tangenten 1/2024

tidsskrift for matematikkundervisning 35. årgang

tangenten 1/2024

Tidsskrift for matematikkundervisning

Utgitt av Caspar Forlag AS
Kopiering fra tidsskriftet er ikke tillatt uten redaksjonens godkjenning

ISSN 0802-8192

Ansvarlig redaktør
Bjørn Smestad

Redaksjonsgruppe
Trude Fosse
Rune Herheim
Terje Lerø
Toril Eskeland Rangnes
Janneke Tangen
Gry Anette Tuset
For LAMIS: Renate Jensen

Redaksjonsråd
Marit Johnsen-Høines
Aasmund Kvamme
Ole Einar Torkildsen

Adresse
Caspar Forlag/Tangenten
Kanalveien 51
5068 Bergen
tangenten@caspar.no
www.tangenten.no

Abonnementspriser (fra 1.1.2023)

Ordinært	499,– per år
Studenter	289,– per år
Klassesett	270,– per år
(ved minimum 12 studenter)	
Utland	500,– per år

Utgivelsesdatoer
20. februar, 20. april
20. september, 20. november

Layout
Caspar Forlag / Aasmund Kvamme

Grafisk produksjon
John Grieg, Bergen

Artikler til bladet sendes til
tangenten@caspar.no

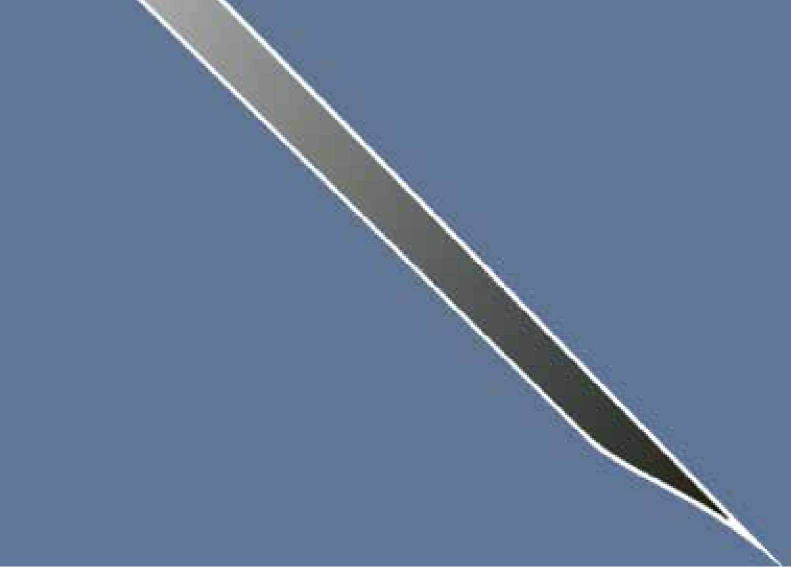
Omslaget
Utforming: Sigrun Werner

Adresseendringer
Medlemmer i LAMIS må bruke
post@lamis.no
for å melde fra om adresseendinger.
Direkteabonnenter hos Caspar Forlag bruker
post@caspar.no

Retningslinjer for vanlige artikler
tangenten.no/for-bidragsytere/retningslinjer-for-forfattere/

Retninglinjer og informasjon for fagfellevurderte artikler
tangenten.no/for-bidragsytere/retningslinjer-for-niva-1-artikler/

Fagfellevurderte artikler er merket som dette i boksen med forfatteropplysninger.



Korden

Den skjeve skår i PISA

PISA-undersøkelsen 2022 ble lagt fram før jul. Den gir et enormt datamateriale som man kan dukke ned i og undersøke. Selv om PISA på ingen måte måler alt som er viktig i matematikkfaget, kan den gi utgangspunkt for interessante diskusjoner.

For Norges del er det ubetydelige resultatforskjeller mellom gutter og jenter i PISA, men økende forskjeller mellom elever med høy og lav sosioøkonomisk status. Samtidig er norske elevers stress knyttet til matematikk økende. Mange kolleger gjenkjenner dette og uttrykker bekymring. Gode holdninger til faget og gode resultater henger sammen med interesse og trivsel. Matematikkglede og engasjement må få større plass.

690 000 elever har brukt tid på å delta i PISA, og mange forskere gjør analyser for å få fram interessante resultater. Det er rimelig å stille spørsmål ved om PISA er verdt pengene og tidsbruken. Resultatene som kommer fram i media er ofte avgrenset til en tabell som viser enkeltlands prestasjoner, og disse oppslagene har stor innvirkning på skolepolitikken. Overskriftene denne gang handlet mest om nedgang i resultatene etter 2018.

Nedgangen i PISA-skår kan åpenbart delvis forklares av pandemien. Elevene opplevde hjemmeundervisning, uforutsigbare rammevilkår og til dels slitne lærere som prøvde å få til tilpasset opplæring for alle.

En annen årsak er kanskje den nye læreplanen. Den legger vekt på dybdelæring, kjerneelementer og programmering og forutsetter omlegging av praksis. Hvordan fanger PISA opp at det legges mer vekt på å bruke ulike representasjonsformer i argumentasjon? Og vil innsatsen som lærere legge ned for å gi god undervisning i programmering, nærmest umiddelbart gi uttelling i PISA?

Innføring av en ny læreplan krever energi, det er tidkrevende og langsiktig. Endringer i praksis gir ikke alltid umiddelbar mestringsfølelse, verken for lærere eller elever. Vi gjør erfaringer og justerer underveis; veien blir til mens vi går. Når innføringen skjer under en pandemi, kan veien bli ekstra smal og kronglete. Kanskje resultatene ikke er svakere enn man kunne forvente?

Uansett bør neste PISA-undersøkelse vise at matematikkgleden har økt i norske klasserom. Tangenten vil gjerne – som alltid – ha artikler som inspirerer til lærerik og engasjerende matematikkundervisning.

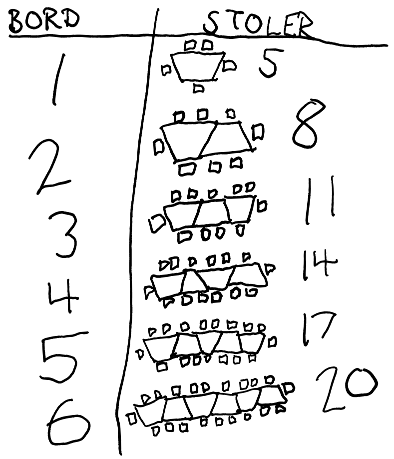
Eskeland

Håndtrykkproblemet

I denne artikkelen ønsker jeg å vise et eksempel på hvordan man kan jobbe med kjerneelementet abstraksjon og generalisering på 2. trinn. Abstraksjon handler om hvordan vi kan formalisere elevenes tanker, strategier og matematiske språk. Generalisering ser jeg som «kjernen» i algebraisk tenkning. Elevene må få utforske og finne sammenhenger som deretter kan representeres med tegninger, ord og symboler.

Funksjonstenkning er en del av algebraisk tenkning og går ut på at elevene skal finne sammenhengen mellom to variabler som endrer seg sammen. Et eksempel på to variabler kan være antall hunder som er i en hundebarnehage, og antall hundeøyne det da er til sammen i rommet. Funksjonstenkning er ikke nevnt i kompetansemålene i læreplanen på barnetrinnet. Jeg mener likevel at arbeid med funksjoner både kan berike undervisningen og gi elevene en nødvendig forståelse før de skal lære om funksjoner på ungdomstrinnet. Funksjonstenkning kan knyttes til mange forskjellige aktiviteter i matematikktimene og er et godt utgangspunkt for å jobbe med abstraksjon og generalisering. Når vi jobber med funksjoner, ønsker vi å finne sammenhengen mellom den uavhengige (x-verdien) og den avhengige (y-verdien) variabelen. Det er noen ganger også et mål å komme frem til en generalisering av funksjonen, enten med ord eller symboler. Dette kan være lettere å få til når elevene setter resultatene inn i en T-tabell.

Vi har jobbet med funksjoner tidligere. Elevene har jobbet med oppgaver som «Å telle hundeøyne» (Amundsen, 2021) og «Trapesbordproblemet» (Nyhus, 2018). Gjennom disse oppgavene innførte jeg begrepet T-tabell. Å skrive opp utregningene sine i en T-tabell kan hjelpe elevene med «å se på tvers» og dermed lettere oppdage sammenhengen mellom de to variablene (Blanton, 2008). Figur 1 viser et eksempel på en T-tabell der elevene har tegnet i tillegg til å skrive ned tallene de har kommet frem til.



Figur 1

Marianne Eskeland
Slemmestad barneskole
eskelandm@gmail.com

Oppgaven

Jeg tok utgangspunkt i denne oppgaveteksten:

- Hvor mange håndtrykk blir utvekslet når tre elever møtes og alle skal håndhilse på hverandre? Hvordan kom du frem til svaret?
- Hvor mange håndtrykk hvis fire håndhilser?
- Hvor mange håndtrykk hvis fem håndhilser?
- Hvor mange håndtrykk hvis seks håndhilser?
- Hvor mange håndtrykk hvis hele trinnet håndhilser?
- Hvor mange håndtrykk hvis alle elevene på skolen håndhilser?

Jeg liker denne oppgaven fordi aktiviteten stiller høye kognitive krav samtidig som den kan løses på forskjellige måter. Oppgaven kan ikke løses med standardalgoritmer, elevene må forstå sammenhengen mellom antall barn og hvordan antall håndtrykk øker. Det kan være nyttig å gjøre seg erfaringer gjennom å tegne eller prøve ut oppgaven praktisk. Jeg forventer ikke at elever på dette trinnet vil klare å tenke seg frem til en måte å løse oppgaven på uten at de har gjort noe praktisk arbeid først. Oppgaven er også lett å differensiere. Inngangsterskelen er lav, og alle elevene vil med litt hjelp kunne klare å løse oppgaven når det er få barn som skal håndhilse. Det kan også være interessant å la elever på forskjellige trinn løse denne oppgaven og sammenlikne strategier de bruker. Kanskje hele skolen kan jobbe med oppgaven i forbindelse med matematikkens dag?

Oppstart

Jeg presenterte problemet for elevene på en praktisk måte. Vi gjennomførte en demonstrasjon av to elever som håndhilste, og snakket om hva et håndtrykk er. To personer gjør et håndtrykk. Det er ikke sånn at jeg først hilser på Kari og så hilser Kari på meg. Deretter delte jeg inn elevene i grupper. Jeg oppfordret elevene til å prøve ut, men jeg sa også at de kunne tegne, regne og bruke det de vil av praktisk materiell. Jeg lot elevene jobbe uten for mye innblanding fra min side, og håpet på mange forskjellige løsningsmetoder som vi kunne se på sammen.

Figur 2

Produktiv feilsøking

Det var mange elever som hadde løst oppgaven feil med tanke på oppgaveteksten. Derfor valgte jeg tidlig å ta en felles diskusjon der vi sammen skulle finne ut hva som hadde gått galt, og nøste opp i misforståelser. Jeg brukte Adas løsning som utgangspunkt (Figur 2). Flere hadde fått samme løsning som Ada. Jeg valgte ut denne løsningen fordi jeg syntes tegningene Ada hadde tegnet i T-tabellen, var interessante. Tegningene kan knyttes både til den praktiske utprøvingen som gruppen gjorde, og til tallene de hadde kommet frem til. Ada fikk forklare hva hun hadde tegnet. De små sirklene er barna, og den store sirkelen er håndtrykkene. Ada fikk gode tilbakemeldin-

Figur 3

ger på forklaringen og løsningen sin. Men jeg sa også at løsningen er feil, og at jeg ville at vi skulle forske litt på det.

Ada og gruppen hennes kom frem. De demonstrerte for oss hvordan de løste oppgaven praktisk. Alle håndhilste samtidig. Jeg spurte både jentene i gruppen og elevene i klassen om alle hadde hils på alle nå, og det var vi enige om at de hadde gjort. Det ble tre håndtrykk til sammen (Figur 3). Og så måtte vi teste ut med fire barn. Sindre kom frem. Elevene viste at de sto i en ring og holdt hender, likt som på tegningen til Ada. Vi så at det var fire barn og fire håndtrykk akkurat som det var tegnet og skrevet i tabellen til Ada. Da spurte jeg elevene om de husket oppgaveteksten. Fire barn skal håndhilse, og alle skal hilse på alle.

Lærer Har du hilst på alle nå, Ada?
Ada Nei! Jeg hilser jo ikke på Ella, jeg hilser bare på Henriette og Sindre.

Vi sjekket med de andre i gruppen, og alle oppdaget at de ikke hadde hilst på alle. Jeg spurte elevene om hvor mange håndtrykk vi manglet, og ba elevene snakke sammen to og to og prøve å finne ut hvor mange håndtrykk det blir når fire barn skal håndhilse.

Her brukte jeg klassesamtalegrepet «læringsvenn-snakk» (Kazemi & Hintz, 2014). Jeg ønsket å involvere alle elevene i klassen. Elevene får forklart for en annen hvordan de tenker. Da kan de både få gjort sine egne tanker klarere og få nye ideer. Jeg har erfart at flere rekker opp hånda og er med i klassesamtalen etter at de har fått muligheten til å diskutere med sidemannen først.

Etter en liten stund ber jeg alle om å svare i kor, og alle roper 6.

Jeg spør Magne om han kan forklare for oss en gang til hvorfor det ble feil.

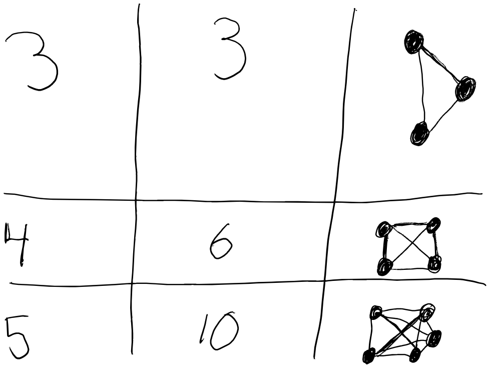
Jeg Hvorfor var det ikke bare fire håndtrykk når alle skulle hilse på alle?

Her brukte jeg klassesamtalegrepet «repetering» (Kazemi & Hintz, 2014). Eleven repeterte noe som allerede hadde blitt sagt, med sine egne ord. Jeg ønsket å sikre at elevene var med i tankegangen. Elevene fikk en ny mulighet til å tenke og forstå, og de fikk delta som viktige meningsskapere i klasserommet.

Magne Man har jo bare to hender, så det går ikke an at alle hilser samtidig. Alle har tre de skal hilse på. Jeg trodde at man skulle doble, men nå ser jeg at det heller ikke blir riktig.
Kaja Da jeg og Sofie og Anna håndhilste, så ble det tre, og da trodde jeg at det bare ble ett håndtrykk til når det kom en til i gruppen. Men nå ser jeg at det ikke blir riktig.

Diskusjonen fortsatte litt, og da jeg følte meg sikker på at jeg hadde med meg alle, stilte jeg et nytt spørsmål. Jeg spurte elevene om hva oppgaveteksten måtte ha vært dersom løsningen til Ada skulle bli riktig. Elevene fikk snakke sammen to og to igjen, men det var ikke så lett å sette seg inn i denne tankegangen nå som vi hadde avdekket feilen i Adas løsning. Men elevene kom med forslag, og sammen formulerte vi oppgaven slik:

Noen barn skal håndhilse, og alle skal håndhilse samtidig. Hvor mange håndtrykk blir det da?



Figur 4

Ulike løsningsmetoder

Etter at vi hadde ryddet opp i forståelsen av oppgaveteksten, gikk vi over til å dele forskjellige strategier som elevene hadde brukt. Jeg viste løsningen til Maia (Figur 4) og spurte om hun kunne forklare hva hun hadde tegnet. Maia forklarte at rundingene var barna, og strekene at de hilste på hverandre.

Lærer Nå må vi se på tegningen med fire barn. Her har dere fått et annet svar enn det Ada fikk først. Hvordan kom dere frem til at det ble seks håndtrykk?

Maia Vi tok og tegnet barna i en firkant med streker imellom, og så tegnet vi streker mellom de som ikke hadde hilst.

Lærer Så dere sjekket om alle hadde hilst på alle, og så måtte dere tegne opp noen ekstra håndtrykk. Hvem kan forklare hvordan Maia fant ut at det måtte bli seks håndtrykk med fire barn?

Jeg gjentok spørsmålet og ba elevene diskutere med sidemannen. Etter en liten stund forklarte enda en elev Maias metode. Deretter ba jeg Ole komme frem. Ole fikk med seg Dina, Anna og Sindre. Jeg hjalp Ole med å gjenskape det han gjorde, med gruppen sin. Først hilste Dina på de to andre, da hadde hun hilst på alle i gruppen og kunne gå ut, og så måtte Anna og Sindre håndhilse. Jeg tenkte høyt sammen med Ole mens vi organiserte håndhilsingen.

Lærer Hvor mange håndtrykk ble det nå?

Ole To og så en, da blir det tre.

Lærer Hvem kan nå forklare hvordan Ole klarte å finne ut at denne gruppen på tre måtte håndhilse tre ganger for at alle skulle ha hilst på alle?

Jeg ventet noen sekunder for å gi alle muligheten til å tenke.

Kaja De gjorde det ikke samtidig.

Lærer Ja, de gjorde det ikke samtidig, men de hadde laget et system på det. Hva var systemet?

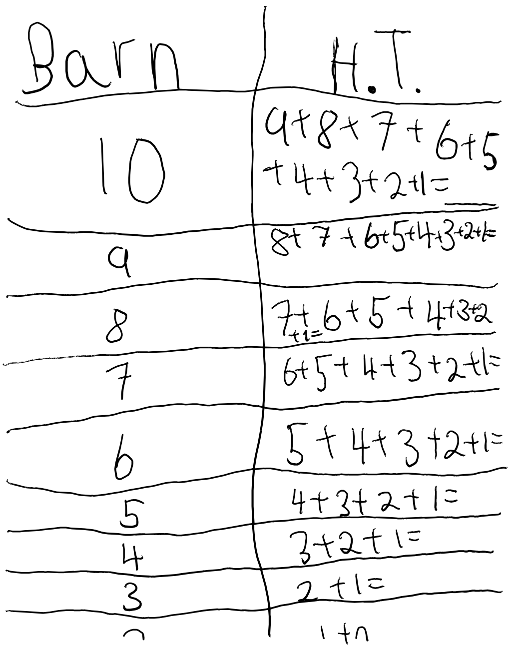
Lars De tok en om gangen.

Lærer Ja, de tok en om gangen. Først passet de på at Dina hadde hilst på alle, og så sjekket de om Anna og Sindre hadde hilst på alle.

Og så kom også Henrik opp slik at antall håndtrykk med fire barn kunne utprøves. Jeg hjalp Ole med organiseringen igjen. Først hilste Dina på de tre andre i gruppen, og da kunne hun gå bort. Så måtte Anna hilse på Sindre og Henrik, og til slutt måtte Sindre og Henrik håndhilse. Jeg sørget for at det ble telt høyt mens håndhilsingen pågikk.

Lærer Ble ikke dette litt som et regnestykke? Først tre og så to og så ett håndtrykk?

Jeg brukte dette spørsmålet som en overgang til å vise en metode som ingen elever til nå hadde brukt. Jeg viste på tavlen hvordan elevene kunne sette opp utregningen av antall håndtrykk med fire barn som 3 + 2 + 1. Begrunnelsen for å introdusere denne strategien finner jeg blant annet hos Kieran (2018). Når elevene skriver ned regnestykker og ikke utregnede svar, kan det bli lettere å generalisere strategien. Elevene kan bruke utregningen for å beskrive hva som skjer. Tallene i regnestykkene kan hjelpe med å oppdage en bakenforliggende



Figur 5

struktur som kan føre til at elevene klarer å generalisere og forutsi hvordan funksjonen vil utvikle seg videre.

Elevene fikk deretter jobbe videre, fortsette der de var, eller begynne med en ny oversikt hvis det ble feil sist.

Sammenhenger og generalisering

Vi var nå kommet dit i oppgaven at vi prøvde å finne ut hvor mange håndtrykk det ville bli hvis hele klassen og deretter alle barna på skolen skulle håndhilse på alle. Jeg valgte å gjennomføre en klassesamtale der vi skulle sammenlikne praktisk utprøving med å tegne håndtrykk og å skrive ned utregningene med tall. Å fokusere på sammenhenger mellom representasjoner kan bidra til forståelse. Jeg ønsket også å gi elevene en erfaring med generalisering og dermed finne en måte de kunne regne ut antall håndtrykk på.

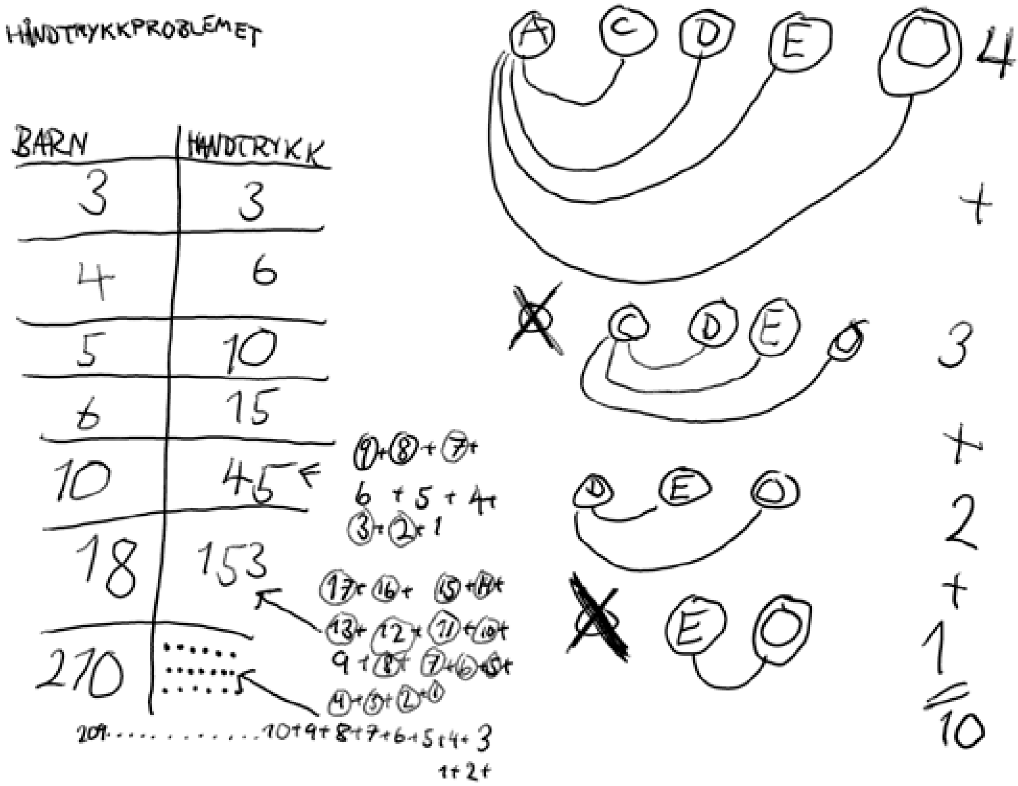
Lærer — Nå skal vi jobbe videre med håndtrykkproblemet. Vi må prøve å finne et system her, for vi skal jo prøve å finne ut hvor mange håndtrykk det blir på hele skolen. Vi klarte fint å teste ut hvor mange håndtrykk det ble med fire elever, men hvordan kan vi gjøre det med 210 elever? Jeg vet at noen har testet ut med fem, seks og syv personer. Men hva skjer hvis vi for eksempel kommer til 100 elever? Hvor lang tid tror du det vil ta, Kaja?

Gruppen til Kaja hadde siden sist testet ut systematisk, så derfor spurte jeg Kaja nå. Jeg hadde lagt merke til at gruppen erfarte at det tok betydelig lengre tid for hver ekstra elev som var med på håndhilsingen.

Kaja — Det vil ta veldig lang tid!»

Lærer — Det hadde vært veldig fint hvis det gikk an å regne det ut, for da kan vi spare mye tid. Nå skal vi sammenlikne to forskjellige måter vi kan løse håndtrykkproblemet på. Den første er Oles. Gruppen til Ole prøvde ut alle håndtrykkene. I den andre måten regner vi ut hvor mange håndtrykk vi får. Vi skal finne ut hva som er likt med de to metodene.»

Jeg viste et bilde av Kajas løsning på tavlen (Figur 5). Etter forrige klassesamtale hadde gruppen til Kaja jobbet veldig systematisk og skrevet opp utregninger som viste hvor mange håndtrykk det ble med forskjellige elevgrupper. Siden utregningene fanger opp den underliggende strukturen for hvordan vi kan finne antall håndtrykk, og dermed muliggjør en generalisering, valgte jeg å ta utgangspunkt i denne løsningen. Tre elever som ikke var på Kajas gruppe, fikk komme opp. En elev håndhilste på de to andre. Jeg ba eleven peke på hvor vi kunne finne igjen de to håndtrykkene i regnestykket til Kaja. De to siste elevene håndhilste, og jeg ba en av elevene peke på hvor i regnestykket vi kunne finne dette ene håndtrykket. De gjorde det samme med fire elever og fem elever. På denne måten ønsket jeg å fokusere på sammenhengen



Figur 6

mellom den praktiske utprøvingen og løsningen til Kaja. Klassen fikk nå i oppgave å finne ut hvor mange håndtrykk det blir når alle elevene i klassen skal håndhilse, og når alle elevene på skolen skal håndhilse. Jeg viste også til at Kaja ikke hadde regnet ut hvor mange håndtrykk det ble, men bare satt opp et regnestykke. Jeg la vekt på at det er godkjent som svar.

