

Modellering som matematisk verktøykasse

For nesten 20 år siden ble læreplanverket LK06 innført. Dermed ble det større vektlegging av modelleringskompetanse i matematikkfaget. Tangenten utga et eget temanummer om modellering (Tangenten 4/2007) for å støtte implementeringen av den nye læreplanen. Det temanummeret er fremdeles relevant nå som LK20 har forsterket fokuset på modellering og inkludert kjerneelementet «modellering og anvendelser» i matematikkundervisningen. Dermed blir modellering blant det viktigste faglige innholdet elevene skal arbeide med i matematikk i grunnskoler og videregående skoler. Tangenten støtter opp under dette med et nytt temanummer.

Bakgrunnen er at matematikk i økende grad blir en verktøykasse for å beskrive og løse problemer i utenformatematiske områder. De fleste mennesker møter matematikk i hverdagen, hvor prisene på dagligvarer øker med prosenter, og hvor store kriser blir beskrevet med absolutte eller relative tall av skadete personer og i millioner eller milliarder av skadestandarder.

Matematikk spiller en stor rolle i samfunnet. Av alle fagfolk som bruker matematikk i yrkene sine, sier 95 % at de ikke identifiserer seg som matematikere, men som fiskeoppdrettere, som trafikkstyrere, som byggingeniører, som ernæringsfysiologer og så videre. Disse mange fagfolkene arbeider ikke med matematikk som

et isolert fag, men de bruker matematikk som verktøy innen utenformatematiske områder. Den fortløpende matematiseringen i samfunnet fører til at mange elever kommer til å møte, å bruke og å lage beskrivelser av virkeligheten i matematisk språk. Det er nettopp hva matematisk modellering handler seg om.

Artiklene i Tangentens nye temanummer beskriver og drøfter aktiviteter der elever fra barnehage til videregående skole utvikler modelleringskompetanse. Når jeg sammenligner temanumrene fra 2007 og 2024 ser jeg en betydelig forskjell. I 2007-nummeret var det ingen forfattere som skrev om modellerings-syklusen, mens i 2024-nummeret dukker den opp i nesten alle artiklene. I dette temanummeret blir modelleringssyklusen brukt for å vise at modellering skjer i sammenheng med andre aktiviteter og dermed gir anledning til å løse problemer fra virkeligheten ved hjelp av matematikk. Å lage en matematisk beskrivelse av virkeligheten er dermed ikke et formål i seg selv, men et nyttig verktøy i besvarelsen av utenformatematiske spørsmål. Dermed kan modellering gi elevene innsikt i relevansen av faget i hverdagslivet og i yrkeslivet og vise hvorfor de må lære matematikk.

Pauline

Berget, Vos

Kva er matematisk modellering?

Kva er matematisk modellering? Kvifor matematisk modellering? Korleis ser ei modelleringsoppgåve ut? Er ein modell det same som ein representasjon? Modellering har vore med i norske læreplanar i fleire tiår. Ikkje alle lærarar har hatt om matematisk modellering i eiga utdanning, noko som kan føre til usikkerheit knytt til korleis ein bør undervise om det (Berget, 2023). Gjennom denne artikkelen vil vi gi nokre svar på desse spørsmåla. Målet er å få fram mangfaldet i korleis ein kan forstå omgrepet, og at mange ulike elevaktivitetar kan inngå som arbeid med matematisk modellering.

Kva er ein matematisk modell?

Ifølgje læreplanen LK20 er ein modell i matematikk «ei beskriving av verkelegheita i matematisk språk» (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 2). Eit eksempel på dette er korleis utviklinga av talet på smitta personar under koronapandamien vart uttrykt ved hjelp av differensiallikningar. Desse likningane er då ein modell. I eksamensoppgåver

er ein matematisk modell ofte ein funksjon (sjå eksempel på Figur 1).

Slik ein modell er presentert i LK20, er det ikkje gitt at denne «beskrivinga av verkelegheita i matematisk språk» må vere ein funksjon. For eksempel kan ein trekant vere ein geometrisk modell for å beskrive situasjonen der ein har sett ein stige oppetter husveggen. Eit kart av skuleområdet kan ein forstå som ein todimensjonal modell av eit tredimensjonalt objekt frå verkelegheita. Ifølgje LK20 kan også sektordiagram, tabellar og linjegrafar baserte på data frå verkelegheita vere matematiske modeller.

Kan ein seie at er ein matematisk modell for kor mange elevar det er om ein slår saman A- og B-klassa? Eller at talet «7» er ein modell for kor mange tenner Silje har mist? Og er sju teljestrekar ein annan matematisk modell for det same? Svaret er «ja», sidan desse symbola eller symbolrekkene er ei matematisk beskriving av noko frå verkelegheita. Kjerneelementet som inkluderer matematisk modellering, skal vere ein del av undervisinga frå 1. til 13. trinn. Det finst ikkje svar på kor kompleks ein matematisk modell må vere for å kunne kallast ein matematisk modell.

Kva er matematisk modellering, og korleis kan ei modelleringsoppgåve sjå ut?

Somme ser på matematisk modellering som å uttrykke ein samanheng ved hjelp av eit funk-

Ingeborg Lid Berget

Høgskulen i Volda
bergeti@hivolda.no

Pauline Vos

Høgskulen på Vestlandet
pauline.vos@hvl.no

sjonsuttrykk (Berget, 2022). Eksempel på dette kan ein finne i nokre tidlegare gitte eksamensoppgåver. Oppgåva kan vere å lage ein funksjon ut ifrå ein gitt tabell ved hjelp av regresjonsanalyse i GeoGebra, eller å stille opp ein eksponentialfunksjon basert på opplysningar som er gitt, slik som i oppgåva på Figur 1. I tillegg kan ein få spørsmål om å lese av verdien til grafen for ein gitt x -verdi, eller få spørsmål om å vurdere for kva x -verdiar modellen er gyldig. I slike oppgåver blir ikkje modellen brukt for å løyse noko verkelegheitsnært problem, men elevane må svare på gitte lukka matematiske spørsmål som har eitt korrekt svar.



I ein bydel er det i dag 30 000 innbyggjarar. Anta at innbyggjartalet vil auke med ein fast prosent kvart år, og at det i løpet av 10 år vil vere dobla. Lag ein modell f som illustrerer situasjonen. Teikn grafen til f , og marker punktet $(5, f(5))$. Forklar kva koordinatane til dette punktet fortel om situasjonen.

