hvis to pizzaer deles likt på tre personer. På den andre siden representerer $\frac{2}{3}$ to tredjedeler av en pizza. Nå er kvotienten $2:3$ samme tall som brøken $\frac{2}{3}$, dvs. $2:3=\frac{2}{3}$. Det begrunner at man kan bruke samme tegn for divisjon som for en brøk. Når man i svenske lærebøker symboliserer divisjon og brøk med samme tegn allerede fra begynnelsen, finnes det en risiko for at elevene ikke forstår denne prinsipielle forskjellen.

Figur 20: Grunntall 8



Figur 21: Pixel 5B

Figur 22: Matemagisk 6A

Avslutning

I norske og svenske grunnskolelærebøker i matematikk skjer sammenkoblingen mellom divisjon, brøk, og relaterte begreper, gradvis og som regel implisitt. Til tross for at de svenske og norske lærebøkene bruker forskjellige tegn for divisjon og brøk, kunne jeg i min analyse ikke se noen større forskjeller på hvordan svenske og norske lærebøker forholder seg til divisjon, brøk, og relaterte begreper. Dermed er det ikke sagt at de to landenes ulike bruk av tegn ikke kan ha en indirekte eller en intuitiv betydning for elever og lærere. Det finnes både fordeler og ulemper med begge lands tilnærminger. Den svenske måten å symbolisere på gir en mer økonomisk bruk av tegn, som gjør matematikken enhetligere og enklere å forholde seg til. Den norske måten å symbolisere på åpner for en dypere konseptuell forståelse, som risikerer å gå tapt med den svenske måten å symbolisere på. Men mulighetene og fordelene som ligger i hvert lands tilnærming til å symbolisere divisjon, brøk, og relaterte begreper, utnyttes ikke i noen større eller bevisst utstrekning. Både svenske og norske lærebøker kunne mer bevisst og eksplisitt forklart eller kommentert hvordan begrepene divisjon, brøk, andel, kvotient, målestokk, forhold, proporsjon, etc, henger sammen.

Referanser

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 132–144.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. I D. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 296–333). Macmillan.

Clarke, D. (2006). Fractions as division. The forgotten notion? *APMC, 11*(3).

Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae, 7*, 23–45.

Kilborn, W. (1999). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 2 Rationella og irrationella tal.* Liber Ekonomi.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Nationellt Centrum för Matematikutbildning.

Månsson, A. (2019). Minus av minus. *Nämnaren, 46*(4), 43–45.

Pope, S. (2012). The problem with division. *Journal of the Association of Teachers of Mathematics, MT231*, 4245.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R. & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. I T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (red.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (s. 327–361). Lawrence Erlbaum Associates.

(fortsatt fra side 22)

Verden er full av dynamiske problemstillinger (hvor ting endrer seg). Derivasjon håndterer nettopp ting som stiger eller synker. Og da er ikke veien lang til differensialligninger, enten det gjelder Einstein eller sentralbanksjefen hos Norges Bank. Heldigvis har vi i dag avanserte datamaskiner til å utføre slike beregninger, enten det er innen økonomi eller fysikk. En kjent formel som avslutter denne artikkelen er:

$$\int_0^t \frac{dx}{x} = \ln(t)$$

Men det er jo litt fint at man kan begynne med å brette et papirark – eller hva?

Vil du annonsere i Tangenten?

Da når du alle medlemmer i LAMIS og andre aktive matematikklærere og fagmiljø.

Ta kontakt på tangenten@caspar.no

Dalvang

Matematikkvansker – fra bekymring til diagnose

På en samling i Nettverk for matematikkvansker i Statped i 2019 ble følgende spørsmål reist: «Hvordan vil vi foreslå at matematikkvansker tas hånd om i opplærings- og helsesystemet?» Det ble opprettet en arbeidsgruppe som blant annet skulle innhente informasjon omkring diagnostisering av matematikkvansker og komme med forslag til forbedringer for praksisfeltet. Arbeidsgruppen besto av rådgiverne Siri Grytøyr, Irina Jensø, Ketil Johnsen og Tone Dalvang. Denne artikkelen bygger på informasjon og forslag fra gruppens arbeid.

Matematikkvansker forekommer i et spekter fra lette utfordringer til store og komplekse vansker. Vanskene kan ha svært ulike årsaker og utgjøre forskjellige utfordringer fra individ til individ. På folkemunne blir begrepet dyskalkuli ofte brukt når elever ikke får til matematikkfaget. Det fins imidlertid flere diagnoser på og ulike beskrivelser av elever som strever med tall, regning og matematisk resonnering. Det kan være mange grunner til å ta beskrivelser eller diagnoser i bruk. Noen ønsker forklaring på hvorfor enkelte personer strever mer enn forventet med tallforståelse og matematikk, andre søker etter beskrivelser og tiltak for å avhjelpe vanskene, og atter andre erfarer at det er nødvendig å få fastsatt en diagnose for å søke om særskilte rettigheter i opplæringssystemet. Det er ingen forpliktende retningslinjer for hvordan vanskene skal utredes og vurderes. Dette resulterer i svært forskjellig praksis. Elever, foresatte og fagfolk i ulike profesjoner er på jakt etter tydelige retningslinjer, tiltak og rettigheter for elever i matematikkvansker.

Opplæringsloven (Kunnskapsdepartementet, 1998) inneholder mange viktige paragrafer. Arbeidsgruppen erfarer imidlertid at de i praksis ikke alltid blir brukt og derfor ikke kommer elevene til gode. I arbeidet blir intensjoner i opplæringsloven foreslått styrket, og forslag til forbedringer blir fremmet. Forslagene henvender seg direkte til ansvarlige på ulike nivåer i opplærings- og helsesystemet.

Tone Dalvang
Statped Sørøst
tone.dalvang@statped.no

Bakgrunnskunnskap

For å innhente informasjon fra praksisfeltet sendte arbeidsgruppen spørreskjemaer til pedagogisk-psykologisk tjeneste (PPT), helsesektoren og universitets- og høyskolesektoren. Spørreskjemaene til PPT og helseforetakene innhentet opplysninger om den enkelte tjenestes praksis knyttet til utredning, begrepsbruk og diagnostisering i saker om individer med matematikkvansker. Her følger et kort utdrag av svarene:

PPT (199 svar) opplyser at de fleste gjør utredninger ved bekymring for matematikkvansker.

De bruker forskjellige begreper for å beskrive bekymringene, men de aller fleste oppgir at de benytter «spesifikke matematikkvansker». En betydelig andel av respondentene oppgir at deres tjeneste diagnostiserer dyskalkuli. Samtidig oppgir nesten like mange av respondentene at de aldri bruker «dyskalkuli» når de beskriver matematikkvansker.

Helsesektoren (33 svar; barne- og ungdomspsykiatri, BUP og barne- og voksenhabilitering) oppgir at deres arbeidssted ikke utreder matematikkvansker. To av svarene forteller at de vurderer matematikkvansker, men vurderingene er basert på utredninger fra samarbeidspartnere som PPT og Statped.

Universitets- og høgskolesektoren ble bedt om å utdype hvilke opplæringstilbud de har som gjelder matematikkvansker, enten som selvstendig emne eller som del av andre emner. De aller fleste (16 svar) opplyser at matematikkvansker kun utgjør en begrenset del av de generelle spesialpedagogiske eller allmennpedagogiske emnene på deres studiested. Kun tre oppgir å tilby mulighet for fordypning i emnet. Flere av respondentene synes at matematikkvansker får for lite oppmerksomhet ved deres studiested.