Flere barn ville gjerne regne ut hvor mange håndtrykk det ble. Anna fant en lur måte hun kunne bruke for å regne ut antall håndtrykk for ti barn, hun brukte farger og fant tiervenner i regneuttrykkene sine (Figur 6).

Videre arbeid og utfordringer

For å gi elevene mulighet til å bruke erfaringene fra denne oppgaven kan man senere presentere oppgaven i en ny kontekst. Kanskje alle elevene i en klasse vil ønske hverandre godt nytt år. Hvor mange telefonsamtaler blir det da?

Som jeg skrev i innledningen, er dette en oppgave som kan egne seg på flere trinn. Da kan det være større muligheter for å sette ord på generaliseringer og kanskje formulere en generalisering også med symboler.

Legg merke til at hver gang det kommer en ekstra person til gruppen, så legger vi til «en mindre enn antall barn totalt» i summen av antall håndtrykk. Vi kan si at for å finne antall håndtrykk så legger vi sammen tallrekken som starter med 1 og slutter med tallet som er en mindre enn antall barn som håndhilser (5 barn: 1 + 2 + 3 + 4 håndtrykk). Kan elevene forklare hvorfor det blir slik?

Hvor mange håndtrykk blir det hvis 100 personer skal håndhilse?

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 99$$

Hvor mange håndtrykk blir det hvis n personer skal håndhilse?

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n - 1)$$

Med de eldste elevene på barnetrinnet eller på ungdomstrinnet vil det kunne være et mål at elevene i tillegg til å formulere en generalisering med ord kan få til å formulere funksjonen med symboler:

$$h = \frac{n(n-1)}{2}$$

(h står for antall håndtrykk og n for antall personer.)

Jeg tenker at det kan gå an å forklare denne formelen slik: Se for deg at alle (n) hilser på alle bortsett fra seg selv ($n - 1$). Vi må dele på to til slutt fordi vi da har telt med dobbelt så mange håndtrykk som det egentlig blir (Kari hilser på Geir, og Geir hilser på Kari, ett av disse håndtrykkene må tas bort fra utregningen).

Det kan være interessant å sammenlikne dette uttrykket med formelen for trekanttall. Hva er likt, og hva er forskjellig?

Gjennom bruk av planlagte klassesamtaler og samtaletrekk og utforskning av elevenes forskjellige løsningsmetoder mener jeg at vi har fått jobbet med kjerneelementet abstraksjon og generalisering i arbeidet med denne oppgaven. Elevene har fått utvikle sitt matematiske språk, og vi har brukt tankene og strategiene deres som utgangspunkt for samtalene. Vi har kommet et steg på vei til å generalisere. Vi har ikke formulert en generalisert funksjon hverken med ord eller symboler, men vi har funnet en metode som kan brukes for å finne ut hvor mange håndtrykk det blir når det stadig kommer flere barn til.

Referanser

Amundsen, B. H. (2021). Funksjonstenking på 1. trinn. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 32*(1), 10–14.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Kazemi, E. & Hintz, A. (2014). *Intentional talk. How to structure and lead productive mathematical discussions*. Stenhouse Publishers.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. I C. Kieran (Red.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (s. 79–105). Springer.

Nyhus, G. (2018). Trapesbordproblemet. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(3), 2–7.

Fra arkivet

I min førsteklasse var «skoleveien» tema da elevene begynte på skolen om høsten. En elev fortalte ivrig: «Min vei er bare rett nedover, og så er jeg der». Han bodde rett ved skolen. «Jeg kan gå to veier», sa ei av jentene. «Jeg kan enten gå bortover gangveien og forbi dammen og nedover der. Eller jeg tar følge med Kari. Da går jeg nedover og bortover til fotgjengerfeltet. Så er jeg på skolen.» Elevene tegnet skoleveien sin og forklarte hvordan de gikk.

I artikkelen «Nærmiljøet som prosjekt» i Tangenten 1/2014 beskrev Annbjørg Håøy arbeid med kart over nærmiljøet i en førsteklasse.

Les denne artikkelen og andre godbiter fra Tangentenarkivet på tangenten.no

Justnes

Flerkulturelle rom som ressurs

Jeg har i flere år undervist på mellomtrinnet på skoler med stort elevmangfold, her forstått som skoler med stor andel minoritetsspråklige, flerspråklige og flerkulturelle elever. Jeg har derfor flere kolleger og venner som er lærere på skoler med lignende elevgrunnlag. I samtaler med lærere diskuterer vi kjente utfordringer i matematikkundervisningen, og vi deler erfaringer med ulike forsøk på og tiltak for å redusere hindringer for elevers deltakelse. Ønsket er å sikre alle elever tilgang til meningsfull matematikk. Selv om disse lærerne arbeider etter prinsipper for god matematikkopplæring, etterspør flere av dem litteratur, materiell og ressurser som kan støtte dem i arbeidet med matematikkundervisning i et flerkulturelt klasserom. Dette er ikke unikt. Som følge av globalisering og innvandring opplever mange skoler en økning i antall flerspråklige elever. Det fører til at lærere må vise forståelse for at det tar tid for elevene å lære seg både språk og normer i matematikkfaget. Fordi god matematikkopplæring må ta utgangspunkt i elevers tenkning, interesser, erfaringer og kunnskap, anbefales det i tillegg at lærere utvikler eksplisitte strategier for å utnytte elevenes språklige og kulturelle verktøykasse for å legge til rette for bedre læringsmuligheter i matematikk (Chval et al., 2021). Dette innebærer å skifte perspektiv, fra flerspråklighet som problem til flerspråklighet som ressurs (Planas & Civil, 2013). For at ressursperspektivet skal bli noe mer enn en ideologi, bør forskere og lærere sammen utforske flerspråklighet som ressurs i praksis, framfor å fordype seg i hindringer. I denne artikkelen vil jeg presentere noen erfaringer fra klasserom med stort elevmangfold, der forskere og lærere sammen har utforsket hvordan elevenes språklige og kulturelle verktøykasse kan være ressurser for en mer inkluderende matematikkundervisning.

Camilla Norman Justnes
Matematikksenteret
camilla.justnes@matematikksenteret.no

Identifisere hindringer

I en studie som tok sikte på å inkludere flere av de flerspråklige elevene i en 3.-klasse i matematiske samtaler, identifiserte Justnes & Gätzschmann (2023) at konteksten et matematisk problem er rammet inn i, kunne utgjøre et hinder for at elever engasjerte seg i problemet i fellesskap med medelever. Observasjoner av matematikkundervisningen gav en rekke eksempler på ord i kontekster som kunne utgjøre hindringer. Justnes & Gätzschmann (2023) fant eksempler på at elevene ikke forstår matematikkordet, for eksempel oddetall, at elever ikke forstår hverdagsordet, for eksempel køyeseng, og at elever ikke forstår undervisningsordet, for eksempel argumenter for eller rund av. I tillegg er det en del ord som er både hverdagsord og matematikkord, for eksempel rot og negativ. Erfaringer fra praksis har vist at mange elever bruker og forstår ordene som blir introdusert i undervisningen, men at noen elever kan mangle forståelse for ord som læreren tar for gitt at de kan. Det kan være både hverdagsord og småord. Elevene kan for eksempel bruke ordet representere eller tierplass selv om de ikke forstår ordet synke. Eller når elevene får oppgaven «Ring rundt tierplassen», så tegner de en ring over sifferet 2 i tallet 129. Da har de riktig nok identifisert tierplassen, men ikke tegnet ringen rundt tallet. Heldigvis vil de fleste lærere fortsatt betrakte det som riktig svar.

I samme studie fant Justnes & Gätzschmann (2023) også at selve konteksten, ikke bare ett eller flere ord, kunne være et hinder for at elevene engasjerte seg i problemet. Et eksempel var en kontekst med overnattingsgjester fordelt på ulike køyer i en køyeseng. Selv om problemet ble presentert både verbalt og visuelt med bilder av en køyeseng, måtte læreren bruke mye tid på å forklare hva overnattingsbesøk er, hvorfor noen overnatter, og hvordan de kommer seg opp og ned av køyesengen. I samtaler med tospråklige lærere kom det fram at i mange kulturer overnatter man bare hvis man må. Det blir ikke oppfattet som en fritidsaktivitet, og i mange tilfeller sover de på madrasser utover gulvet (ikke i høyden). Det kan være både morsomt, lærerikt og språkutviklende å bruke tid på å forstå kontekstene, men mange av lærerne jeg møter, bekymrer seg for fordelingen av tiden de bruker på språkopplæring og på matematikkopplæring.

Strategier ved hindringer

Da elevene møtte kontekster og språk som de ikke forstod i matematikkundervisningen, observerte Justnes & Gätzschmann (2023) en rekke ulike elevstrategier som ble møtt med lærerstrategier som hadde til hensikt å støtte elevenes deltakelse. Noen ganger så det ut som elevene «ikke gjorde noen ting», og noen ganger hermet elevene etter det medelevene eller læreren gjorde. Andre ganger varslet de læreren om at de ikke forstod, eller de spurte konkret hva noe betydde. Da forklarte ofte læreren på nytt, enten i plenum eller til enkelteleven, og gjerne ved hjelp av gester eller materiell. Noen ganger viste læreren hvordan eleven skulle gjøre det, eller oppfordret en medelev til å forklare eller å vise. Dette er tidkrevende strategier, noe som gjør at mange ønsker å ha flere voksne i rommet for å sørge for at alle elevene får den støtten de trenger. I en sak fra NRK i mars 2023 fortalte en lærer at når hun står foran klassen, vet hun at flere elever ikke forstår det hun sier. Og selv om læreren ofte vet hva som skal til for å hjelpe dem, får ikke læreren gjort det (Fange, 2023). Behovet for å forklare og vise, enten selv eller ved hjelp av medelever, slik at alle elevene forstår slik at de kan engasjere seg i det matematiske problemet, virker med andre ord nokså kjent.

Det kan være verdifullt å reflektere over fordeler og ulemper ved strategiene beskrevet ovenfor. Lærere eller medelever som forklarer, kan bidra til at elevene forstår og dermed kan delta i klassens felles meningsskaping. Men det er også en risiko for at forklaringene reduserer de kognitive kravene i et problem. For eksempel ved å vise framgangsmåter som elevene skal følge, eller ved å forenkle problemet ved å redusere konteksten eller språket slik at elevene bare forholder seg til tall, beregning eller herming. Vil en undervisning som legger vekt på forklaring og demonstrasjon, gi alle elever like muligheter til å engasjere seg i meningsfull matematikk? Og hvem blir betraktet som kompetente i et slikt klasserom?

Aspekter ved matematikkundervisning i flerspråklige klasserom

I boken Teaching Math to Multilingual Students: Positioning English learners for Success foreslår Chval et al. (2021) en rekke praksis- og forskningsbaserte tilnærminger til matematikkundervisning som legger vekt på flerspråklige elever som ressurser. Ved å bygge på elevers livsverden og kulturelle bakgrunn, opprettholde kognitive krav og ha høye forventninger, kan lærere posisjonere elever som kompetente og meningsskapende. Å posisjonere elever som kompetente og meningsskapende handler om lærerens avgjørelser, grep og kommunikasjon som posisjonerer elevene overfor hverandre, seg selv og det matematiske innholdet (Mosvold & Bjuland, 2019). Det kan for eksempel innebære at læreren etablerer normer for deltakelse slik at elevene erfarer sine bidrag som viktige for klassens felles konstruksjon av kunnskap. Læreren skaper altså holdninger som har innvirkning på elevens selvbilde, mestringstro og innstilling til faget.

For å unngå hindringer relatert til språk, slik Justnes & Gätzschmann (2023) identifiserte, legger Chval et al. (2021) vekt på strategisk språkbruk, støttet av visuelle representasjoner og gester. Som tidligere nevnt handler strategisk språkbruk om å unngå ord som er kontekstspesifikke, for eksempel er ordet overtrekksvott nokså spesifikt for Norge / nordiske land, mens ordet kassett er utdatert. I tillegg bør lærere unngå ord med flere betydninger, være bevisste på hvor tydelige «undervisningsordene» er, og vurdere om de bør legge til en visuell representasjon eller fjerne en som kan være forvirrende. For lærere kan det være en god øvelse å vurdere et problem de tenker å presentere for elevene med tanke på strategisk språkbruk.

Jeg skal videre ta for meg to tilnærminger til matematikkundervisning i flerspråklige klasserom som Chval et al. (2021) anbefaler, og som jeg har utforsket sammen med lærere i praksis: engasjere elever med kulturelt relevante kontekster og involvere foreldre/familie. Disse to tilnærmingene innebærer å bruke elevens livsverden som ressurs for kontekster og strategier. Det kan bidra til å posisjonere elevenes erfaringer som et viktig bidrag for klassens utforsking. Dette kan være materiell, historier, språk, strategier o.l. «Off you go» er foreslått av Deradroff (2023) som en undervisningsaktivitet som verdsetter og tar utgangspunkt i den kulturelle kunnskapen elever bringer med seg inn i klasserommet. Aktiviteten innebærer at elevene får se et bilde, og deretter går de på skattejakt etter tilsvarende eksempler der elevene er, for eksempel hjemme, utendørs eller i klasserommet. Elevene dokumenterer det de finner, ved å ta bilde, å tegne eller å beskrive det slik at medelevene kan se de eksemplene som hver enkelt bringer med seg inn i klasserommet. Et eksempel fra en utprøving på et norsk førstetrinn var at elevene fikk beskjed om å ta bilder av noe som de mente var «rundt», og sende dem til læreren sin. Elevene sendte inn bilder av objekter fra omgivelsene sine som både var kuleformet, sylinderformet, sirkelformet og «andre rundinger». Bildene dannet utgangspunkt for felles samtaler om hvordan ting kan være rundt på forskjellige måter, ulike typer rundinger, likheter og forskjeller mellom kuler og sirkler osv. Med en slik aktivitet kan elevene legge merke til matematikk i omgivelsene sine og relatere det til egne interesser, samtidig som deres livsverden blir en ressurs for bedre begrepsforståelse i matematikkundervisningen.

Et eksempel på hvordan familie kan være en ressurs, er å bruke de ulike språkene i klassens familier som utgangspunkt for utforsking. Ulland & Jensen (2020) foreslår en rekke aktiviteter knyttet til begrepsforståelse, for eksempel «Se på selve ordet», ulike ordkart og arbeid med mot-eksempler som måter å bygge kunnskap på. Ved å se på selve ordet trekant på ulike språk får en mulighet for å diskutere egenskaper ved trekanten. På norsk kaller vi den trekant, på engelsk triangel og på tysk Dreieck. Ved å sammenligne ordene kan en diskutere forskjellen på kant, vinkel og hjørne. Nå kan du kanskje flere språk enn meg, eller kan du bruke et oversettelsesprogram til å finne trekant på flere språk? Hva er likt, og hva er forskjellig? Jeg spurte min kollega fra Kina om å beskrive en trekant for meg på sitt språk, og ved å se på gestene hun brukte, forstod jeg at lukkethet er viktig for deres definisjon.

Et annet eksempel er å utforske algoritmer fra ulike kulturer. På hvor mange ulike måter kan vi regne ut 15 · 33? Hva er likt, og hva er forskjellig? Jeg ble selv overrasket og lærte noe nytt da min kinesiske kollega viste meg hvordan hun beregnet 15 · 33. Du kan se hvordan hun gjorde det, ved å følge QR-koden.

Først delte hun opp 33 i 3 og 11. Så multipliserte hun 15 · 3 og fikk 45. Deretter skrev hun opp 45 · 11, så 5 på enerplass, 9 på tierplass (4 + 5) og til slutt 4 på hundrerplass. Hun fortalte at i Kina lærte de å lete etter 11 i et multiplikasjonsstykke slik at de kunne bruke akkurat denne strategien.

Om en gir elever (og familie/foreldre) muligheter til å vise fram det de kan fra før, bidrar det til en opplevelse av anerkjennelse, og det posisjonerer elevene som kompetente. Jeg møtte nylig en lærer med tyrkisk bakgrunn. Hun fortalte at da hun begynte på skole i Norge, kunne hun multiplisere tosifrede tall, men hun gjorde det på en annen måte enn den læreren viste fram i klasserommet. Hun ble aldri spurt om å vise sin måte, og siden hun var ny og ikke kunne språket, føltes det utrygt for henne å «ta ordet» for å vise fram metoden uoppfordret. Elever som ikke får anerkjennelse, kan oppleve undervisningen som lite relevant, og det kan også påvirke deres identitetsutvikling (Honneth, 2007). Ved at ulike strategier forblir «skjult», mister også norske elever muligheten til å utvikle sin flerkulturelle kompetanse. Å innta et perspektiv der alle elevers og familiers strategier er en ressurs for matematikkundervisningen, kommer alle elevene i en mangfoldig skole til gode.

Et siste eksempel på hvordan lærere kan involvere foreldre og familie slik at de kan bidra til ny innsikt og nye perspektiver, er det tverrfaglige prosjektet «Hvem gjorde hva i matematikk i mitt land», inspirert fra forskningsprosjektet M^{3}EaL.[1] Prosjektet kan for eksempel initieres som et gruppearbeid der en eller flere av elevene i gruppen har tilknytning til en annen kultur eller et annet land, eller elevgruppen kan bli tildelt et land. Deretter skal hver gruppe gå på jakt etter en matematiker eller et matematisk emne som har sin opprinnelse i, har blitt utviklet videre i eller har annen tilknytning til landet som er valgt. I denne delen av prosessen er foreldre og familie en ressurs for elevene. Gruppene presenterer deretter arbeidet for resten av klassen og kanskje til familiene også? Et slikt prosjekt er nyttig for å vise at matematikk er et internasjonalt og tverrkulturelt fag som ikke ville ha eksistert i dag uten bidrag fra flere kulturer, og at elevers kulturelle bakgrunn er en ressurs og ikke en utfordring.

I skoler med stort elevmangfold er det rimelig å anta at elever har ulike kulturelle og språklige bakgrunner som en del av sin tidligere kunnskap. Lærernes kjennskap til elevenes tidligere kunnskap spiller inn på hvilke representasjoner, eksempler, oppgaver og aktiviteter lærerne velger, og dermed også på hva slags matematikk elevene får mulighet til å engasjere seg i. I et mangfoldig klasserom bør lærerne gjøre vurderingene også med tanke på språk og kultur. I et problemperspektiv kan dette handle om å identifisere og forutse hindringer for deltakelse og å gjøre grep som legger til rette for at elevene kan overkomme hindringene. I et ressursperspektiv kan det derimot handle om å anerkjenne og synliggjøre ulike språk, kontekster, problemer og løsningsstrategier som verdifulle ressurser som kan bidra til å involvere alle elevene i et mangfoldig klasserom med meningsfull matematikk.

Chval et al. (2021) anbefaler at lærere utvikler eksplisitte strategier for å utnytte elevenes språklige og kulturelle verktøykasse for å legge til rette for bedre læringsmuligheter i matematikk. Det forutsetter at lærere vet hvordan de får innsikt i elevers verktøykasse. I tillegg krever det at lærere og forskere sammen utvikler praksis- og forskningsbaserte tilnærminger til matematikkundervisning som passer til mangfoldige

(fortsettes side 47)

Hovtun, Røislien

Hvordan gjør jeg det?

Motivasjon er en nøkkelfaktor for læring. At elevene ikke bare har en vilje og et ønske om å lære, men også et behov for å delta i og mestre en læringssituasjon (Bomia et al., 1997). Dessverre får man ikke kjøpt motivasjonspiller på apoteket, men det er mulig å skape situasjoner der elevene opplever at de blir motivert (Stipek et al., 1998). Dette kan være utfordrende, og et av fagene der dette har vist seg å være ekstra vanskelig, er matematikk, der undervisningen tradisjonelt har vært preget av lav indre motivasjon og lav utholdenhet (Kunnskapsdepartementet, 2015). Da kan de matematiske utfordringene læreren presenterer, være aldri så gode, men dersom elevene ikke ønsker å arbeide med dem, vil de heller ikke få ta del i det potensielle læringsutbyttet.

Som matematikklærer har jeg[1] prøvd en rekke ulike ting for å skape motivasjon i klasserommet. Og noe av det jeg har hatt mest suksess med, er trylling. Matematisk trylling.

Gaute Hovtun
Universitetet i Sørøst-Norge
gaute.hovtun@uis.no

Jo Røislien
Universitetet i Stavanger / Bulldozer Film
jo@joroislien.no

Undrenes tid

Vi mennesker er undrende vesener. Barn undrer seg over hvorfor himmelen er blå, eller hva som skjer når man slikker på en metallstang om vinteren – til tross for velmenende råd fra voksne om å la være. Helt fra barn er små, underholder vi dem med undringsleker. Vi leker «borte, tittei!», og gjemmer ting bak ryggen – til barns store glede. Man skal ikke undervurdere kraften i å ikke vite.

For tryllekunstnere er folks fascinasjon for det tilsynelatende uforklarlige selve forretningsmodellen. Og mens folk frivillig flokker til trylleshow, flokker ikke akkurat elevene til klasserommene for å lære matematikk. Det er kanskje ikke så rart. I mange klasserom er matematikkundervisningen fortsatt i liten grad preget av undring, men heller av undervisning der gamle sannheter presenteres på forutsigbart vis, og gjentatt terping av framgangsmåter for å komme fram til svaret (Kunnskapsdepartementet, 2015). Instrumentell innlæring av geometriske formler og divisjonsalgoritmer er det motsatte av undring.

Matematikk er et særegent fag, med sin teoretiske grunnmur av absolutte sannheter. To pluss to er fire, samme hvor og når utregningen gjøres, og arealet av en sirkel er πr^2 – uavhengig av om denne sirkelen er en representasjon av en pizza eller bunnen av et oljefat. Disse absolutte sannhetene som matematikkfaget innehar, gjør at det instrumentelle har en naturlig og viktig plass i matematikkundervisningen. Men det betyr ikke at man må starte der. Det kunne vært nyttig å ha noen matematiske kaniner å trekke opp av tryllehatten av og til.

Oppvarming

Undring er en sterk drivkraft (Opdal, 2001). Situasjoner der man får vite noe, men ikke alt. Hjernen er grunnleggende opptatt av å avdekke sammenhenger og finne mening i verden rundt seg, og når den mangler sentrale biter i puslespillet, klarer den ikke å slippe taket. Det er ikke for ingenting at true crime er populært på Netflix og HBO, eller at det nesten er umulig å legge vekk en bok når man nærmer seg slutten – øyeblikket når de løse trådene knyttes sammen, og det uforklarlige blir forklart.

Dette kan man benytte seg av også i matematikkundervisningen. Et overraskende fenomen står da også helt sentralt i undersøkende matematikk (Sinclair, 2004). Noe uventet. Noe annerledes. Noe som ikke kan gripes med kunnskapen en har, og som kan vekke nysgjerrigheten og føre til en utholdende utforskningsprosess.

Når man presenterer oppgaver som har som formål å skape undring og vekke elevenes interesse, heller enn å bare representere et konkret læringsmål, kan det oppstå et ønske om å lære hos elevene. Siden poenget er å fange interesse for matematikk hos alle elevene, må oppgavene være enkle å introdusere og forstå (Hovtun, 2019). De må også ha et klart matematisk fokus – det er interesse for matematikk som er poenget. Underholdning for underholdningens skyld kan underholdningsindustrien ta seg av.

Å filme et klasserom

Jeg har selv prøvd ut slike oppgaver med stort hell i undervisningen. Oppvarmingsoppgaver, som jeg selv liker å kalle dem (Hovtun, 2020). Personlig synes jeg det er fantastisk å få stå foran en klasse og presentere slike underholdende oppgaver, men det er ikke alle som er like komfortable med det. Jeg er selv lektor ved lærerutdanningen på Universitetet i Stavanger, og har observert hvordan noen blomstrer i den performative formidlingsøvelsen i det å skulle trekke matematiske kaniner opp av tryllehatten, andre ikke.

For at flere lærere skal kunne nyttiggjøre seg et slikt potensielt motivasjonsskapende element i undervisningen, kan det å overlate selve presentasjonen av oppgaven til andre være en mulighet. For eksempel ved bruk av video. Jeg forsøkte derfor å filme meg selv og en kollega da vi gjennomførte slike oppgaver i klasserommet, og gjorde deretter filmene åpent tilgjengelig på YouTube (Figur 1). Men jeg er lærer – ikke videoprodusent – og jeg følte ikke at filmene klarte å fange den magiske undringen som oppsto i klasserommet.

Figur 1: Matematikkdidaktiker Hovtun presenterer en oppvarmingsoppgave til elever på 9. trinn.

Jeg tok derfor kontakt med matematiker og TV-programleder Jo Røislien. Han kastet et kjapt blikk på videofilmene jeg hadde laget, før han la dem til side. Han likte ideen, men var ikke like begeistret for den filmfaglige gjennomføringen. «Ingen vil sitte i et kjedelig klasserom og se på en film av andre som sitter i et kjedelig klasserom.»

Jeg hadde tydeligvis en del å lære om det å lage film.

Video

En videofilm forflytter den tredimensjonale verdenen vi lever i, ned på en liten todimensjonal flate, og ting som fungerer godt i et klasserom, fungerer ikke nødvendigvis like godt på video. Video har samtidig andre kvaliteter, som muligheten for å dra i tidslinjen, og med det skynde seg forbi kjedelige partier og dvele ved det som er spennende. Man kan raskt veksle mellom ulike mennesker og steder, og man kan endre på kameravinkler, lys og farger for å framheve ulike poenger.

På nettet er det visuell kommunikasjon som dominerer, og hele 95 % av norske barn og unge i alderen 9–18 år er jevnlig på videonettstedet YouTube (Medietilsynet, 2020). Audiovisuell kommunikasjon er et format de unge er vokst opp med og vant med, og har et stort potensial for læring. Et potensial som i overraskende liten grad er utforsket (Winnifred, 2021).