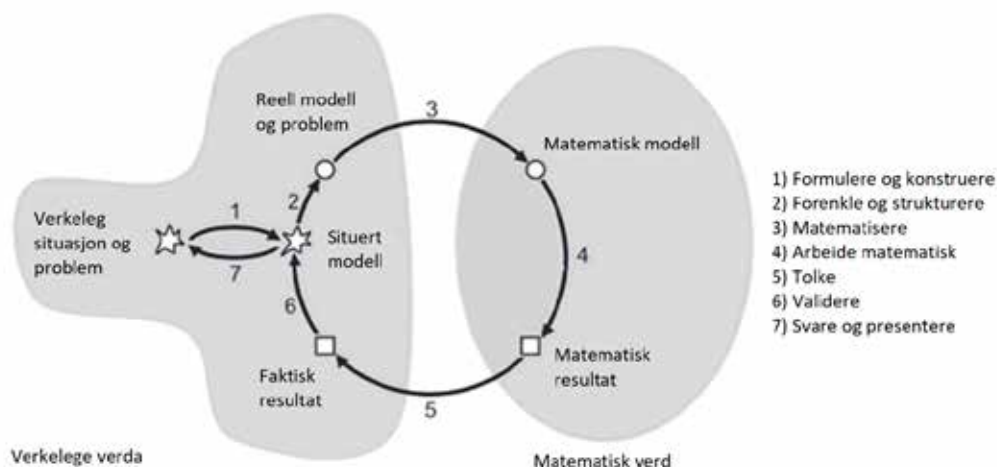
Figur 1: Oppgåve 3 frå eksamen i matematikk 2P del 2 våren 2022.

Luca har 14 trekkhunder.
Alle hundene trenger nye sokker til alle labbene.
Det er to sokker i hver pakke.
Hvor mange pakker må Luca kjøpe?

Svar:



Figur 2: Oppgåve frå «Nasjonal prøve i regning 5. trinn 2020. Veiledning til lærere – oppfølging og videre arbeid med prøven».



Figur 3: Modell av modelleringsprosessen. «The Blum-Leiss modelling cycle», henta frå Niss og Blum (2020, s. 17). Omsett av oss.

i tillegg gjere vurderingar baserte på det dei veit om potesokkar. Ved å gjere eit søk på internett kan ein finne at ekte potesokkar i den verkelege verda ofte blir selde i pakkar på fire, og at dei finst i ulike størrelsar og til sommar- eller vinterbruk. For å kunne hjelpe Luca å bestille potesokkar treng elevane å setje seg inn i konteksten. Dei må vite om trekkhundane til Luca treng store eller små sokkar, og om det er spesifikke krav til potesokkar som skal brukast til hundekøyring.

Om ein forstår matematisk modellering som å måtte setje seg inn i konteksten for å løyse eit problem ved hjelp av matematikk, er det nærare knytt til matematisk problemløysing. Elevane må sjølve avgjere kva framgangsmåte dei vil nytte, og innanfor kva matematisk område dei vil arbeide for å løyse problemet. Dette står i kontrast til oppgåver der ein får oppgitt at ein må bruke regresjonsanalyse i GeoGebra eller svare på lukka spørsmål med berre eitt korrekt svar, slik som i oppgåvene på Figur 1 og Figur 2. Enkelte meiner at ei modelleringsoppgåve ikkje har eitt korrekt svar, men at det som kjenne-teiknar ei modelleringsoppgåve, er at elevane sjølve må finne informasjonen dei legg til grunn, og gjere forenklingar for å kome fram til ei løysing på problemet (Borromeo Ferri, 2018). Der vil då vere fleire moglege svar, og ein viktig del

av modelleringsprosessen er å avgjere om løysinga er rimeleg, ved å vurdere forenklingar som er gjorde, og føresetnader som er lagde til grunn for den matematiske modellen som vart utforma og brukt. Heile prosessen blir gjerne uttrykt som ein modelleringssyklus, for eksempel som vist på Figur 3.

I denne syklusen er verbet «matematisere» brukt om overgangen frå å uttrykke det forenkla problemet med eit kvardagsleg språk til å uttrykke det med eit matematisk språk. Det er altså dette som blir gjort i oppgåva på Figur 1 når ein går frå slik modellen er uttrykt med ord i oppgåva, til ein oppstilt eksponentialfunksjon. Dette blir sett på som ein del av modelleringsprosessen. Liknande eksamensoppgåver som vist på Figur 1 kan ha ført til at matematisk modellering berre har blitt oppfatta som «matematisering», og ein har ikkje jobba med resten av prosessen i undervisinga, som funne i Berget (2022, 2023). Slike oppgåver kan vere nyttige for å få erfaring med matematisering, men for å inkludere heile modelleringsprosessen når elevane jobbar med matematisk modellering, må også strukturering av problemet og forenklingar som ikkje allereie er gjorde, få plass. Då er der også større krav til å validere løysinga ein kjem fram til, og til å gjere greie for svaret ein får.

Modelleringsperspektiv		Forslag til oppgåve	Om oppgåva										
Modellering frå tekstoppgåve	Elevar blir utfordra til å velje rett informasjon og rekneart for å finne det korrekte svaret. Den høgre sida av modelleringssyklusen, stega knytte til den matematiske verda er vektlagt.	351 jenter fekk namnet Nora i Noreg i 2022, og 414 gutar fekk namnet Jakob. Desse namna var på topp. 1. januar 2022 var folketalet i Noreg 5 425 270 personar. 5543 personar flytta i 2022 til Møre og Romsdal frå andre fylke i Noreg, og 5764 flytta frå Møre og Romsdal til andre fylke. Ved utgangen av 2022 var folketalet i Noreg 5 488 984. Kor mange prosent auka folketalet i Noreg i løpet av 2022?	Tekstoppgåve som skjuler ei matematisk oppgåve. Teksta inneheld overflødig informasjon slik at elevane må identifisere kva som er relevant.										
Matematikkretta modellering	Elevar blir utfordra til å reflektere over matematiske strukturar. Delar av modelleringssyklusen blir utført, men ikkje det første og dei siste tre stega.	Her er ei oversikt over folketalet i Noreg nokre utvalde år, henta frå ssb.no. <table><tr><td>1980</td><td>1990</td><td>2000</td><td>2010</td><td>2020</td></tr><tr><td>4 078 900</td><td>4 233 116</td><td>4 478 497</td><td>4 858 199</td><td>5 367 580</td></tr></table> a) Finn ein lineær funksjon som passar til befolkningsveksten mellom 1980 og 2020. b) Kor mange innbyggjarar er det ifølgje modellen i Noreg i 2030 og i 2040? c) Argumenter for bruk av andre enn lineære funksjonar for å modellere befolkningsveksten.	1980	1990	2000	2010	2020	4 078 900	4 233 116	4 478 497	4 858 199	5 367 580	Elevane må bruke matematikk og teoretisk reflektere over bruken av han, for eksempel knytt til gyldigheits-område.
1980	1990	2000	2010	2020									
4 078 900	4 233 116	4 478 497	4 858 199	5 367 580									
Modellering for motivasjon	Formålet er at elevane utviklar modelleringskompetanse og får positive erfaringar med matematikk og modellering. Kan inkludere alle stega i modelleringssyklusen. Stega å matematisere og å arbeide matematisk er vektlagt.	Her er ei oversikt over folketalet i Noreg nokre utvalde år, henta frå ssb.no. <table><tr><td>1980</td><td>1990</td><td>2000</td><td>2010</td><td>2020</td></tr><tr><td>4 078 900</td><td>4 233 116</td><td>4 478 497</td><td>4 858 199</td><td>5 367 580</td></tr></table> Korleis vil folketalet i Noreg utvikle seg dei komande ti åra?	1980	1990	2000	2010	2020	4 078 900	4 233 116	4 478 497	4 858 199	5 367 580	Opa oppgåve som ikkje er formulert matematisk. Elevane kan velje metode sjølve. Dei må lage og validere ein modell.
1980	1990	2000	2010	2020									
4 078 900	4 233 116	4 478 497	4 858 199	5 367 580									
Omgrepsretta modellering	Formålet er å starte frå konkrete og kjente område for å reflektere over matematiske samanhengar. Dermed utviklar elevane forståing av matematiske omgrep på ein induktiv måte.	Det er fire faktorar som påverkar folketalet: fødselstal, dødstal, innvandring og utvandring. Finn korleis desse faktorane har påverka folketalet i Noreg dei siste åra, og lag modellar for å seie noko om utviklinga for dei neste 10 åra.	Opa oppgåve som krev lang tid. Arbeid med oppgåva bygger funksjonsomgrepet, der folketalet er ein avhengig variabel.										

