Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

Kongshavn, Reid

Bevis på barnetrinnet

Bevis er ein essensiell del av matematisk forsking, og bør spela ei viktig rolle i alle elevar si matematiske utdanning (sjå t.d. Mariotti, 2006; Valenta & Enge, 2020). Vi ser på bevis som ein sentral del av resonnering og argumentasjon, eit av kjerneelementa i den nye læreplanen i matematikk, LK20 (Kunnskapsdepartementet, 2019). Men kva tyder «resonnering» og «argumentasjon»? Og korleis kan det sjå ut i klasserommet? I denne artikkelen vil vi dela nokre av tankane våre då vi vurderte desse spørsmåla, i håp om at tankane våre kan inspirera andre.

Burheim, Dahl, Enge og Rø (2023) skriv at «Matematisk resonnering er en samlebetegnelse for prosessene som inngår i å utvikle matematiske påstander, å avgjøre om de er sanne eller ikke, og hvorfor» (s. 11). Det vil seia at resonnering har tre delar: utvikling av påstandar, verifisering av påstandar og forklaring av påstandar.

Dei baserer skildringa si på arbeidet til Jeannotte og Kieran (2017), som deler matematisk resonnering inn i prosessar knytte til søking etter likskapar og skilnader og prosessar knytte til validering. Prosessane knytte til søking etter likskapar og skilnader ser ut til å handla om å utvikla påstandar, og inkluderer generalisering, å laga hypotesar, identifisering av mønster, samanlikning og klassifisering. Desse siste tre ser for oss ut til å handla om utforsking, medan generalisering og det å laga hypotesar ser ut til å koma seinare, når påstanden er stilt. Jeannotte og Kieran sine (2017) prosessar knytte til validering inkluderer «justering», «bevisføring» og «formell bevisføring». Dei handlar om å finna data, grunngjevingar og støtte som flyttar ein påstand frå å vera sannsynleg til å vera sann.

For å forstå korleis dette heng saman med LK20, kan det vera nyttig å sjå på korleis resonnering og argumentasjon blir omtala i læreplanen. Kjerneelementet resonnering og argumentasjon lyder:

> Resonnering i matematikk handlar om å kunne følgje, vurdere og forstå matematiske tankerekkjer. Det inneber at elevane skal forstå at matematiske reglar og resultat ikkje er tilfeldige, men har klare grunngivingar. Elevane skal utforme eigne resonnement både for å forstå og for å løyse problem. Argumentasjon i matematikk handlar om at elevane grunngir framgangsmåtar, resonnement og løysingar og beviser at dei er gyldige. (s. 3)

Karoline Nilsen Kongshavn
Universitetet i Agder
karoline.k.nilsen@uia.no

David Alexander Reid
Universitetet i Agder
david.reid@uia.no

Kongshavn, K. N. & Reid, D. A. (2025): Bevis på barnetrinnet. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 36*(1), 6–10.

www.caspar.no/tangenten

To uttrykk skil seg ut for oss: «at matematiske reglar og resultat ikkje er tilfeldige, men har klare grunngivingar», og at elevane skal grunngje framgangsmåtar, resonnement og løysingar. Desse ser ut til å vera sterkast knytte til forklaring av påstandar (finna grunngjevingar bak dei) og grunngje påstandar. Utvikling av påstandar, eller Jeannotte og Kierans (2017) prosessar, som er knytte til søking etter likskapar og skilnader, er ikkje nemnde her, men dei er nemnde andre stader i LK20. I kjerneelementet Utforsking og problemløysing les vi «Utforsking i matematikk handlar om at elevane leiter etter mønster, finn samanhengar» og i kjerneelementet Abstraksjon og generalisering les vi «Generalisering i matematikk handlar om at elevane oppdagar samanhengar og strukturar.» Desse verkar å fanga prosessen med å utvikla matematiske påstandar.

Med dette i tankane kjem vi til å sjå kjerneelementet resonnering og argumentasjon som å handla om verifisering av påstandar og forklaring av påstandar, og Jeannotte og Kierans (2017) prosessar knytte til validering. I ungdomsskulen og vidaregåande skule blir desse prosessane kalla bevisføring, men bevis og bevisføring er vanlegvis ikkje assosierte med barneskulen. Så kva kan bevis vera i barneskulen? Stylianides (2007) har utvikla ein definisjon av bevis som skal vera gjeldande på alle skulenivå. Han skriv at eit bevis er eit matematisk argument som oppfyller dei følgjande tre kriteria:

1. det nyttar utsegner som er sanne, og som ei gjeven elevgruppe kjenner til og aksepterer utan videre grunngjeving (aksepterte sanningar)
2. det nyttar former for resonnering (måtar å argumentere på) som er matematisk gyldige, og som er innanfor rekkjevidde for ei gjeven elevgruppe; og
3. det blei uttrykt med føremålstenlege representasjonar (måtar å representere argumentet på) som er kjente / innanfor rekkjevidde for ei gjeven elevgruppe (Stylianides, 2007, s. 291–292, vår omsetjing)

Definisjonen understrekar at eit bevis er eit argument som tek utgangspunkt i eit felles kunnskapsgrunnlag i klassen. Det handlar om at når ein skal argumentera for sanninga til ein påstand, så må ein ta utgangspunkt i definisjonar, aksiom, teorem, reglar eller prosedyrar som elevane kjenner til, og som dei aksepterer utan videre grunngjeving. Med denne definisjonen treng ikkje bevis å vera avgrensa til eit spesifikt format eller ei spesifikk representasjonsform. Passande måtar å uttrykkja resonneringa på i skulen kan vere til dømes munnlege forklaringar, illustrasjonar, teikningar og tabellar, og etter kvart som elevane blir eldre, kan dei gjerne gradvis lære å uttrykkja resonneringa med matematiske symbol (Stylianides, 2007).

Stylianides (2007) peiker på at denne forståinga heidrar matematikk som disiplin, ved å hindre at empiriske argument blir rekna som gyldige bevis på noko skuletrinn. Til dømes kan empiriske argument innebera å nytta eitt eller fleire konkrete tal for å påstå at noko gjeld for alle tal. Å teste ut fleire konkrete tal kan bekrefta ein påstand, men det gjev ikkje nødvendigvis eit tilstrekkeleg grunnlag for å kunna avgjera om påstanden er sann eller ikkje for absolutt alle tal. Argument som dette kan likevel vera ein naturleg del av ein matematisk utforskingsprosess, som kan leia fram til generaliseringar og oppdagingar av eigenskapar eller samanhengar som seinare kan brukast i konstruksjon av meir robuste argument.

Det kan verka som at Stylianides her seier at ein aldri kan nytta døme for å bevisa ein påstand, men dette er ikkje tilfellet. Eit døme kan spela ei viktig rolle i bevisføringa, men det må brukast på ein spesifikk måte. Når eit døme blir brukt som representant for ein generell kategori, blir det rekna som eit 'generisk døme' (Mason & Pimm, 1984). Hovudtrekket ved eit generisk døme er at det blir sett på som generelt

Kongshavn, K. N. & Reid, D. A. (2025): Bevis på barnetrinnet. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 36*(1), 6–10.

www.caspar.no/tangenten

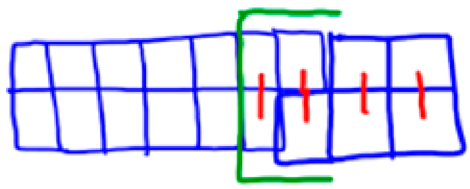
av både den som føreslår det, og dei som høyrer det bli nytta. Dømet illustrerer ikkje berre ein enkel situasjon, men fungerer som eit døme på ein større matematisk idé eller struktur som kan gjelda i fleire tilfelle. Eit generisk døme synleggjer dei strukturelle relasjonane og mønstera som ligg til grunn for den påstanden som blir fremma. Når dømet blir brukt på denne måten, kan det bidra til å avklara korleis ein viss type resonnement fungerer, og det kan støtta ei djupare forståing av dei matematiske prinsippa som er involverte. For å forstå denne ideen meir konkret kan vi sjå på eit bevis frå 3. klasse som nyttar seg av generiske døme.

«Ein til overs»

Nordheim (2021) gjev eit godt døme på korleis tredjeklassingar kan bevisa at summen av to oddetal er eit partal, gjennom representasjonar som dei kjenner til, og som dei kan klara å forstå med litt hjelp frå læraren. Elevane starta med å teste ut nokre døme på konkrete oddetal, og blei overtydde om at summen alltid måtte vera eit partal. For å hjelpa elevane vidare fekk Nordheim elevane til å stille seg opp i grupper med andre elevar, og så skulle dei sortera seg parvis i rekkjer. Tanken var at dette kunne gje elevane ei moglegheit til å utforska strukturen til oddetal, noko som kunne hjelpa elevane til å forstå grunngjevinga for at summen alltid var partal. Elevane fekk òg beskjed om å beskriva kva som skjedde når to grupper som hadde «en til overs», blei slått samen.

Nordheim engasjerte elevane i eit såkalla handlingsbevis (Semadeni, 1984), gjennom fysisk samanslåing av ulike oddetals- og partalsgrupper. Elevane flyttar seg fysisk rundt i klasserommet slik at dei kan erfara korleis den totale mengda alltid blir eit partal, når to grupper med ein til overs kjem saman. Gjennomføringa av desse handlingane, saman med å setje ord på kva som skjedde, hjelper elevane til Norheim med å sjå kvifor to grupper med oddetal blei til ei gruppe med partal når dei blei slått saman.