Testprosjekt

Våren 2021 gjennomførte Røislien og jeg i samarbeid med den digitale læremiddelportalen Elevkanalen et prosjekt for å utforske film som medium for å bidra til å skape undring og motivasjon i matematikkundervisningen. Målet var å lage videofilmer som gjenspeiler det som skjer i et klasserom der mange elever er samlet på samme sted, og det unisone wow!-øyeblikket som oppstår når alle lar seg forundre av det samme samtidig.

Som formgrep for videofilmene falt valget derfor på enquete, altså at man oppsøker intetanende folk på gata med det samme spørsmålet (Figur 2), og deretter klipper sammen et potpurri av svarene deres. I samråd med Røislien valgte jeg fem oppgaver (Hovtun, 2020) som hadde potensial til å skape de ønskede matematiske wow!-øyeblikkene, og som samtidig egnet seg for filmatisering.

Målet med videofilmene er å gi matematikklærere noen matematiske kaniner de kan trekke opp av tryllehatten. Videofilmer som kan inspirere lærere til selv å gjennomføre både disse og

Figur 2: Programleder Røislien presenterer oppgaver til tilfeldige forbipasserende på gaten.

tilsvarende oppgaver i klasserommet – eller integrere filmene direkte i egen undervisning, slik at læreren ikke selv behøver å tre inn i rollen som presentatører av underholdende matematikkoppgaver for å skape undring og motivasjon. I videoprosjektet vårt ble den performative presentasjonsjobben overlatt til andre – i dette tilfellet matematiker og programleder Røislien – slik at læreren i klasserommet kan velge å spille av en kort film, for deretter å overta selv når den matematiske diskusjonen blir det sentrale.

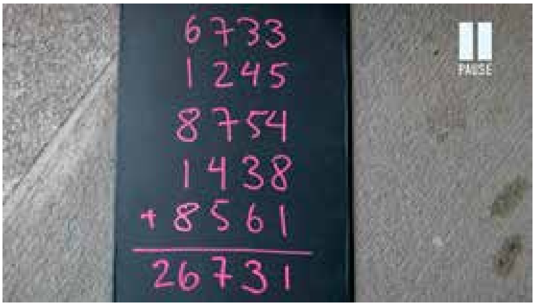
Oppgaven

Oppgaven i den ene av de fem filmene i filmprosjektet er en addisjonsoppgave med en punchline som er en tryllekunstner verdig. Det hele utspiller seg som følger: Først skriver du ned et tall på en lapp – et tall elevene ikke får se – og legger deretter lappen fra deg på et godt synlig sted. Deretter veksler du og elevene på å velge tilfeldige firesifrede tall. Til slutt summeres disse tallene (Figur 3, neste side).

Med denne summen lysende fra tavlen plukker du så fram lappen med tallet du skrev ned helt i starten. Det er det samme tallet! Hvordan er det mulig?

Nå er det min tur

Da vi troppet opp i Oslo sentrum, med fullt filmcrew og programleder Jo Røislien foran kamera, var jeg oppriktig nervøs for om oppgavene ville leve opp til forventningene jeg



Figur 3: Oppgaven presenteres tydelig i videoene, slik at seeren selv kan forsøke å løse den. Og et pauseikon varsler om sentrale tidskoder der læreren selv kan kontrollere framdriften.

hadde solgt inn til Røislien og resten av filmskaperne. Ville oppgavene evne å engasjere de tilfeldige forbipasserende, og ville responsen deres være fylt med matematikkglede?

Det viste seg at jeg hadde bekymret meg unødvendig. Spontane utbrudd som «What?!» og «Oi, oi, oi!» kom som perler på en snor (Figur 4).

Figur 4. Ekte matematikkglede når oppgavens overraskende svar avsløres.

Kommentaren fra en av deltakerne da hun fikk servert oppgavens matematiske punchline, og da hun forundret sto og tenkte så det knaket, på det uforklarlige hun hadde blitt presentert for, fanget i én setning hele intensjonen med videoprosjektet. Begeistret vendte hun seg mot programleder Røislien og sa: «Nå er det min tur til å spørre. Hvordan gjør du det?»

Undrenes tid er ikke over. Gudskjelov.

Noter

1 De delene av artikkelen som er skrevet i jeg-form, er sett fra Gaute Hovtuns perspektiv.

Videoressurser

Eksempel på video fra gjennomføring i klasserommet: https://www.youtube.com/watch?v=-HkTCHOPryI

Eksempel på video fra serien «Hvordan gjør jeg det?»: https://www.facebook.com/watch/?v=629296621641356

Referanser

Bomia, L., Beluzo, L., Demeester, D., Elander, K., Johnson, M. & Sheldon, B. (1997). *The Impact of Teaching Strategies on Intrinsic Motivation*. Hentet fra ERIC database (ED 418 925).

Hovtun, G. (2019). Oppvarmingsoppgaver. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 30*(1), 38–48.

Hovtun, G. (2020). *Mer matematikk, takk!* Universitetsforlaget.

Kunnskapsdepartementet. (2015). *Tett på realfag – Nasjonal strategi for realfag i barnehagen og grunnopplæringen (2015–2019)*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/869faa81d1d740d297776740e67e3e65/kd_realfagsstrategi.pdf

(fortsettes side 22)

Opsal, Smestad

Norske læreplaner (del 4)

I tre artikler har vi diskutert norske læreplaner fra 1739 fram til 1970-årene (Opsal & Smestad, 2022, 2023a, 2023b). I denne fjerde og siste artikkelen diskuterer vi læreplanene fra 1987 fram til i dag.

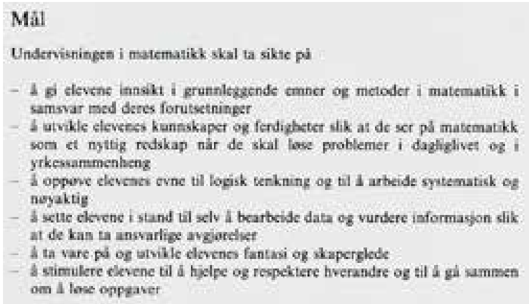
Læreplanene i 1987, som kom bare 13 år etter M74, innledet en periode med hyppige skifter av læreplan (M74-M87-L97-LK06-LK20). I disse nesten 50 årene har det vært flere elever som har opplevd læreplanskifter, enn elever som har gått under samme læreplan i hele sin skolegang.[1]

M87

M87-planen var knyttet til grunnskoleloven fra 1969. Imidlertid var lovgrunnlaget noe annerledes enn for 1974-planen, siden lov om spesialskoler ble opphevet i 1975 og flere barn dermed skulle gå i grunnskolen. M87 la blant annet vekt på likestilling, samiske elever og språklige minoriteter. Fagplanene var organisert i treårsplaner, med hovedemner, delemner og stikkord. Tanken var at årsplaner skulle lages lokalt. For norsk, engelsk og matematikk var det dog laget nasjonale veiledende årsplaner (s. 40).

Hilde Opsal
Høgskulen i Volda
ho@hivolda.no

Bjørn Smestad
Høgskulen i Volda
smestadb@hivolda.no


Mål

Undervisningen i matematikk skal ta sikte på

- å gi elevene innsikt i grunnleggende emner og metoder i matematikk i samsvar med deres forutsetninger
- å utvikle elevenes kunnskaper og ferdigheter slik at de ser på matematikk som et nyttig redskap når de skal løse problemer i dagliglivet og i yrkessammenheng
- å oppøve elevenes evne til logisk tenkning og til å arbeide systematisk og nøyaktig
- å sette elevene i stand til selv å bearbeide data og vurdere informasjon slik at de kan ta ansvarlige avgjørelser
- å ta vare på og utvikle elevenes fantasi og skaperglede
- å stimulere elevene til å hjelpe og respektere hverandre og til å gå sammen om å løse oppgaver

Figur 1: Målene for faget i matematikkplanen i 1987 (s. 194).

Selve fagdelen om matematikk var på bare ti sider. Målene for faget framgår av Figur 1. De fleste målene var tradisjonelle, mens vekten på elevenes fantasi og skaperglede var ny. De fleste hovedemnene var også tradisjonelle, men det var et sterkt signal at *problemløsning* ble framhevet som et eget hovedemne som også skulle «være en del av all matematikkopplæring» (s. 195). *Datalære* var et annet nytt hovedemne. Her var det lagt vekt på algoritmebegrepet og tilknytning til problemløsning. De andre hovedemnene var *tall*, *tallregning*, *måling og enheter*, *prosent*, *geometri*, *statistikk*, *personlig økonomi og samfunnsøkonomi* og *algebra og funksjonslære*. Her ble det altså lagt til flere nye temaområder, men det er vanskeligere å se hva som er nedprioritert. Det kunne vært inter-

Lærestoffet kan introduseres ved at elevene først undersøker og eksperimenterer i et godt tilrettelagt læringsmiljø, og/eller ved at læreren viser og forklarer. Det bør benyttes et enkelt og lett forståelig språk; matematiske faguttrykk kan introduseres etter hvert. Elevene bør oppmuntres til å forklare hvordan de tenker når de løser oppgaver, og til selv å lage oppgaver. For å øke elevenes innsikt og forståelse må det være hyppige samtaler og diskusjoner i samlet klasse eller i smågrupper. Videre øvelse skjer ved at elevene får individuelt tilpassede oppgaver og utfordringer. Alle elever må bli respektert når de arbeider ut fra de evnene de har. Innlærte ferdigheter og innsikt må vedlikeholdes og styrkes. Det bør legges vekt på å trekke inn stoff fra elevenes dagligliv og miljø, og fra andre fag. Hjemmearbeid kan være praktiske oppgaver, observasjoner og innsamling av data.

Figur 2: Beskrivelse av arbeidsmåten i faget i matematikkplanen i 1987 (s. 195).

essant med en mer detaljert analyse for å se i hvilken grad det er noe som blir nedprioritert i planene når nye temaer innføres i matematikkfaget. Det er imidlertid utenfor rammene av denne artikkelen.

Arbeidsmåtene (Figur 2) liknet dem vi så i M74, hvor undersøkelser og samtaler sto sentralt i faget. Igjen ser vi hvordan læreplaner gjennom tidene har skissert andre arbeidsformer enn dem som i dag kalles de tradisjonelle arbeidsformene.

L97

Den mest gjennomgripende endringen i læreplanen som kom i 1997 (L97), var overgangen til tiårig grunnskole. Dette ble gjort ved å flytte skolestarten til et år tidligere (mens overgangen fra 7- til 9-årig skole ble gjort ved å legge på flere skoleår på slutten). Mange fryktet at dette ville gjøre at 5–6-åringene[2] ville bli møtt av den tradisjonelle skolehverdagen. Men intensjonen var at 1. klasse skulle ta opp i seg det beste fra både skole og barnehage – ikke minst skulle det legges stor vekt på leken.

L97 inneholdt en omfattende del som omhandlet prinsipper og retningslinjer for opplæringen i grunnskolen (s. 55–88). I denne delen ble også arbeidsmåter vektlagt: «Læreplanane for faga legg vekt på at elevane skal vere aktive, handlande og sjølvstendige. Dei skal få lære ved å gjere, utforske og prøve ut i aktivt arbeid fram mot ny kunnskap og erkjenning» (s. 75). I matematikkdelen av L97 var også *arbeidsmåter i faget* presentert (s. 154–156). Denne delen ble avsluttet med en form for oppsummering som sa hvordan elevene skulle arbeide med matematikkfaget (Figur 3). Arbeidsmåtene var fortsatt preget av undersøkelse og samtaler.

I beskrivelsen av målene for matematikkfaget inngikk blant annet holdninger, matematikk som redskap, fantasi, undersøkende og problemløsende aktivitet, kommunikasjon, sammenhenger og strukturer og matematikkens historie. I tillegg hadde læreplanen mål for hvert hovedtrinn i skolen (småskole-, mellom- og ungdomstrinnet). Matematikkplanen tok utgangspunkt i et konstruktivistisk læringssyn: Under arbeidsmåter angis det at elevene selv konstruerer sine matematiske begreper (s. 155).

- å arbeide praktisk og få konkrete erfaringer
- å undersøke og utforske sammenhenger, finne mønstre og løse problemer
- å fortelle og samtale om matematikk, å skrive om arbeidet og formulere resultater og løsninger
- å øve på ferdigheter, kunnskaper og prosedyrer
- å resonnere, begrunne og trekke slutninger
- å samarbeide om å løse oppgaver og problemer

Figur 3: Om arbeidsmåter i faget fra L97 (s. 156).

Hovedtemaer for småskoletrinnet var *matematikk i dagliglivet*, *tall* og *rom og form*. For mellomtrinnet var *rom og form* byttet ut med *geometri*, og en hadde i tillegg fått hovedtemaet *behandling av data*. Ungdomstrinnet hadde disse hovedtemaene: *matematikk i dagliglivet*, *tall og algebra*, *geometri*, *behandling av data* og *grafer og funksjoner*. Algebra og funksjoner var temaer bare på ungdomstrinnet.

For hvert klassetrinn var det oppgitt hva elevene skulle arbeide med, oppdage, prøve å lage, bruke, eksperimentere med osv. Noen av momentene var tydelige, og andre var kanskje litt mer uklare. For eksempel var dette et læringsmål for elever i 5. klasse under *matematikk i dagliglivet*:

> I opplæringen skal elevene formulere og løse matematiske oppgaver i forbindelse med hobbyer og fritidsaktiviteter.

Dette læringsmålet kan inneholde både lett og avansert matematikk innenfor mange ulike matematiske områder alt etter hvilke hobbyer og fritidsaktiviteter elevene kan tenkes å ha. Et annet læringsmål for elever i 7. klasse står under *tall*:

> I opplæringen skal elevene arbeide med addisjon og subtraksjon av negative tall.

Dette læringsmålet er mer tydelig.

LK06

I Kunnskapsløftet (LK06) hadde en for første gang en felles læreplan for grunnskole og videregående opplæring, fra 1. til 13. klasse.

Til forskjell fra L97, der det ble beskrevet hva elevene skulle arbeide med, hadde LK06 bare kompetansemål. Disse kompetansemålene anga hva elevene skulle kunne etter endt opplæring på de ulike trinnene. Matematikk hadde kompetansemål etter 2., 4., 7. og 10. trinn i grunnskolen. I tillegg hadde en også innført grunnleggende ferdigheter som skulle være en forutsetning for videre utvikling og læring i de ulike fagene (s. 39). De fem grunnleggende ferdighetene var å kunne *regne*, *lese*, *uttrykke seg muntlig*, *skrive* og *bruke digitale verktøy*. Alle de grunnleggende ferdighetene var knyttet til literacy, som er beskrevet som «ferdigheter i å identifisere, forstå, tolke, skape og kommunisere» (Alseth, 2005, s. 18).

Matematikkdelen av LK06 var på totalt 13 sider, der både formålet med faget, hovedområder i faget, timefordeling, beskrivelse av de grunnleggende ferdighetene og kompetansemålene for alle årstrinnene (fra 2. klasse til videregående opplæring) inngikk. I teksten om formålet med faget var det lagt vekt på samfunnets behov, både for at borgere kan delta i demokratiet, og for at matematisk kompetanse er noe samfunnet trenger. Men det ble også lagt vekt på den enkeltes behov for allmenndanning og grunnlag for livslang læring.

Hovedområdene for faget i grunnskolen var *tall og algebra*, *geometri*, *måling*, *statistikk*, *sannsynlighet og kombinatorikk* og *funksjoner*. Målene skulle altså formuleres som kompetanser, og arbeidsmåtene skulle være opp til læreren. Men en del av målene var innfløkte og hadde i tillegg klare innslag av det som tidligere ville vært kalt arbeidsmåter. Et eksempel: Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

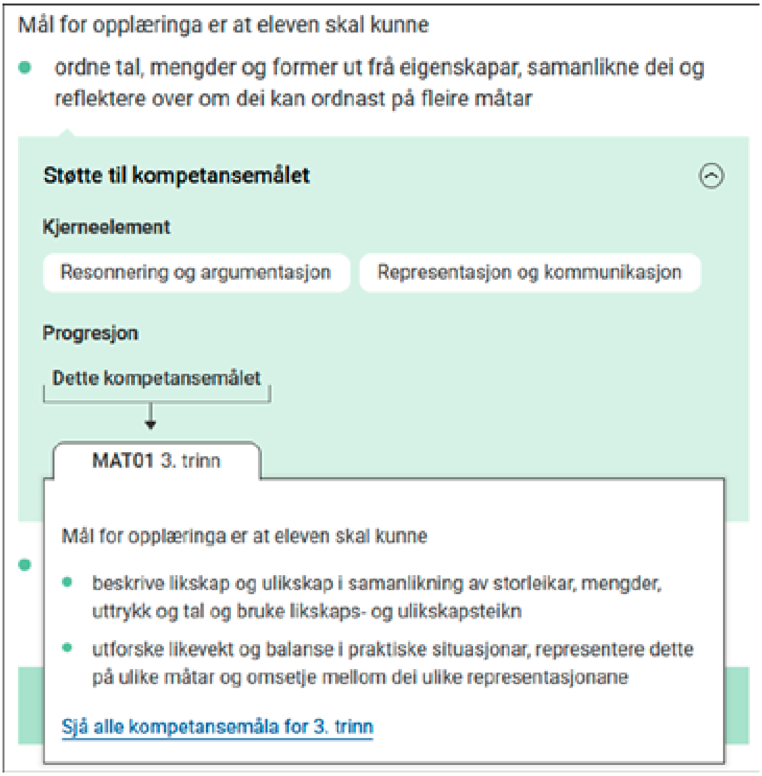
> utforske, eksperimentere med og formulere logiske resonnement ved hjelp av geometriske idear, og gjere greie for geometriske forhold som har særleg mykje å seie i teknologi, kunst og arkitektur (s. 64)

Allerede i 2013 kom det en revidert versjon av LK06, hvor målet var å gjøre de grunnleggende ferdighetene tydeligere og med noe mer algebra, også på barnetrinnet. Vi går ikke nærmere inn på disse endringene i denne artikkelen.

LK20

De overordnede slagordene i læreplanen som kom i 2020, er *dybdelæring* og et *verdiløft*. Tre tverrfaglige temaer blir prioritert: *folkehelse og livsmestring*, *demokrati og medborgerskap* og *bærekraftig utvikling*. Bare de to første av disse blir knyttet til matematikkfaget. De grunnleggende ferdighetene blir videreført fra LK06.

Læreplanen har et eget avsnitt om *Fagrelevans og sentrale verdier*, hvor fagets *hvorfor* blir knyttet til å forstå sammenhenger i samfunnet og naturen, utvikle presist språk, forberede elevene på samfunn og arbeidsliv og på å gjøre egne valg. Elevene skal også bli bevisste på sin egen læring.



Figur 4: Visning av et læreplanmål i LK20.

Alle fag skulle definere noen *kjerneelementer* i LK20, og for matematikk ble kjerneelementene inspirert av Niss og Jensens (2002) modell for matematikkompetanse. Kjerneelementene er *Utforsking og problemløysing*, *Modellering og anvendingar*, *Resonnering og argumentasjon*, *Representasjon og kommunikasjon*, *Abstraksjon og generalisering* og *Matematiske kunnskapsområde*.

Matematikkfaget er det eneste faget som fikk kompetansemål for alle årstrinn (bortsett fra 1. trinn). I motsetning til mange tidligere planer blir ikke lenger de matematiske kunnskapsområdene (som geometri) brukt som overskrifter i listene over kompetansemål. Innholdsmessig er den største endringen at programmering har kommet inn som en del av matematikkfaget, med egne kompetansemål indirekte på 2.–4. trinn og eksplisitt fra 5. trinn og oppover. Algebraisk tenkning blir igjen tydelig på de første trinnene (hvor for eksempel kommutativ og assosiativ egenskap nevnes eksplisitt). Det er vesentlig *flere* kompetansemål i LK20 enn i LK06, samtidig som de er åpnere i formuleringene. Som i LK06 skal bruken av kompetansemål i teorien gi frihet til læreren i *hvordan* målene skal nås. Imidlertid er svært mange av målene av typen «eleven skal kunne utforske …», noe som legger opp til utforskende undervisningsformer (i likhet med svært mange andre av læreplanene vi har beskrevet). I tillegg er spiralprinsippet tonet ned – det er ikke lenger slik at man møter de fleste temaer hvert år. For eksempel er geometrien på ungdomstrinnet i hovedsak lagt til 9. trinn. På slutten av teksten om hvert årstrinn står et par avsnitt om underveisvurdering, som understreker situasjoner hvor elevene viser sin kompetanse i løpet av undervisningen. Også disse inneholder formuleringer som i tidligere tider ville vært tatt med som arbeidsmåter.

LK20 er den første læreplanen der primærutgaven ligger på nett, som et interaktivt dokument med mange funksjoner. For eksempel kan man til hvert enkelt læreplanmål se hvilke kjerneelementer som Utdanningsdirektoratet mener er spesielt relevante for dette kompetansemålet, og hvilke mål de mener målet bygger på og danner grunnlag for. I Figur 4 har vi gjengitt det første kompetansemålet i planen (for 2. trinn).

Nye temaer

Inspirert av en tabell i Smestad og Fossum (2019) kan vi oppsummere hvordan innholdet i faget regning/matematikk har utviklet seg i læreplanene vi har sett på – i grove trekk (se Tabell 1). Fem av kolonnene er fra Smestad og Fossum, men her har vi valgt å slå sammen radene for geometri og måling.

Tabell 1 kunne vært laget annerledes, for eksempel kunne flere av kjerneelementene i LK20 vært tatt med. Inntrykket er uansett at faget i løpet av perioden har blitt mer og mer sammensatt.

Avsluttende kommentarer

Et formål med å skrive disse artiklene om norske læreplaner i matematikk – med vekt på å holde oss tett på læreplantekstene – har vært å oppmuntre til å oppsøke originaltekstene, istedenfor å stole på forenklede framstillinger. Naturligvis er vår framstilling også forenklet, men det bør være lett å gå inn i planene selv for å få et mer nyansert syn. Og siden alle nye læreplaner markedsføres med slagord om hva som er nytt og spennende i de nye planene, er det nyttig å kjenne til tidligere planer og se at det er mye som ikke er nytt.

For eksempel kan det være overraskende å se at konkretiseringsmateriell har vært så sterkt vektlagt i matematikkundervisningen allerede på 1800-tallet. Vekten på utforsking i de nyeste planene har sine forløpere i hvert fall siden 1930-årene. Mange av elementene i dybdelæringsbegrepet finner vi igjen i planene langt tilbake i tid. Vekten på algebraisk tenkning, for eksempel med eksplisitt vekt på kommutativ og assosiativ lov fra tidlige klassetrinn, hadde vi i Norge alt i 1971. Og man kan kanskje tro at læreplanene vi har i dag, er basert på matematikkdidaktisk forskning, men det var i 1939-planen læreplanene faktisk inneholdt referanser til forskning. Og alternativ 2 i 1971-planen, som innførte moderne matematikk med blant annet mengdelære, var nok den planen som hadde vært gjenstand for den mest omfattende forsøksvirksomheten, nasjonalt og internasjonalt. Ideene om hva matematikkfaget tradisjonelt har vært i Norge, kan derfor bli litt justert når vi sammenlikner med de konkrete læreplanene.

Barn i dag har mer matematikk hvert år enn noensinne (så lenge vi ikke sammenlikner med byguttene som fulgte 1925-planen), og den obligatoriske skolegangen er blitt tiårig. Men antallet temaer som skal behandles, har økt, og det er vanskelig å finne mange eksempler på emner som har forsvunnet. Om dette skyldes at undervisningsmetodene og lærernes kompetanse har økt så kraftig at elevene klarer å lære mer og mer, om det er elevene som har blitt stadig bedre til å lære, eller om det tvert imot har blitt

	1739	1889	1922/5	1939	1960	1971 Alt. 2	1974	1987	1997	2006	2020
Tall og tallregning	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Geometri og måling		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Algebra og likninger					x	x	x	x	x	x	x
Funksjoner					x	x	x	x	x	x	x
Privatøkonomi			x	x	x		x	x	x	x	x
Mengdelære						x					
Problemløsning								x	x	x	x
Statistikk						x		x	x	x	x
Sannsynlighet og kombinatorikk									x	x	x
Datalære								x			x

Tabell 1: Oppsummering av hvordan innholdet i faget har utviklet seg 1739–2020.

mindre dyp læring av de enkelte temaene, er en stor diskusjon som det neppe er mulig å konkludere om – i hvert fall ikke i denne artikkelen.

Vi har i denne artikkelserien dessuten bare sett på læreplanene. Et annet spørsmål er hva som skjer i klasserommene. Studier av lærebøkene eller lærerveiledningene kan gi et annet inntrykk. Enda et annet inntrykk får man kanskje ved å studere eksamenene, som sier noe om forventningene myndighetene har til elevenes kunnskaper, og som sender et signal til lærerne om hva de virkelig må legge vekt på. Både læreplaner, lærebøker, lærerveiledninger og eksamensoppgaver er altså spennende kilder for å kaste lys over fortidas matematikkundervisning.

Noter

1 En side med lenker til alle læreplanene vi ser på i denne artikkelserien, ligger her: https://www.tangenten.no/laereplaner

2 Navnet «seksårsreformen» har blitt sittende på reformen, siden elevene skulle starte på skolen det året de fylte seks, istedenfor det året de fylte sju. Men det innebar naturligvis at de yngste som startet skolen i august, var bare litt over fem og et halvt, mot seks og et halvt før reformen.

Referanser

Alseth, B. (2005). Hva er grunnleggende ferdigheter i matematikk? *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 16*(4), 18–20.

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie, Issue 18). Undervisningsministeriet.

Opsal, H. & Smestad, B. (2022). Norske læreplaner (del 1). *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(4), 34–40.