Samfunnskritisk modellering	Elevar erfarer at det kan vere relevant å bruke matematikk i argumentasjon knytt til samfunnsaktuelle spørsmål. Dei må også stille seg kritiske til bruk av matematikk i samfunnet. Ofte må elevane «gå gjennom» heile modelleringssyklusen, og særleg er dei tre siste stega viktige.	Prosjekt om dilemma i fruktbarheitspolitikk 1. Fleire politikarar har uttalt seg om temaet: a. https://www.nrk.no/ytring/erna-solberg-onsker-seg-flere-barn.-det-er-det-god-grunn-til-1.14352172 b. https://www.nrk.no/vestfoldogtelemark/folkevalt-meiner-det-a-ikkje-fa-barn-bidreg-til-ein-livsfiendteg-og-egoistisk-kultur-1.16591450 Bruk tekstene og dine egne erfaringar til å formulere minst seks ulike påstandar om fruktbarheit. Du treng ikkje vere einig i dei. 2. Det finst ein matematisk samanheng mellom fruktbarheita og folketalet. a. Kva blir folketalet i Noreg i 2030 og i 2040 viss fruktbarheitstalet held seg på 1,41 i framtida, slik som det var i 2022 (https://www.ssb.no/befolkning/fodte-og-dode/statistikk/fodte/artikler/rekordlav-fruktbarhet-i-2022)? b. Kva bør fruktbarheitstalet i Noreg vere om vi skal ha den same prosentwise folketalsveksten som vi har hatt, dersom innvandringa er stabil? 3. Diskuter korleis matematiske analysar kan hjelpe eller forvirre samfunnsdebatten om fruktbarheit.	Målet er å bruke matematikk for å kunne diskutere eit dilemma i samfunnet.
-----------------------------	---	--	---

Tabell 1: Namna på dei ulike perspektiva er opphavelg *contextual modelling*, *epistemological modelling*, *educational modelling*, *realistic modelling* og *socio critical modelling*.

Kva er målet med matematisk modellering, og kva har det å seie for oppgåvene?

Det finst fleire grunnar til at matematisk modellering er med i læreplanen. Modellering kan vere ein arbeidsmåte som gjer at elevane blir motiverte for matematikkfaget dersom dei jobbar med eit tema som interesserer dei. Ved å jobbe med matematisk modellering kan dei også oppdage at det er nyttig å kunne matematikk, for dei treng matematisk kunnskap for å løyse kvardagsproblem. Om elevar får setje seg inn i matematiske modellar som er brukte i samfunnet og i enkelte yrke (for eksempel av ingeniørar eller frisørar), får dei erfare at matematikk er relevant. Ein kan også arbeide med matematisk modellering for å forstå abstrakt matematikk. Ved å bruke matematikk i ein konkret situasjon kan ein oppdage matematiske samanhengar. Og når ein jobbar med matematisk modellering,

blir ikkje matematikk eit isolert skulefag, men ein kan sjå nytta av det i andre fag og i livet elles. Såleis kan ein utvikle modelleringskompetanse som er nyttig for å meistre livet.

Sidan de er fleire forskjellige grunnar for å jobbe med modellering, kan ein legge vekt på ulike aktivitetar og delar av modelleringsprosessen i undervisinga innanfor ulike mål. Vi har, inspirert av Kaiser og kollegaer (2007) og Blum (2015), utforma ein tabell med oversikt over ulike modelleringsperspektiv og oppgåvetypar. Vi har tatt utgangspunkt i situasjonen presentert på Figur 1 og laga ulike oppgåver tilpassa ungdomstrinnet eller vidaregåande skule knytte til ulike modelleringsperspektiv.

Viss vi skal knyte dei to oppgåvene på Figur 1 og Figur 2 til desse perspektiva, vil vi seie at oppgåva på Figur 1 passar eit *omgrepsretta* perspektiv, og at oppgåva på Figur 2 kan ha vore

designa som *modellering frå tekstoppgåve* eller knytt til perspektivet *modellering for motivasjon*.

Representasjonar i matematikk og matematiske modellar

Kan vi forstå ein funksjonsmodell som ein symbolsk representasjon? Er matematiske modellar også representasjonar? Omgrepa modell og representasjon har mange fellestrekk. For å beskrive forskjellane vil vi ta utgangspunkt i bakgrunnen for kvart av omgrepa, som er brukte med eit ulikt føremål og i ulike samanhengar.

Omgrepet *representasjon* er skildra i læreplanen LK20 som «måtar å uttrykkje matematiske omgrep, samanhengar og problem på» (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 3). Dette samsvarar med slik representasjonar er definerte i matematikdidaktisk litteratur (Duval, 2006; Janvier, 1987): «Representasjonar kan vere konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske» (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 3). For eksempel kan ein framstille ein brøk symbolsk, $\frac{3}{4}$, verbalt som «tre kvarter av noko» og visuelt som eit punkt på tallinja. Kontekstuellet kan brøk bli framstilt i rekneforteljingar om fire barn som deler tre sjokoladeplater. Kvar representasjon gir ei ulik framstilling av $\frac{3}{4}$. Omgrepet *representasjon* betyr igjen-framstilling. I dette tilfellet vil det seie at eit matematisk objekt som først er uttrykt på éin måte, deretter blir presentert igjen på ein annan måte. Desse ulike framstillingane kan erstatte kvarandre, og andre måtar å framstille på kan gi ny forståing av sjølve objektet. Derfor er omgrepet *representasjon* brukt av forskarar som omtalar forståing av matematiske omgrep (slik som brøk, likningar, funksjonar, derivasjon osv.). Elevar får djupare forståing når dei kan framstille omgrepa på ulike måtar, både fleksibelt og hensiktsmessig (Kilpatrick et al., 2002; Valenta, 2015).

