Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

Honningsvåg, Rø

«Vi teikna for å vere sikre, vi»

Sitatet er henta frå eit intervju med Theodor og Mikkel på fjerde trinn (Honningsvåg, 2023). Dei fortel om bruk av teikning i ei oppgåve om tal på moglege antrekk når ein kombinerer tre bukser og fem genserar. For Theodor og Mikkel var teikning ein måte å overtyde seg sjølve om at dei hadde funne alle moglege kombinasjonar. Teikning var òg til hjelp for å kommunisere til andre korleis dei tenkte.

Fleire forskarar peikar på ein positiv relasjon mellom teikning og det å løyse matematikkoppgåver (Edens og Potter, 2001; Bakar mfl., 2016; Saundry & Nicol, 2006), men elevane sine erfaringar med teikning i matematikk er varierte. Bakar mfl. (2016) observerte elevar på fyrste trinn som teikna både undervegs i arbeidet med problemløysing (alle fasar), og for å kommunisere løysingane sine til andre, men dei teikna ikkje spontant. Med utgangspunkt i Tina sin masterstudie (Honningsvåg, 2023) gjev vi døme på korleis elevar på fjerde trinn nyttar teikning i arbeidet med matematisk resonnering. Resonnering og argumentasjon er eit av kjerneelementa i matematikk i LK20, men kva kjerneelementet inneber eller korleis det kan sjå ut i barneskulen med bruk av ulike uttrykksformer, er ikkje klart (Valenta & Enge, 2020).

Tina Kjøde Honningsvåg
Stad kommune
tina.honningsvag@stad.kommune.no

Kirsti Rø
Høgskulen på Vestlandet
kirsti.ro@hvl.no

Teikning i matematikk

Bruk av teikning i matematikk er tidlegare beskrive av mellom andre Saundry og Nicol (2006). Dei fann at teikning kan ha ulike funksjonar i elevar si matematiske problemløysing: som konkretiseringsmateriale, som støtte for system, og med ulik grad av raffinement. Dahl (2020) undersøkte teikning i multiplikative situasjonar og fann at dei vart nytta både undervegs i problemløysinga som utforskingsreiskap, informasjonshaldar og teljereiskap, og i etterkant, for å presentere løysinga. Ei mogleg samanstilling av deira rammeverk er gjort i Honningsvåg (2023), der ein skil mellom tre kategoriar av teikning i matematikk:

– teikning som konkretiseringsmateriale
– teikning som informasjonshaldar
– teikning som presentasjon av ei løysing

Elevar nyttar teikning som *konkretiseringsmateriale* når teikninga vert nytta aktivt, slik elevane kunne ha nytta fysiske konkretar: ved å eliminere, flytte og dele ut element, eller ved å gruppere. Handlingane vert utført med bruk av til dømes liner, piler og sirklar. Elevane kan

Honningsvåg, T. K., Rø, K. (2025). «Vi teikna for å vere sikre, vi». *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 36*(3), 2–7.

www.caspar.no/tangenten

òg telje elementa på bileta slik dei ville gjort med fysiske konkretar, ved å krysse ut eller sette strek over det dei har talt. Teikning som *informasjonshaldar* er ein meir statisk bruk av teikning, der den fremjar struktur og systematikk, men ikkje inneheld aktive handlingar. Om teikninga vert nytta som konkretiseringsmateriale vil den òg vere ein informasjonshaldar, men ikkje omvendt. Ein tredje kategori er teikning nytta til å *presentere ei løysing,* men utan at teikninga inngår i løysingsprosessen. Vi ser på korleis teikning kan nyttast av elevar i arbeid med matematisk resonnering og gjev difor døme på elevteikningar innan dei to fyrste kategoriane. Teikningane vert presenterte saman med dialogutdrag frå teikneprosessen. For å kunne studere korleis elevar resonnerer med støtte i teikning tek vi utgangspunkt i ein modell for matematisk resonnering utvikla av Jeannotte og Kieran (2017).