Opsal, H. & Smestad, B. (2023a). Norske læreplaner (del 2). *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 34*(1), 26–30.

Opsal, H. & Smestad, B. (2023b). Norske læreplaner (del 3). *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 34*(3), 35–38.

Smestad, B. & Fossum, A. (2019). Exams in calculations/mathematics in Norway 1946–2017 – content and form. I U. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Red.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)* (s. 2172–2179). ERME.

(fortsatt fra side 16)

Medietilsynet. (2020). *Barn og medier 2020 – En kartlegging av 9–18-åringers digitale medievaner*. Hentet fra https://www.medietilsynet.no/globalassets/publikasjoner/barn-og-medier-undersokelser/2020/201015-barn-og-medier-2020-hovedrapport-med-engelsk-summary.pdf

Opdal, P. M. (2001). Curiosity, wonder and education seen as perspective development. *Studies in Philosophy and Education, 20*, 331–344.

Sinclair, N. (2004). The role of the aesthetic in mathematics inquiry. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(3), 251–284.

Stipek, D., Salmon, J. M., Givvin, K. B. & Kazemi, E. (1998). The value (and convergence) of practices suggested by motivation research and promoted by mathematics education reformers. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(4), 465–488.

UiO. (2020). *Digital dekning i Norges 100 største kommuner*. Hentet fra https://www.uv.uio.no/forskning/satsinger/fiks/kunnskapsbase/digitalisering-i-skolen/digital-dekning-i-norges-100-storste-kommuner/

Winnifred, W. (2021). *The unseen potential of film for learning* [Doktorgradsavhandling]. Freudenthal Institute.

Christensen

Indbrud i borgen

Et arbejde med brøker, sandsynlighed og simpel programmering på tre forskellige årgange ud fra samme problematik: Indbruddet i borgen. Med eleven som målrettet og kreativ producent mundede arbejdet til slut ud i en simpel spilprogrammering i GeoGebra.

Crash og indbruddet i borgen, 4. b's historie om Crash

En modig og dristig Crash skal bryde ind i en borg. Crash støder på forskellige mure undervejs, hvori der er flere døre, som han kan vælge imellem. Desværre for Crash *ser* dørene ens ud, men nogle af dem er forsynet med alarmer, mens andre ikke er; såkaldte røde og grønne døre. Da dørene er helt ens at *se* på, må Crash håbe på sit held og vælge dørene tilfældigt. Hvor stor er chancen for, at Crash kommer helt ind i borgen og får fingrene i skatten, der gemmer sig i borgens inderste?

Historien var oplægget til et arbejde med kombinatorik og sandsynlighed i mine matematikklasser på 4., 6. og 8. klassetrin. Jeg synes altid, det er interessant at arbejde med den samme problemstilling på flere klassetrin og se på forskelle og ligheder mellem, hvordan eleverne griber opgaverne an, hvad der giver dem problemer, og ikke mindst hvilke spørgsmål og udbygningsidéer de bringer på banen i deres arbejde og undersøgelser.

Nanna Filt Christensen
Taastrup Realskole
nanna@comeby-shelties.dk

Tidligere publisert i *Matematik*, nr. 3, 2018.

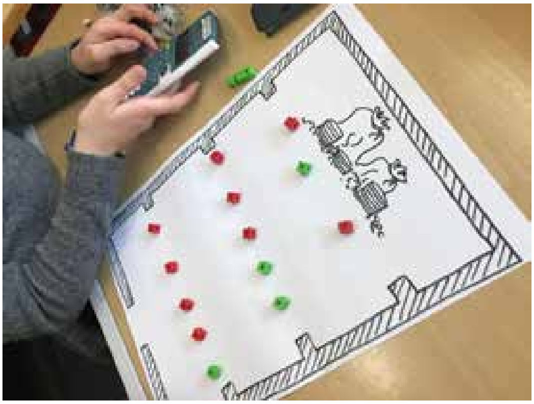
Mur – sandsynligheder

Det første arbejde startede med brøkerne, der hørte til de enkelte mure. En mur med 5 døre, hvoraf 2 er grønne (uden alarmer), og 3 er røde (med alarmer), giver Crash en sandsynlighed på 2 ud af 5 for at passere uden at sætte alarmen i gang. Disse »mur-sandsynligheder« regnede vi om til decimaltal (0,40) og procenttal (40 %). Dette var repetition for 6. og 8. klasse og relativt nyt for 4. klasse, der i samme omgang arbejdede med at forlænge og forkorte brøker.

Borgdesign og procentmål

Ret tidligt i forløbet satte jeg klasserne til selv at designe borgene. De fik udleveret et A3-ark, hvor de tre mure og skatten var indtegnet på forhånd, men uden at antallet af døre var bestemt. Til at repræsentere døre brugte vi centicubes i to forskellige farver pr. borg og ikke nødvendigvis røde og grønne.

I første omgang designede eleverne nogle tilfældige borge og regnede den samlede sandsynlighed ud for at passere alle de tre mure uden



Figur 1: A3 med fortrykt borg og skat. Centicubene er dørene.

at sætte alarmer i gang. Dette gjorde de ved at gange de tre brøker, der individuelt beskrev sandsynligheden for at passere hver enkelt mur. Kort efter skrev jeg et procentmål op på tavlen, fx 17 %. Elevernes opgave var nu at designe borgen med de tre mure, således at Crashs samlede vinderchance nærmede sig 17 % så godt som muligt. Det var et krav, at alle mure skulle have mindst én rød og én grøn dør. Når en elev eller en elevgruppe havde nærmet sig de 17 %, skrev de deres resultat op på tavlen med navn(e) på. Så kunne de andre elever »jagte« at nærme sig 17 % mere præcist. I 4. klassen affødte det en diskussion om decimaltals indbyrdes placering. Hvem var tættest på 17 %, når den ene gruppe havde 16,8 %, og den anden havde 17,4 %? I 6. og 8. klasse gik der hurtigt sport i at ramme sandsynlighederne helt præcist ved at finde divisorer i forskellige tal. Af samme grund valgte jeg procentmål, der var primtal, således at det var relativt svært at gange sig frem til det præcise mål.

Præcise løsninger

17 % kunne fx fås ved at have tre mure med grønne døre fordelt således: $\frac{17}{20}$, $\frac{4}{5}$ og $\frac{1}{4}$. Ved at multiplicere de tre brøker med hinanden giver det uforkortet $\frac{68}{400}$ som forkortes til $\frac{17}{100} = 17\ \%$. For at ramme det måtte eleverne lave 17 % om til brøk ($\frac{17}{100}$) og derefter forlænge brøken, så der kom flere divisorer i tælleren. I dette tilfælde klarer to fordoblinger arbejdet: $\frac{17}{100}, \frac{34}{200}, \frac{68}{400}$. 68 faktoriseres til $17 \cdot 4 \cdot 1$, og 400 faktoriseres til $20 \cdot 5 \cdot 4$. Man skal rent praktisk sørge for, at hver »tæller-faktor« hele tiden har en »nævner-faktor-makker«, der er større end den selv. Man kan jo ikke have 4 døre, hvoraf 6 er grønne …! Denne problematik viste sig særlig drilsk ved høje primtalsprocentmål, fx 87 %. Prøv selv!

Figur 2: Crash tilkaldes og vælger tilfældigt mellem de mange vagter.

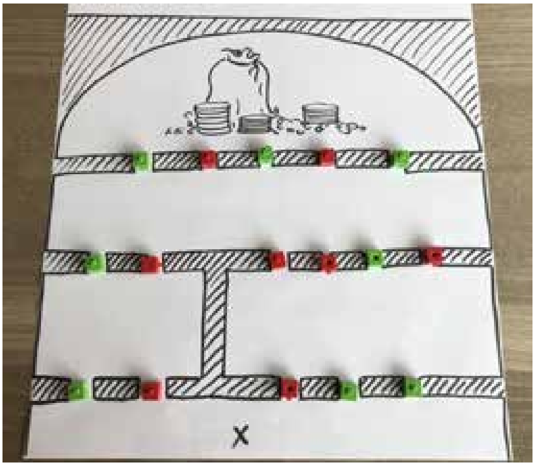
Liveudgave i skolegården

Minusgrader eller ej, så havde 4. klasse en lektion i skolegården, hvor de udførte »spillet« med sig selv som brikker. Én var såkaldt Puppetmaster, én var Crash, og resten var vagter ved dørene. Crash vendte ryggen til, mens Puppetmaster udstyrede vagterne med røde og grønne kort, som vagterne gemte på ryggen; nu var de enten bestukkede (grønne) eller loyale (røde). Puppetmaster placerede derefter vagterne strategisk på nogle kridtstreger, der symboliserede de tre mure. Crash blev tilkaldt og skulle nu forsøge at aflæse vagternes mimik og finde vej ind gennem de tre mure ved at vælge en bevogtet dør, spørge vagten om tilladelse til at passere og så afvente enten positivt eller negativt svar.

Nogle Crash-elever kom igennem til skatten og kunne efterfølgende se på borgens opbygning, om det havde været en svær eller en let bane, vurderet ud fra et overslag på murenes sandsynligheder. Nogle Puppetmaster-elever gik meget strategisk efter at lave meget svære borge, mens andre nøje valgte de mest skumle kammerater ud til at være de bestukkede (grønne) vagter. Eleverne var meget bidt af det, og de var ikke parate til at gå med ind fra kulden. Jeg har før arbejdet med såkaldte »elevanimationer«, hvor eleverne med sig selv animerer nogle bestemte scenarier, vi arbejder med. Det giver ofte en god, grundlæggende forståelse for, hvad opgaven handler om, og kan betragtes som en måde at arbejde med modellering i faget. Elementet omkring spilstrategi kom også først på banen her, da det foregående arbejde ikke havde omhandlet et spil som sådan, men blot brøker og sandsynligheder.

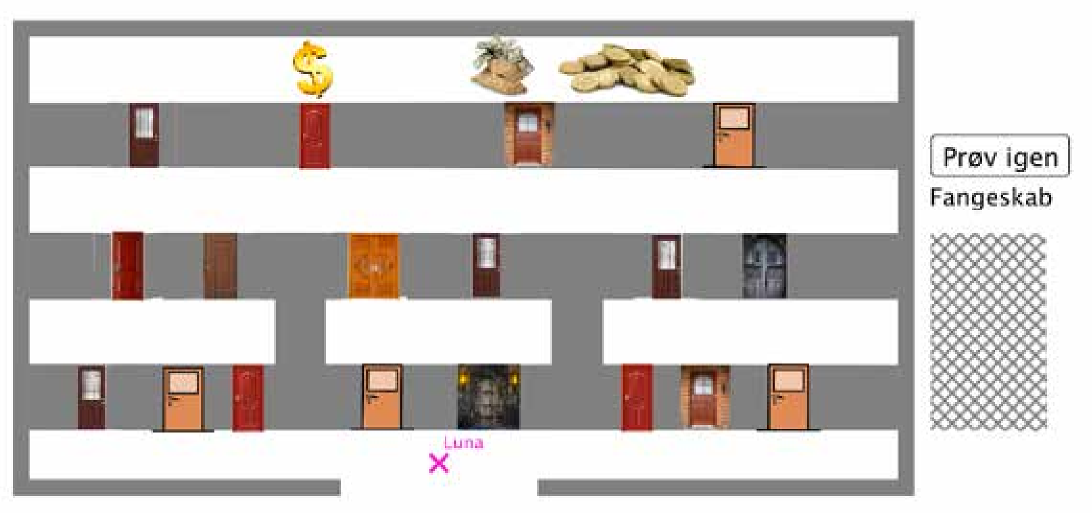
Mere komplicerede borge og brøkaddition

Inden døre blev borgene nu mere avancerede, og vi implementerede en skillevæg lodret mellem to af de vandrette mure, således at man måtte beregne sandsynligheden for hhv. at komme godt i mål venstre eller højre om skillevæggen separat og derefter addere de to sandsynligheder. I disse additioner var det ofte nødvendigt for eleverne at finde fællesnævner først. Alternativt skulle brøkerne omregnes til procenttal inden additionen. Gode elementære øvelser i brøkregning.



Figur 3: Lodret skillevæg mellem mur 1 og 2. Den samlede vinderchance er på 12 %, 6 % venstre om og 6 % højre om skillevæggen. Der er 3 gode veje ud af 50 venstre om, og 6 gode veje højre om ud af 100.

Eleverne regnede også antallet af brugbare veje ud fra start og ind til skatten, et fint arbejde med kombinatorik og en øvelse, der i sine simple udgaver også kunne illustreres med tælletræer. I 6. og 8. klasse kom der løbende mere avancerede borge med flere skillevægge fordelt mellem endnu flere mure. Eleverne måtte holde tungen lige i munden i forhold til, hvor brøker og sandsynligheder skulle adderes, og hvor de skulle ganges. Klassisk hjernevrider, hvorvidt der er tale om et »enten-eller«-scenarie eller et »både-og«-scenarie? Fortsat var de to ældste klasser meget opsatte på at finde præcise løsninger til de givne procentmål. I scenarierne med procentmål på store primtal (selvsagt under 100 %) måtte eleverne også ud i mure med absurd mange døre for at få brøkerne til at antage helt eksakte værdier. I tilfælde med eksempelvis 6840 døre sad eleverne kun med papir, blyant og lommeregnere og modellerede altså ikke længere med centicubes. Her blev det »hardcore brøkregning« og målsøgning ved eksakte beregninger. Fedt at se!



Figur 4: Luna i 6. klasse valgte flere forskellige døre og to skillevægge mellem mur 1 og 2.

Spilprogrammering i GeoGebra

Efter dette grundlæggende arbejde med brøker, kombinatorik og sandsynlighed valgte jeg til sidst at indlægge et arbejde med simpel spilprogrammering i GeoGebra, hvor målet var at lave en spilbar udgave af »Indbrud i borgen«. Andre skulle prøve at gennemføre og efterfølgende beregne vindersandsynligheden på elevernes færdige filer. På den måde kunne klassens mange forskellige borge til slut ranglistes efter sværhedsgrad, baseret på Crashs vinderchance – eller mangel på samme …!

I GeoGebra oprettede eleverne to skydere, *a* og *b*, der angav Crash-punktets koordinater. Crash-punktet blev blot defineret som (*a*, *b*). Derefter var der en tid med frit slag på kreativiteten og ideernes legeplads, hvor eleverne byggede deres borge op med mure, døre, vagter og skatte. Nogle elever valgte at bruge GeoGebras knapper som døre, mens andre fandt billeder af forskellige døre og satte ind. Programmeringen på dørene var dog ens. Enten var programmeringen, at Crashs koordinatsæt (*a*, *b*) blev sat til nogle værdier, der førte Crash videre ind i borgen – eller også at *a* og *b* blev sat til værdier, der førte Crash tilbage til start eller værre endnu, i fængsel!

Igen kunne man ikke se på dørene/knapperne, om de var passérbare eller ej, så tilfældet og elevernes strategier og tanker afgjorde, hvor-vidt Crash var heldig eller uheldig. Nogle elever udvidede deres programmering af borgen med fine detaljer som fx politimænd, der var programmeret til at vise sig, når Crash valgte en forkert dør eller en lykønskningstekst og -billede, der dukkede op, når Crash-punktet endelig befandt sig i borgens inderste ved skatten.

Eleven som målrettet og kreativ producent

I denne arbejdsproces udnyttede eleverne deres store kendskab til GeoGebra og dermed programmets tekniske lettilgængelighed for dem til at udarbejde endnu en matematisk model på scenariet, »Indbrud i borgen«. I positionen som målrettet og kreativ producent havde eleverne i høj grad frihed til at hitte på og komplicere opgaven yderligere, mens de samtidig var pålagt en meget konkret opgave i hver især at producere en færdig borg, hvor »spillereglerne« og baggrundshistorien var ens for alle.

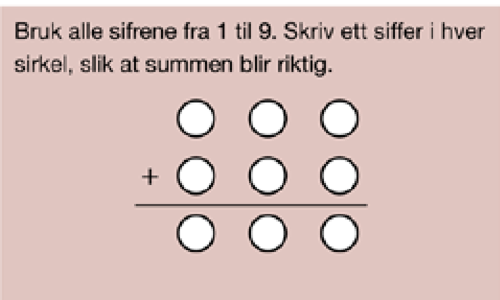
Elevprodukter som læringsresurse

De færdige produkter blev brugt som opgaver til resten af klassen, da filerne deltes indbyrdes i klassen i OneNotes Samarbejdsområde (Office365). Eleverne skulle eksperimentere sig frem til opbygningen af hinandens borge og efterfølgende beregne borgens vindersandsynlighed. Eleverne imellem blev der udvekslet erfaringer og ideer i arbejdet med borgene – både fagligt og programteknisk. Nogle elever havde for eksempel lavet en Crash-avatar, så Crash ikke blot var et punkt. Dette var gjort ved at indsætte et billede af avataren og derefter programmere billedets to frie hjørnepunkter til at være beliggende hhv. lidt til venstre og lidt til højre for Crash-punktet, der stadig måtte oprettes.

De mange modeller for det samme scenarie gav mig mulighed for at stille mange forskellige opgavetyper til eleverne ud fra det samme grundproblem og de samme matematiske læringsmål. Noget var som nævnt meget »hardcore, eksakt brøkregning« med konkrete resultatmål, mens andet overlod eleverne til en kreativ designopgave. At elevernes produkter i sidste ende skulle anvendes som nye opgaver og dermed læringsresurse for klassekammeraterne var motiverende for eleverne, og i øvrigt noget jeg praktiserer ofte af samme grund. Når jeg kan opnå så stor inspiration fra mine elever, hvilken inspiration kan de så ikke få indbyrdes fra hinanden? Med hinanden som målgruppe tænker eleverne over, hvordan de vil fange deres »læsere« med spændende elementer og særlig innovative løsninger. Heldigvis er børn ikke særlig nærige med deres viden, og jeg oplever ofte elever stolte dele ud af deres erfaringer og ekspertise – og selv gøre det samme. Enkelte dage må man som lærer se sig teknisk underlegen – det giver mig et lille men stolt smil på læben – og blod på tanden til selv at lære mere.

Flere elevprodukter og info om simpel spilprogrammering i GeoGebra kan ses på min hjemmeside: www.nannafiltchristensen.dk

Fra arkivet



I Tangenten 1/2014 undersøkte Kai Forsberg Kristensen hvordan man kan finne alle mulige løsninger av denne oppgaven – med og uten digitale hjelpemidler.

Les denne artikkelen og andre godbiter fra Tangentenarkivet på tangenten.no

Aslaksen, Kirfel

Utforskende oppgaver med tredjegradskurver

Innledning

I en artikkel i forrige nummer (Aslaksen & Kirfel, 2023) prøvde vi å utkrystallisere mulige forskjeller i løsningsprosessen for utforskningsoppgaver og problemløsningsoppgaver. Begge deler er godt forankret i læreplanens kjerneelementer. Mens løsningsprosessen for problemløsningsoppgaver følger Polyas fire steg, vil arbeidsprosessen for utforskende oppgaver la seg beskrive ved andre karakteristika der for eksempel eksperimentering spiller en mye viktigere rolle. I den forrige artikkelen foreslo vi følgende steg for å beskrive arbeidsprosessen ved utforskende oppgaver:

1. Eksperimentere med materialet
2. Beskrive det man ser og eventuelt se mønstre og formulere hypoteser
3. Forklare hvorfor det skjer
4. Gå videre med utvidete spørsmål og eventuelt se sammenhenger med andre temaer

Helmer Aslaksen
Universitetet i Oslo
helmer.aslaksen@ils.uio.no

Christoph Kirfel
Universitetet i Bergen
christoph.kirfel@uib.no

Vi presenterte en utforskningsoppgave med parabler, der elevene gjennom eksperimenter med parameterne kunne iaktta, beskrive og forsøke å forklare det de observerte. Slik kunne de komme frem til hypoteser og muligens utvide oppgaven og stille egne spørsmål.

I denne artikkelen ber vi elevene studere polynomer av tredje grad. Også her er variasjon av parameterne et tema. Her finner vi flere karakteristiske punkter, linjer, arealer og forhold mellom størrelser som kan studeres. Derfor er oppgavene mer omfattende enn ved parablene. Noen av dem involverer arealer, som hører naturlig hjemme i Vg3, men siden vi bruker GeoGebra, kan de også brukes tidligere. I begge tilfellene, ved parablene og tredjegradskurvene, vil eksperimentene med parameterne starte arbeidsprosessen. Observasjonene under disse eksperimentene vil gi anledning til å formulere hypoteser som så kan behandles med algebra for å få avkreftende eller bekreftende svar.

Forberedelser

I denne artikkelen ønsker vi å undersøke tredjegradspolynomer og karakteristiske punkter og egenskaper ved dem på samme måte som vi betraktet annengradspolynomer med sine karakteristiske ekstremalpunkt i forrige artikkel. Ikke alle tredjegradskurver har topp- og bunnpunkt, men man kan vise at hvis

$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ er slik at den deriverte $y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$ har to reelle nullpunkter, så vil grafen ha to ekstremalpunkter. Dette skjer hvis $(2B)^2 - 4(3A)C = 4(B^2 - 3AC) > 0$. Bemerk at størrelsen $B^2 - 3AC$ har noenlunde samme struktur som diskriminanten $b^2 - 4ac$ til et generelt annengradspolynom. I denne artikkelen vil vi se på tredjegradskurver med ekstremalpunkter. Siden alle tredjegradskurver har et vendepunkt, har vi nå allerede tre karakteristiske punkter for tredjegradskurver, men vi kommer til å se at det finnes flere karakteristiske punkter, linjer, arealer og forhold mellom størrelser ved disse kurvene. For å kunne studere disse karakteristiske størrelsene er kurvens plassering i koordinatsystemet uvesentlig. De karakteristiske punktene for en kurve og en tilsvarende kurve som bare er forskjøvet, er de samme. Derfor kan vi gå ut fra at vår tredjegradskurve er plassert med vendepunkt i origo. Da blir den symmetrisk rundt origo, og formelen blir også en del enklere enn den generelle

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Går kurven gjennom origo, må $D = 0$, og skal vendepunktet med $y'' = 6Ax + 2B = 0$ også ligge i origo, må $2B = 0$, som gir $B = 0$. Da får funksjonsuttrykket formen $y = Ax^3 + Cx$.

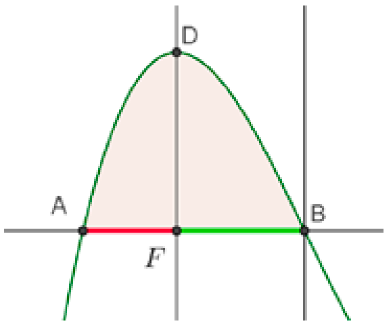
Hvis kurven $y = Ax^3 + Cx$ skal ha ekstremalpunkter, må likningen $y'(x) = 3Ax^2 + C = 0$ være løsbar, det vil si $\frac{C}{3A}$ må være negativ, dvs. A og C må ha forskjellig fortegn. Dette kan vi få til ved å skrive $A = a$ og $C = -b^2a$, slik at vi får

$$y = ax^3 - ab^2x = ax(x^2 - b^2).$$

Vi kan nå også lese av nullpunktene $-b$, 0 og b. Det er denne formen som er utgangspunkt for de følgende utforskningsoppgavene. Da har kurven toppunkt og bunnpunkt, og vendepunktet ligger i origo. I tillegg ligger kurven symmetrisk rundt origo, det vil si $f(-x) = -f(x)$ for alle x.

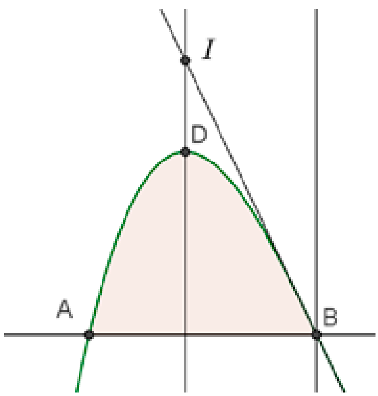
Gitt et tredjegradspolynom på formen $y = ax(x^2 - b^2)$. Vi betrakter nå forskjellige karakteristiske punkter, linjer, arealer og forhold mellom størrelser ved disse tredjegradspolynomene og ønsker å finne ut hvilken effekt variasjon av parameterne a og b har på disse karakteristiske egenskapene.

Oppgave 1) Maksimalpunktet kaller vi D. Fotpunktet under D på x-aksen kaller vi F. Dette punktet F deler linjestykket mellom nullpunktet A og origo i to deler. Finn forholdet mellom disse delene! Hvordan endrer dette forholdet seg når man varierer a eller b?



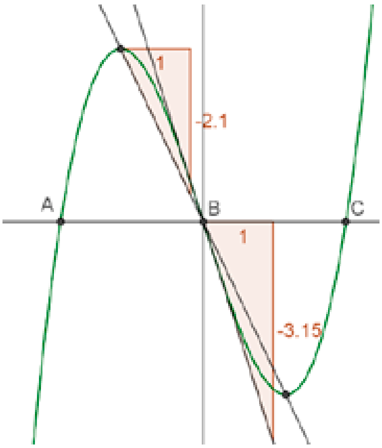
Figur 1: Oppgave 1.

Oppgave 2) Maksimalpunktet kaller vi igjen D. Vendetangenten skjærer loddlinjen gjennom D i punktet I. Finn forholdet mellom y-verdiene til I og D! Hvordan endrer dette forholdet seg når man varierer a eller b?