Omgrepet *modell* blir ofte brukt i andre enn matematikdidaktiske samanhengar, fordi det finst andre modellar enn dei matematiske. Ein

modell innan arkitektur kan vere ein fysisk modell av eit byggeprosjekt, og Bohrs atommodell er framstilling av korleis eit atom er bygd opp. Ein modell er ofte ei forenkling av noko, og har den fordel at han ikkje inkluderer alt kaos og all støy. Dei første matematiske modellane om utvikling av tal på smitta personar i koronapandemien var forenklingar av den ekte situasjonen, og hadde ikkje med variablar som dødsfall og vaksinerings. Potesokkmodellen knytt til trekkhundar (sjå Figur 2) tek ikkje omsyn til om hundeeigarar vil ha reservesokkar fordi dei kan miste sokkar på tur, eller at ein kvalp kan tygge sund ein sokk. Ein annan bruk av omgrepet modell er om eit skjema (for eksempel eit flytskjema for å ta avgjersler), eller eit nestenperfekt tilfelle, for eksempel modellar innan kle-smote eller ideelle oppgåver som elevane bør øve på. I alle desse tilfella skil modellar seg frå den «normale» verda ved å vere forenklingar og idealiseringar av verkelegheita, som er meir rotete og kompleks. Det er sagt at alle modellar er feil, men at nokre er nyttige (Box, 1976). Modellar har altså avgrensingar, men kan likevel brukast. Ved hjelp av modellar kan ein løyse problem som elles er vanskelege å løyse.

Er matematiske modellar det same som representasjonar? For å svare på dette kan vi sjå på korleis den matematiske modellen er framstilt. Er han ein konkret, kontekstuell, visuell, verbal eller symbolsk representasjon? Ofte skal ein matematisk modell vere symbolsk (uttrykt med tal, operasjon, funksjonsuttrykk, likningar osv.) eller visuell (diagram, grafar osv.). Dette er altså den same modellen, men han er uttrykt ved hjelp av ulike representasjonsformer. I problemløysingsprosessen kan ein modell også ha ulike representasjonar. For eksempel kan ein for å hjelpe Luca (sjå Figur 2) først teikne ei skisse av alle dei 14 hundane på papir der alle har fire strekar som representerer potane. Skissa er ei forenkling og dermed ein reell modell som kan bli brukt til å setje opp eit multiplikasjonsstykke. Ein kan neppe oppfatte den reelle modellen som ein matematisk modell, men han er viktig i vidare

matematisering. Samtidig er skissa ein visuell representasjon, og den etterfølgjande multiplikasjonen er ein symbolsk representasjon. Den opphawelege Luca-oppgåva var skriven i setningar og er dermed både ein verbal og kontekstuell representasjon. Viss oppgåva hadde vore gitt då klassa var på besøk heime hos Luca og fekk møte alle hundane og sett dei såre potane, hadde det vore ein konkret representasjon. Men dette er altså representasjonar av ein situasjon, og ikkje av eit matematisk omgrep slik representasjonar er skildra i læreplanen. I modelleringssyklusen av Niss og Blum (2020) foreslår dei at den kaotiske opphawelege situasjonen først blir omorganisert til ein reell modell, som ei hensiktsmessig forenkling i løysinga av problemet.

Om vi skal svare på spørsmålet om sammenhengen mellom modellar og representasjonar, kan vi basert på desse avsnitta konkludere med at representasjonar ikkje er det same som matematiske modellar, men at der finst overlap.

Matematisk modellering kan inkludere mange ulike aktivitetar, og det handlar om å arbeide med matematikk på ein slik måte at elevane erfarer at matematikk er relevant og nyttig å kunne. Viss elevane jobbar med matematikk som eit isolert fag, er det ikkje sjølvsagt at dei vil gjere koplingar til situasjonar der dei kan bruke matematikk. Dei må også lære korleis matematikk kan bli brukt i kvardagsliv, yrkesliv og samfunn, og jobbe med å avdekke matematiske strukturar i kontekstar der det ikkje er brukt eit matematisk språk. Ved å inkludere matematisk modellering i undervisinga strekker ein seg etter å «førebu elevane på eit samfunn og arbeidsliv i utvikling» og «ruste elevane til å gjere eigne val og ta stilling til viktige spørsmål i eige liv og i samfunnet», slik det er formulert i læreplanen (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 2).

Referanser

- Berget, I. K. L. (2022). Mathematical modelling in textbook tasks and national examination in Norwegian upper secondary school. *Nordic studies in mathematics education*, 27(1), 51–70.
- Berget, I. K. L. (2023). Mathematical modelling in the discourses of the KOM and PISA frameworks and teacher interviews. *Research in Mathematics Education*, 1–18. <https://doi.org/10.1080/14794802.2023.2165536>
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What Do We Know, What Can We Do? I S. J. Cho, *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer.
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer, Cham.
- Box, G. E. P. (1976). Science and statistics. *Journal of the American Statistical Association*, 71(356), 791–799. <https://doi.org/10.1080/01621459.1976.10480949>
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Janvier, C. (Red.). (1987). *Problems of representation in the learning of mathematics*. Erlbaum.
- Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M. & Garcia, F. J. (2007). Report from the working group modelling and applications-Differentiating perspectives and delineating commonalities. I *Proceedings of the fifth congress of the European society for research in mathematics education* (s. 2035–2041). University of Cyprus.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2002). *Adding up: Helping children learn mathematics*. National Academies Press. <https://nap.nationalacademies.org/catalog/9822/adding-it-up-helping-children-learn-mathematics>
- Kunnskapsdepartementet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.
- Niss, M. & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge.
- Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring*. Undervisningsministeriets forlag.
- Valenta, A. (2015). Aspekter ved tallforståelse. *Matematikksenteret*. https://beta.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/page/Valenta_Tallforsta%CC%8Aelse.pdf

Baartman

Hvor stor er panteren?

I flere barnehager på Sørlandet har jeg gjennomført opplegget *Hvor stor er panteren?*. Opplegget er et eksempel på hvordan matematisk modellering i barnehager kan se ut, men det kan også være aktuelt for begynneropplæringen. I denne artikkelen vil jeg først gi didaktisk bakgrunn og formål. Deretter vil jeg beskrive opplegget og hvordan barna taklet utfordringene.

Barn får tidlig matematiske erfaringer både hjemme og i barnehagen. Barn opplever at klokken er åtte, at barnehagelærer Tore er nesten to meter, og at bestemor fyller sytti år. Alle disse første matematiske erfaringene er knyttet til hverdagskontekster. Her lærer de spontant og intuitivt, og bygger innsikt som senere kan bli mer generaliserte begrep. For å synliggjøre det intuitive og lekbaserte har faget i den norske rammeplanen for barnehagen (Utdanningsdirektoratet, 2017) ikke *matematikk* som overordnet tittel, men de konkrete ordene *antall*, *rom* og *form*. Rammeplanen legger tydelige føringer for arbeid med «tidlig matematikk», der barnehagen skal stimulere barnas matematiske undring, nysgjerrighet og motivasjon gjennom en lekende tilnærming uten at barnehagelærere forklarer eller gir matematiske oppgaver. Blant

de matematiske formålene i rammeplanen står det at barnehagen skal bidra til at barn erfarer ulike størrelser i sine omgivelser og sammenligner disse. Her kan barn på en kvalitativ måte lære om noe er større eller mindre, færre eller flere, høyere eller lavere, og tyngre eller lettere (Flottorp, 2018). Utdanningsdirektoratet (2017) skriver også i rammeplanen at barnehagen skal bidra til at barn utvikler rom- og formforståelse, plassering og orientering. Da skal barna lære om hvem som står *foran*, *i midten* eller *bak-erst* i køen, om hvorvidt bamsen ligger *under*, *inni* eller på *toppen* av skapet, eller om tante bor *lenger unna*, mens bestemor bor *nærmere* (Nakken, 2017). Disse erfaringene vil danne basis for å lære mer formell matematisk kunnskap.