ICD-11 med nye diagnoser

For tiden er ICD-10 den mest brukte diagnosemanualen i Norge. I manualen omtales matematikkvansker som «spesifikk forstyrrelse i regneferdighet». ICD-10 inneholder ikke begrepet dyskalkuli, men praksisfeltet bruker både begrepene dyskalkuli og spesifikke lærevansker i matematikk om hverandre og ganske tilfeldig når diagnoser beskrives. Sommeren 2019 ble diagnosemanualen ICD-11 vedtatt av Verdens helseorganisasjon (WHO, 2019). ICD-11 er ennå ikke oversatt til norsk eller ferdig behandlet i direktoratet for e-helse. Oversettelsen skal skje i et samarbeid mellom flere nordiske land. ICD-11 omhandler to diagnoser knyttet til matematikkvansker. Den ene dreier seg om læring og beskrives som «Developmental learning disorder with impairment in mathematics». Beskrivelsen ligner en del på diagnosen «Spesifikk forstyrrelse i regneferdighet» fra ICD-10:

> Developmental learning disorder with impairment in mathematics (ICD-11, 6A03.2) is characterized by significant and persistent difficulties in learning academic skills related to mathematics or arithmetic, such as number sense, memorization of number facts, accurate calculation, fluent calculation, and accurate mathematic reasoning. The individual's performance in mathematics or arithmetic is markedly below what would be expected for chronological or developmental age and level of intellectual functioning and results in significant impairment in the individual's academic or occupational functioning. Developmental learning disorder with impairment in mathematics is not due to a disorder of intellectual development, sensory impairment (vision or hearing), a neurological disorder, lack of availability of education, lack of proficiency in the language of academic instruction, or psychosocial adversity.

ICD-11 har i tillegg innført diagnosen dyskalkuli, som de har gitt et annet innhold enn det som tidligere har vært vanlig på folkemunne og i faglitteraturen. «Dyscalculia» refererer nå til matematikkvansker som har oppstått som følge av en ervervet hjerneskade. Endringen innebærer et tydelig skille mellom de to diagnosebeskrivelsene, og forhåpentlig vil det også føre til at diagnosene anvendes mer presist og skilles fra hverandre når de brukes i praksis.

> Dyscalculia (MB4B.5) refer to acquired difficulty with performing simple mathematical calculations that is inconsistent with general level of intellectual functioning, with onset after developmental period in individual who had previously attained these skills, such as due to stroke or other brain injury.

Med bakgrunn i endringene av de nye diagnosene i ICD-11 foreslår arbeidsgruppen en tydeliggjøring av ansvarsfordeling mellom helse og opplæring, men også et samarbeid:

Helsesystemets ansvar

Arbeidsgruppens forslag: «Utredning av diagnosene 'Dyscalculia' og 'Developmental learning disorder with impairment in mathematics' plasseres til personer som har utredningskompetanse på nevrologiske forstyrrelser, i dialog med sakkyndige fra opplæringssystemet».

Dette forslaget innebærer:

- At det utarbeides faglige retningslinjer for hvem som kan sette diagnoser knyttet til matematikkvansker.
- At det foretas en vurdering av verktøy som kan være aktuelle å benytte i utredningen.
- At det etableres tverretatlige læringsnettverk for erfaringsdeling og utvikling av utredningsarbeid.

Opplæringssystemets ansvar

Forslaget over forholder seg til utredning for diagnoser, men vurderinger av matematikkvansker handler om så mye mer. Det er utfordrende når oppmerksomhet og ressurser som brukes på jakt etter en diagnose, får plass på bekostning av oppmerksomhet og ressurser til hva som ville være god matematikklæring for eleven. Det vil derfor i det følgende bli lagt vekt på forbedringer som kan gjøres når det gjelder tilpasset opplæring og spesialundervisning. I det arbeidet er det utbyttet av opplæringen som definerer særskilte rettigheter og tiltak.

Matematikkteamet ved Statped i Kristiansand har utviklet Prosessmodellen (Forum for matematikkmestring, 2010), der strukturen er inspirert av Fuchs & Fuchs (2006), se tabell 1. Dette er et system over ulike grader av intervensjoner når elever ikke har tilfredsstillende utbytte av den ordinære opplæringen. I denne artikkelen brukes prosessmodellen for å vise en oversikt over forpliktelser som allerede ligger i dagens opplæringssystem, fordelt på fasene 1–4. Etter modellen følger forslag til utvidelser og presiseringer av ansvar, fra fase til fase. Prosessmodellen inneholder fem faser.

Prosesser i fase 1

Om ordinær og tilpasset opplæring i opplæringsloven § 1-3 står det: «Opplæringa skal tilpassast evnene og føresetnadene hjå den enkelte eleven, lærlingen, praksisbrevkandidaten og lærekandidaten». Arbeidsgruppen forutsetter at påbegynte intensjoner videreutvikles og styrkes:

- Skoler utvikler høy faglig og pedagogisk kompetanse og bevissthet om holdninger og verdier om inkludering, deltakelse og læring. Det innebærer å skape kontekster

OPPLÆRING – prosesser i samarbeidet mellom skole og PPT				Prosesser i samarbeidet mellom skole, PPT og helse
Fase 1	**Fase 2**	**Fase 3**	**Fase 4**	**Fase 5**
Ordinær og tilpasset opplæring § 1-3 Underveisvurdering og dokumentasjon	Intensiv opplæring § 1-4 Vurdering av respons på opplæring § 5-4 Underveisvurdering og dokumentasjon	Henvisning til PPT Utredning Bakgrunn i dokumentasjon fra fase 1 og fase 2	Enkeltvedtak avgjør rett til og gjennomføring av spesialundervisning Andre særskilte rettigheter vurderes Dokumentasjon	Dokumentasjon fra fasene 1–4 Utredning for eventuell diagnose

Tabell 1: Prosessmodellen

for læring og deltakelse som er tilrettelagt for mangfoldet i elevgruppen, både organisatorisk og pedagogisk.
– Skoler og PPT utvikler solide kunnskaper om barns utvikling av matematisk forståelse, slik at de tidlig kan bli oppmerksom på elever som har utfordringer i faget.

Forslag til utvidelser:
– Skolens plikter til å følge opp og jevnlig evaluere elevenes utbytte av den tilpassede opplæringen tydeliggjøres. PPT er en naturlig drøftingspart i dette arbeidet.
– På nasjonalt nivå utvikles det materiell for enkel dokumentert observasjon og kartlegging av elevens mestring og forståelse av nøkkelideer fra Antall, rom og form og begynneropplæringen på 1. trinn.
– Det blir obligatorisk å gjennomføre observasjon og kartlegging tidlig på første trinn.

Prosesser i fase 2

Om intensiv opplæring og vurdering av respons på opplæring, opplæringsloven § 1-4 står det:

> På 1. til 4. årstrinn skal skolen sørgje for at elevar som står i fare for å bli hengande etter i lesing, skriving eller rekning, raskt får eigna intensiv opplæring slik at forventa progresjon blir nådd. Om omsynet til eleven sitt beste talar for det, kan den intensive opplæringa i ein kort periode givast som eineundervisning.»

Og i § 5-4 står det:

> Eleven eller foreldra til eleven kan krevje at skolen gjer dei undersøkingar som er nødvendige for å finne ut om eleven treng spesialundervisning, og eventuelt kva opplæring eleven treng. Undervisningspersonalet skal vurdere om ein elev treng spesialundervisning, og melde frå til rektor når slike behov er til stades. Skolen skal ha vurdert og eventuelt prøvd ut tiltak innanfor det ordinære opplæringstilbodet med sikte på å gi eleven tilfredsstillande utbytte før det blir gjort sakkunnig vurdering.