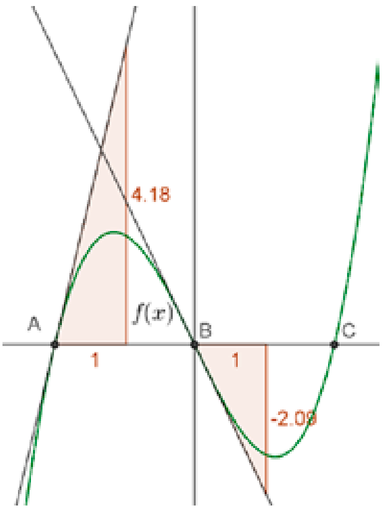
Figur 2: Oppgave 2.

Oppgave 3) Finn forholdet mellom stigningstallene til vendetangenten og ekstremalpunktforbindelsen for en tredjegradskurve. Hvordan endrer dette forholdet seg når man varierer *a* eller *b*?



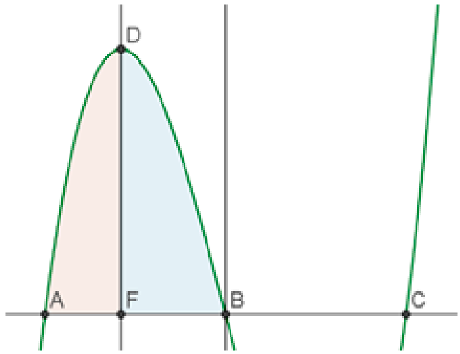
Figur 3: Oppgave 3.

Oppgave 4) Sammenlikn stigningstallet for tangenten i de «ytre» nullpunktene med vendetangentens stigningstall. Hva skjer når man varierer *a* eller *b*?



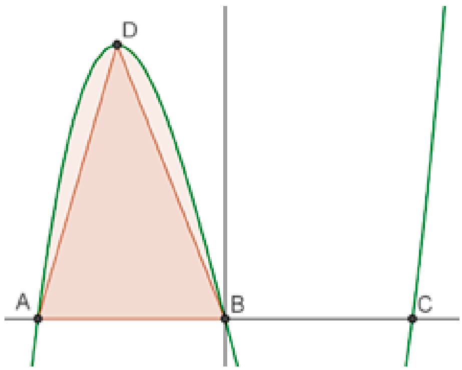
Figur 4: Oppgave 4.

Oppgave 5) Arealet under kurven fra det venstre nullpunktet *A* frem til origo deles i to deler gjennom en loddrett linje (parallell med *y*-aksen) gjennom ekstremalpunktet *D*. Finn arealforholdet mellom disse delene! Hvordan endrer dette forholdet seg når man varierer *a* eller *b*?



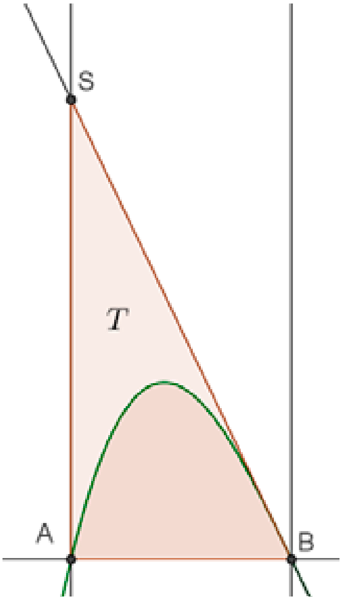
Figur 5: Oppgave 5.

Oppgave 6) Arealet under kurven fra det venstre nullpunktet frem til origo sammenliknes med arealet av en trekant der hjørnene er: venstre nullpunkt *A*, origo *B* og ekstremalpunktet *D* mellom disse. Finn dette arealforholdet! Hvordan endrer dette forholdet seg når man varierer *a* eller *b*?



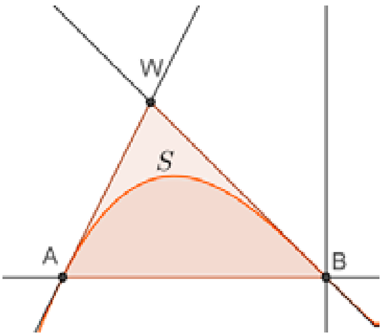
Figur 6: Oppgave 6.

Oppgave 7) Trekanten *T* dannes av *x*-aksen, loddlinjen i nullpunktet $A = (-b, 0)$ og vendetangenten. Trekantarealet sammenliknes nå med arealet under kurven mellom $-b$ og origo. Finn forholdet mellom disse arealene! Hvordan endrer dette forholdet seg når man varierer *a* eller *b*?



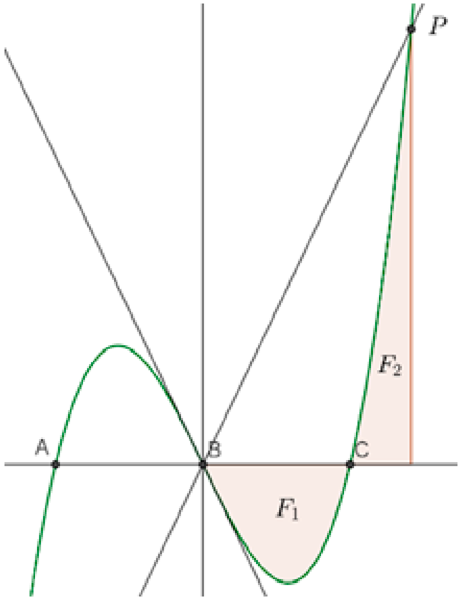
Figur 7: Oppgave 7.

Oppgave 8) Trekanten S dannes av x-aksen, vendetangenten og nullpunktstangenten til A. Sammenlikn trekantarealet med arealet under kurven mellom nullpunktet $A = (-b, 0)$ og origo. Finn forholdet mellom disse arealene! Hvordan endrer dette forholdet seg når man varierer a eller b?



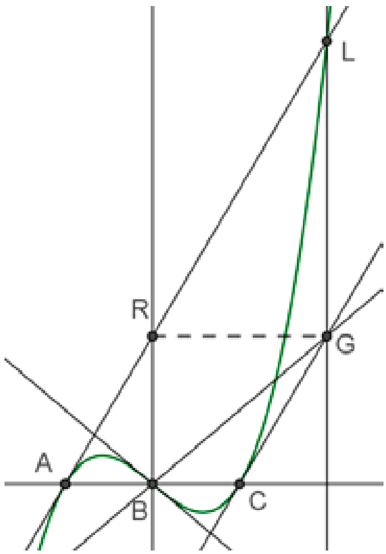
Figur 8: Oppgave 8.

Oppgave 9) Speil vendetangenten om y-aksen. Den speilete vendetangenten skjærer kurven i et nytt punkt P. Vis at integralet fra origo til x-verdien til P alltid er null, det vil si at $F_1 = F_2$. Hvordan endrer dette seg når man varierer a eller b?



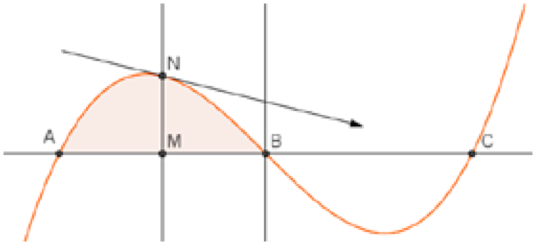
Figur 9: Oppgave 9.

Oppgave 10) Nullpunktstangenten gjennom A skjærer kurven i punktet L og y-aksen i punktet R. Den speilte vendetangenten om y-aksen skjærer nullpunktstangenten til C i punktet G. Hvordan ligger G i forhold til R og L? Hvordan endrer dette seg når man varierer a eller b?



Figur 10: Oppgave 10.

Oppgave 11) Finn midtpunktet M mellom nullpunktene $A = (-b, 0)$ og origo og finn også det tilhørende kurvepunktet N loddrett over M. Undersøk tangenten gjennom N. Hvor treffer denne tangenten x-aksen? Hva skjer om du endrer a eller b? (Denne oppgaven fikk vi av Hans Bie Lorentzen.)

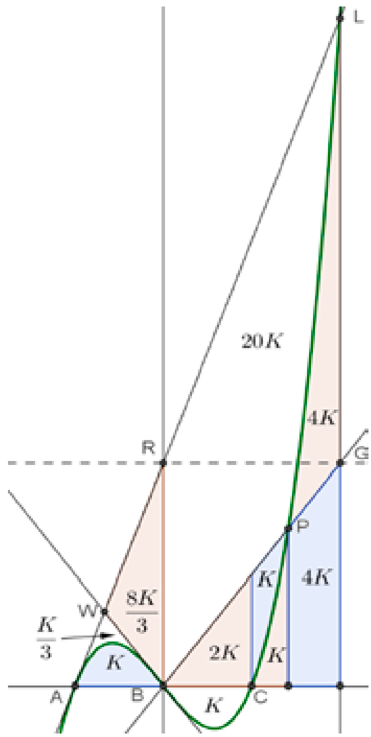


Figur 11: Oppgave 11.

Som et eksempel skal vi gi et løsningsforslag for oppgave 3 som følger skjemaet for utforskende oppgaver (se Figur 3). Vi ønsker å sammenlikne vendetangenten og ekstremalpunktsforbindelsen. Rettere sagt skal vi sammenlikne stigningstallene til disse linjene. Etter at vi har slått inn $y = ax^3 - ab^2x$, spør GeoGebra oss om vi ønsker å opprette gliderne a og b. Det svarer vi ja på. Vi ber nå om kurvens skjæringspunkter med x-aksen og får punktene A, B og C. Vi «bestiller» nå tangenten i punktet B som er vendepunktet for kurven. Deretter spør vi om stigningstallet til denne vendetangenten. Nå er det ekstremalpunktenes tur. Først ber vi om ekstremalpunktene for kurven og får punktene D og E. Så legger vi en forbindelseslinje gjennom disse to punktene og spør etter stigningstallet for linjen. Nå går det an å sammenlikne de to stigningstallene. Har vendetangenten stigningstallet –3, så har ekstremalpunktsforbindelsen stigningstallet –2. Er det første stigningstallet –1, så er det andre –0,666. Vi får inntrykk at disse tallene endres i takt, og at forholdet mellom dem kanskje er konstant. Vi eksperimenter videre og ser at dette stemmer, selv om vi velger negative verdier for a som gir oss positive verdier for stigningstallene. Ved å beregne kvotienten av stigningstallene og deretter endre a eller b, vil elevene kunne se at kvotienten, altså forholdet mellom stigningstallene, forblir uendret og de vil kunne spørre hvorfor. Nå kan det være på sin plass med en algebraisk analyse. Kurven beskrives med $y = ax^3 - ab^2x$, og dermed er $y' = 3ax^2 - ab^2$. Ekstremalpunktene finner vi for $y' = 0$, altså $3ax^2 = ab^2$ eller $x_{1,2} = \mp\frac{b\sqrt{3}}{3}$ med tilhørende y-verdier $y_{1,2} = \pm\frac{2ab^3\sqrt{3}}{9}$. Stigningstallet til ekstremalpunktsforbindelsen er dermed

$$m_e = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-\frac{2ab^3\sqrt{3}}{9} - \frac{2ab^3\sqrt{3}}{9}}{\frac{b\sqrt{3}}{3} - \left(-\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)} = -\frac{2ab^2}{3}$$

For vendetangenten får vi stigningstallet $m_v = y'(0) = -ab^2$ og forholdet mellom stigningstallene er konstant $\frac{m_v}{m_e} = \frac{3}{2}$.



Figur 12: Arealkartet.

En annen måte å arbeide med disse fenomenene på kan være følgende: I stedet for å presentere oppgaver à la dem vi har foreslått ovenfor, gjør elevene seg kjent med de karakteristiske størrelsene (ekstremalpunktene, vendepunkt, vendetangenten, nullpunktstangentene, skjæringspunktene mellom nullpunktstangentene og kurven, arealet under kurven mellom nullpunktene osv.) og eksperimenterer med hele universet av karakteristiske størrelser. De vil sikkert raskt kunne finne sammenhenger selv og starte egenhendig utforskning. De vil kunne formulere hypoteser og dermed ha et utgangspunkt for å kunne stille hvorfor-spørsmål. Her kan en algebraisk analyse, slik vi gjennomførte ovenfor, hjelpe dem videre, og til slutt vil elevene muligens produsere nye spørsmål. Også «arealkartet» (Figur 12) av kan være en inspirasjon til å eksperimentere med stoffet, formulere hypoteser og forklare det man ser. Det viser seg at mange arealer kan uttrykkes som multipler av en grunnleggende arealenhet. Vi oppfordrer leserne til å utforske dette arealkartet.

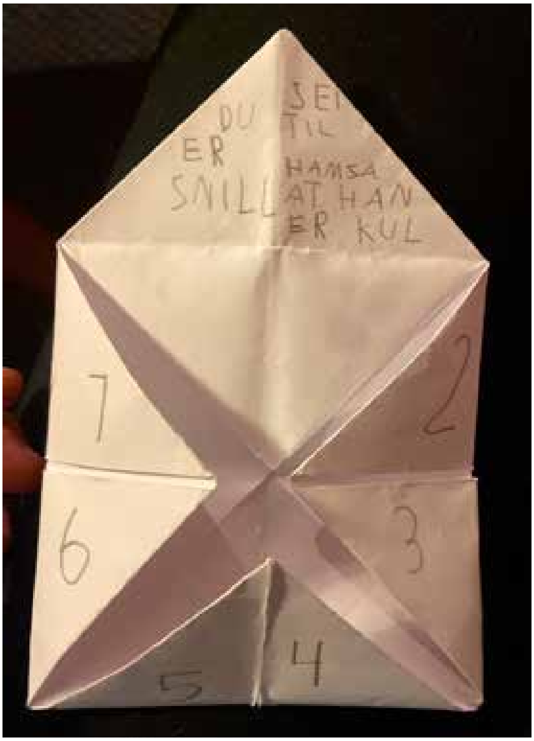
Vi oppfordrer også leserne til å selv å forsøke å utforske tilsvarende problemer for fjerdegradskurver.

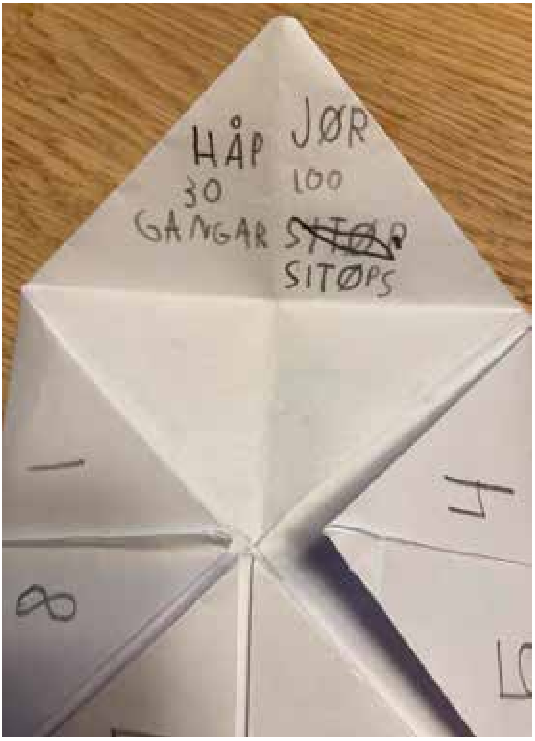
Referanse

Aslaksen, H. & Kirfel, C. (2023). Utforskende oppgaver med parabler. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 34*(4), 37–42.

Fra 2. klasse

En «spå» kan inneholde noen overraskelser. Her har Haldor (7) boltret seg. Faren advarte familien: «Ikke velg 2 eller 3!»





Hovtun, Dreyer

Definisjoner på firkanter i lærebøker

Innledning

> «Når jeg bruker et ord, betyr det nøyaktig det jeg bestemmer at det skal bety – verken mer eller mindre.» – Humpty Dumpty

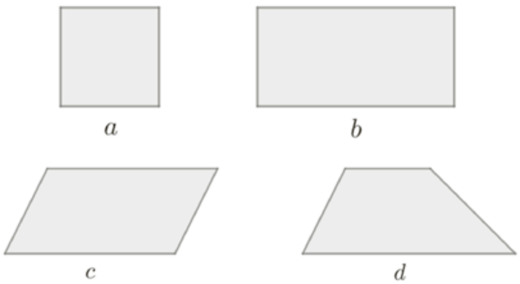
Forestill deg at du er på Jæren i Rogaland og skal handle ingredienser til en eplekake. Du går til grønnsakhandleren og ber om å få en pose med epler. Du får posen, men når du kikker oppi, oppdager du at den ikke inneholder epler, men poteter!

I Norge er det stort sett enighet om at ordet *eple* står for en søt og syrlig frukt som vokser på trær. Blant jærbuer er det derimot vanlig at ordet *eple* også benyttes om en anvendelig grønnsak som vokser i jorden, og som ofte omtales som *potet*. Som eksempelet viser, er det ikke alltid enighet om hva betydningen til et ord er, noe som kan føre til forvirring.

Gaute Hovtun
Universitetet i Stavanger
gaute.hovtun@uis.no

Tore Dreyer
Universitetet i Stavanger
tore.dreyer@uis.no

Dette er en fagfellevurdert artikkel på nivå 1. Tangenten er et sted der læreres og forskeres perspektiv på matematikkundervisning møtes og derfor har vi med praksisrelaterte forskningsartikler. Les mer: www.tangenten.no/nivaa1



Figur 1

Mangel på enighet om hva som ligger i et ord, er også til stede i matematikken. La oss nå tenke at vi går inn i en matematikkbutikk og ber om å få en pose *trapeser*. Hvilke av firkantene[1] i Figur 1 ville vi fått med oss i posen?

Det kommer helt an på hvilken definisjon matematikkforhandleren har på trapes. Dersom han definerer trapeset som «en firkant med *nøyaktig* to parallelle sider», vil vi bare få med oss firkant *d*. Definisjonen *ekskluderer* firkantene *a*, *b* og *c*, fordi disse har mer enn to parallelle sider. Matematikkforhandleren kan også definere trapeset som «en firkant med *minst* to parallelle sider». Nå vil vi få med oss både firkant *a*, *b*, *c* og *d* siden definisjonen *inkluderer* figurene som har mer enn to parallelle sider.

Selv om innholdet i posen blir forskjellig alt etter hvilken matematikkforhandler du går til, er det ingen av dem som tar feil (de Villiers, 1994, 2010). Det er imidlertid stor variasjon i hvilken type definisjon som blir brukt på nettsider, i læreverk og i ordbøker. I det matematiske fagmiljøet er det mest vanlig å definere et trapes inkluderende (Usiskin & Griffin, 2008). En studie av amerikanske lærebøker (Usiskin & Griffin, 2008) viste imidlertid for eksempel at de fleste av lærebøkene benyttet ekskluderende definisjoner. I en matematisk ordbok utgitt av det russiske utdanningsdepartementet presiseres det at trapeset har to sider som er parallelle, og at de andre to ikke er parallelle (Romanov et al., 2003, s. 154). Den nettbaserte ordboka *Wolfram MathWorld* lar være å presisere om trapeset har nøyaktig eller minst to parallelle sider (Weinstein, 2023), mens matematikk.org (2003) presiserer at trapeset har minst to parallelle sider. Denne dualiteten i definisjon av begrepet trapes kan være forvirrende for både elever og lærere, særlig dersom forskjellige definisjoner for samme element blir brukt om hverandre.

I Norge har tradisjonelt sett lærebøkene i matematikk hatt stor innvirkning på lærernes undervisning (Alseth et al., 2003; Kongelf, 2015; Mullis et al., 2012), og det er rimelig å anta at lærebøkenes definisjoner er de definisjonene elevene blir gjort kjent med (Zaslavsky & Shir, 2005). Johansson (2017) viser også at lærebøkene er med på å legge føringer for pedagogiske valg lærere gjør, og Bolstad (2020) viser at lærere synes det er vanskelig å løsrive seg fra innholdet bøkene legger opp til. Lærebøkene spiller med andre ord en rolle for både hva som blir tatt opp i undervisningen, og hvordan det blir tatt opp. Kongelf (2015) har forsket på kvaliteten på innholdet i norske matematikklærebøker, da knyttet til algebra. Der konkluderes det blant annet med at lærebøkene inneholder «feilaktige formuleringer, illustrasjoner og matematiske resonnement, som legger forholdene til rette for utvikling av misoppfatninger» (s. 83).

Med dette som bakteppe ønsket vi å undersøke om norske matematikklærebøker har korrekte definisjoner på firkanter, eller om det også her er formuleringer som er misvisende. Er det en felles forståelse for hvordan firkanter defineres på tvers av norske læreverk, eller eksisterer det en eple-/potetproblematikk? Artikkelens forskningsspørsmål ble dermed:

Hvordan defineres firkanter i norske matematikklærebøker for grunnskolen?

Teori

Matematiske definisjoner

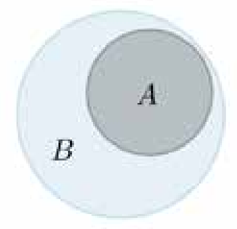
For at et begrep skal gi mening, trenger vi gode definisjoner. Men hva er en god definisjon? Winicki-Landman og Leikin (2000) har foreslått noen prinsipper som bør gjelde for matematiske definisjoner, blant annet:

- Å definere er å gi navn til et begrep.
- For å definere nye begrep kan bare tidligere definerte begrep brukes.
- En definisjon har med nødvendige og tilstrekkelige betingelser for begrepet.
- Definisjonen bør inneholde så få betingelser som mulig.

I tillegg understreker Poincaré (1914) at når vi arbeider med elever, er det et ekstra punkt som må vektlegges – definisjonen må formuleres på en måte som elevene har mulighet til å forstå.

Nødvendige og tilstrekkelige betingelser

En god matematisk definisjon må ifølge det tredje punktet inneholde både nødvendige og tilstrekkelige betingelser (Winicki-Landman & Leikin, 2000; Poincaré, 1914; Zazkis & Leikin, 2008). Det betyr at definisjonen skal gjelde for alle elementene man ønsker å definere, og bare for dem. La oss ta følgende definisjon på et kvadrat som eksempel: «et kvadrat er en firkant der alle sidene er like lange». Betingelsene at figuren er en firkant, og at alle sider er like lange, er nødvendige betingelser for kvadrat. Definisjo-



Figur 2

nen inkluderer imidlertid også figurer som ikke er kvadrater, nemlig romber (der vinklene ikke er rette). Definisjonen omfatter da noen elementer vi ikke ønsker å inkludere, og inneholder derfor ikke tilstrekkelige betingelser. Knyttet opp til Figur 2 illustrerer den mørkegrå sirkel A alle kvadrater. Den lysegrå sirkelen B inneholder alle romber, som inkluderer alle kvadrater. Definisjonen skal bare inkludere elementene i A, men inkluderer feilaktig alle elementene i både A og B. At en definisjon ikke inneholder tilstrekkelige betingelser, er en vanlig feil som forekommer når firkanter skal defineres (Zazkis & Leikin, 2008). Videre kan vi se på definisjonen «et parallellogram er en firkant som har to og to parallelle sider, og der vinklene ikke er 90°». Dette er et eksempel på en definisjon med tilstrekkelige, men ikke nødvendige betingelser. Definisjonen garanterer at du ender opp med et parallellogram, men det finnes også spesialtilfeller av parallellogram som blir utelatt av definisjonen – rektangler og kvadrater ekskluderes. Knyttet til Figur 2 kan vi si at i sirkel B er alle parallellogram, men det er bare parallellogrammene i sirkel A som blir inkludert av definisjonen.

Minimumsdefinisjoner

En god definisjon skal også inneholde så få betingelser som mulig. Dette punktet gjenkjennes fra læreplanen LK20. Etter 6. trinn skal elevene «beskrive […] minimumsdefinisjoner av to- og tredimensjonale figurer og forklare hvilke egenskaper figurene har felles, og hvilke egenskaper som skiller dem fra hverandre» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det finnes ingen liste med allmenn aksepterte minimumsdefinisjoner på firkanter, og det finnes flere forskjellige minimumsdefinisjoner til hver firkant (Zazkis & Leikin, 2008). Felles for alle er at de inneholder nødvendige og tilstrekkelige betingelser, uten overflødig informasjon. Ta følgende definisjoner på en rombe som eksempel:

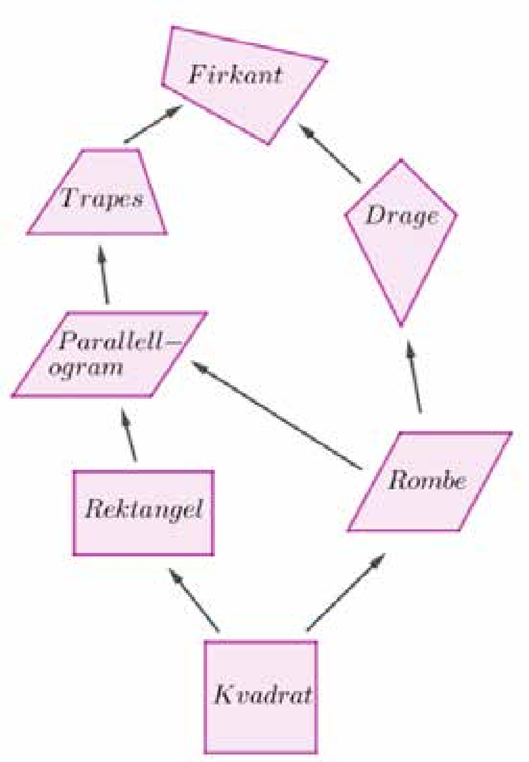
a) En rombe er en firkant der alle sidene er like lange.
b) En rombe er et parallellogram der alle sidene er like lange.