I rammeplanen (Utdanningsdirektoratet, 2017) står det ikke at barn i barnehagen skal lære om *matematisk modellering*. Når man ser på modellering som en prosess, hvor man for eksempel skal komme fram til en likning eller funksjon, gir det ikke mening å tenke at barnehagebarn skal lære matematisk modellering. Men når modellering blir tolket som en prosess hvor noe fra virkeligheten skal representeres på en matematisk måte, er det mulig at barn modellerer. For eksempel når barn tegner hus, personer, sola og andre objekter, oversetter de objekter fra hverdagen til fargerike streker på papir. Tegningen er en 2-dimensjonal modell

Désiré Baartman

CBO Zeist, Nederland

desire.baartman@gmail.com

som representerer noe 3-dimensjonalt fra hverdagen. Når barnas tegning er kreativ og dermed mest sannsynlig upresis med hensyn til form og størrelsesforhold av ulike kroppsdelene, kan det ikke oppfattes som matematisk modellering. Men når barna blir utfordret til å tegne objektet nøyaktig med målestokk 1 : 1, krever det flere matematiske aktiviteter, for eksempel sammenligning, plassering, orientering, visualisering og måling. Disse matematiske aktivitetene er nevnt i rammeplanen for barnehagen for å gi barn erfaringer innenfor måling- og romforståelse (Nakken, 2017; Udir, 2017). Å lage en tegning på papir gjennom disse matematiske aktivitetene gir grunn til å argumentere for at tegningen kan oppfattes som en matematisk modell av et objekt i virkeligheten. Dermed kan barn implisitt arbeide med matematisk modellering. Det vil si at barn blir ikke eksplisitt spurt om å lage en modell, men om å tegne et objekt så nøyaktig som mulig. I denne artikkelen beskriver jeg et opplegg som innebærer denne typen matematisk modellering.

I forbindelse med prosjektet *DaVinci barnehage* (Baartman, 2020) har jeg gjennomført flere opplegg i tre barnehager på Sørlandet. Formålet med prosjektet var å fremheve utforskende læring med vekt på matematikk, fysikk og teknikk. Prosjektet ga barn og barnehagelærere mulighet til å delta på fem læringsaktiviteter. Disse var *Kikka boks* (romforståelse, speiling), *Balansevekt* (vekt, telling, måling), *Elektrisitet* (redskaper, teknologi), *Bee-Bot robot* (programmering, teknologi) og *Hvor stor er panteren?* (form, rom, måling). I denne artikkelen beskriver jeg kun det sistnevnte opplegget. Det handler om en stor bamsepanter som skal bli utforsket og tegnet (se Figur 1). Bamsepanteren er skjult i et rom ved siden av rommet der barna er. De blir informert om at det finnes et stort bamsedyr i det andre rommet. De får et stort ark og blir spurt om å tegne dyret. Det gis tre regler, (1) barna går parvis ut i naborommet for å utforske dyret, (2) gruppen skal tegne dyret like stort som det 'ekte'



Figur 1. Dyret var så stort at flere barn kunne tegne samtidig.

dyret, (3) barna får først hente dyret når tegningen er ferdig.

Barna i par byttet på å besøke naborommet. De første gangene kom de tilbake med uttrykk av overraskelse og begeistring. De sa for eksempel at bamsen var veldig stor, men likevel søt og myk. Figur 2 viser hvordan barnas undersøkelse av dyret var sanselig. Andre par kom tilbake med meldingen om at bamsen så ut som en katt og var «kjempesvart». Her ble det klart for barna at de kun trengte svarte blyanter, og at papirarket kanskje ikke var stort nok. Etter noe diskusjon blant barna om at dyret var verken tiger eller løve, fortalte barnehagelæreren at dyret var en panter¹.



Figur 2. Barnas tidlige undersøkelse av panteren var i stor grad sanselig.

Da barna ble utfordret av barnehagelæreren til å tegne dyret, måtte de finne størrelsen av hele dyret, men også av hodet, av bein, av halen osv. Det oppsto diskusjon om hvordan de kunne finne størrelsen av panteren i det andre rommet, slik at barna kunne ta denne størrelsen tilbake til gruppen. De snakket om redskap, «faren min har en målestokk», og ordet «måling» kom inn i dialogen. Men barna hadde sine utfordringer, fordi verken pappa eller målebånd var til stede i rommet. Det var heller ikke meningen at barna skulle lære å bruke centimeter eller meter.

I alle gruppene brukte barna først kroppsdeler som måleenhet, for eksempel en underarm (se Figur 3). Denne spontane måletilnærmingen tilsvarende den historiske måten å måle på gjennom *alen*², som er en eldre lengdeenhet tilsvarende lengden av underarmen fra albuen til ytterste fingerspiss. Men problemet for barna var at ved en slik tilnærming ville det være et behov for å kunne telle, noe de fleste ikke kunne.



Figur 3: Et barn måler panterhalen ved bruk av underarmen.

I alle gruppene oppsto deretter idéen om å ta med noen objekter inn i det andre rommet for å legge dem i en rekke ved siden av panteren. Noen grupper fikk litt hjelp da barnehagelæreren spurte: «Hvordan kan vi vite om det er riktig størrelse?» I én gruppe tok noen barn av skoene sine (se Figur 4 a). Barna behøvde ikke å telle, fordi de tok samme sko fra ett sted til det andre. De la skoene i en rekke ved siden av panteren, og deretter ble de samme skoene satt i en



Figur 4a: Bruk av en rekke med sko for å måle panteren.



Figur 4b: Barn bruker en rekke med bøker for å måle panteren.

rekke på arket. Når rekken av skoene ikke hadde riktig lengde til panteren, byttet de skoene ut til mindre eller større sko inntil rekken hadde ønsket lengde. I en annen gruppe brukte barna en rekke bøker (se Figur 4 b).



Figur 5. Én gruppe brukte en bunt med blyanter for å vise lengden av panteren.

Én gruppe brukte blyanter til måling av panteren. De la blyantene i en rekke ved siden av panteren, og deretter holdt de blyantene samlet i hånden (se Figur 5). De pekte på bunten og sa: «Så lang er hele panteren!» De brukte også blyanter for å måle panterens hode, bein og hale. Bruk av blyanter eller en rekke med sko betyr at barna brukte ulike redskaper for å måle eller sammenligne størrelser av objektet med størrelser i tegningen (Flottorp, 2018). Barna viste forståelse for at den sko- eller blyantformen opprettholdt lengden mens de flyttet seg fra ett sted til et annet.