Matematisk resonnering på barnetrinnet

Ifølgje Jeannotte og Kieran (2017) er matematisk resonnering ei samnemning for prosessar som inngår i å utvikle matematiske påstandar, å avgjere om dei er sanne eller ikkje, og å grunngje kvifor. Dømer på påstandar er «17 er eit primtal», «alle figurar på tavla er trekantar» og «alle tal i 8-gongen har eit partal som siste siffer». Felles for alle døma er at dei er påstandar om matematiske objekt og relasjonar mellom objekta, og dei er alle anten sanne eller usanne. Jeannotte og Kieran (2017) skil vidare mellom to ulike typar prosessar for matematisk resonnering:

- Prosessar knytt til å leite etter likskapar og skilnadar. Ein utleier matematiske påstandar ved å sjå etter likskapar og skilnadar gjennom til dømes identifisering av mønster, generalisering, samanlikning, klassifisering, eksemplifisering og forming av hypotese.
- Prosessar knytt til validering. Ein forsøkjer å finne ut om ein påstand er sann eller ikkje, ved å argumentere for eller imot. Gode argument som er matematisk gyldige og tilgjengelege, kan kallast bevis.

Å utleie påstandar, argumentere for dei og gje bevis krev eigna uttrykksformer, både i eigen tenking og i kommunikasjon med andre. Kva som er eigna uttrykksform er knytt til fellesskapet ein deltek i. På barnetrinnet kan teikning vere eigna for å synleggjere eigenskapar ved matematiske objekt og dei handlingar eller operasjonar ein kan utøve på objekta.

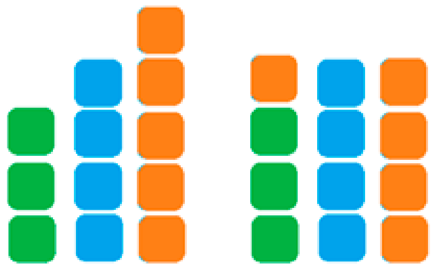
Vi studerer elevar sine teikningar i arbeid med utvalde oppgåver, der ingen føringar eller råd vart gjeve på førehand om korleis elevane skulle nytte teikning. Samstundes vart oppgåvene utforma på ein måte som inviterte til teikning, det vil seie, dei inneheldt situasjonar som kunne visualiserast og teiknast. I tillegg skulle oppgåvene invitere til matematiske resonnering: prosessar knytt til å leite etter likskapar og skilnader, og prosessar knytt til validering. Tina samtala med elevane undervegs i oppgåveløysinga og minte elevane på at dei skulle grunngje svara sine. Totalt arbeidde 24 elever på fjerde trinn i par, med fire ulike oppgåver utforma for matematisk resonnering og bevis. Datamaterialet bestod av 43 innsamla elevarbeid, og det vart gjort videoopptak av seks elevpar. Ei av oppgåvene var som følgjer:

> Veslebroren til Pia, Simon, byggjer tre tårn ved sida av kvarandre med klossar. Tårna aukar alltid med éin kloss for kvart tårn. Det fyrste tårnet har éin kloss, det andre har to, og det tredje har tre. Han byggjer ein gong til, men byrjar då med to klossar på fyrste tårnet. Det andre tårnet har tre klossar og det tredje har fire klossar. Han tel klossane han nyttar for å byggje tre slike tårn og finn ut at summen av klossane er eit tal i 3-gongen. Vil det alltid vere slik, uansett kva tre tårn ein byggjer, når tårna aukar med éin kloss bortover? Bevis for den du arbeider med at hypotesen er sann/usann.

Honningsvåg, T. K., Rø, K. (2025). «Vi teikna for å vere sikre, vi». *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 36*(3), 2–7.

www.caspar.no/tangenten

Med bakgrunn i Simon si tårnbygging kan ein undersøke og bevise ei generell hypotese om summen av tre påfølgjande tal. Oppgåva er altså gitt i ein kontekst med tårn, men matematisk sett handlar oppgåva om eigenskapar ved påfølgjande heiltal i talrekka. Når vi i neste avsnitt presenterer døme på elevarbeid er det den matematiske undersøkinga vi legg til grunn. Ein kan sjå føre seg elevar som skriv ned ulike reknestykke av tre påfølgjande tal, eller som teiknar fleire døme på tre tårn bygd etter Simon si oppskrift. Jeannotte og Kieran (2017) kallar det eksemplifisering – ein resonneringsprosess som støttar begge typar av prosessar nemnt over. Dei ulike døma kan lede til ei empirisk grunngjeving for den generelle hypotesen (ikkje gyldig bevis). Men eksemplifiseringa kan òg støtte identifisering av eit generelt mønster: at den øvste klossen på det siste tårnet alltid kan flyttast til det fyrste tårnet, slik at ein får tre like høge tårn, sjå Figur 1.