Her inneholder begge definisjonene nødvendige og tilstrekkelige betingelser, men bare a) er en minimumsdefinisjon. I definisjon b) er det ikke nødvendig å påpeke at det er et parallellogram. Siden et parallellogram kan defineres som «en firkant der to og to sider er parallelle», kan definisjon b) skrives om til «en rombe er en firkant der to og to sider er parallelle og alle sidene er like lange». Det er overflødig å peke på at to og to sider er parallelle, ettersom det følger av at det er en firkant der sidene er like lange. Definisjon b) er derfor ikke en minimumsdefinisjon. Det er kun kvadratet som kan skrives som en minimumsdefinisjon ved bruk av andre referansepunkt enn firkant. Kvadratet kan nemlig defineres med både rektangel og rombe som referansepunkt, og likevel være minimumsdefinisjon.

Det er også interessant å merke seg at LK06 ikke rettet samme oppmerksomhet mot minimumsdefinisjoner. Der ble ikke minimumsdefinisjoner nevnt, men formuleringer som *sortere*, *beskrive* og *analysere egenskaper ved todimensjonale figurer* var sentrale (Kunnskapsdepartementet, 2006, s. 62–63).

Inkluderende og ekskluderende definisjoner

En matematisk definisjon kan være inkluderende eller ekskluderende. La oss bruke et trapes som eksempel. De Villiers (1994) understreker at for å kunne ta stilling til om et trapes er definert inkluderende eller ekskluderende, må



Figur 3

det presiseres om det er *minst* eller *nøyaktig* to parallelle sider:

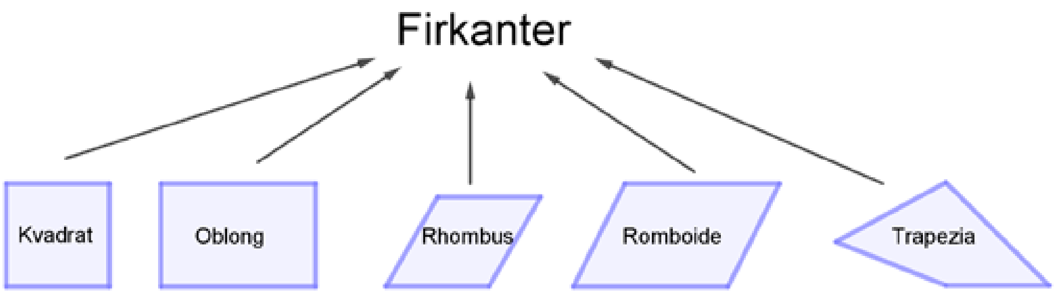
c) Et trapes er en firkant med *minst* to parallelle sider.
d) Et trapes er en firkant med *nøyaktig* to parallelle sider.

Definisjon c) er inkluderende. Det vil si at definisjonen inkluderer parallellogram, romber, rektangler og kvadrater. Dette medfører at vi kan gruppere firkanter i et hierarki (se figur 3), slik at figurer nede i hierarkiet blir spesialtilfeller av figurene over (de Villiers, 1994). Fordelene med en slik hierarkisk tilnærming er at figurene nede i hierarkiet deler egenskaper med figuren over. Det betyr for eksempel at dersom vi utleder en formel for arealet til et trapes, kan vi benytte denne formelen til både parallellogram, rektangel, rombe og kvadrat, uten å måtte utlede formelen til hver enkelt av figurene. I slike tilfeller vil det være hensiktsmessig å benytte seg av inkluderende definisjoner. Goldenberg et al. (2014) mener at å forstå anvendeligheten med inkluderende definisjoner er et mål i seg selv, og at det er viktig at elevene får erfare fordelene med den inkluderende klassifiseringen.

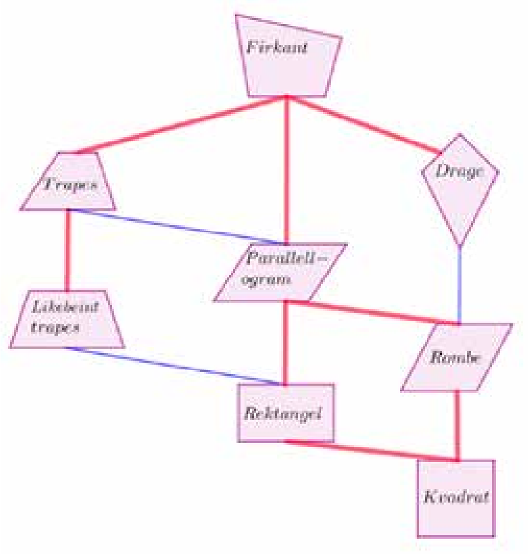
Definisjon d) er ekskluderende. Det medfører at parallellogram, rektangler, romber og kvadrat ikke blir definert som trapes, figurene blir sett på som uavhengige av hverandre. de Villiers (1994, 2010) omtaler dette som *partition classification*, eller *delt klassifisering*[2]. Euklid benyttet seg av denne typen klassifisering da han skrev det matematiske læreverket *Elementene* for ca. 2300 år siden (Joyce, 2021; Usiskin & Griffin, 2008). Euklids klassifisering kan illustreres som i Figur 4.

Her er en oblong alle rektangler som ikke er kvadrater, og så videre. Figurene blir sett på som uavhengige av hverandre.

Selv om Euklid definerte firkanter ekskluderende, kan det se ut som at den moderne utviklingen av matematiske definisjoner går mot at



Figur 4



Figur 5: Egen oversettelse av Usiskin & Griffin (2008, s. 18)

firkanter skal defineres inkluderende. Usiskin & Griffin (2008) viser for eksempel til Figur 5 som en oversikt over hvordan firkanter blir definert. Rødt linjestykke betyr at firkanten under stort sett alltid blir regnet som et spesialtilfelle av firkanten over. Blått linjestykke betyr at det er uenighet om hvorvidt firkanten under skal defineres som et spesialtilfelle av firkanten over. Selv om det er mange fordeler med å bruke inkluderende definisjoner, peker de Villiers (1994) på at ekskluderende definisjoner på firkanter lettere kan oppfylle Poincarés (1914) krav om at definisjonene skal være mulige å forstå for elevene. Det kan for eksempel være krevende for elever å forstå at et kvadrat også er et rektangel.

Denne problematikken har blitt tatt opp i van Hieles modell, en modell som blant annet har som mål å belyse hvorfor mange elever kan ha kognitive utfordringer i arbeid med geometri (Fuys et al., 1986; Usiskin, 1982). Modellen består av fem nivå for geometriforståelse, og her er det særlig interessant å merke seg skillet mellom nivå 2 og nivå 3 i modellen. Elever på nivå 2 i van Hieles modell kan identifisere Figur 6 som et kvadrat[3]. Elevene vil imidlertid ikke være med på at Figur 6 også er et rektangel,

Figur 6

selv om den tilfredsstiller alle kriteriene til et rektangel. Elevene må være på nivå 3 i modellen før de innser denne hierarkiske og inkluderende sammenhengen (Fuys et al., 1986, s. 249). Ifølge van Hieles modell kan vi med andre ord ikke ta det for gitt at alle elevene forstår inkluderende definisjoner på firkanter. I tillegg til disse nivåene presenterer van Hiele noen egenskaper ved dem (Usiskin, 1982), der det særlig er verdt å merke seg én egenskap: To personer som diskuterer geometri på forskjellige nivå, vil ikke kunne forstå hverandre, ifølge van Hiele. Dette innebærer at en elev på nivå 2 ikke forstår en forklaring som ligger på nivå 3. Knyttet til definisjoner på firkanter betyr det at dersom læreboka presenterer en definisjon som forutsetter at elevene er på nivå 3, er det mange elever på nivå 1 og nivå 2 som ikke har mulighet til å forstå denne definisjonen. Dette er med på å underbygge de Villiers' (1994) poeng om at ekskluderende definisjoner kan være mer tilgjengelige for noen elever.

Definisjoner på firkanter

For å svare på forskningsspørsmålet vårt om hvordan firkanter defineres i norske lærebøker, er vi avhengig av å avklare hva vi mener er fullgode matematiske definisjoner for de ulike firkantene. Det eksisterer ikke noen fasit på hva som er den ene rette definisjonen (Zazkis & Leikin, 2008), men ifølge Winicki-Landman og Leikins (2000) prinsipper for en god definisjon, skal den inneholde nødvendige og tilstrekkelige betingelser, samtidig som den inneholder så få betingelser som mulig. Videre virker det å gå mot en konsensus i det matematiske miljøet om at det bør brukes inkluderende definisjo-

Geometrisk form	Minimumsdefinisjon
Firkant	En firkant er en lukket figur i planet som består av fire punkter (tre punkt kan ikke ligge på samme linje) og fire rette linjestykker som knytter de fire punktene sammen.
Trapes	Et trapes er en firkant der minst to av sidene er parallelle.
Drage	En drage er en firkant der to og to nabosider har samme lengde.
Parallellogram	Et parallellogram er en firkant der to og to sider er parallelle.
Rombe	En rombe er en firkant der alle sider er like lange.
Rektangel	Et rektangel er en firkant der alle vinklene er 90 grader.
Kvadrat	Et kvadrat er en firkant der alle sidene er like lange, og alle vinklene er 90 grader.

Tabell 1

ner (Usiskin & Griffin, 2008). Basert på dette foreslår vi følgende kriterier for definisjoner på firkanter:

- Definisjonen inneholder nødvendige og tilstrekkelige betingelser.
- Definisjonen er inkluderende.
- Definisjonen er en minimumsdefinisjon.

På grunnlag av kriteriene har vi foreslått minimumsdefinisjonene på firkanter som vist i Tabell 1.

Metode

Vi har undersøkt og analysert definisjoner av firkanter i 24 lærebøker fra barne- og ungdomstrinnet.[4] Når det gjelder utvalg av lærebøker, brukte vi samme avgrensning som Kongelf (2015, s 83), nemlig de fysiske klassetrinnsspesifikke bøkene som elevene bruker til å tilegne seg kunnskap om matematikk i undervisningssituasjonen på skolen. Alle de 24 lærebøkene vi undersøkte, har vært knyttet til de to siste læreplanene. Åtte av lærebøkene er utgitt etter innføringen av LK20, og 16 av lærebøkene er knyttet til LK06. Vi noterte definisjonene på figurene trapes, parallellogram, rektangel, kvadrat, drage og rombe, og samlet resultatet i en tabell. Her ble bare definisjonene tatt med, eventuelle figurer og oppgaver ble utelatt. Vi noterte oss det imidlertid dersom læreboka inneholdt oppgaver eller figurer som kunne indikere om de hadde en inkluderende eller ekskluderende tilnærming.

Når det gjelder utvalg av lærebøker, tok vi utgangspunkt i de forskjellige forlagene vi har i Norge, og undersøkte om de hadde gitt ut lærebøker i matematikk. Vi tok utgangspunkt i læreplanene da vi valgte ut bøker. Under læreplanen LK06 var geometriske figurer en del av kompetansemålene etter 5.–7. trinn og 8.–10. trinn. I LK20 er geometriske figurer lagt til 6. og 9. trinn. Vi tok derfor utgangspunkt i lærebøkene til disse trinnene, og dersom vi ikke fant noen av definisjonene, undersøkte vi også lærebøkene på trinnet under og over.

Siden det allerede eksisterer teorier om definisjoner på firkanter i lærebøker (se for eksempel Usiskin & Griffin, 2008), og fordi det eksisterer teorier om definisjoner (se for eksempel Winicki-Landman & Leikin, 2000; Zazkis & Leikin, 2008), valgte vi å gjennomføre en teoridrevet innholdsanalyse (Hsieh & Shannon, 2005), der vi blant annet tok utgangspunkt i Zazkis og Leikins (2008) rammeverk for analyse av matematikklærerstudenters definisjoner på kvadrater. Innholdsanalysen besto av to nivå. På det første nivået kartla vi hvilke lærebøker definisjonene var fra, hvilken læreplanperiode læreboka var fra, og hvilke figurer som ble definert. På det andre nivået undersøkte vi om definisjonene inneholdt nødvendige og tilstrekkelige betingelser, om de var inkluderende eller

Nødvendige og tilstrekkelige betingelser	Inkluderende / ekskluderende	Type definisjon
NT: Nødvendige og tilstrekkelige betingelser for figuren. T: Tilstrekkelige betingelser, men også ikke nødvendige betingelser. N: Nødvendige betingelser, men ikke tilstrekkelige. F: Inneholder verken nødvendige eller tilstrekkelige betingelser	ID: Inkluderende definisjoner. TID: Tilsynelatende inkluderende definisjoner. ED: Ekskluderende definisjoner. TD: Tvetydige definisjoner.	M: Minimumsdefinisjon IM: Ikke minimumsdefinisjon

Tabell 2: Analyseverktøyet som ble benyttet.

ekskluderende, og om de var minimumsdefinisjoner (se Tabell 2).

Det første vi så på da vi kodet på nivå 2, var om den gitte definisjonen inneholdt nødvendige og tilstrekkelige betingelser. En definisjon ble kodet som NT dersom den var korrekt, T, N eller F dersom definisjonen inneholdt mangler. Da vi skulle kode om en definisjon var inkluderende eller ekskluderende, ble koden inkluderende definisjon (ID) brukt dersom læreboka brukte tidligere figur i hierarkiet som referansepunkt. Koden tilsynelatende inkluderende (TID) ble brukt dersom definisjonen var NT eller N, men ikke brukte tidligere figur som referansepunkt. En definisjon kodet som ekskluderende (ED) ble i alle tilfeller kodet som T eller F, da den ville inneholde unødvendige betingelser som utelukket enkelte figurer. Enkelte definisjoner var derimot mindre klare når det gjaldt om de var inkluderende eller ekskluderende, hvilket tilordnet dem i kodekategorien tvetydige definisjoner (TD). Når det gjaldt type definisjon, vurderte vi kun hvorvidt det var eller ikke var en minimumsdefinisjon. For å bli kodet som en minimumsdefinisjon måtte definisjonen inneholde nødvendige og tilstrekkelige betingelser,

Definisjon	Nødvendige og tilstrekkelige betingelser	Inkluderende/ ekskluderende	Type definisjon
e) En firkant der to sider er parallelle, og de to andre sidene ikke er parallelle, kalles et trapes.	T	ED	IM
f) Et parallellogram har to og to sidekanter som er like lange og parallelle. Motstående vinkler er like store.	N	TID	IM
g) I en rombe er alle sidene like lange. Motstående vinkler er like store, og vinklene er ikke 90°.	F	ED	IM
h) Et kvadrat er en rombe med rette vinkler.	NT	ID	M

Tabell 3: Koding i analyseverktøyet.

	Antall definisjoner	Prosent
LK20:	42 av 48	88 %
LK06:	64 av 96	67 %
Totalt:	**106 av 144**	**74 %**

Tabell 4

	Kvadrat	Rektangel	Parallello-gram	Rombe	Trapes	Drage
Antall definisjoner (av 24 mulige)	22	22	22	19	18	3

Tabell 5

og ikke noen overflødig informasjon. Eksempel på hvordan vi kodet i analyseverktøyet, kan sees i Tabell 3.

Definisjon e) inneholder tilstrekkelige, men ikke nødvendige betingelser (T). Definisjonen vil kun omfavne trapes, men ekskluderer spesialtilfeller av trapes (ED), for eksempel parallellogram og rektangel. Det kan argumenteres for at en slik ekskluderende definisjon er riktig, men ut ifra vår tolkning av betingelser på definisjoner må definisjonen være inkluderende for å bli betegnet som korrekt. Definisjon f) har noen nødvendige betingelser som gjør at alle parallellogram vil bli dekket av definisjonen (også spesialtilfeller, derfor TID), men den mangler én betingelse for å kun gjelde for parallellogrammer – det må være en firkant. Dersom det ikke presiseres, vil definisjonen også gjelde for alle regulære mangekanter med par antall sider. Definisjon g) inneholder verken tilstrekkelige eller nødvendige betingelser (F). Den mangler betingelsen firkant, og ekskluderer (ED) samtidig de spesialtilfellene av romber som vi kaller kvadrat. Definisjon h) inneholder både nødvendige og tilstrekkelige betingelser. Definisjonen bruker rombe som referansepunkt, og er dermed inkluderende, uten at den tillegger unødvendige betingelser. Definisjonen er dermed en minimumsdefinisjon, gitt at definisjonen av rombe er en minimumsdefinisjon.

Da analyseverktøyet var ferdig utviklet, ble definisjonene først kodet individuelt, før vi i fellesskap tok en endelig koding og diskusjon på eventuelle avvik. Analyseprogrammet NVivo ble brukt til å skaffe en kvantitativ oversikt over dataene, og videre foretok vi en kvalitativ analyse av definisjonene til et læreverk der dataene skilte seg ut.

Resultater og diskusjon

Antall definisjoner

Vi tok utgangspunkt i definisjoner av 6 typer firkanter fra 24 lærebøker, noe som utgjorde $24 \cdot 6 = 120$ mulige definisjoner. En oversikt over faktisk antall definisjoner er gitt i Tabell 4.

Her ser vi at det bare er 74 % av de 144 figurene som er definert. Det betyr med andre ord at hver fjerde definisjon mangler. En oversikt over antall definisjoner pr. figur gir også interessant informasjon:

I Tabell 5 ser vi at drage skiller seg tydelig ut. Bare 3 av 24 lærebøker definerer denne figuren. Tar vi bort drage, ser vi at 103 av 120, altså 86 % av de resterende figurene, blir definert.

Videre kan det være verdt å merke seg at 6 av 24 lærebøker også lar være å definere trapes, og at det prosentvis er definert flere firkanter i lærebøker etter LK20 enn etter LK06.

Vi synes det er særlig interessant at bare 3 av 24 lærebøker definerer dragen. Lærebøkene er i stor grad med på å påvirke norske læreres undervisning (Alseth et al., 2003; Kongelf, 2015; Mullis et al., 2012; Johansson, 2017), noe som kan bety at dersom lærebøkene neglisjerer

	Tilstrekkelige og nødvendige betingelser (NT)	Tilstrekkelige, men ikke nødvendige betingelser (T)	Nødvendige, men ikke tilstrekkelige betingelser (N)	Verken tilstrekkelige eller nødvendige betingelser (F)
LK20	35	1	5	1
LK06	45	3	13	3
Totalt:	**80** (75 %)	**4** (4 %)	**18** (17 %)	**4** (4 %)

Tabell 6

	Minimumsdefinisjon	Ikke minimumsdefinisjon
LK20	22	20
LK06	22	42
Totalt:	**44** (42 %)	**62** (58 %)

Tabell 7

dragen, vil den også bli forbigått av lærerne. Vi vet ikke om det å utelate dragen er et bevisst valg av lærebokforfatterne, men vi etterlyser i så fall en diskusjon rundt dette. Blant argumentene for å beholde dragen i lærebøkene er figurens naturlige plass i firkantenes hierarki, at dragens egenskaper kan benyttes under konstruksjoner, og ikke minst at det er positive elevaktiviteter tilknyttet dragens egenskaper dersom elevene skal lage en fysisk drage.

Nødvendige og tilstrekkelige betingelser

Vi undersøkte også hvor mange av de 106 definisjonene som var korrekte. Resultatet kan oppsummeres i Tabell 6.

80 definisjoner, eller 75 % av definisjonene vi fant, er korrekte definisjoner. Det betyr også at av 144 mulige definisjoner blir bare 80 definert korrekt, noe som tilsvarer 56 %. Ser vi bort fra dragen, er 80 av 120 mulige definisjoner riktig definert, noe som utgjør 67 %.

Når 75 % av de 106 faktiske definisjonene er korrekte, betyr det at hver fjerde definisjon oppgitt i lærebøkene er mangelfull. Her er det verdt å merke seg at 18 av de 26 mangelfulle definisjonene ikke inneholder tilstrekkelige betingelser, altså at definisjonene også omfavner elementer vi ikke ønsker å definere. Ifølge Zazkis & Leikin (2008) er dette en vanlig feil knyttet til definisjoner av firkanter. I de fleste tilfellene der det ikke er tilstrekkelige betingelser, presiserer ikke definisjonen at det er snakk om en firkant, for eksempel «alle vinkler er 90 grader» som en definisjon på rektangel. Til lærebøkenes forsvar må det nevnes at flere av dem har begrepet *Firkanter* som en tittel eller overskrift, så det er underforstått at definisjonen snakker om firkanter.

Minimumsdefinisjoner

Når det gjelder minimumsdefinisjoner, kan resultatet oppsummeres i Tabell 7.

Totalt sett er 42 % av definisjonene minimumsdefinisjoner. Ser vi på læreplanperiodene hver for seg, er 52 % av definisjonene fra lærebøker etter LK20 minimumsdefinisjoner, og 34 % av definisjonene fra LK06 er minimumsdefinisjoner.

Når vi ser på figurene hver for seg, skiller romben seg ut. Her er bare 3 av 19 definisjoner minimumsdefinisjoner. Det utgjør ca. 16 %.

Her er det interessant å se at det er et såpass stort skille mellom prosentvis andel minimumsdefinisjoner i lærebøker etter LK06 og LK20. En medvirkende årsak til dette er sannsynligvis at LK20 eksplisitt har med begrepet *minimumsdefinisjoner* i kompetansemålene, noe LK06 ikke har. Som vist i teoridelen kan det være utfordrende å lage definisjoner som er tydelig inklu-

	Inkluderende	Tilsynelatende inkluderende	Ekskluderende	Tvetydig
LK20:	14	20	2	7
LK06:	25	21	7	11
Totalt:	**39**	**41**	**9**	**17**

Tabell 8

	Kvadrat	Rektangel	Parallellogram	Rombe	Trapes
Matematikk 6	NT, TID, M	NT, TID, IM	NT, TID, IM	-	NT, TD, M
Matematikk 9	NT, ID, IM	N, TID, IM	F, ED, IM	NT, ID, IM	T, ED, IM

Tabell 9

derende samtidig som de er minimumsdefinisjoner. Dette gjelder særlig for romber, der de fleste definisjonene i lærebøkene var av typen:

a) En rombe er en firkant der alle sidene er like lange.
b) En rombe er et parallellogram der alle sidene er like lange.

Som tidligere nevnt inneholder begge definisjonene nødvendige og tilstrekkelige betingelser, men det er bare a) som er en minimumsdefinisjon, siden det i b) ikke er nødvendig å presisere at det er et parallellogram. Dette eksempelet illustrerer et didaktisk problem for lærebokforfatterne. Forfatterne ønsker å følge læreplanen, og dermed presentere minimumsdefinisjoner, som for eksempel definisjon a). Samtidig ønsker de å hjelpe elevene til å forstå den hierarkiske og inkluderende klassifiseringen av firkanter. Da kan det forsvares å velge den tydelig inkluderende b), som kanskje gjør det lettere for elevene å forstå at en rombe også er et parallellogram.

Det er også mulig å argumentere for det motsatte, nemlig at definisjon b) er vanskeligere for elever å forstå. Van Hiele (Fuys et al., 1986) peker på at det først er på nivå 3 at elevene er i stand til å forstå den hierarkiske og inkluderende klassifiseringen av firkanter. Elevene kan heller ikke forstå en forklaring som ligger på et høyere nivå i modellen enn det de er på selv. Dersom elevene selv er på nivå 2, kan det derfor argumenteres for at definisjon b) er umulig å forstå for dem, siden det er en definisjon som forutsetter at elevene er på nivå 3.

Inkluderende eller ekskluderende definisjoner

En oversikt over om definisjonene er inkluderende eller ekskluderende, er gitt i Tabell 8.

Av de 106 definisjonene er 80 kodet som inkluderende eller tilsynelatende inkluderende. Det utgjør ca. 75 % av definisjonene. Definisjonene som ble kodet inkluderende, brukte en tidligere figur i hierarkiet i definisjonene sine, og dette medførte igjen at de færreste av disse var minimumsdefinisjoner.

Blant de tvetydige definisjonene finner vi 11 definisjoner på trapes. Det innebærer at 11 av 18 lærebøker ikke tar tydelig stilling til om et trapes skal ha *nøyaktig* eller *minst* to parallelle sider. Dette resultatet er med på å styrke mistanken fra innledningen om at det ikke er noen konsensus om hvordan trapeset skal defineres.

En kvantitativ analyse av datamaterialet viser med andre ord at de fleste norske lærebøker tilsynelatende har en inkluderende tilnærming til de fleste firkantene, selv om ikke alle tar tydelig stilling til trapeset. Knyttet opp til Usiskin og Griffins (2008) oversikt over hierarki for firkanter er dette er forventet resultat. Vi fant imidlertid ni ekskluderende definisjoner, der seks av disse er fra lærebøker fra Cappelen Damm. For

Figur	Definisjon i Matematikk 9 fra Cappelen Damm
Kvadrat	Et kvadrat er et rektangel der alle sidene er like lange. Det vil si at grunnlinjen og høyden i kvadratet er like lange. Sidene kaller vi s.
Rektangel	I et rektangel er alle vinklene 90°, og de motstående sidene er like lange og parallelle.
Parallellogram	I et parallellogram er to og to sider like lange og parallelle. Motstående vinkler er like store, og de er *ikke* 90°.
Rombe	En rombe er et parallellogram der sidene er like lange.
Trapes	Et trapes er en firkant der bare to av sidene er parallelle. I trapeset er sidene a og b parallelle. Høyden h er avstanden mellom de to parallelle sidene. Høyden står alltid vinkelrett på de parallelle sidene a og b.

Tabell 10: Alle definisjoner er sitert direkte fra Matematikk 9. (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 94; s. 100; s. 104; s. 107; s. 108)

å kunne belyse bruken av ekskluderende definisjoner i større grad foretok vi en kvalitativ analyse av læreverkene Matematikk 6 (Gulbrandsen et al., 2020) og Matematikk 9 (Hjardar & Pedersen, 2020) fra Cappelen Damm.