I tillegg til målingsaktiviteter engasjerte barna seg i plasserings- og orienteringsaktiviteter. Plassering handler om å sette objekter i forhold til hverandre (Nakken, 2017). I prosjektet om bamsepanteren la barna bøker/sko/blyanter i en rekke, men også ved siden av halen og senere ved siden av hele dyret de hadde tegnet. Orientering handler om å forstå sin egen plassering i forhold til andre og til omgivelser, samt å forstå hvordan man kan komme seg rundt der (Nakken, 2017). I prosjektet om bamsepanteren

måtte barna gå fram og tilbake til det andre rommet, men også bevege seg rundt bamsepanteren og rundt tegningen for å se på dem fra forskjellige vinkler. De resonnerte at for å tegne panterhalen måtte de sitte på en annen side av arket enn når de måtte tegne panterhodet. Denne observasjonen bekrefter forskning som har funnet at innen matematiske modelleringsaktiviteter blir ofte flere matematiske aktiviteter flettet sammen (Kaiser & Brand, 2015).

Etter litt over en halv time var barnas tegninger ferdig. På alle tegningene hadde barna tegnet panterens hode som et ansikt med en posisjon som på et portrett (se Figur 1 og Figur 6). For noen voksne virker det kanskje som at barna har tegnet en ape, men for barna var det soleklart at panterens ansikt skulle være tegnet på denne måten. De hentet panteren fra det andre rommet. Det ble en stor opplevelse for alle da de sammenlignet panteren med deres egne tegninger. Alle gruppene som jeg jobbet med, tegnet dyret veldig presist. Faktisk var barnehagelærerne mer overrasket enn barna over at tegningen og den virkelige panteren var så like i størrelse. Da barna sammenlignet tegningen med den virkelige panteren, gjorde de hva som er beskrevet i litteraturen som *direkte måling med sammenligning* (Flottorp, 2018). For eksempel plasserte de halen nøyaktig på tegningen for å sammenligne lengden av den ekte halen med lengden av den tegnede halen. De vurderte hva på tegningen som var av samme størrelse, og hva som burde ha blitt tegnet litt større eller litt mindre. Da viste de det å være selvkritisk.

Deretter måtte barna si farvel til bamsepanteren, men de var glade for å kunne beholde tegningen slik at de kunne vise foreldrene hva de hadde gjort og opplevd. Dermed ble tegningen til en formidlingsmodell for å kommunisere om aktiviteten og det ekte objektet fra virkeligheten uten at det var fysisk til stede. På denne måten fikk barna erfaringer med at det er mulig å lage en matematisk modell for å erstatte noe annet.

Til slutt vil jeg gi noen tilbakemeldinger fra barnehagelærere etter gjennomføringen av

opplegget. De sa at de aldri før hadde opplevd at barna kunne holde fokus på aktivitetene og være engasjert over så lang tid. Aktivitetene varte i omtrent tre kvarter. Barnehagelærerne var overrasket over hvor mye barna snakket sammen og utviklet ordforrådet mens de samarbeidet om å lage tegningen. En barnehagelærer sa at hun lærte at barn kan måle uten at de kan telle. Og barnehagelærerne var enige om at de selv aldri hadde klart å lage en tegning til å være så nøyaktig like stor som den ekte bamsepanteren.



Figur 6. Panteren er hentet for å sjekke størrelser på tegningen.

Fra arkivet

I Tangenten 4/2007 beskrev Toril Eskeland Rangnes 8- og 9-åringers utforskning og modellering av utviklingen i en sauebestand som starter med to lam (en han og en hun), og hvert par får en han og en hun hvert år.

Les denne artikkelen og andre godbiter fra Tangentenarkivet på tangenten.no

Noter

- 1 En panter kan ha gul hud med svarte flekker eller være helt svart. Dyret kalles også leopard. En panter er litt større enn en gepard, som kanskje noen barn har sett i Dyreparken i Kristiansand.
- 2 Alen kan deles i to fot og i 24 tommer.

Referanser

Baartman, D., (2020). *DaVinci Barnehagen*. Blog. <https://discoro2.wordpress.com/2017/04/20/davinci-barnehage/>

Flottorp, V. (2018). Jeg er størst! Om måling i barnehagen. 2. utgave. *OsloMet Skriftserien*, 2018(1), 50-57. <https://skriftserien.oslomet.no/index.php/skriftserien/article/view/125>

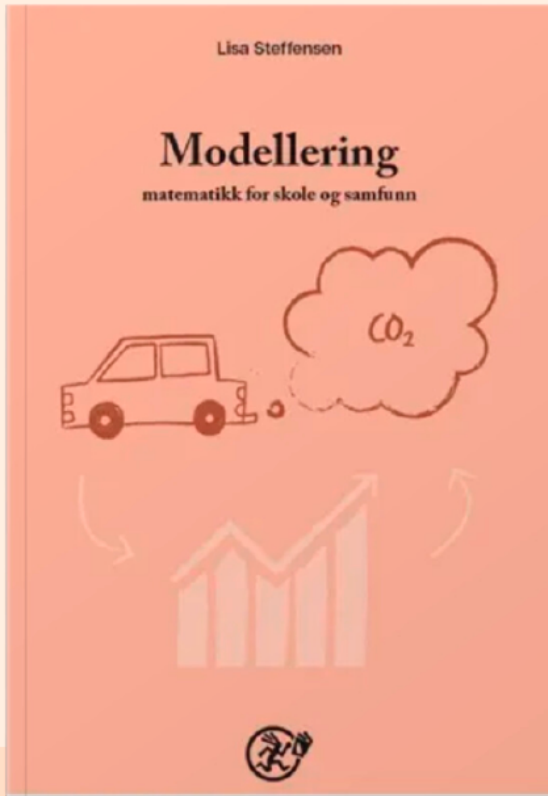
Kaiser, G. & Brand, S. (2015). Modelling competencies: Past development and further perspectives. In *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (ss. 129-149). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_10

Nakken, A.H. (2017). *Romforståelse i barnehagen*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/resource/romforstaelse_i_barnehagen.pdf

År	Nye lam	Antall par som får lam	Antall sauer tilsammen	Marfe
1.	2	0	2	
2.	2	1	4	
3.	4	2	8	
4.	8	4	16	
5.	16	8	32	
6.	32	16	64	
7.	64	32	128	
8.	128	64	256	
9.	256	128	512	
10.	512	256	1024	



Caspar Forlag AS



Modellering matematikk for skole og samfunn

Forfatter:

Lisa Steffensen

ISBN:

9788293598138

Pris:

199,-

Matematikk for skole og samfunn

Matematiske modeller spiller en svært avgjørende rolle i dagens samfunn. Nasjonalt og internasjonalt forventes det at elever skal ha kompetanse om matematisk modellering. Denne boka inneholder en rekke eksempler og forslag til oppgaver som passer på grunnskolens barne- og ungdomstrinn. Den utforsker betydningen av matematiske modeller i skolen, gir konkrete eksempler og tilbyr lærere ressurser og oppgaver.