Gjennomføringa av handlingsbeviset leidde til følgjande forklaring frå Liam: «Hvis du har to oddetall, da har du jo én til overs (på hver). Hvis du legger dem sammen, da blir det et partall, fordi da er det to til overs, og (de) setter sammen seg med (til) et partall» (Nordheim, 2021, s. 6). Figur 1 viser korleis læraren illustrerte resonneringa til Liam. Teikninga viser samankopling av to og to tal når ein legg saman 13 + 5, for å illustrere at det er eit partal. Her nyttar ein altså eit konkret døme for å forklara ein matematisk påstand som gjeld for alle element i ein kategori, ikkje berre for den spesifikke situasjonen som dømet først ser ut til å representera. Dømet er her nytta som eit generisk døme for å støtta til Liams generelle forklaring, for å visa visuelt korleis summen av to vilkårlege oddetal vil vera eit partal.



Figur 1. Illustrasjonen frå læraren av Liams argumentasjon (henta frå Nordheim, 2021, s. 7).

Dømet frå Nordheims klasserom illustrerer eit argument som baserer seg på aksepterte sanningar i klasserommet. Nordheims andreklassingar er einige om at partal består av par, og at oddetal består av par pluss «ein til overs». Dette er definisjonar av partal og oddetal, og sjølv om dei ikkje blei eksplisitt uttalte eller formulerte høgt i klassen, er dei underforståtte og aksepterte utan videre. Dømet illustrerer korleis elevane kan leiast frå eit empirisk argument (Stylianides, 2007) til eit argument kor dei nyttar dei underliggande eigenskapane til oddetal og partal, for å seia generelt at summen av to oddetal må vera eit partal.

Situasjonen i Nordheims klasserom inneheld fleire gode døme på ulike representasjonsformer som er forståelege for elevane, og naturlege for

Kongshavn, K. N. & Reid, D. A. (2025): Bevis på barnetrinnet. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 36*(1), 6–10.

www.caspar.no/tangenten

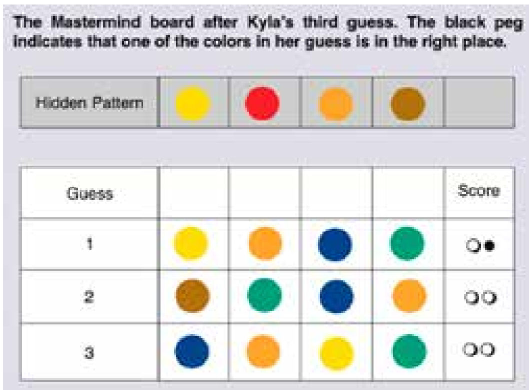
dei å nytta når dei resonnerer og argumenterer. Liam uttrykkjer til dømes resonneringa gjennom verbale forklaringar av korleis summen av to og to oddetal må bli eit partal. Vidare støttar Nordheim Liams munnlege forklaring gjennom å visa koplinga av par med raude strekar i illustrasjonen på tavla (sjå Figur 1).

Resonnering i spelet «Mastermind»

Liams resonnering i førre døme var basert på kjente faktakunnskapar og aksepterte sanningar. Men det finst også døme på kor ein resonnerer basert på ein hypotese, altså noko som moglegvis er sant, men som ein enda ikkje kan vita heilt sikkert om er sant.

Resonnering basert på hypotesar er mykje nytta i «Mastermind». Dette er eit spel som går ut på at den eine spelaren lagar ein skjult kombinasjon av brikker med ulike fargar (ein kode), og der den andre spelaren skal forsøke å gjette kva koden er. Etter kvar gjetting legg den som har laga koden, små svarte og kvite pinnar ved sida av koden han eller ho gjetta på. Pinnane indikerer kor nær kodebrytaren er å gjette svaret. Ein svart pinne betyr at ein av fargane er korrekt og ligg på riktig plass. Ein kvit pinne betyr at fargen er korrekt, men han er plassert feil. Reid (2002) demonstrerer korleis andreklassingen Kyla resonnerer basert på hypotesar når ho speler «Mastermind» saman med læraren:

Etter å ha gitt Kyla to kvite brikker for den tredje gjettinga hennar spurde læraren ho kva ho trudde kunne ha vore på rett stad (sjå Figur 2). Kyla peikte på den blå brikka i første rad og ombestemte seg deretter. «Eg fekk aldri ei svart der», sa ho og peikte på den blå i den andre runden. Ho indikerte så at den grøne heller ikkje kunne vera korrekt i første forsøk: «Fordi på denne [runde tre] fekk eg ikkje ei svart.» Kyla sa at den oransje brikka på tur éin måtte vera på rett stad, men innsåg deretter at ho ikkje kunne vera det: «Fordi eg fekk ei svart rett her – nei! Å nei! Den er gul.» Kylas resonnering inkluderte tre hypotesar: Den blå brikka er i posisjon tre, den grøne brikka er i posisjon fire, og den oransje brikka er i posisjon to. Etter at kvar av desse hypotesane blei motsagde, konkluderte Kyla med at den einaste gjenverande moglegheita, den gule brikka i posisjon éin, måtte vera rett (Reid, 2002, s. 236, vår omsetjing).