Bruken av ekskluderende definisjoner

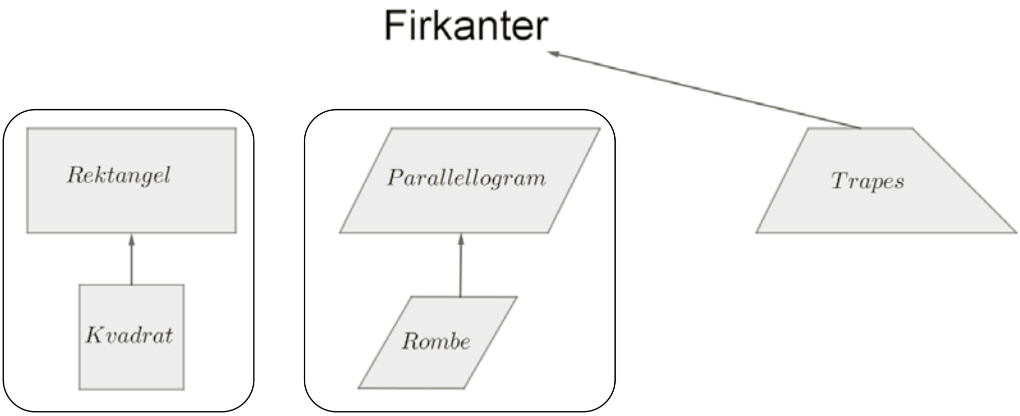
I de to læreverkene ble definisjonene av firkantene kodet som vist i Tabell 9.

I Matematikk 6 blir det brukt en tilsynelatende inkluderende definisjon om både kvadratet, rektangelet og parallellogrammet. Definisjonene henviser til firkantenes egenskaper, uten at de ekskluderer spesialtilfeller. Kvadrat og rektangel blir presentert samtidig, der kvadratet blir omtalt som et rektangel i en tekst som står under definisjonene. I tillegg til dette har boka en klassifiseringsoppgave der elevene skal gi navn til forskjellige firkanter. Her presiserer lærerveiledningen at noen av figurene kan ha flere navn. Det er med andre ord en tydelig inkluderende tilnærming i Matematikk 6.

I Matematikk 9 blir det brukt en inkluderende definisjon på kvadratet og romben, en tilsynelatende inkluderende definisjon på rektangelet og en ekskluderende definisjon på parallellogram og trapes, som vist i Tabell 10.

Kvadratet blir definert som et spesialtilfelle av rektangelet, og romben blir definert som et spesialtilfelle av parallellogrammet. En tydelig inkluderende tilnærming. Videre ekskluderer de enhver mulighet for kobling på tvers av disse gruppene, samt koblingen til trapes. I stedet for en hierarkisk oppbygging har de gruppert kvadrater og rektangler, romber og parallellogram, og trapes for seg selv. Matematikk 9s inndeling av firkanter er en plass mellom hierarkisk inndeling og delt klassifisering (de Villiers, 1994), og er forsøkt illustrert i Figur 7.

Det er også verdt å merke seg at definisjonene til rektangel og parallellogram ikke inneholder tilstrekkelige betingelser, de presiserer ikke at det er snakk om firkanter. Dette innebærer at både kvadratet og romben bygger definisjonen sin på figurer som er mangelfullt definert. Det kan da settes spørsmålstegn ved om disse definisjonene er korrekte, selv om definisjonen til kvadrat og rombe isolert sett inneholder både nødvendige og tilstrekkelige betingelser. Matematikk 9s definisjoner har både inkluderende og ekskluderende tilnærming, i tillegg til at flere av dem er mangelfulle. Dette er problematisk på flere områder. For det første får ikke elevene mulighet til å oppdage kraften bak en inkluderende tilnærming (Goldenberg et al., 2014). For det andre begrenser det elevenes muligheter til å strekke seg mot nivå 3 i van Hieles modell (Fuys et al., 1986), og for det tredje kan feil i lærebøker



Figur 7

være med på å skape misoppfatninger hos elevene (Kongelf, 2015).

Dersom vi sammenligner Matematikk 6 og Matematikk 9, kan det se ut som det et behov for en felles forståelse for hvordan vi definerer firkanter. Ikke bare på tvers av læreverk, men også innad i samme læreverk. Det vil være forvirrende for elevene når de i sjette klasse lærer at et rektangel også er et parallellogram, for så å møte en definisjon i niende klasse der det understrekes at dette ikke er tilfellet. En dyktig lærer kan likevel benytte seg av den tidvis forvirrende definisjonsbruken i lærebøkene til å legge til rette for både diskusjon og læring hos elevene. Dette stiller imidlertid krav til at læreren selv har identifisert at lærebøkene kan ha upresise definisjoner.

Konklusjon og implikasjoner

Med bakgrunn i en kvantitativ analyse av hele datamaterialet og en kvalitativ analyse av deler av det vil vi peke på følgende funn:

Av alle de mulige definisjonene på firkanter i lærebøkene blir 74 % definert. Dragen er en firkant som blir definert i bare 3 av 24 lærebøker.

Hver fjerde definisjon i lærebøkene er mangelfull. De fleste av disse definisjonene mangler tilstrekkelige betingelser.

42 % av definisjonene er kodet som minimumsdefinisjoner. Her er det verdt å merke seg to ting. For det første er det prosentmessig flere minimumsdefinisjoner i lærebøker etter LK20. For det andre kan det se ut til at det er vanskelig å lage en minimumsdefinisjon samtidig som den er tydelig inkluderende.

De fleste lærebøker definerer firkanter inkluderende. Mange lærebøker tar imidlertid ikke stilling til om trapeset skal defineres inkluderende eller ekskluderende.

Det eksisterer store forskjeller på hvordan firkanter defineres både på tvers av læreverk og innenfor ett og samme læreverk.

Summen av disse funnene forteller oss at norske læreverk ikke har tatt et tydelig standpunkt til hvilke firkanter som skal defineres, og hvordan de skal defineres, og at det dermed ikke finnes en felles forståelse på tvers av læreverkene. Spesielt trapeset virker ubestemmelig i norske lærebøker. Det er nok for mye å håpe på at alle læreverkene får en felles forståelse for hvordan firkanter skal defineres, men definisjonene må være korrekte, og det bør i det minste være en konsensus om hvordan de defineres innenfor ett og samme læreverk.

Etter å ha analysert definisjonene fra lærebøkene forstår vi at den manglende konsensusen til definisjoner av firkanter kan gjøre det utfordrende for lærere å legge til rette for undervisning som er med på å bygge opp elevenes geometriforståelse knyttet til firkanter. En implikasjon av denne forskningen er at det er et behov for en felles forståelse for hvordan vi definerer firkanter i norske matematikklærebøker.

Når det gjelder videre forskning, hadde det vært interessant å undersøke bruken av definisjoner knyttet til andre områder enn firkanter. Ligger det en klar og korrekt matematisk tanke bak de andre definisjonene vi finner i lærebøkene? Det ville også vært interessant å undersøke hvordan lærere benytter seg av definisjonene i lærebøkene, og hva lærebøkene har å si for utviklingen av elevenes geometriforståelse.

På Jæren vil man fremdeles kunne gå til grønnsakhandleren og be om epler, men som med matematiske definisjoner vil man gjøre lurt i å presisere hva slags epler man ønsker seg.

Noter

1 På disse firkantene gjelder følgende: Vinkler som ser rette ut, er rette, sider som ser like lange ut, er like lange, og sider som ser parallelle ut, er parallelle.

2 Vår oversettelse.

3 Gitt at alle vinkler er rette og alle sider er like lange.

4 Læreverkene som ble analysert, er: Matemagisk 8–10, Matemagisk 1–7, Matematikk 8–10, Matematikk 1–7 (fra Cappelen Damm), Matematikk 1–7 (fra Barentsforlaget), Volum 1–7, Multi 1–7 og Maximum 8–10, som er revidert etter LK20, og Sirkel 8–10, Tetra 8–10, KodeX 8–10, Nye Mega 8–10, Radius 1–7, Abakus 1–7, Matemagisk 1–7, Matte overalt 1–7, Maximum 8–10, Multi 1–7, Faktor 8–10, Nummer 8–10, Nummer 8–10 (parallellbok), Tusen millioner 1–7, Grunntall 8–10 og Kasparia 1–7, som er revidert etter LK06.

Referanser

Alseth, B., Breiteig, T. & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering – matematikkfaget som kasus*. (02/2003). Telemarksforskning-Notodden.

Bolstad, O. H. (2020). *Teaching and learning for mathematical literacy* [Doktorgradsavhandling]. Universitetet i Agder.

de Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics, 14*(1), 11–18.

de Villiers, M. (2010, 30. juni–2. juli). *Some Reflections on the Van Hiele theory* [Paperpresentasjon]. Congress of teachers of mathematics, Zagreb.

Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1984). *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*. City University of New York.

Goldenberg, E. P., Clements, D. H., Dougherty, B. J. & Zbiek, R. M. (2014). *Developing essential understanding of geometry and measurement*. National council of teachers of mathematics.

Gulbrandsen, J. E., Løchsen, R., Måleng, K. & Olsen, V. S. (2020). *Matematikk 6*. Cappelen Damm.

Hjardar, E. & Pedersen, J. E. (2021). *Matematikk 9*. Cappelen Damm.

Hsieh, H.-F. & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research, 15*(9), 1277–1288.

Johansson, M. (2017). Textbooks as instruments – Three teachers' way to organize their mathematics lessons. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences* (s. 315–340). Cappelen Damm Akademisk.

Joyce, D. E. (2021, 26. oktober). *Euclid's elements*. https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/elements.html

Kongelf, T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3–4), 83–109.

Kontorovich, I. & Zazkis, R. (2017). Mathematical conventions: Revisiting arbitrary and necessary. *For the learning of mathematics, 37*(1), 29–34.

Kunnskapsdepartementet (2006). *Læreplan i matematikk*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet. Midlertidig utgave juni 2006.

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Mat

Mul

Poi

Ror

matikk fra A til Å]. Altai State Technical University I. I. Polzunova.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and achievement in secondary school geometry*. The University of Chicago.

Usiskin, Z. & Griffin, J. (2008). *The classification of quadrilaterals – A study of definition*. Information age

(fortsatt fra side 12)

klasserom i Norge. Jeg mener det er behov for mer forskning og kunnskapsutvikling på området, og derfor oppfordrer jeg alle lærere som er nysgjerrige på å utforske egen praksis, og som vil bidra til kunnskapsutvikling på området, til å invitere en forsker inn i sitt mangfoldige klasserom.

Note

1 M³Eal Multiculturalism, Migration, Mathematics Education and language. https://m3eal.dm.unipi.it

Referanser

Chval, K. B., Smith, E., Trigos-Carillo, L. & Pinnow, R. J. (2021). *Teaching math to multilingual students: positioning English learners for success*. National council of teachers of mathematics.

Deardorff, J. (2023, 23. januar). Off you go: a routine for culturally responsive math. Northwestern school of education and social policy. https://www.sesp.northwestern.edu/news-center/news/2023/01/off-you-go-a-routine-for-culturally-responsive-math.html

Fange, Per Øyvind (2023, 2. mars). *Halvparten av lærerne mener de gjør for lite for elever med spesielle behov*. NRK.no https://www.nrk.no/ostfold/halvparten-av-laererne-mener-de-gjor-for-lite-for-elever-med-spesielle-behov-1.16309776

Honneth, A. (2007). *Kamp om anerkjennelse*. Pax forlag.

Justnes, C. N. & Gätzschmann, K. (2023). Matematiske samtaler i et flerspråklig klasserom - hvordan inkludere flere? I A. B. Emstad (Red.), *Samskapt kunnskap i skole og lærerutdanning. Der praksis og teori møtes* (s. 200–218). Universitetsforlaget.

Mosvold, R. & Bjuland, R. (2019). The work of positioning students and content in mathematics teaching. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands. Hal.02430123

Planas, N. & Civil, M. (2013). Language-as-resource and language-as-political: tensions in the bilingual mathematics classroom. *Mathematics Education Research Journal, 25*(3), 367–381

Ulland, G. & Jensen, R. (2020). *Ord og begreper i klasserommet*. Fagbokforlaget.

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

NYTT FRA MATEMATIKKSENTERET

Matematikksenteret er en partner i lokalt utviklingsarbeid, vi forsker på matematikkundervisning og tilbyr forskningsbasert etter- og videreutdanning.

I dette nummeret skriver vi om:

- Tallforståelse i grunnskolen i tre ulike land – et Nordplus Horisontal-prosjekt
- UH-seminar om matematikk i barnehagen
- Fagdag for barnehager: Matematikk + språk = inkludering
- AR-teknologi gjør matematikk mer tilgjengelig for tegnspråklige elever

Vi har spisskompetanse på matematikkdidaktikk og jobber tett på lærere og elever. Vi er et bindeledd mellom praksis, forskning og utvikling. Vårt mål er at alle barn og unge skal erfare at matematikk er engasjerende, utfordrende og meningsfullt.

Besøk våre nettsider:

Matematikksenteret.no
Fagstoff og læringsressurser

MatteLIST.no
Oppgaver og aktiviteter for utforskning og problemløsning

Matematikk.org
Spill, oppgaver og fakta om matematikk

Alleteller.no
Vurderingsverktøy for talloppfatning og tallforståelse

Realfagsloyper.no
Kompetanseutvikling i realfagene

NTNU
MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Tallforståelse i grunnskolen i tre ulike land - et Nordplus Horisontal-prosjekt

Camilla N. Justnes og Bård Vinje

I Nordplus-prosjektet "Effective Mathematic Teaching Practices in Primary Education» utveksler land og organisasjoner kunnskap og erfaringer om matematikkundervisning. Målet er å prøve ut nye matematikkdidaktiske metoder og danne grunnlag for ny kunnskap og forslag til nye satsinger.

Bakgrunn

Våren 2022 tok Det tverrfaglige senteret for pedagogisk innovasjon ved Universitetet i Latvia, initiativ til et Nordplus Horisontal-prosjekt med tittelen «Effective Mathematic Teaching Practices in Primary Education». Prosjektet innebærer samarbeid mellom ulike organisasjoner fra tre land: Latvia, Sverige og Norge. I tillegg til Universitetet i Latvia er Nationellt centrum för matematikutbildning (Göteborgs universitet), Matematikksenteret (NTNU), to barneskoler i Riga, en barneskole i Falkenberg og to barneskoler i Trondheim partnere i prosjektet. Hver partner har sine styrker, med erfaring fra landet og institusjonen de tilhører. Universitetene har teoretisk grunnlag og erfaring med utdanning, skolene har praktisk erfaring og mulighet til å prøve ut ulike undervisningsideer.

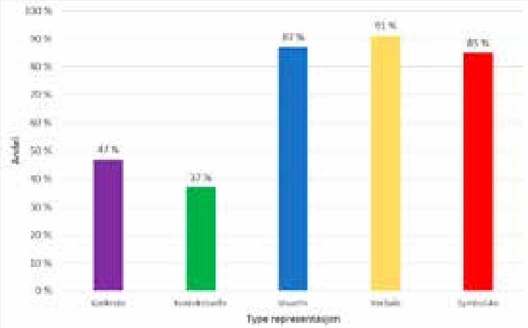
Målet med dette Nordplus-prosjektet er å danne nettverk på tvers av land og organisasjoner for å utveksle kunnskap og erfaringer om matematikkundervisning, å prøve ut nye matematikkdidaktiske metoder og danne grunnlag for ny kunnskap og forslag til nye satsinger. Samarbeidet har fokus på hvordan lærere kan støtte elevers utvikling av tallforståelse ved å benytte ulike representasjoner i matematikkundervisningen. Prosjektet gir mulighet til å dele felles erfaringer og få nye ideer, i tillegg til å prøve ut nye undervisningspraksiser i egne klasserom, noe som igjen vil gi mulighet for videre forskning ved universiteter.

> Nordplus-programmet har som mål å styrke og utvikle det nordiske og baltiske utdanningssamarbeidet. Det innebærer å støtte, bygge videre på og fremme innovasjon innen utdanning gjennom systematisk utveksling av erfaringer og god praksis. Nordplus Horisontal-programmet involverer partnere på tvers av sektorer, for eksempel universitet og barneskole. Programmet er åpent for alle institusjoner og organisasjoner som ønsker å samarbeide om å utvikle utdanning innenfor et livslangt læringsperspektiv.

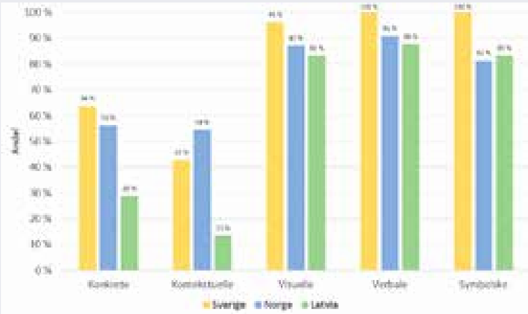
Aktiviteter i prosjektet

I løpet av ett og et halvt år har partnerne i prosjektet møttes både digitalt og fysisk. På disse møtene har vi hatt skolebesøk, observasjon av undervisning og seminar om profesjonsutvikling og matematikkundervisning. Mellom møtene har lærerne fra partnerskolene bidratt med data om bruk av representasjoner i matematikkundervisning og prøvd ut nye undervisningsideer.

Det første deltakerne gjorde var å observere og rapportere bruk av representasjoner i egen undervisning, både lærerens og elevers bruk. Lærerne valgte å observere og rapportere bruk av konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske representasjoner. De 11 lærerne rapporterte inn observasjoner fra 107 undervisningstimer tilknyttet området tall og tallforståelse. Verbale representasjoner var hyppigst brukt, etterfulgt av visuelle, symbolske, konkrete og til slutt kontekstuelle (se figur 1). I figur 2 ser vi hvordan bruken av de ulike representasjonstypene varierer mellom deltakerlandene. Vi kan spesielt legge merke til at lærerne i Latvia i mye mindre grad bruker konkrete og kontekstuelle representasjoner.



Figur 1 Bruk av ulike representasjoner i undervisningen. Andel.



Figur 2 Bruk av ulike representasjoner. Fordelt på deltakerland.

I tillegg til å rapportere om bruk av representasjoner, var vi også interessert i overgangene mellom ulike representasjoner. De tre vanligste overgangene vi fant, var overgangen fra visuelle til symbolske (49 % av timene) og fra verbale til symbolske (42 % av timene). Til sammenligning var overgang fra konkrete til symbolske representasjoner bare observert i 20 % av timene det ble rapportert fra. Lærerne valgte å utfordre seg selv på å utforske de mindre benyttede overgangene videre, blant annet fra konkrete til visuelle, fra kontekstuelle til symbolske og kontekstuelle til visuelle. De designet dermed egne undervisningsopplegg, der målet var å inkludere de mindre benyttede overgangene mellom representasjonene. Disse undervisningsoppleggene prøvde de så ut i eget klasserom.

Om representasjoner

Matematiske objekter som begreper, ideer og operasjoner er abstrakte og derfor er de bare tilgjengelige gjennom ulike representasjoner. Men representasjoner er ikke identiske med det matematiske objektet, de gir uttrykk for det matematiske objekt. Det er representasjoner av matematiske objekter elevene møter når de jobber med matematikk.

Det er vanligst å vise til fem ulike representasjoner for matematiske objekter: visuelle, konkreter, kontekst/hverdagssituasjoner, verbale og symbolske. Å kunne bruke matematiske representasjoner og oppdage sammenhenger mellom ulike representasjoner er en viktig del av å utvikle dyp matematisk forståelse. Derfor bør lærere legge til rette for ulike representasjoner og sammenhengen mellom dem i matematikkundervisningen, slik at elevene utvikler god forståelse for hva det matematiske objektet er.

Du kan lese mer om representasjoner i Svingen (2018): *Representasjoner i matematikk*. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/Elever%20som%20presterer%20lavt/P1_M4.Representasjoner%20i%20matematikk_fagtekst_v2.pdf

Matematikksenteret har også en modul for deg som ønsker mer kunnskap om betydningen av å bruke representasjoner for elever som har behov for ekstra støtte i matematikk https://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/matematikkvansker-og-tilpasset-opplæring/modul-1-representasjoner-i-matematikk

Gjennom prosjektperioden har partnerne opplevd at det er svært positivt å samarbeide på tvers av landegrensene, og lærerne har spesielt trukket frem skolebesøkene og observasjonene i andres klasserom som nyttige. Gjennom disse får de mulighet til å se egen praksis i et annet lys, og de får inspirasjon til utvikling av egen undervisningspraksis og elevenes læringsmiljø.

Velkommen til UH-seminar om matematikk i barnehagen

UH-seminaret om matematikk i barnehagen er en nettverksarena for forskning og undervisning i barnehagelærerutdanningen. I 2024 arrangeres seminaret 13. og 14. mars på NTNU Kalvskinnet i Trondheim.

Vi gleder oss over å få en keynote om yngre barns resonnering og argumentasjon av Lovisa Sumpter fra Stockholms universitetet.

Vi trenger bidrag

Nytt av året er at den første dagen dedikeres til forskning og dag nummer to til praktisk didaktikk arbeid. Om du har lyst til å bidra med forskning og/eller eksempler fra praksis, send en e-post til beate.nergard@matematikksenteret.no.

Seminaret (med servering) er gratis, reise og deltakelse dekkes av hver enkelt.
Påmeldingsfrist er 23. februar.

For mer informasjon og påmelding, se www.matematikksenteret.no

Matematikk + språk = inkludering

Nyhet for barnehager: Matematikksenteret og Skrivesenteret tilbyr fagdag om matematikk, språk og inkludering.

Med tilbudet har de to nasjonale sentrene gått sammen om å formidle praktiske eksempler og forskningsbasert kunnskap om hvordan arbeid med matematikk og språk kan skape inkluderende fellesskap i barnehage, SFO og skole.

Fagdagen består av foredrag, erfaringsdeling og verksted. Tema er:

- hvordan fremme et inkluderende fellesskap med et språklig og matematisk arbeid
- hvordan bruke matematikk og språk til å ivareta og videreutvikle barns drivkraft for å forstå verden
- hvordan kan ansatte bidra til at barna opplever et inkluderende samspill som er av betydning for deres tilhørighet, forståelse og utvikling.

Foredragsholdere

Gunilla Eide Isaksen er universitetslektor ved Skrivesenteret (NTNU). Hun har master i førskolepedagogikk og 18 års erfaring fra arbeid i barnehagen som spesialpedagog og pedagogisk leder. Gunilla har undervisningserfaring som faglærer i pedagogikk på barnehage- og lærerutdanningen.

Anne Hjønnevåg Nakken er universitetslektor ved Dronning Mauds Minne Høgskole (DMMH) og Matematikksenteret (NTNU). De siste to årene har hun også jobbet i Solemdal barnehage. Anne er utdannet sivilingeniør fra NTNU med tilleggsutdannelse som lektor i matematikk.

Beate Nergård er førsteamanuensis ved Matematikksenteret (NTNU), og hun jobber med Matematikksenterets barnehagesatsing. Beate er utdannet barnehagelærer, og har 13 års praksiserfaring som lærer på barnetrinnet. De siste 13 årene har vært ansatt ved Dronning Mauds Minne Høgskole (DMMH), hvor hun underviste i matematikk ved bachelorutdanningen. Våren 2022 ferdigstilte hun en doktorgrad med tittelen «Barnehagebarns matematiske språk og kommunikasjon. En kvalitativ kasusstudie av hva som kjennetegner barns matematiske språk og kommunikasjon i barnehagen».

Heidi Sandø er universitetslektor ved Skrivesenteret (NTNU). Sandø har master i barnehagekunnskap. Hun har 20 års erfaring fra praksisfeltet, og har jobbet i barnehage og skole. Heidi har jobbet med kompetanseutvikling i praksisfeltet gjennom Språkløyper, utarbeidet nettressurser og ledet utviklingsarbeid i barnehage og skole. Hun har sammen med Iris Hansson Myran skrevet bøkene «Språkarbeid og utforskende skriving i barnehagen» (2018) og «Barneklare skoler eller skoleklare barn? Om overgangen fra barnehagen til skolen» (2022).

AR-teknologi gjør matematikk mer tilgjengelig for tegnspråklige elever

Lene Grøterud Leer

Statped og samarbeidspartnerne fra Sverige og Tyrkia har i perioden 2020–2023 utviklet en tegnspråklig plattform for visualisering og utforsking av geometriske figurer ved hjelp av AR (augmented reality). Prosjektet ble finansiert av Erasmus+. Matematikksenteret har bidratt med å gi faglige råd på det matematiske innholdet i manus.

Stort behov for tegnspråklige ressurser

Norsk tegnspråk er et visuelt språk med egen grammatikk og struktur. Det er mellom 3000 og 3500 personer som er førstespråkbrukere av tegnspråk i Norge, og det er derfor et minoritetsspråk (NOU 2023: 20). Læringsressurser på tegnspråk bidrar til at elevene får tilgang til fagstoff på sitt førstespråk, på lik linje med majoriteten av elevene i norsk skole. Mange tegnspråklige elever er eneste elev som bruker tegnspråk på sin nærskole. Læringsressurser på tegnspråk er da ekstra viktig. I tillegg kan tospråklige læringsressurser (på norsk tegnspråk og norsk tale/tekst) bidra til et mer inkluderende læringsfelleskap i klasserom med hørende og døve elever.

Les mer om tegnspråk: https://www.statped.no/tegnsprak/hva-er-norsk-tegnsprak-nts/

Matematikk er et fag hvor det eksisterer svært få læringsressurser på tegnspråk, og derfor ble matematikk valgt som fagområde i Erasmus+-prosjektet om bruk av AR (augmented reality) for tegnspråklige elever. Vi kan oversette AR til «utvidet virkelighet». Teknologien gjør at vi kan kombinere digitale objekter og virkelighet, ofte ved hjelp av en mobiltelefon eller et nettbrett. Eksempler på AR-teknologi er apper som lar deg se farger eller møbler animert i din egen bolig og apper som lar deg bruke filter på bilder eller videoer. AR skiller seg fra VR (virtual reality) som erstatter virkeligheten med en konstruert virkelighet, ofte ved hjelp av spesielle briller (VR-briller).