Figur 1: Teikning som kan støtte eit bevis for at summen av tre påfølgjande tal alltid vert eit tal i 3-gongen.

I Figur 1 er tårna av høgd tre, fire og fem, men ein kan sjå føre seg ei utviding: ved å legge til klossar under nedste rad kan tårna verte vilkårleg høge. Teikninga fremjar òg strukturen «tre like store delmengder» og kan uttrykkje tal i 3-gongen. Ein vil altså *alltid* kunne gjere ei reorganisering som på teikninga utan at klossar vert lagt til eller trekt i frå. Det samla talet på klossar vert alltid på forma «tre gongar noko». I dei neste avsnitta ser vi på korleis nokre elevar på fjerde trinn arbeidde med Simon si hypotese.

Lucas og Sandra teiknar

Lucas og Sandra teiknar som vist i Figur 2 og summerer ulike trippel av tre påfølgjande tal.

Figur 2: Lucas og Sandra teiknar tårn.

Dei finn at hypotesen stemmer for desse døma. Elevane seier seg nøgde med sitt empiriske argument, men Tina etterspør ytterlegare grunngjeving for kvifor hypotesen alltid er sann.

Lucas	Fire pluss fem er ni. Pluss seks er 15. Det er eit tal i 3-gongen.
Tina	Men oppgåva spør om det alltid vil vere slik?
Lucas	(nøler) Eg er ikkje heilt sikker… Men viss ein byggjer tre tårn, har ein tre her.
Tina	Kan du forklare litt nærare?
Lucas	Det vert tre her, tre her, og tre her og tre nedst (peikar på dei tre tårna[1] i Figur 2).

Dette er fyrste gong teikninga er peika på, og den har no ein funksjon som informasjonshaldar. Lucas identifiserer eit mønster i måten han beskriv oppbygginga av dei tre tårna: med tre og tre klossar for kvar «etasje». Tina oppmodar Lucas om å utdjupe, med støtte i teikninga. Ved å peike på radane med tre i, fylgjer han tala i 3-gongen.

Honningsvåg, T. K., Rø, K. (2025). «Vi teikna for å vere sikre, vi». *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 36*(3), 2–7.

www.caspar.no/tangenten

Tina	Eg ser du nyttar teikninga. Kan du streke dette opp på nokon måte for å sjå det lettare?
Lucas	Her har ein tre (tel nedste rad), her har ein seks (neste rad) og her har ein ni (rada etter).
Tina	Så alle dei som er på rad, vert i 3-gongen?
Lucas	Ja, men eg kan ikkje resten av 3-gongen.
Tina	Det går bra, fordi de kan nytte teikninga.
Sandra	Dei kan ein dele på tre, dei kan ein dele på tre, dei kan ein dele på tre. Desse kan ein ikkje dele på tre … Sjå då. (Peikar på dei tre øvste klossane i de tre tårna: éin kloss i midtre tårn og to klossar på tårnet til høgre.) Og det kan ein med 3-gongen, óg.

Sandra peikar på at tårna er like høge til eit visst punkt, og Tina føreslår å setje ein strek der tårna vert ulike, sjå utsnitt i Figur 3. Teikninga vert no eit konkretiseringsmateriale. Med tre klossar over lina finn Sandra ut at teikninga kan manipulerast.

Figur 3: Utsnitt av teikninga til Sandra og Lucas.

Sandra:	Ja, då kan vi liksom setje dei på rad slik (viser med blyanten at ein kan flytte kloss frå tårnet til høgre bort til tårnet til venstre).
Lucas	Ja, og tre klossar kan delast på tre… Så det går.
Tina	Det er sant… Men om eg hadde tårn som var 100, 101 og 102 [høge], då?
Sandra	Ja! For ein kan framleis bytte klossar. For her (høgre tårn) er det to klossar over streken, og her (midtre tårn) er det 1.
Lucas	Så ein kan ta ein kloss frå her til her (frå høgre tårn til venstre tårn). Også er det ein kloss over streken her (peikar på midtre tårn), så vert det like mange på dei tre tårna.
Sandra	Og då vil det alltid kunne delast på tre.