Som rådgivere i Statped ser vi at dokumentasjon fra læringsprosessene i intensiv opplæring og vurdering av respons på opplæring er mangelfull. Vi får for eksempel lite informasjon om hva skolen og PPT har lagt til rette for. Hva har vært innholdet i matematikkfaget? Hvilke tiltak har vært iverksatt? Hvordan har opplæringen vært organisert, og med hvilket utbytte?

Arbeidsgruppen forutsetter at påbegynte intensjoner videreutvikles og styrkes:
– Skoler og PPT utvikler tydelige praksiser for observasjon, kartlegging og elevsamtaler for å komme raskt i gang med intensiv opplæring ved behov.
– Det utvikles tydelige praksiser med kontinuerlig dokumentasjon av læringsutbytte sett i forhold til læreplanen, deltakelse og utvikling. Skolen har ansvaret, elev og foresatte medvirker.

Forslag til utvidelser:
– Skolen har plikt til å involvere PPT for i samarbeid å videreutvikle og styrke systemet rundt intensiv opplæring og vurdering av respons på opplæring.
– Lovgiver, på nasjonalt nivå, klargjør hva som utgjør «ikke tilfredsstillende utbytte» av opplæringen.

Prosesser i fase 3. Henvisning til PPT

Når en elev henvises til PPT, skal elevens læringsutfordringer og skolens innsats for å forbedre læringsutbyttet være godt dokumentert. I denne dokumentasjonen er elevens medvirkning viktig.

Arbeidsgruppen forutsetter at påbegynte intensjoner videreutvikles og styrkes:
– Barneombudets signaler om behov for økt elevmedvirkning og å ta elevstemmer på alvor. Begrunnelser for dette er også å finne

i PPTs individsøknader til Statped, der elevers stemme ofte mangler i dokumentasjon som handler om matematikkvansker.
- Fra Overordnet del LK 20. Demokrati og medvirkning: «Elevene skal erfare at de blir lyttet til i skolehverdagen, at de har reell innflytelse, og at de kan påvirke det som angår dem. De skal få erfaring med og praktisere ulike former for demokratisk deltakelse og medvirkning, både i det daglige arbeidet i fagene og gjennom for eksempel elevråd og andre rådsorganer. Dialogen mellom lærer og elev, og mellom skole og hjem, må være basert på gjensidig respekt.»

Forslag til utvidelser:
- Skolens plikt til § 5-4 forsterkes gjennom at skole (rektor) og PPT skal vurdere det opplæringstilbudet som har vært gitt i tråd med læreplanen i matematikk, og om læringsprosessene i intensiv opplæring og vurdering av respons på opplæring har vært grundige og gode nok for å gå videre til sakkyndig vurdering.
- Elevens stemme og medvirkning skal alltid være del av dokumentasjonen ved henvisning fra skole til PPT.

Prosesser i fase 4

Om rett til spesialundervisning og andre særskilte rettigheter, opplæringsloven § 5-1 står det at «Elevar som ikkje har eller som ikkje kan få tilfredsstillande utbytte av det ordinære opplæringstilbodet, har rett til spesialundervisning».

Og i § 5-6 står det:

> [Den pedagogisk-psykologiske] tenesta skal hjelpe skolen i arbeidet med kompetanseutvikling og organisasjonsutvikling for å leggje opplæringa betre til rette for elevar med særlege behov. Den pedagogisk-psykologiske tenesta skal sørgje for at det blir utarbeidd sakkunnig vurdering der lova krev det.

Når det gjelder rett til spesialundervisning, dispensasjon fra krav om generell studiekompetanse og opptak til høyere utdanning m.m., er det to svært forskjellige prinsipper som gjelder:

1. Prinsippet om *ikke tilfredsstillende utbytte av opplæring*. Dette prinsippet kan utløse særskilte rettigheter i grunnskole og videregående opplæring.
2. Prinsippet om *diagnose*. Dette prinsippet kan utløse dispensasjon fra kravet om generell studiekompetanse ved opptak til høyere utdanning. Det styres av samordna opptak, men varierer fra studiested til studiested.

Systemet knyttet til særskilte rettigheter er uoversiktlig og svært vanskelig å orientere seg i. Når det gjøres enkeltvedtak, er det ofte usikkert hva som blir konsekvensene videre i opplæringssystemet. Når diagnoser legges til grunn for særskilt opptak ved høyere utdanning, skapes spørsmål om og behov for diagnoser også tidlig i grunnskoleforløpet. Under følger et utvalg spørsmål som ofte stilles til rådgivere i Statped.

Grunnskole

Mange elever og rådgivere forteller at det er vanskelig å vurdere konsekvenser på lengre sikt når for eksempel fritak fra vurdering med karakter i matematikkfaget blir bestemt.

«Jeg har fritak fra vurdering i matematikk nå. Hva betyr det når jeg kommer i videregående?»

«Trenger jeg en dyskalkulidiagnose, og hvem kan gi meg den?»

Videregående opplæring

Elever og foresatte opplever at det er vanskelig å finne frem til pålitelig informasjon om hvilke utdanningsveier som er åpne eller stengt når man har et ønske om å ta en utdanning på universitet eller høgskole.

«Hva skjer hvis jeg ikke klarer å få generell studiekompetanse?»

«Hvor kan jeg finne enkel og troverdig informasjon om opptakskrav til høyere utdanning?»

Rådgiver
Rådgivere på videregående skoler og PP-rådgivere har store utfordringer når de skal veilede unge mennesker og deres foresatte om utdanningsvalg.

«Det er så vanskelig å finne ut hvilke opptakskrav som gjelder, så du må bare sende av gårde en hel haug med søknader til flest mulige universitet og høgskoler og håpe at du kommer inn på ett av studiene.»

«Hvilken dyskalkulitest er godkjent i Norge?»

Forslag til utvidelser:

- Lovgiver tydeliggjør PPTs mandat til medvirkning i systemarbeid, og oppfølging av sakkyndighetsarbeidet i skolen.
- Skoleeier sørger for at PPT får en forsterket rolle med hensyn til skolens kompetanseutvikling og arbeid med spesialundervisning i matematikk, i henhold til § 5-6.
- Skoleeier innskjerper kompetansekrav til ansatte som skal ha spesialundervisning.
- På nasjonalt nivå utvikles prinsippet om ikke tilfredsstillende utbytte av opplæringen som utgangspunkt for særskilte rettigheter som på den måten vil være like og sammenhengende i hele opplæringsforløpet. Vurderinger og konsekvenser av særskilte rettigheter gjøres tydelige nok for elever, foresatte, lærere og rådgivere til at de kan klare å velge og veilede.

Prosesser i fase 5. Vurdering av mulig diagnose

Forslag:

- Diagnosene «Dyscalculia» og «Developmental learning disorder with impairment in mathematics» kan kun settes av fagpersoner som har utredningskompetanse på nevrologiske forstyrrelser. Diagnosevurderingene skal gjøres med bakgrunn i dokumentasjonen som er gjennomført i fasene 1–4 i opplæringsforløpet, der også sakkyndige instanser fra opplæringssystemet bidrar.
- Diagnosene skal i seg selv ikke utløse spesielle rettigheter knyttet til opplæring.