Geometri på mellomtrinnet

Prosjektet fokuserte på geometri for elever på mellomtrinnet, og de valgte temaene var felles

Figur 1: Bilde av film med tegnspråkaktør.

for læreplanene til alle landene som deltok i prosjektet:

- vinkler
- todimensjonale figurer
- tredimensjonale figurer

Den ene delen av prosjektet handlet om å lage tegnspråklige filmer om disse temaene. Filmene bruker animasjoner for å visualisere geometri, samtidig som en tegnspråkaktør formidler innholdet. Det gjør at elevene kan få tegn og lære begreper i matematikk på tegnspråk. Siden tegnspråk er ulike fra land til land, inneholder appen tegnspråkaktører som snakker norsk, svensk og tyrkisk tegnspråk.

Den andre delen av prosjektet handlet om å lage en app hvor elevene kan utforske geometriske figurer. I appen kan elevene blant annet lage egne geometriske figurer, måle vinkler, klippe opp todimensjonale figurer og brette ut tredimensjonale figurer for å undersøke overflaten. I tillegg bidrar AR-funksjonen til at elevene ved hjelp av kameraet på mobilen eller nettbrettet, kan plassere to- og tredimensjonale figurer i rommet de befinner seg i. Det gjør at de kan gå rundt figuren for å undersøke den. I tillegg kan de bruke vinkelverktøyet og gradskiven til å måle vinkler på fysiske objekter i sine omgivelser.

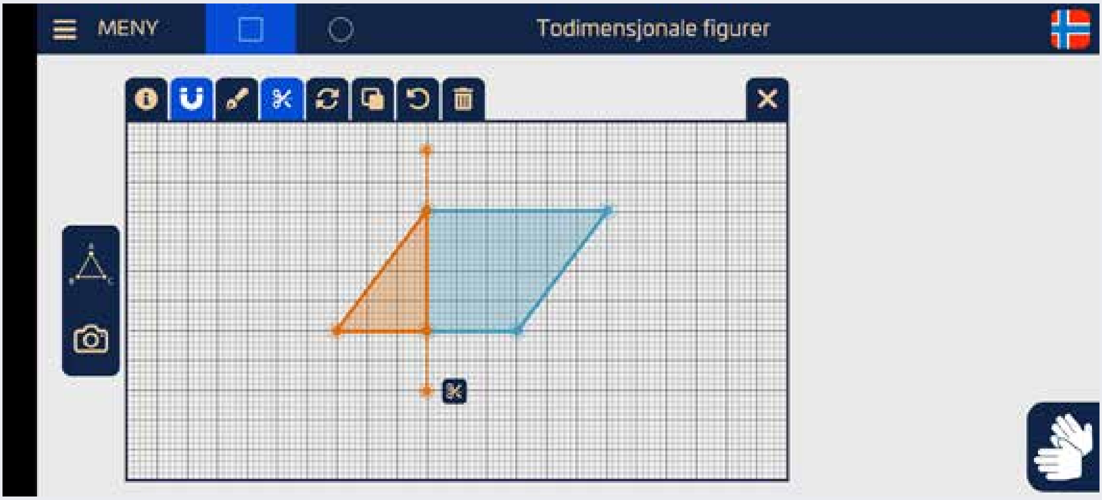
Du finner lenke til app og lærerveiledning på https://www.erher.no/grunnskole/geometri-ar/. I tillegg skal Statped holde en workshop om appen på Læremiddelseminar i læremidler for tegnspråklige i mai 2024.

Appen ble lansert i januar 2024 og er nå tilgjengelig for mobile enheter som bruker Android eller IOS. Den heter Geometry AR, og kan lastes ned fra https://www.erher.no/grunnskole/geometri-ar/. Filmene er integrert i appen og de kommuniserer på norsk tegnspråk, tale og tekst. Ressursene har blitt testet av tegnspråklige elever og lærere på ulike skoletrinn i Norge, og tilbakemeldingene har vært positive.

Matematikksenteret og Statped håper at appen kan være et godt støttemateriell for tegnspråklige elever, og at den kan bidra til dypere forståelse av geometriske begreper og til økt motivasjon og interesse for matematikkfaget.

Referanse

NOU 2023: 20 (2023). Tegnspråk for livet: Forslag til en helhetlig politikk for norsk tegnspråk. Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/contentassets/391e600a691147d9a38233afb54cb6a0/no/pdfs/nou202320230020000dddpdfs.pdf



Figur 2: Bilde av funksjonen som kan klippe opp en todimensjonal figur.

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
c/o Elin Unstad
Postboks 181
1371 Asker

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103
Organisasjonssekretær: Elin Unstad, org.sek@lamis.no

Styret for LAMIS

Leder	Inger-Lise Risøy, Buskerud	Barnetrinn
Ledergruppe	Renate Jensen, Vestland	Barnetrinn/ungdomstrinn
	Mona Røsseland, Vestland	Høgskole/universitet
Sentralstyret	Elisabeth Hast Rønnestad, Møre og Romsdal	Barnehage
	Hilde Svendsen, Viken	Barnetrinn
	Hege Lisbeth Johansen, Troms og Finnmark	Mellomtrinn
	Kari-Anne Bjørnø Rummelhoff, Viken	Ungdomstrinn
	Morten Munthe, Oslo	Videregående skole
Vararepresentanter	Henrik Kirkegaard, Møre og Romsdal	Barnetrinn
	Odd-Bjørn Lunde, Rogaland	Videregående skole

Fra formålsparagrafen

Det er en demokratisk rett å få en matematikkundervisning som setter en i stand til å delta aktivt som borger i et demokrati. Derfor vil Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) sette fokus på matematikk for alle.

Medlemskontingent

450 kr for enkeltmedlem, 300 kr for studenter/pensjonister, 975 kr for skoler/institusjoner

Ledergruppen har ordet

Kjære LAMIS-medlemmer!

Den 21. og 22. november 2023 deltok deler av sentralstyret og ca 450 andre på Novemberkonferansen som ble arrangert av Matematikksenteret. Vi kom i mål både med å trykke opp plakater til vår utforskende ressurs og kunne vise prototypen av det digitale innholdet når vi gjennomførte to verksteder, et for barnetrinnet og et for ungdomstrinnet/videregående skole. Den utforskende ressursen som vi presenterte på konferansen er snart på vei til medlemmene våre, og dere kan lese mer om denne på side 57.

Vi rakk også å bli ferdig med LAMIS sitt nye Spillhefte og trykkingen av dette. Flere meldte seg inn i LAMIS på konferansen, og de fikk både plakat og Spillhefte som innmeldingsgave. Vi gleder oss til å ta fatt på neste hefte, slik at dette kan bli klart i løpet av 2024. Vi vil også her gjøre bruk av tidligere Matematikkens dag-hefter. Planen er at det neste heftet skal handle om Uteskole, og gi tips til varierte arenaer hvor vi kan jobbe praktisk med matematikk.

Det jobbes videre med å få i gang flere lokallag og aktiviteter knyttet til både nye og eksisterende lokallag. Idet lederen blir skrevet, er vi i siste fase av planleggingen av årets lokallagssamling som foregår i Oslo 27. og 28. januar. Programmet legger opp til at vi jobber videre med den utforskende ressursen og at arbeidet knyttes til argumentasjon og resonnement. Dette skriver vi mer om i neste Tangenten.

I våre nyhetsbrev vil vi fortsette å sende ut ressurser og tilgang til undervisningsopplegg. Det er viktig at vi har oppdaterte e-postadresser slik at ressursene når dere. Ta kontakt med post@lamis.no hvis dere ikke har fått e-postene, så sørger vi for at kontaktopplysningene blir oppdatert.

Årets sommerkonferansekomite er godt i gang med planleggingen av sommerkonferansen som i år vil arrangeres i Ålesund. Temaet er: «Å tenne en gnist». På side 60 presenteres to av plenumsøktene og deler av programmet for konferansen. Følg med på www.lamis.no. Der vil det komme informasjon om påmelding. Vi i sentralstyret håper at vi møter dere i Ålesund 09.–11. august 2024.

Før den tid er UngeAbel en viktig del av vårt arbeid. Runde 1 er gjennomført. Nesten 4000 elever fra hele landet deltar dette skoleåret. Klassene er nå i gang med Runde 2 der de arbeider med problemløsingsoppgaver som krever kommunikasjon og samarbeid. Når denne runden er ferdig blir det kåret en vinner i hvert fylke som starter arbeidet med fordypningsoppgaven. Denne skal de presentere i semifinalen på Gardermoen i april. Vi ser frem til flotte dager sammen med elever på 9. trinn og deres lærere.

Vi i LAMIS ønsker enda mer kontakt med barnehagelærere, lærere og lærerutdannere. Skriv til oss med innspill til hva LAMIS skal tilby våre medlemmer. Hva kan vi bidra med som støtter det flotte arbeidet som gjøres hver dag for å gi barn mestring og motivasjon for matematikk?

Utforskende matematikk?

Hvordan i all verden får man det til?

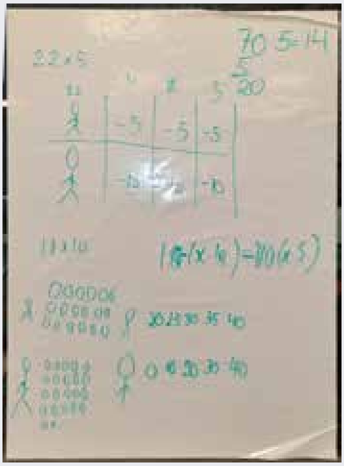
v/ Lone Næss, Bergen lokallag

Elever skal lære seg å resonnere, argumentere og utvikle kritisk tenkning i matematikk. Disse verdiene kan man blant annet lære gjennom utforsking og problemløsning ifølge LK20. Utforskende klasserom er abstrakt, og det er utfordrende å finne riktig vei å gå for å skape et slikt klasseromsklima. Dette var utgangspunktet da Bergen lokallag sitt styre diskuterte tema for neste lokallagssamling.

Gleden var stor da lokallaget fikk opplyst at dette var tema

for LAMIS sine verksteder på Novemberkonferansen. («Utforskende undervisning for alle.») Våre lokale styremedlemmer Renate Jensen og Mona Røsseland skulle være verkstedsholdere, og Bergen lokallag fikk spørsmål om å være prøvekaniner for deres presentasjon.

I november fikk derfor vel 20 lærere delta på LAMIS lokallagskveld. Deltakerne ble presentert for en ressurs for hvordan man på en systematisk måte kan skape et mer undersøkende og argumenterende klasserom. Ressursen er utviklet av LAMIS med begge foredragsholderne i spissen. Deltakerne fikk gjennomgang av ressursen med mulige fremgangsmåter og hensikten med hver «boble» i plakaten de har skapt. Med en kaffekopp og kjeks fikk deltakerne snakket sammen om tilpasninger vi kan gjøre til våre elever. Vi fikk resonnert, argumentert og deltakerne virket både motiverte og engasjerte. I plenum kom det flere forslag for hvordan vi kan tilpasse oppgaver til ulike trinn og hvordan bruke ressursen til alt fra innføring i multiplikasjon, dagens tall og oppgaver fra Mattelist eller andre problemløsningsoppgaver.

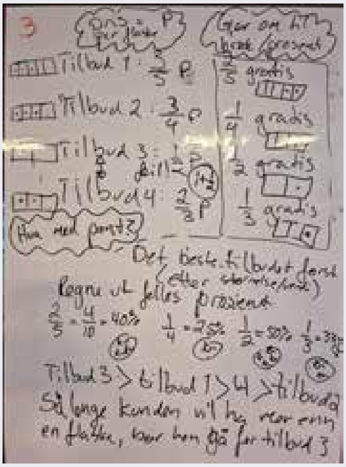


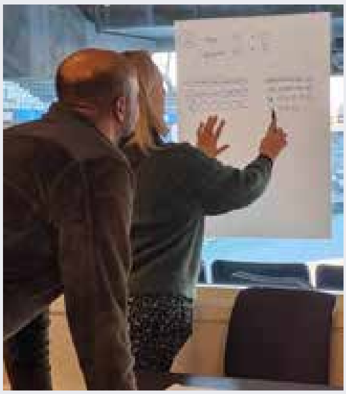
Vi diskuterte ressursen brukt til prosjekter, men også hensiktsmessig mengdetrening.

Ressursen med plakat og et nettsted for lærere blir delt med alle LAMIS sine medlemmer i februar. På nettstedet for lærere finnes forslag til oppgaver, forklaring av ressursen, forslag til arbeidsmåter i utforskende prosesser og fagartikler.

Glimt fra LAMIS på Novemberkonferansen

LAMIS hadde to verksteder på Novemberkonferansen 2023. Takk til Matematikksenteret for en flott konferanse og til alle deltakerne på våre verksteder for flotte innspill og refleksjoner i gruppeoppgavene. Vi er også glade for alle som besøkte vår stand med spørsmål og interesse for vårt arbeid. LAMIS fikk flere nye medlemmer som vi ønsker velkommen.

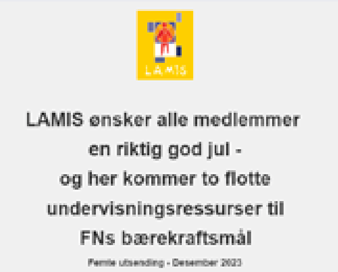




LAMIS nyhetsbrev i februar – noe å glede seg til

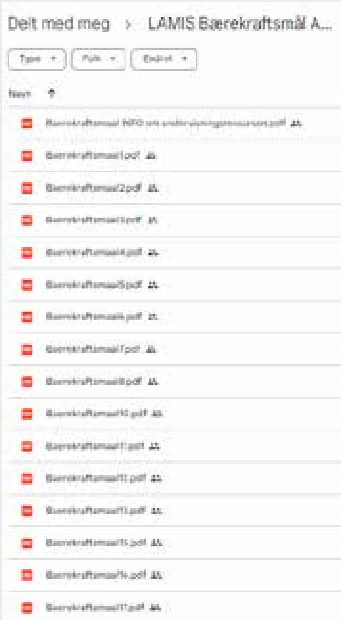
v/ledergruppen

Før jul mottok LAMIS-medlemmer det femte nyhetsbrevet med aktiviteter til flere bærekraftsmål, ideer til matematisk juleverksted og et godt tilbud fra Aschehoug Forlag. LAMIS har fått en avtale med forlaget om at alle medlemmer får 20% rabatt på Aschehougs fysiske bøker i matematikk på alle trinn (både grunnbøker og arbeidsbøker).



LAMIS planlegger å fortsette dette arbeidet med å sende ut nyhetsbrev med ressurser fire ganger i året. Det neste kommer i februar og dette er virkelig noe å se frem til. Da får våre medlemmer endelig tilgang til ressursen vi har arbeidet med det siste året. Ressursen har en plakat som kan henge i klasserommet. Denne synliggjør elev- og lærerrollen i arbeid med å utforske matematikk. I tillegg er det utviklet et digitalt nettsted der lærere finner forklaring og nyttige tips til hvert boble på plakaten. Her finner man også oppgavebanker, artikler og forslag til arbeidsmåter.

Det gjenstår fremdeles to av FN sine 17 bærekraftsmål, og disse sender vi ut i april. Når du som medlem mottar et nyhetsbrev får du lenke til ressurser. Du får via lenken i nyhetsbrevet også tilgang til alt som tidligere er sendt ut. Dette håper vi gir god oversikt over hva du som medlem av LAMIS har tilgang til.



Sommerkonferansen 2024 – Velkommen til Ålesund

v/Sommerkonferansekomiteen

LAMIS
Å TENNE EN GNIST
ÅLESUND 2024

«Willkommen, bienvenue, welcome» synger Liza Minelli i Cabaret. Dere er hjertelig velkommen til Ålesund 9.–11. august 2024 hvor LAMIS årlige sommerkonferanse skal foregå på Quality hotel Ålesund.

Vi gleder oss til å samle dyktige og engasjerte fagfolk til plenum, verksteder og debatter. Her får du muligheten til både å snakke, lytte og være aktivt lærende sammen med andre som brenner for god matematikkundervisning på alle

trinn. Vi er godt i gang med å sette sammen et spennende program for denne helgen. Vi ønsker et sterkt fokus på hva som kan tenne gnisten hos elevene når vi arbeider med matematikkfaget. Hva er det som skal til for å skape rom for en utforskende praksis gjennom hele skoleløpet? Gjennom fagfornyelsen har vi fått et sterkt fokus på det å lære i dybden, eksperimentere, jobbe med problemløsning og utforske. Dette er knyttet til en lekende og kreativ tilnærming, og vi ønsker aktivitet og kritisk tenkning som en del av læreprosesser i alle klasserom.

Mona Nicolaysen har jobbet nærmere 20 år i barnehage og har erfaring fra skole og arbeid med barn med særskilte rettigheter. Hun har mastergrad i barnehagepedagogikk og er nå stipendiat ved USN, Institutt for estetiske fag på doktorgradsprogrammet "Pedagogiske ressurser". Mona har gjort feltarbeidet sitt i Gaza og er særlig opptatt av barns estetiske ytringsrom i pedagogiske virksomheter. Hun har vært med på arbeidet med revideringen av rammeplanen i 2017 der hun også skrev støttemateriell om pedagogisk dokumentasjon på oppdrag fra Udir. I 2019 var hun barnehagefaglig ressurs i Udirs tverrgående gruppe i arbeidet med fagfornyelsen.

Å bli et lærende menneske er tittelen. Synet på barn og unge, og hva ansatte i barnehage og skole tenker om lek og læring får stor betydning for barn og unges opplevelsesverden. Både rammeplanen og læreplanen vektlegger medvirkning og utforskning som pedagogisk omdreiningspunkt. Det gjør noe med barn og unges

«Glücklich zu sehen, je suis enchanté, happy to see you»

Vi gleder oss til å se nye og gamle deltakere. LAMIS sommerkonferanse er for mange årets høydepunkt for ny inspirasjon til matematikkundervisningen, for sosial glede og meningsutveksling med andre matematikkinteresserte og for en langtidsvarende vitamininnsprøytning for den daglige undervisning.

Årets tema er «Å tenne en gnist». Det er selvfølgelig en henvisning til Ålesund sin historie og bybrannen i 1904, men ikke minst det vesentlige elementet i all matematikkundervisning: å fenge elevenes interesse for matematikken, vedlikeholde gnisten og få den til å blusse gjennom utdannelsesforløpet. Det gjelder ikke bare for elevene, men også for alle som har med elevene å gjøre. Vi må også bevare gnisten og gi den næring. Sommerkonferansen er en glimrende mulighet for dette. Her kommer vi med lave skuldre og sol i sinnet, treffer andre matematikkvenner til inspirerende opplevelser.

«Bleibe, reste, stay»

LAMIS håper å ha satt sammen et program alle vil sette pris på. Vi kan allerede her presentere to av plenumsholderne. Uansett om du jobber i en barnehage, på en skole eller i en utdannelsesinstitusjon vil det være noe for nettopp deg.

posisjon i de pedagogiske virksomhetene, og mange opplever det som krevende å få grep om den utforskende pedagogikken. Det kan oppleves som å måtte skape en helt ny pedagogidentitet, og krever kanskje en større åpenhet og nysgjerrighet i møtet med både det faglige og det relasjonelle i de pedagogiske virksomhetene. Hvem blir du som pedagog i møte med nye forventninger og krav og ikke minst, hvem har barn og unge mulighet til å være eller bli i møte med deg?

Anne-Gunn Svorkmo er førstelektor ved NSMO. Hun har gjennom sine 20 år ved Matematikksenteret deltatt i flere forsknings- og utviklingsprosjekter, som i kvalitet og omfang tilsvarer arbeidsmengde og nivå for en doktorgrad. Anne-Gunn har vært involvert i flere nasjonale pilotprosjekter innenfor matematikkdidaktikk og etablert den internasjonale Kengurukonkurransen her i Norge. Hun har jobbet mye tverrfaglig, blant annet i samarbeid med andre nasjonale senter og Artsdatabanken. Hun har bakgrunn som lærer, og har gjennom hele sitt yrkesliv vært tett knyttet til praksis i skolen. Hennes interessefelt er først og fremst det som skjer i klasserommet, og samspillet mellom elever og lærer. Hun har vært spesielt opptatt av hvordan læreren støtter opp om elevenes læringsprosesser og fremmer elevenes forståelse i matematikk gjennom problemløsing og utforskende undervisning. Å gå fra gnist til brennende engasjement handler blant annet om lærerens rolle som motivator.

Hun kommer til å snakke om motivasjon, hva som ut fra hennes erfaringer motiverer og engasjerer elevene. Hun er i høy grad også opptatt av læreren sine verktøy. Hvilke verktøy finnes, hvilke verktøy velger en lærer å bruke, når passer det å bruke dem og ikke minst det potensialet de ulike verktøyene har. I plenumsøkten kommer hun også inn på lærerens grep som en type verktøy, og da vil hun fokusere på hvilke grep en lærer kan ta for å skape engasjement i klasserommet.

Det blir også et plenum om kunstig intelligens. Plenumsholderen er ikke helt på plass – vi

har flere forespørsler ute. Kunstig intelligens er i tiden, og det ligger et stort potensial innenfor dette. Hvordan skal vi forholde oss til det? Kan vi bruke det i undervisningen og hvordan? Disse og mange flere spørsmål er noe vi alle er opptatt av og kommer til å høre mer om.

Plenumsøktene alene burde sørge for at vi fyller hotellet til sommerkurset. Vi gleder oss

«I am your host – in here life is beautiful»

Følg med på www.lamis.no hvor vi vil oppdatere siden om sommerkonferansen.

Har du innspill eller ønsker du å bidra til sommerkurset? Skriv til henrik.kirkegaard@lamis.no.

Velkommen til LAMIS sommerkonferanse 2024!

Å tenne en gnist.

Dato: 9.–11. august 2024

Påmelding åpner i slutten av mars, følg med på www.lamis.no.

Løsning på UngeAbel-oppgaven i Tangenten 04/2023

v/Marianne Maugesten, leder av jury

Palindromtall (fra semifinalen 2022)

Den høyeste mulige sum av to tresifrede tall er 1998. Vi ønsker derfor at summen av tallene skal være firesifret og se slik ut: 1??1.

For at siste siffer i summen skal bli én, må første siffer pluss siste siffer være 11.
Slik at

$$\begin{array}{rcccc} & & a & b & c \\ + & & c & b & a \\ \hline = & 1 & ? & ? & 1 \end{array}$$

Her må nå enten ? på hundrerplassen være 1 (hvis b + b + 1 er mindre enn 10) eller 2 (hvis b + b + 1 er større enn 10). Dersom ? på hundrerplassen er 2 så må b + b + 1 også være 2. Det er ikke mulig siden b er et helt tall.

Altså må ? på hundrerplassen være 1, og b må være 0. Vi har nå et tall a0c hvor a + c = 11. Vi velger a så stor som mulig: 9. Da får vi 902.

UngeAbel-oppgave
v/Marianne Maugesten, leder av jury

Åttesifrede tall (semifinalen 2022)

I denne oppgaven er vi på jakt etter åttesifrede tall, der sifrene 2–9 brukes én gang hver, og slik at alle de følgende tre betingelser er oppfylt:

i) Produktet av sifrene 3 og 4 og hvert av sifrene som står mellom 3 og 4 i tallet, skal være 216.
ii) Produktet av sifrene 5 og 9 og hvert av sifrene som står mellom 5 og 9 i tallet, skal være 270.
iii) Produktet av sifrene 6 og 4 og hvert av sifrene som står mellom 6 og 4 i tallet, skal være 1344.

Eksempel: Tallet 23456789 passer *ikke*, siden $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 15\,120$, som ikke er lik 270 (betingelse ii).

Hvilke åttesifrede tall oppfyller alle betingelsene?

La elevene arbeide i grupper med oppgaven. Vertikale tavler kan være en god arbeidsmåte der elevene kan få ideer fra hverandre. Les mer om Tenkende klasserom på Matematikksenteret sine sider:
https://www.matematikksenteret.no/bygge-tenkende-klasserom

Caspar Forlag AS

Nyheter!

Alltid, aldri eller noen ganger?

Praksisnær og forsknings-basert tilnærming til hvordan matematisk argumentasjon kan integreres i undervisningen på barne- og ungdomstrinn.

ISBN: 9788293598145 | Kr. 199,-

Matematisk tenking

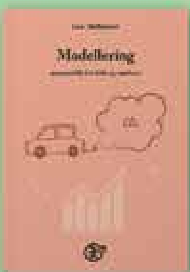
Utforsker situasjoner som stimulerer matematisk tenking og kvalitetsrike samtaler. Viser gjennom konkrete eksempler hvordan elevsamtaler beriker forståelsen, og vektlegger bevissthet rundt elev- og lærerrollene.

ISBN: 9788293598152 | Kr. 199,-

Tegning som strategi

Boken viser hvordan tegning, spesielt modelltegning, bevisst kan støtte elevers matematikk-læring ved å utforske egen tenkning, løse tekst- og problemløsnings-oppgaver og gir praktiske eksempler.

ISBN: 9788293598121 | Kr. 199,-



Modellering

Utforsker betydningen av matematiske modeller i skolen, gir konkrete eksempler og tilbyr lærere ressurser og oppgaver for å lære elever på barne- og ungdomstrinnet om modellering.

ISBN: 9788293598138 | Kr. 199,-

Bestill her

FAGBOKFORLAGET

B

DISTRIBUERT AV POSTEN NORGE
posten

NORGE P.P. PORTO BETALT

Returadresse: Tangenten / Caspar Forlag AS, Kanalveien 51, 5068 Bergen