Figur 2: Mastermind-brettet etter Kylas tredje gjetting. Den svarte prikken under «score» indikerer at ein av fargane i gjettinga hennar er på rett plass. (Figuren er henta frå Reid, 2002, s. 236.)

Kyla resonnerer basert på reglane i spelet og dei svarte og kvite pinnane læraren hennar gjev ho, og ho nyttar hypotesar som grunnlag for å dra konklusjonar. Når konklusjonane ikkje stemmer med det ho allereie veit, forkastar ho hypotesen og prøver med ein ny. Denne forma for resonnering er grunnlaget for det som blir kalla indirekte bevis, også kjent som bevis ved motseiing. Slike bevis inneber at ein startar med ein hypotese for å utforska konsekvensane, og dersom ein møter på ei motsetning eller noko som ikkje gjer meining, så fortel dette at hypotesen ikkje kan stemma. Hypotesen vil på denne måten kunna avkreftast. Dette er ein nokså vanleg bevisteknikk i matematikk, og er ofte utfordrande å forstå sjølv for universitetsstudentar. Dette er eit døme på korleis elevar, gjennom passande representasjonsformer som konkretar og verbal uttrykksform, kan klara å nytta hypotesar og motseiingar for å kome fram til ei løysing.

Kongshavn, K. N. & Reid, D. A. (2025): Bevis på barnetrinnet. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 36*(1), 6–10.

www.caspar.no/tangenten

Konklusjon

Ein kan lesa kjerneelementet «Resonnering og argumentasjon» som ei tilvising til den kvardagslege tydinga av «resonnering». Men vi meiner at det i matematikk er meir enn berre «å tenkje over noko». Som Jeannotte og Kieran (2017) peiker på, har «matematisk resonnering» fleire fasettar. Vi ser kjerneelementet «Resonnering og argumentasjon» som eit fokus på bevisføring, det vil seia å stadfesta og forklara matematiske påstandar. Dei andre delane av det Jeannotte og Kieran (2017) kallar «matematisk resonnering», som å lage hypotesar og generalisere, er innarbeidde i andre kjerneelement.

Dei to døma som er utforska i denne artikkelen, viser at bevis kan sjå ganske annleis ut for elevar på barneskulen enn det ein kanskje tenkjer på som bevis. Elevane kan argumentera basert på definisjonar og eigenskapar ved tal, så lenge dei blir representerte på måtar som elevane kjenner til. Munnlege forklaringar, illustrasjonar og teikningar gjer det mogleg for elevar å både forstå og formulera bevis allereie i barneskulen. Vidare kan dei resonnera ut frå hypotesar og bruka motseiingar.

Bevis treng altså ikkje nødvendigvis å vera formelle og algebraiske heilt frå byrjinga, men kan uttrykkjast på måtar som er meir tilgjengelege for nivået og forståinga til elevane. Når ein fokuserer på forståing gjennom munnlege forklaringar og visuelle representasjonar, kan bevis vera ein naturleg del av matematisk resonnering frå tidleg alder. Dette kan styrka elevane si evne til å tenkja kritisk og utvikla djupare forståing av matematikk. Bevis kan og bør vera ein del av barnetrinna.

Referansar

Burheim, O. T., Dahl, H., Enge, O. & Rø, K. (2023). *Alltid, aldri eller noen ganger?: Om matematisk argumentasjon i grunnskolen*. Caspar forlag AS.

Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 277–289.

Nordheim, T. K. (2021). Resonnering og argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikk undervisning, 32*(2), 2–7.

Reid, D. A. (2002). Describing reasoning in early elementary school mathematics. *Teaching Children Mathematics, 9*(4), 234–237.

Semadeni, Z. (1984). Action Proofs in Primary Mathematics Teaching and in Teacher Training. *For the Learning of Mathematics. 4*(1), 32–34.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 289–321.

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn.* Hentet fra: https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nno

Kongshavn, K. N. & Reid, D. A. (2025): Bevis på barnetrinnet. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 36*(1), 6–10.

www.caspar.no/tangenten