Det er vanskelig å vite hvor en skal henvende seg for å få hjelp med matematikkvansker, enten det gjelder opplærings- eller helsesystemet. På skolen kan den matematiske utviklingen ha stoppet helt opp, og mange ganger «løses» utfordringene ved at det gis fritak i faget. Arbeidsgruppen fremmer ønske om at det utvikles et system der ansvarsfordelingen av oppgavene knyttet til matematikkvansker blir tydeligere. Diagnoser på matematikkvansker blir en sak mellom en person og helsesystemet. De er ikke utslagsgivende for skoletilbudet. I hele skolesystemet er det utbyttet av opplæringen som avgjør om spesielle rettigheter blir utløst, og om særskilte tiltak settes i gang. Prinsippet om utbytte bør også gjelde ved opptak til høyere utdanning. De samlede ressursene kan da brukes på å utvide den ordinære opplæringen, utvikle så gode tilpassede opplæringstilbud som mulig og sikre god faglig kvalitet i spesialundervisningen.

Referanser

Fuchs, D. & Fuchs, L. S. (2006). Introduction to response to intervention: What, why, and how valid is it? *Reading Research Quarterly, 41*(1), 93–99.

Kunnskapsdepartementet (1998). *Lov om grunnskolen og den videregåande opplæringa* (Opplæringslova). Hentet fra https://lovdata.no/lov/1998-07-17-61

Forum for matematikkmestring (2010). *Styrke og videreutvikle kompetanse om matematikkvansker i rapport til Utdanningsdirektoratet.* Sørlandet kompetansesenter, Statped.

World Health Organization (WHO) (2019). *International classification of diseases* (ICD-11). Hentet fra: https://icd.who.int/en/

MENINGSFULL MATEMATIKK FOR ALLE

– et samspill mellom praksis, forskning og utvikling

Matematikksenteret, NTNU, vil bidra til at matematikkopplæringen tar utgangspunkt i barn og unges tenkning og bygger på deres interesser, bakgrunn, erfaringer og kunnskap. Målet er at barn og unge skal utvikle en matematisk kompetanse som består av fem komponenter.

Matematikksenteret vil arbeide for å fremme en matematikkundervisning i skolen hvor barn og unge blir møtt med høye forventninger. Læreren leder arbeidet mot læringsmålet for timen, og legger til rette for et godt læringsmiljø.

For barnehage vil Matematikksenteret bidra til at personalet inviterer barna til matematisk utforskning gjennom varierte aktiviteter og berikende samtaler.

Vi ønsker at barn og unge får arbeide med kognitivt krevende aktiviteter som fremmer resonnering og forståelse, og de får diskutere forskjellige løsningsstrategier med hverandre. Feil anses som en naturlig del av læringsprosessen. Slik kan barn og unge erfare at matematikk er engasjerende, utfordrende og meningsfullt.

Matematikksenteret sin virksomhet skal være et samspill mellom praksis, forskning og utvikling. Senteret skal utvikle praksis- og forskningsbaserte ressurser og modeller for kompetanseutvikling som våre målgrupper kan benytte, og bli inspirert av.

For å lykkes med dette må Matematikksenteret ha tett kontakt med praksisfeltet. Matematikksenteret skal drive med forsknings- og utviklingsarbeid i tett samarbeid med praksisfeltet. Senteret skal være oppdatert på nasjonal og internasjonal forskning i matematikkdidaktikk, og senterets arbeid skal være forskningsbasert.

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

NTNU

TEMA:
Nasjonale prøver 2020

Årets runde med nasjonale prøver er gjennomført og vi har analysert resultatene: Hva ser vi at elevene mestrer, og hva er utfordrende?

Omtrent 60 000 elever på 8. trinn, 60 000 på 9. trinn og 60.000 på 5. trinn har gjennomført årets runde med nasjonale prøver. Vi har tatt for oss resultatene for å finne hvilke oppgaver som de fleste elevene mestrer, hvilke som er utfordrende – og hva dette kan si om elevenes ferdigheter i den grunnleggende ferdigheten å kunne regne.

Ikke tilfeldige resultater

Oppgavene i nasjonale prøver i regning er prøvd ut i tre omganger på representative utvalg elever. Etter hver utprøving er hver oppgave nøye analysert. Oppgaver som blir med videre etter en utprøving må tilfredsstille en rekke kriterier. Ett av kriteriene er at elever som løser en oppgave riktig, i gjennomsnitt viser betydelig bedre ferdighet enn elever som ikke løser oppgaven riktig. Dette er uavhengig av vanskegraden til oppgaven.

Det betyr at det på nasjonalt nivå ikke er tilfeldig hvilke elever som løser en oppgave riktig eller ikke. Avvik på individnivå kan forekomme på enkeltoppgaver, men det gjelder ikke en stor andel av elevene.

Nasjonale prøver for 8. og 9. trinn

Oppgave med lav vanskegrad

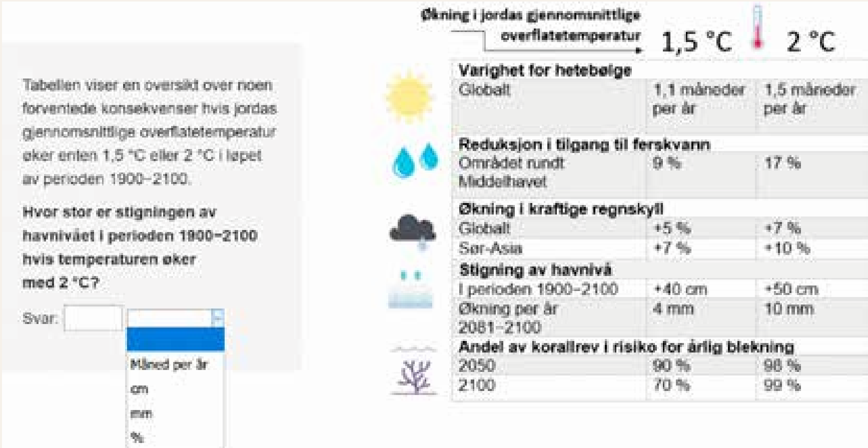
Oppgaven som flest elever på 8. trinn løste i årets prøve, er oppgave 29 (Figur 1). Her må elevene matematisere en tekst om å lage såpe, for så å utføre en multiplikasjon. Tallene i oppgaven innbyr til å bruke ulike strategier. Eleven kan bruke multiplikasjon ($4 \cdot 40$ g), gjentatt addisjon (40 g + 40 g + 40 g + 40 g) eller gjentatt dobling ($40\text{ g} \cdot 2 \cdot 2$).

Av vel 60 000 elever på 8. trinn, svarte 85 prosent riktig. Tilsvarende tall for 9. trinn er 88 prosent. Vi har også sett av resultater fra tidligere prøvegjennomføringer at oppgaver som er greie å matematisere og der elevene kan bruke ulike ukompliserte strategier, løses riktig av de fleste elever.

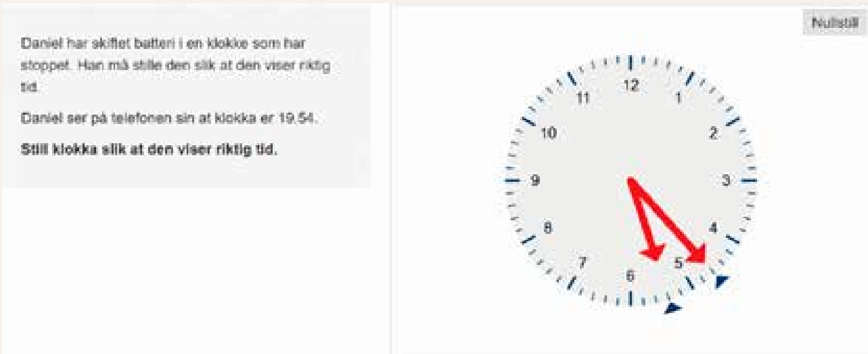
Oppgaver med middels vanskegrad

Her ser vi tre oppgaver som løses riktig av en omtrent like stor andel elever. Oppgavene måler derimot forskjellige deler av elevenes kompetanse (figur 2, 3 og 4).