FAGBOKFORLAGET

Bestill her



Eriksen, Madsen

Den tomme modelleringssyklusen

Utdanningsdirektoratet skriver at kjerneelementene utgjør det viktigste faglige innholdet elevene skal arbeide med i opplæringen (Utdanningsdirektoratet, 2019). De følger opp dette ved å inkludere kjerneelementene på eksamen. Eksamensoppgaven for 10. trinn våren 2022 inneholder for eksempel oppgavebestillingen «Bruk informasjonen ovenfor som et utgangspunkt til å vise din kompetanse innen modellering og anvendelse». Oppgaven krever at elevene har en forståelse for (1) hva modellering og anvendelse er og (2) hva som menes med å vise kompetanse innen feltet. Med denne artikkelen vil vi vise hvordan vi har tilrettelagt for (1) modelleringskompetanse og (2) bevisstgjøring hos elevene for hva det betyr å vise kompetanse i modellering og anvendelse. Til sist nevnte utarbeidet og brukte vi «Den tomme modelleringssyklusen» sammen med elever i ungdomsskolen. Vi forklarer i tillegg hvordan vi utviklet fire prinsipper for å nå våre mål for elevenes kompetanse. Bevissthet om disse prin-

sippene gjorde dem til nyttige verktøy for oss i klasserommet.

I forskningslitteratur finner vi mange modeller og beskrivelser av modelleringssyklusen. Fellesnevneren for alle er at de skiller mellom matematikk og noe som er utenfor matematikken. I kjerneelementet modellering og anvendelse beskrives dette utenfor matematikken som dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers. Spesielt i overgangene mellom disse to «verdenene» er de kognitive kravene høye for elevene, da de må anvende kompetanse fra begge, og veksle mellom dem.

For å integrere modellering ordentlig i skolen kan en se på modellering som et verktøy for å lære innholdskomponenter i matematikk som areal, likninger, funksjoner og proporsjonalitet (Blomhøj, 2019). Vi hadde som mål at elevene *både* skulle utføre modellering for å lære matematisk innhold og få en forståelse for den matematiske prosessen. Vi ønsket at elevene skulle *erfare* modelleringssyklusen og knytte den sammen med matematikken de utførte, samtidig som syklusen ble gjort eksplisitt for dem. For å få til dette utviklet vi plakaten «Den tomme modelleringssyklusen» (Figur 3). Idéen var å fylle inn tekst sammen med elevene underveis i timer der de arbeidet med modelleringssoppgaver. Plakaten inneholdt teksten til kjerneelementet og fire steder til å fylle inn tekst, de to «verdenene» og overgangene mellom

Stig Eriksen

Universitetet i Agder
stig.eriksen@uia.no

John Madsen

Blomdalen ungdomsskole
john.madsen@lindesnes.kommune.no

dem. Vi skrev ut plakaten i A3-format og hang den i klasserommet. Plakaten kan lastes ned her: http://home.uia.no/stige/files/2024/01/DTM_A3.pdf. Når vi som lærere syntes at det passet ringte vi i en bjelle for å ta en kort «time-out» hvor vi skrev noe på plakaten.

Vi arbeidet for å skape en god «modelleringsånd» der vi la vekt på godt samarbeid og elevenes ansvar for å ta beslutninger selv (Frejd & Vos, 2023). I klasserommet arbeidet vi i stor grad på vertikale tavler, vi passet på å stille spørsmål som ledet elevene videre uten å gi svarene og vi brukte elevenes arbeid som utgangspunkt for diskusjoner i fellesskapet. Disse tre idéene er beskrevet som «ikke-frontvendte klasserom», «fortsett-å-tenke-spørsmål» og «forankring fra bunnen av» i Liljedahl (2021/2023).

Modelleringssyklusens første faser og girene på en sykkel (8. trinn)

Vi startet økten med å henge opp «Den tomme modelleringssyklusen» på oppslagstavlen, og forklarte helt kort de fire plassene på plakaten hvor vi skulle fylle inn detaljer underveis. Deretter hentet noen elever sykler med utvendige gir inn i klasserommet og den noe upresise oppgaven «Finn ut av girene på syklene» ble gitt muntlig.

I kjerneelementet leser vi at «En modell i matematikk er en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Ofte tenker vi på formler, funksjoner og likninger som det matematiske språket for modeller. For girene på en sykkel kan en modell være $U = F/B$ der U står for utveksling og F og B for omkrets foran og bak. I ungdomsskolen er det ikke alle elevene som har kommet til det abstraksjonsnivået og vi må tenke på andre representasjoner av modeller som kan være nyttige i elevenes læring. For eksempel kan et oppstilt regnestykke med tall være et konkret eksempel på en mer abstrakt formel eller en tabell kan være det for en funksjon. I Figur 1 ser vi til venstre hvordan en gruppe elever beskrev girene på en sykkel og til høyre slik læreren så

for seg en grafisk representasjon av girene, der stigningstallet til en linje gjennom origo og et punkt viser utvekslingen.

I starten kan det være fristende å gi elevene en pangstart og en retning i arbeidet ved å bruke ordet *utveksling* eller å vise en 1:1 eller 2:1 girutveksling på tavla. I en annen matematikktime kunne vi til og med vært fristet til å starte med formelen $\text{Utteksling} = \text{antall tenner foran} / \text{antall tenner bak}$. Men det ville være å ta fra elevene viktig øvelse knyttet til de delene av modelleringssyklusen der de må ta forutsetninger og valg. Elevene ville da ikke erfare hele modelleringscyklusen og aktiviteten ville nærme seg en mer tradisjonell klasseromspraksis der læreren bestemmer detaljene i det matematiske innholdet, og elevene vil i større grad forvente at det de gjør enten er rett eller galt. Berget (2022) viste at modelleringsaktiviteten ikke bør handle om å finne et svar, men å bli utfordret til å ta egne valg. Vi ønsket også at elevene skulle erfare disse tidlige fasene i syklusen. Derfor fikk de ikke hjelp til å tolke oppgaven før de startet. I stedet ringte vi med bjella og stoppet arbeidet for første gang ganske tidlig. Den anledningen brukte vi til å snakke om at det *er* vanskelig å komme i gang, og vi lot elevene komme med et par innspill til hva de kunne gjøre for å komme videre. Dette ga bakgrunn for det første prinsippet for arbeid med modellering:

Prinsipp 1: La elevene finne retningen og gi tid til det.

De fleste gruppene startet med å multiplisere for å finne antall gir, og deretter stoppet det litt opp og lite skjedde. Med to grupper på hver sykkel, og gruppens notater på whiteboard-ark på veggene, kunne alle følge med på hva andre grupper gjorde. Vi lærere hadde et klart bilde av hvilken retning dette kunne ta (Figur 1), og da er det krevende å ikke hjelpe for mye i den retningen vi ønsker. Etter noen minutter var det én elev som talte litt på et tannhjul på sykkel og læreren gikk til eleven:

Lærer: Hva er det du holder på med?
Elev: Nei.... jeg vet ikke ... taggene ...
Lærer: Du tok på en og en tann rundt hele, gjorde du ikke.
Elev: Ja
Lærer: Fant du hvor mange tenner det var?
Elev: På den (peker på et tannhjul i kran- sen).
Lærer: Det var lurt. Hvor mange var det?
Elev: 24
Lærer: De andre da?