Tina gjer ei eksemplifisering med tårn høgare enn det elevane kan klare å teikne. Sandra og Lucas kan no sjå føre seg at reorganiseringa av dei tre tårna gjeld alltid, for alle døme av tre påfølgjande tal. Slik vert teikninga ei støtte for byrjinga på eit gyldig bevis for kvifor summen av tre påfølgjande tal alltid vil gje eit tal i 3-gongen.

Johanne og Maren teiknar

Det går ei stund før Johanne og Maren byrjar å teikne eller skrive noko på arket. Dialogen mellom dei går føre seg slik, utan at dei har skrive eller teikna noko:

Maren	Men, OK… Tårn éin til tre vert jo seks [klossar]. Og tårn to til fire vert… Det vert ni [klossar].
Johanne	Ja, og begge er i 3-gongen.
Maren	Ja.
Johanne	Men vert det alltid sånn, då?
Maren	Tippar det! Neste tårn vert då… Hm…
Johanne	Tre, fire og fem.
Maren	Og det vert? (5s) Eg klarar ikkje å tenkje.
Johanne	Skal vi sjå… tre pluss fire vert sju. Også må vi leggje til fem.

Honningsvåg, T. K., Rø, K. (2025). «Vi teikna for å vere sikre, vi». *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 36*(3), 2–7.

www.caspar.no/tangenten

Maren	12, då. 3, 6, 9, 12. I 3-gongen, ja.
Johanne	Då vert det nok alltid slik?
Maren	Det kan sjå sånn ut. (6s) Hallo, dei tala aukar med tre, og det gjer 3-gongen og.
Johanne	Ja, eg ser føre meg at vi har desse tre tårna, og så skal eg og du og lærarane dele tårna. Det går vel då?
Maren	Hm … Tal i 3-gongen kan delast på 3. (Elevane sit og tenkjer utan å prate.)
Johanne	Eg veit! Viss den som har flest klossar gjev ei kloss til den som har minst vil alle få likt, sant?
Maren	Ja, det trur eg.

Med støtte i eksemplifiseringa dei gjer, identifiserer Maren og Johanne ei mønster i tal på klossar for tårn bygd etter Simon si oppskrift. Dei dei tre fyrste tripla av tårn gjev alle eit tal på klossar som er i 3-gongen. For kvart nye trippel av tårn vil talet på klossar auke med tre: «tala aukar med tre, og det gjer 3-gongen og». Ein kan sjå spor av byrjinga på eit induksjonsbevis her (ei auke på tre gjev alltid eit nytt tal i 3-gongen), men Johanne styrer samtalen vidare mot å dele ut tårna på tre personar. For at fordelinga skal verte rettferdig, kan den som får flest alltid gje ein kloss til den som får færrast. Tina kjem og spør korleis dei har tenkt, og dialogen fortset.

Johanne	Tenk deg at vi skulle dele tre tårn. (5s). Kanskje vi skal teikne likevel? (5s) Slik som du foreslo.
Maren	Ja, eg sa det var lurt å teikne. Det er lettare å forklare med teikning.

Johanne og Maren teiknar no tårna på Figur 4 (fyrst utan pilar og utdjuping med ord). Teikninga synleggjer strukturen i tårna og støttar tankeeksperimentet om å flytte på klossane slik at tårna vert like høge. Med den vidare bruken av piler vert teikninga eit konkretiseringsmateriale i elevane si resonnering.

Figur 4: Johanne og Maren teiknar tårn.

Maren	Sjå på teikninga (tårna med høgde éin, to og tre)… Viss eg tek den klossen (frå det høgste tårnet) og gjev den til deg. Då får vi likt.
Johanne	Viss vi set pil frå dette tårnet til dette, så vert det slik som vi forklarte.
Maren	Ja. Då får vi to klossar på kvart tårn.
Johanne	Og uansett om vi legg til tre klossar, så kan vi tre dele alle desse klossane likt.
Tina	Om eg byggjer tårna 100, 101 og 102, da?
Maren	Ja … Vi legg jo berre klossane under her, sjå da!
Johanne	Ja, alt går.
Maren	Alt går!
Tina	Kva meiner de med at alt går?
Maren	Dei tre tårna vert alltid eit tal i 3-gongen om vi legg til tre klossar, fordi 3-gongen aukar jo med tre. Difor vil det alltid gå (Maren skriv «Alt går» øvst på arket).
Johanne	Ja, det har ikkje noko å seie kva tårn det er, så lenge det er tre tal som kjem etter kvarandre. Det største tårnet gjev ein kloss til det minste, så vert det alltid likt.
Maren	Tårna kan liksom vekse under her (peikar nedst på dei tre tårna).