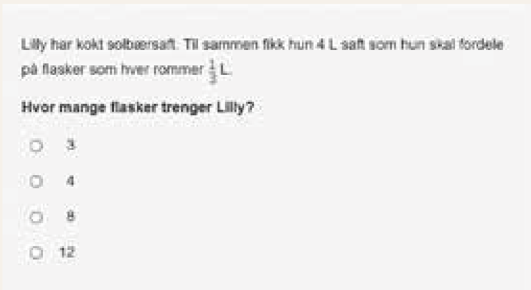
Figur 1: Oppgave 29 fra nasjonal prøve i regning 8. og 9. trinn.



Figur 2: Oppgave 3 fra nasjonal prøve i regning 8. og 9. trinn. Den måler om elevene kan tolke en komplisert tabell.



Figur 3: Oppgave 30 fra nasjonal prøve i regning 8. og 9. trinn. Den måler om elevene kan sammenhengen mellom digital og analog tid.



Figur 4: Oppgave 7 fra nasjonal prøve i regning 8. og 9. trinn. Denne oppgaven måler elevenes brøkforståelse.

Alle tre oppgavene løses riktig av omtrent 50 prosent av elevene på 8. trinn og 57 prosent av elevene på 9. trinn. Siden oppgavene er prøvd ut på forhånd, er dette et forventa resultat for oss. Likevel er det kanskje overraskende at kompetansen som måles i disse oppgavene, har lik vanskegrad.

Oppgave 3 tar utgangspunkt i en tabell med mye informasjon der elevene må tolke tabellen for å sortere ut hvilken informasjon de trenger for å besvare spørsmålet.

At halvparten av elevene løser denne oppgaven riktig, tyder på at mange norske elever har god kompetanse i å tolke og analysere tabeller. Dette blir også støttet gjennom resultater fra internasjonale undersøkelser som TIMSS og PISA.

Oppgave 30 omhandler tid. Elevene skal ikke utføre beregninger med tid i oppgaven, bare vise det digitale tidspunktet 19.54 i en analog klokke.

Det mest høyfrekvente feilsvaret i oppgaven er 18.54. Vi tror ikke at dette feilsvaret er knyttet til at 19 i digital tid tilsvarer 7 i analog tid, men med at timeviseren beveger seg ut fra minuttviseren. For klokkeslettet 19.54 vil det bety at timeviseren vil være nær 8, og ikke på 7.

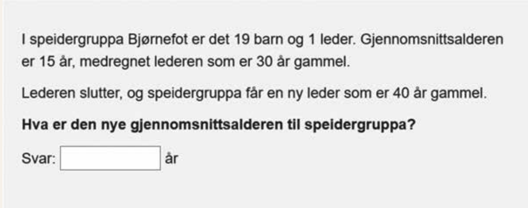
I oppgave 7 omhandler målingsdivisjon. Hovedutfordringen i oppgaven er for de fleste elevene trolig knyttet til brøk.

Elever med brøkforståelse vil se at «flasker som hver rommer 13 L» betyr at Lilly trenger tre flasker per liter saft. I likhet med de fleste andre oppgaver i nasjonale prøver i regning er tallene «snille» å arbeide med. Oppgaven kan løses med flere strategier, for eksempel gjentatt dobling (3 flasker tilsvarer 1 L, 6 flasker tilsvarer 2 L, 12 flasker tilsvarer 4 L).

At 50 prosent av elevene på 8. trinn og 60 prosent av elevene på 9. trinn løser oppgave 7 riktig, tyder på at mange elever ikke har en god nok brøkforståelse. Dersom elevenes tenkning rundt brøk ikke blir utfordret, er det naturlig å anta at manglende brøkforståelse kan være til hinder for videre læring.

Oppgave med høy vanskegrad

Oppgaven som var mest utfordrende i årets nasjonale prøve er en oppgave om gjennomsnitt. Den skiller seg kanskje fra de fleste oppgaver som elever og lærere finner om gjennomsnitt i lærebøker. Oppgaven tester først og fremst om elevene har en forståelse for hva gjennomsnitt er, og ikke at elevene skal beregne et gjennomsnitt av et oppgitt tallmateriale.


I speidergruppa Bjørnefot er det 19 barn og 1 leder. Gjennomsnittsalderen er 15 år, medregnet lederen som er 30 år gammel.

Lederen slutter, og speidergruppa får en ny leder som er 40 år gammel.

Hva er den nye gjennomsnittsalderen til speidergruppa?

Svar: ______ år

Figur 5: Oppgave 36 fra nasjonal prøve i regning 8. og 9. trinn.

Også i denne oppgaven er tallene «snille» å arbeide med. Elever som har en forståelse for at gjennomsnittsalder på 15 år betyr at «om alle 20 hadde vært like gamle, så hadde alle vært 15 år», skal ha gode forutsetninger for å løse oppgaven riktig. Disse elevene kan bruke informasjonen om at den totale alderen i gruppa øker med 10 år (40 år – 30 år) med den nye lederen, og siden antall medlemmer fortsatt er 20, økes gjennomsnittsalderen med $\frac{10}{20}$ år, altså 0,5 år.

Alternativt kan elevene beregne at de 20 i speidergruppa er 300 år ($20 \cdot 15$ år) til sammen. Når lederen erstattes med en ny leder som er 10 år eldre øker den sammenlagte alderen til 310, og den nye gjennomsnittsalderen blir 15,5 år (altså $\frac{310}{10 \cdot 2}$ år).

Oppgave 36 er utviklet for å være en oppgave med høy vanskegrad, siden den krever at elevene har dyp forståelse for et begrep. Elevene som har løst oppgaven riktig presterer dermed godt på prøven som helhet, og har i gjennomsnitt 67 skalapoeng, mens elevene som ikke har løst den riktig, i gjennomsnitt har 49. At 5 prosent av elevene på 8. trinn og 9 prosent på 9. trinn løste oppgaven riktig, er kanskje noe lavt.

Nasjonale prøver for 5. trinn

Oppgaver med lav vanskegrad

Av elevene på 5. trinn har 88 prosent gitt riktig svar på denne oppgaven (figur 5). Oppgaven

Figur 5

Figur 6

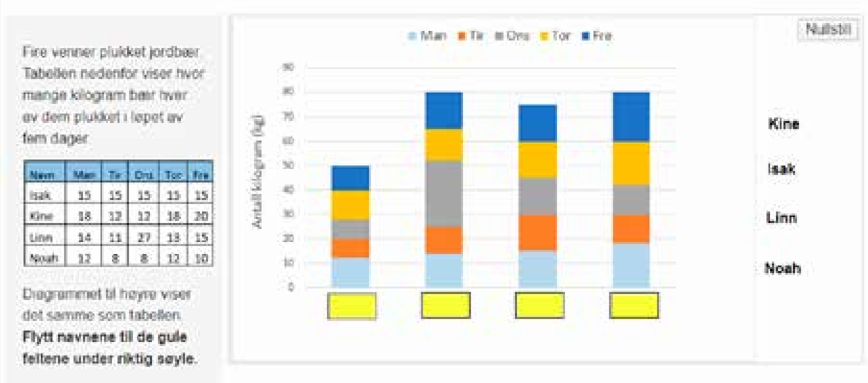
kommer tidlig i prøven, noe som også gjør at mange elever svarer (høy svarprosent). Den kan løses både som multiplikasjon ($5 \cdot 3$) eller gjentatt addisjon ($3 + 3 + 3 + 3 + 3$). Antageligvis er dette en kontekst mange elever vil kjenne seg igjen i. Oppgaven har relativt lite tekst, og selv om tallene står skrevet med bokstaver, viser løsningsprosenten at mange tolker tallordene og velger en riktig regneoperasjon.

Figur 6 viser en oppgave med relativt mange opplysninger og mye tekst, men regneutfordringen er nokså grei, noe også den høye løsningsprosenten tyder på: 84 prosent av elevene på 5. trinn har riktig svar på denne oppgaven. Tabellen slik den er satt opp, ser heller ikke ut til å by på store utfordringer.

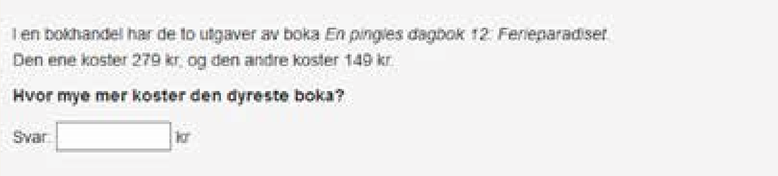
Oppgaver med middels vanskegrad

Noe overraskende er det kanskje at de to oppgavene nedenfor (figur 7 og 8) har nokså lik løsningsprosent. Drøyt halvparten av elevene svarer riktig på oppgavene.

Dette er en oppgave med relativt mye tekst der utfordringen er å forstå sammenhengen mellom tabell og diagram. Både tabellen og diagrammet er ganske komplisert, så det kan være krevende å finne ut hvilke navn som tilhører de ulike søylene. Tallene er valgt slik at de skal



Figur 7



Figur 8

Figur 9

være nokså enkle å legge sammen, men også slik at to av søylene er like høye, der ytterligere vurderinger må gjøres for å finne ut hvilke navn de representerer. Løsningsprosenten kan tyde på at kompetansen med å lese og tolke tabeller og diagram er et område mange norske femteklassinger behersker.

Det er kanskje mer overraskende at oppgave 20 bare har en litt høyere løsningsprosent enn oppgaven med både et diagram og en tabell. Selv med relativt lite tekst og ganske «snille» tall, er det kun 53 prosent av elevene som har løst denne oppgaven riktig. Det er to tresifrede tall der en ikke trenger veksling dersom en setter opp tallene i en subtraksjon under hverandre. Tallene er også slik at de kan egne seg til en ren hoderegning. Her er det nok noen elever som ikke forstår hva oppgaven spør etter, og adderer de to tallene i stedet for å subtrahere.

Oppgave med høy vanskegrad

Den vanskeligste oppgaven i årets prøve tester forståelse av kart og koordinatsystem i en kontekst som kanskje er litt uvant for mange. Koordinatsystemet med breddegrader og lengdegrader ser ut til å være utfordrende å forholde seg til (figur 9).

Det er kun 11 prosent av elevene på 5. trinn som løser denne oppgaven riktig. Her må eleven forholde seg både til grader og himmelretning. Selv om koordinatene og plasseringen til Vikersund er oppgitt som en støtte, er det vanskelig å plassere stiften til Luhove riktig. Det at oppgaven er blant de siste i årets prøve, bidrar nok også til å gjøre løsningsprosenten nokså lav.

Les mer om matematikksenterets arbeid med nasjonale prøver: www.matematikksenteret.no/eksamen-prøver-og-kartlegging/nasjonale-prøver-i-regning

Tidlig innsats i begynneropplæringen

– kompetanseutvikling for kompetansenettverkene i Trøndelag

Høsten 2020 har Matematikksenteret, i samarbeid med Skrivesenteret, gjennomført oppstartssamling med tidlig innsats i begynneropplæringen som tema. Denne samlingen er den første av seks i løpet av tre år. Videre vil det finne sted én samling i semesteret i hver region. Mellom samlingene skal lærere utføre arbeid sammen med egne elever og kollegaer der de prøver ut elementer i god begynneropplæring, observerer hverandre og reflekterer over forbedring av praksis. Målgruppen for samlingene er lærere på 1. og 2. trinn, skoleledere, skoleeiere og PPT. Nettverkssamlingene er gjennomført i åtte av ti regioner i Trøndelag med til sammen ca. 400 deltakere.

Bakgrunn

Stortingsmelding 21/2016–2017 understreker viktigheten av at elever lærer, mestrer og opplever motivasjon og lærelyst gjennom hele skoleløpet. Opplæringen de første skoleårene er viktig i og med at elevene her utvikler de grunnleggende ferdighetene som de trenger for videre læring. Dette er bakgrunnen for en ny bestemmelse i 2018, § 1–4 om tidleg innsats på 1. til 4. trinn:

> På 1. til 4. årstrinn skal skolen sørgje for at elevar som står i fare for å bli hengande etter i lesing, skriving eller rekning, raskt får eigna intensiv opplæring slik at forventa progresjon blir nådd.

Denne bestemmelsen tydeliggjør ansvaret som kommuner, skoler og lærere har for å gi elevene god begynneropplæring. Samtidig er det dokumentert at det er store variasjoner i innhold og kvalitet i begynneropplæringen i norske skoler, og derfor må flere kommuner og skoler iverksette tiltak for å forbedre begynneropplæringen. Den nye bestemmelsen og den dokumenterte variasjonen i kvalitet på praksis i skolen danner bakgrunnen for at kommunene i Trøndelag innfører tilbudet Tidlig innsats i begynneropplæringen.

Målet med Tidlig innsats i begynneropplæringen er at lærere og skoleledere skal utvikle forståelse for hva som kjennetegner god begynneropplæring i lesing, skriving og regning. Denne forståelsen skal omsettes til god praksis i klasserommene, slik at elevene får tilpasset opplæring og kan oppleve mestring og motivasjon. Skolene skal utvikle en god begynneropplæring som er i samsvar med den nye læreplanen, LK20, og som gir alle elevene muligheter til å lære å lese, skrive og regne.

Innhold

Tidlig innsats i begynneropplæringen vil legge vekt på matematikk (regning) og skriving. Sentrale temaer i matematikk vil for eksempel være grunnleggende tallforståelse, dynamisk kartlegging, elevstrategier, representasjoner, motivasjon og utforskende samtaler (ulike typer samtaler og samtaletrekk).

Sentrale temaer innen skriving vil være rask bokstavinnlæring, funksjonell skriving (med fokus på formål, mening, motivasjon), utforskende samtaler underveis i skriveprosessene, å skrive seg til lesing og vurdering av skriving som grunnlag for å støtte elever i videre skriveutvikling. Sammenhenger mellom muntlige ferdigheter og lesing og skriving vil bli vektlagt.

Innholdsmomentene vil gi kunnskap om, og hjelp til, å gi god begynneropplæring og intensiv opplæring til elever som står i fare for å bli hengende etter i lesing, skriving og regning.