Dømet med tårna av høgd éin, to og tre vert i Maren og Johanne si grunngjeving eit generisk døme for alle trippel av tårn: «uansett om vi legg til tre klossar, så kan vi tre dele alle desse klossane likt», og «tårna kan liksom vekse under her». Teikninga gjer det mogleg å sjå føre seg kva som skjer i alle andre døme – ein kan alltid reorganisere klossane og få tre like høge tårn. Med støtte i teikninga gjev dei eit gyldig bevis for kvifor talet på klossar alltid vert eit tal i 3-gongen.

Avsluttande refleksjonar

Studien til Tina viste at teikning i mange situasjonar hadde ein funksjon som konkretiseringsmateriale, og dermed støtta elevane si matematiske resonnering. Det vart funne døme på at teikning var ei støtte for å forme hypotesar, revidere hypotesar, underbyggje dei, og utvikle grunngjevingar mot gyldige bevis. Til forskjell frå funn gjort av Bakar mfl. (2016), teikna mange elevar spontant, og dei uttrykte i intervju at teikning var nyttig. I fleire av episodane som blei undersøkt (ut over dei som er presentert her) prøvde dei å løyse oppgåvene utan teikning fyrst, og utan å lukkast. Teikning gjorde det mogleg å komme vidare i undersøkingane og resonneringa. For lærarar er det difor viktig å verdsetje og støtte utviklinga av born sine teikningar, og å kjenne igjen potensialet dei kan ha for å uttrykke matematiske idear. Arnesen (2022) og Burheim mfl. (2023) gjev fleire døme på matematisk gyldige bevis på barnetrinnet, der teikning vert nytta som uttrykksform.

Det er viktig å leggje til at sjølv om teikning er ei eigna uttrykksform i skulematematikken, trengst det ein kombinasjon av fleire uttrykksformer for å framstille hypotesar og utvikle grunngjevingar til bevis. Elevane sitt verbale språk, både skriftleg og munnleg, i kombinasjon med teikning og handlingar med dei, gjev moglegheiter for resonnering og argumentasjon i tråd med det som vert framheva i LK20.

Note

1 Tala 100, 101 og 102 vart skrive på seinare i oppgåveløysinga.

Referansar

Arnesen, K. K. (2022). Generiske eksempler som argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(4), 2–8.

Bakar, K. A., Way, L. & Bobis, J. (2016). Young children's drawings in problem solving. I B. White, M. Chinnappan & S. Trenholm (Red.). *Opening up mathematics education research (Proceedings of the 39th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australia)* (s. 86–93). MERGA.

Burheim, O., Dahl, H., Enge, O. & Rø, K. (2023). *Alltid, aldri eller noen ganger? Om matematisk argumentasjon i grunnskolen*. Caspar forlag AS.

Dahl, H. (2020). Tegning som verktøy for å utforske multiplikative situasjoner. I V. Nilssen & S.-M. Høynes (Red.), *Samtaleorientert matematikk: Et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner* (s. 193–221). Fagbokforlaget.

Edens, K. M. & Potter, E. F. (2001). Promoting conceptual understanding through pictorial representation. *Studies in Art Education, 42*(3), 214–233. https://doi.org/10.1080/00393541.2001.11651699

Honningsvåg, T. K. (2023). *«Vi teikna for å vere sikre vi»: Teikning i matematisk resonnering* [Masteroppgåve]. Høgskulen på Vestlandet.

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Saundry, C. & Nicol, C. (2006). Drawing as problem-solving: Young children's mathematical reasoning through pictures. I J. Notova, H. Moraova, M. Kratka & N. Stelikkova (Red.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, s. 57–64). PME.

Valenta, A. & Enge, O. (2020). Bevisrelaterte kompetanser i læreplanen LK20 for matematikk i grunnskolen. *Acta Didactica Norden, 14*(3). http://dx.doi.org/10.5617/adno.8195

Honningsvåg, T. K., Rø, K. (2025). «Vi teikna for å vere sikre, vi». *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 36*(3), 2–7.

www.caspar.no/tangenten