I halvparten av regionene var oppstartssamlingene planlagt i mai/juni, men de ble utsatt på grunn av coronasituasjonen. Takket være iherdig innsats fra kontaktpersonene i regionene fikk vi gjennomført fysiske samlinger for alle åtte regioner. Det opplevde både deltakere og vi fra sentrene som verdifullt. Emner som ble belyst i første samling var ny læreplan, utforskende matematikkundervisning, utvikling og observasjon av regnestrategier og bokstavlæring og en lekende tilnærming til skriftspråket.

Tilbakemeldinger fra deltakerne tyder på at de opplevde innholdet som meningsfylt. I evaluering fra deltakerne finner vi utsagn som: «Fint at både regning og skriving var representert og bra med koblingen opp mot læreplanverket». «Veldig positiv til hele dagen. En stor påminnelse om å bruke mer tid til leik i undervisningen, spesielt rammeleik». Vi tror at en av årsakene til de gode tilbakemeldingene er at vi har lagt vekt på begynneropplæring som en helhet, gjennom samarbeidet mellom de to sentrene. Prinsippene for god begynneropplæring i skriving og regning bygger på de samme grunntankene; vi må ta utgangspunkt i elevenes ståsted og følge elevenes takt.

De fire veilederne fra venstre: Iris Hansson Myran (Skrivesenteret), Olaug Lona Svingen (Matematikksenteret), Kathrine Vik Tollaksen (Skrivesenteret) og Ingunn Valbekmo (Matematikksenteret).

Norsk gull i OL!

Andreas Alberg greide det kun to nordmenn har gjort før ham: Å ta olympisk gull! Her er han avbildet sammen med tidligere kunnskapsminister Trine Skei Grande under premieutdelingen i Abelkonkurransen i fjor, som han for øvrig har vunnet tre ganger.

Fakta om IMO

The International Mathematical Olympiad (IMO) ble for første gang avholdt i Romania i 1959, med sju land på deltagerlista. I dag deltar over 100 land fra fem kontinenter. Medaljene fordeles etter et spesielt system: Deltagerne deles i 12 grupper sortert etter resultat. Den beste gruppen får gull, de to neste sølv, og de tre deretter bronse.

I 2022 arrangeres IMO i Oslo.

Hvem deltar i OL i 2021?

De norske deltagerne i IMO kvalifiserer seg ved å delta i Abelkonkurransen. Første runde arrangeres 5. november og alle elever i videregående kan delta.

Andreas Alberg (17) tok gull i den internasjonale matematikkolympiaden.

The International Mathematical Olympiad (IMO) er verdens «matematikk-OL» for elever i videregående. Det norske laget bestod av Andreas Alberg (Oslo), Elias Ekern Baird (Bergen), Philip Bergh Sveen (Oslo), Erik Mjaanes (Oslo), Christoffer Grøndal Tryggestad (Oslo) og Andreas Notøy (Sandefjord) – som alle kvalifiserte seg etter svært gode prestasjoner i Abelkonkurransen.

Andreas Alberg kom på 22. plass av 616 deltagere, noe som holdt til gullmedalje. Elias Ekern Baird tok bronse.

Norge har deltatt i IMO 37 ganger – og det er tredje gang har vi greid å ta gullmedalje. Dette er med andre ord sjelden kost for lille Norge! Det landet som gjorde det best i år var Kina, som vant overlegent sammenlagt.

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
Matematisk institutt UiO
Postboks 1053 Blindern
0316 OSLO

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det er en demokratisk rett å få en matematikkundervisning som setter en i stand til å delta aktivt som borger i et demokrati. Derfor vil Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) sette fokus på matematikk for alle.

Styret for LAMIS

Leder
Renate Jensen, Vestland

Barnetrinnet
Henrik Kirkegaard,
Møre og Romsdal

Mellomtrinnet
Inger-Lise Risøy, Viken
Svend Eidsten, Viken

Ungdomstrinnet
Kari-Anne Bjørnsø Rummelhoff, Viken

Videregående skole
Odd-Bjørn Lunde, Rogaland

Høgskole/universitet
Marianne Maugesten, Viken

Varamedlem (Barnetrinnet)
Hilde Svendsen

Medlemskontingent 2019

450 kr for enkeltmedlem
200 kr for husstandsmedlemmer
300 kr for studenter/pensjonister
975 kr for skoler/institusjoner

Organisasjonssekretær

Elin Unstad, org.sek@lamis.no

Lederen har ordet

Renate Jensen

Kjære Lamiskollega!

Takk for deltakelse på det digitale årsmøtet den 14. september. Årets Holmboeprisvinner, Anne Seland, startet årsmøtet med et flott faglig innlegg om hvordan en kan få matematikken til å gi mening for alle elever. Presentasjonen hennes finner dere på vår hjemmeside.

Fra innholdet på årsmøtet ønsker jeg å trekke frem arbeidsprogrammet for kommende år. Her må vi tenke nytt – hvordan bruker vi situasjonen vi er i nå til å jobbe med prosjekter som gir LAMIS et løft videre? Vi har valgt at vi sammen med lokallagene skal oversette og tilrettelegge for norske elever en digital ressurs utarbeidet av Danmarks Matematiklærerforening. Dette er opplegg knyttet til FN sine 17 verdensmål/bærekraftsmål, med fakta, ekte data, bilder og forslag til oppgaver og organisering. Ressursen vil hjelpe barnehagelærere og lærere til å planlegge for fagkobling og integrert tverrfaglighet. Innholdet knyttes til de tre tverrfaglige temaene; Folkehelse og livsmestring, Demokrati og medborgerskap og Bærekraftig utvikling – og til matematikkfaget spesielt. Arbeid med tverrfaglige tema legger til rette for dybdelæring, det gir relevans for elevene og hjelper med å se sammenhenger i fag og på tvers av fag. Vi gleder oss til å sette i gang med arbeidet, og målet er å ha mye av ressursen klar til sommerkonferansen 2021 der temaet er nettopp tverrfaglighet. Les mer om programmet så langt på side 53, og har du en god ide til verksted på sommerkonferansen ønsker vi å høre fra deg, se side 54.

LAMIS vil parallelt arbeide med en ny nettløsning som skal gjøre påmelding og gjennomføring av de innledende rundene i UngeAbel enklere. Nettløsningen skal gi gode muligheter for å dele våre ressurser, som for eksempel oppgavene fra UngeAbel, innlegg fra konferanser, vår oppgavebank mm.

En viktig post på årsmøtet var å takke Gerd Nilsen for en fantastisk innsats i LAMIS. Hun har i mer enn 20 år bidratt til at driften av LAMIS har blitt gjort med faglighet, effektivitet, struktur og engasjement. Selv om hun nå blir pensjonist er vi glade for at hun fremdeles skal være med som jurymedlem i UngeAbel og ha hovedansvar for oppgaver og samarbeid med de andre nordiske landene om dette.

Til slutt vil jeg ønske dere en god avslutning av dette første semesteret i et annerledes og krevende barnehage/skole/studieår. Førjulstiden gir flotte muligheter for matematiske aktiviteter ute og inne. Bruk vår digitale oppgavebank og Tangenten som inspirasjon.

ESKER eller ESCHER

Henrik Kirkegaard

Esker eller Escher er ikke bare et spørsmål om dialekt – begge «emner» er like interessante og flotte eksempler på muligheter for tverrfaglighet – det å se sammenhenger mellom fag, men også sammenhenger i matematikkfaget. La oss ta «esker» denne gangen. Gå inn i Oppgavebanken på www.lamis.no. Trykk på fanen Oppgaver og trykk igjen på Oppgavebank. Deretter følger du «oppskriften». Har du ikke logget deg inn før, kan du registrere deg og etter et par dager får du tilgang ☺ Kommer du ikke inn skal du ikke fortvile – skriv til henrik.kirkegaard@lamis.no. Ny nettløsning for LAMIS er første prioritet i arbeidet vårt fremover ☺

I oppgavebanken skal du søke på «esker». Da får du opp et oppgaveark om esker, med forslag for ulike trinn. Bruk oppgavene som inspirasjon for ditt eget prosjekt.

På de laveste klassetrinn er det viktig å øve finmotorikk. Med læringsbrett i skolen blir det mindre av den finmotoriske og den taktile øvingen. Bretting er derfor en glimrende inngang til finmotoriske øvelser. Bruk bretteveiledningen i Oppgavebanken for gaveeske eller søk på nettet etter MASU-box. Det er kanskje ikke alle elevene som får til å brette hele esken selv; men med litt hjelp fra medelever eller lærer går det helt fint. Julen er for lengst kommet til en butikk nær deg og bretting av esker kan være et godt tverrfaglig juleprosjekt. Her kan norsk, matematikk, kunst & håndverk, engelsk, KRLE og sikkert flere andre fag bruke julen som en ramme for felles planlegging. Brett enkle esker av kopipapir i litt julete farger. Brett både topp og bunn. Til bunnen skal du bruke et kvadrat som er litt mindre enn kvadratet til toppen. Esken pyntes med små hjerter, juletrær, glimmer eller hva dine elever synes er fint. Deretter kan elevene skrive et dikt som legges i esken. I esken kan det også ligge pepperkaker elevene har bakt eller annet som du sammen med elevene finner relevant.

På mellomtrinnet kan elevene brette forundringseske eller gaveeske. Her er det mange muligheter for å jobbe med sammenhenger i matematikkfaget. La elevene få utfordringen med å brette eskene med utgangspunkt i forskjellig papirstørrelser. Hva skjer? Det går også an å finne andre former på eskene. På nettet ligger det utallige bretteveiledninger på ulike esker. Matrjosjka- eller babushkadukker er en hul dukke med enda en dukke inni. Dette går det også an å lage med gaveesken. Hvor mange esker får elevene inni, hvis de starter med et kvadrat laget av et A4-ark? Eskene gir også mulighet å utforske overflate og volum.

Mine elever på 4. trinn har fått i oppgave å bygge en eske/beholder, som rommer akkurat en liter. De har fått i oppgave å bygge esker med fire sider, seks sider, åtte sider. Esker er et uuttømmelig emne som engasjerer elevene. Riktig god fornøyelse.

LAMIS Sommerkonferanse 2021

Tittelen på sommerkonferansen er «Matematikk på kryss og tvers», og hovedfokuset vil være tverrfaglighet. Arbeidet med det faglige og det sosiale programmet er godt i gang, og vi planlegger for interessante plenumsforedrag og verksteder der deltagerne får være aktive og medvirkende.

Konferansen holder til på Sørmarka konferansehotell på Siggerud, 6.–8. august 2021.

Fredag 6. august

Den første dagen av konferansen blir det plenum, verksteder og LAMIS årsmøte før vi avslutter dagen med middag på hotellet.

Lørdag 7. august

Denne dagen starter vi med plenum og verksteder på hotellet. På ettermiddagen blir det sosial utflukt med rebusløp på LilleBru gård. På gården vil det være muligheter for forfriskninger og lett servering. På kvelden blir det en flott konferansemiddag på hotellet.

Søndag 8. august

Vi avslutter konferansen med plenum og verksteder på hotellet og en avslutning med lunsj.

Så langt har vi fått disse navnene på plass for plenum og verksteder: Hans Persson, Svein Torkildsen, Anne Seland, Mona Nosrati, Helmer Aslaksen, Sigbjørn Hals, Astrid Bondø og Pia Ve Dalen.

På neste side kan du lese vår invitasjon til å holde verksted på konferansen. Vi ønsker spesielt bidrag fra nye verkstedsholdere velkommen.

Hilsen Sommerkonferansekomiteen 2021:
Tone Skori,
Hilde Eik Svendsen,
Tove Branæs,
Brynhild Farbort,
Anders Baumberger,
Hanan M. Abdelrahman

Vil du holde verksted på sommerkonferansen 2021?

LAMIS ønsker å invitere deg med gode idèer til å holde verksted på sommerkonferansen 2021. Temaet for konferansen er tverrfaglighet, og tittelen er «Matematikk på kryss og tvers»

Verkstedet bør ha en tidsramme på 75 minutter, og inneholde praktiske aktiviteter der deltakerne får være aktive og diskutere sammen. Konferansen holdes på Sørmarka konferansehotell som ligger en kort busstur fra Oslo sentrum. Hotellet er omkranset av skog og vann. Her er mulighetene for utendørs arbeid på verkstedene meget gode.

Som verkstedholder får du dekket reise og opphold, og muligheten til å dele dine gode idèer med andre.

Dersom du er interessert sender du en mail med en kort beskrivelse av verkstedet, og hvilke trinn verkstedet passer for til tone.skori@gmail.com

Frist for å sende inn ditt forslag er 15. januar, men vi mottar gjerne forslag så snart som mulig.

Vi gleder oss til å høre fra deg!
Hilsen Sommerkonferanse-komiteen

Løsninger på forrige utgaves oppgaver fra UngeAbel

Utvalgt av Gerd Nilsen

Osten

En ost har form som en kube og har et volum = 125 cm³.

a) Anta at osten skjæres med parallelle snitt i enten to like store biter eller tre like store biter.

Finn det samlede overflatearealet for begge disse tilfellene.

b) Anta istedenfor at vi deler osten i like store biter med *n* parallelle snitt.

Finn et uttrykk for det samlede overflatearealet vi da får.

Løsning på oppgave a)

Overflatearealet to biter:
$150\ \text{cm}^2 + (1 \cdot 50\ \text{cm}^2)$

Overflatearealet tre biter:
$150\ \text{cm}^2 + (2 \cdot 50\ \text{cm}^2)$

Løsning på oppgave b)

Fasit: $150 + 150n$ (i cm²)

Andre forslag til løsninger var:

A_1: $100 + 50n$

A_2: $\left(\frac{5 \cdot 20}{n} + 50\right)n$

B: $125 + 50n$

C: $2(5 \cdot 5) + 4\left(\frac{5 \cdot 5}{n}\right)$

D: $125 + 25n$

E: $50 + \frac{100}{n}$

F: $50n$

G: $300 + 50n$

Utfordring til elevene dine

1. La elevene dine prøve å finne ut hvordan elever/klasser har tenkt for å komme frem til de alternative løsningene.
2. Svaralternativ A_1/A_2 var den løsningen som flest foreslo. Klarer elevene dine å endre oppgaveteksten slik at A_1 blir korrekt?

Oppgave fra UngeAbel

Ny utfordring

Denne oppgaven er hentet fra UngeAbel finaleoppgaver 2016/2017.

Bestefars 10-ere

Utstyr: 58 plastbrikker

Bestefar har spart slik at han har 58 tiere.

Han vil gi penger til de 16 barnebarna sine. Det yngste barnebarnet er ett år og det eldste 14 år.

De som er 1–4 år skal få 1 tier hver. De som er 5–9 år skal få 3 tiere hver, og de som er 10 år eller mer skal få 5 tiere hver.

Da alle barnebarna hadde fått det de skulle ha, var det ingen tiere igjen!

Hvor mange barnebarn kan bestefar ha i hver av de tre aldersgruppene?