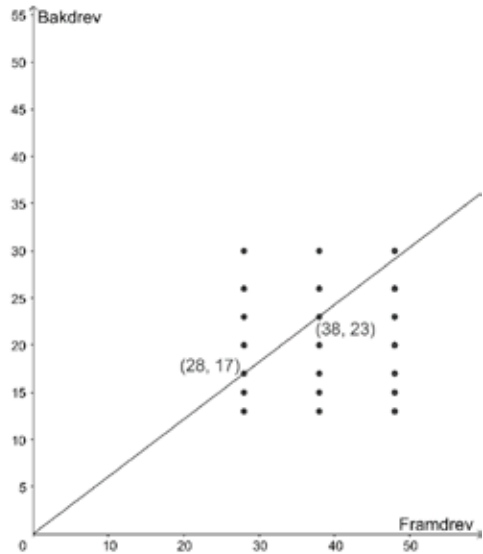
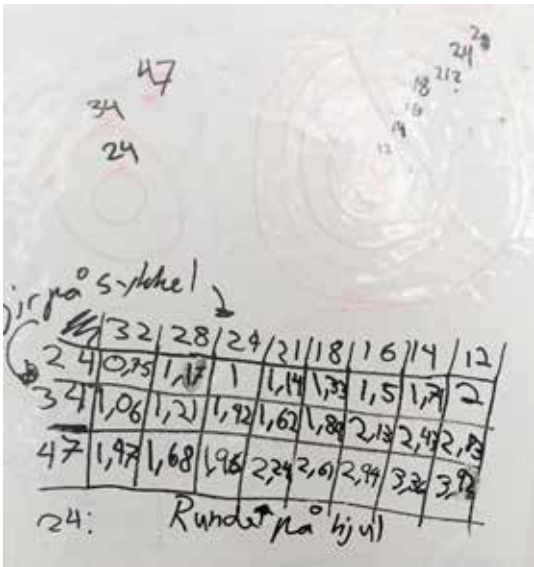
Etter dette begynte noen andre elever å telle på tannhjulene og etter enda noen minutter så ringte vi med bjella og stoppet opp og diskuterte hvordan å telle kan være en del av det å modellere – å oversette til matematikk. Ved å bekrefte og forsterke én elevs bidrag, inspirerte vi elevene i klassen til å telle. Litt senere var det nok å spørre én gruppe om de kunne systematisere tallene sine, og deretter fulgte de andre gruppene etter denne gruppa (Figur 1). En del av lærernes forberedelser til aktiviteten kan være å se for seg hvilke modeller og representasjoner som kan være nyttige i aktiviteten, f. eks. dia-

grammet til høyre i Figur 1. I gjennomføringen av aktiviteten var det imidlertid det elevene produserte vi brukte. Representasjonen vi lærere hadde sett for oss, sparte vi til en annen gang. Prinsippet vi her kom fram til var:

Prinsipp 2: Bruk elevenes bidrag til å skape framdrift og fellesskap om matematikken.

I matematikkens verden og en solcellebil (9. trinn)

En vanlig aktivitet i de første fasene av et modelleringsarbeid er å gjøre egne antagelser om situasjonen og valg om hva man skal oversette til matematikk. Dette så vi ikke så mye av i aktiviteten med sykkelgirene, men den neste oppgaven var designet for at vi også skulle få se når elevene måtte gjøre mye av dette. En mulig modell elevene kunne lage var at rekkevidden til en el-bil med solceller avhenger blant annet av differansen mellom effekt brukt og effekt fra solcellene, og særlig om solcellene var det mange antagelser som måtte gjøres. Igjen introduserte vi kort «Den tomme modelleringssyklusen» og vi gav oppgaven muntlig, før vi hang opp på veggen et bilde fra en artikkel om en elbil.

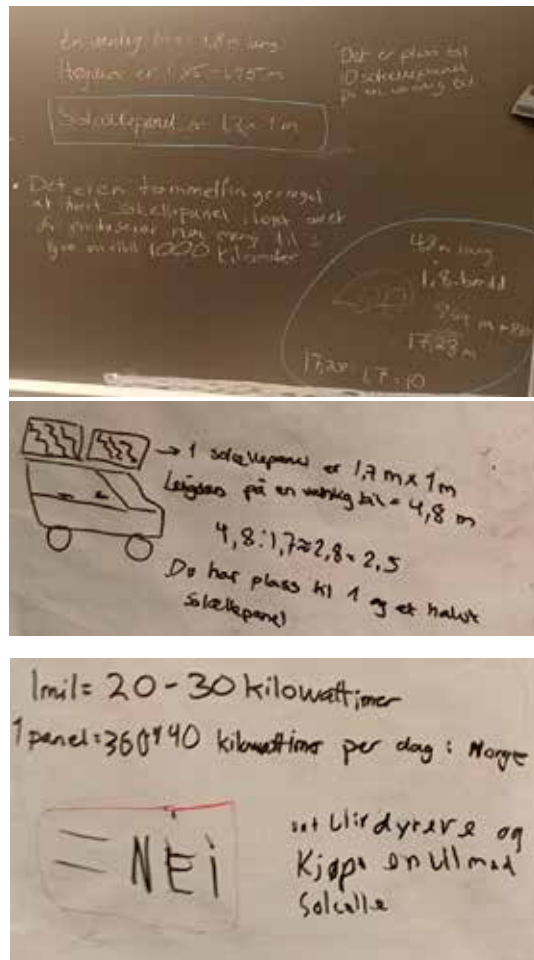


Figur 1: Elevenes representasjon, og lærerens grafikkfelt fra GeoGebra med koordinater til to gir med omtrent samme utveksling.

El-bilen på bildet hadde solceller og oppdraget var «El-bil med solceller. Er det noen vits?».

Det viste seg at elevene i denne oppgaven tok arbeidet i flere forskjellige retninger, så Prinsipp 2 over viste seg viktig også i denne aktiviteten. Vi måtte gi god tid til elevene for at de skulle komme seg inn i matematikkens verden. Vi som lærere i rommet hadde nok forventet at dette ville dreie seg mye om kilowattimer (kWh) og maks teoretisk effekt fra solceller (kWp), og forholdsregning, der arealet tilgjengelig for solceller på en bil kom i betraktning i forhold til arealet til solceller med kjent kWp. Og som for sykkelgirene så forsøkte vi å bruke noen elevbidrag for å lede gruppene i denne retningen. Allikevel så vi store forskjeller mellom gruppene. Noen gjorde omtrent som vi forventet, men resultatene kunne være så forskjellige som at det er plass til 1,5 solcellepanel og 10 solcellepanel på arealet til en bil (Figur 2). I de to klassene som gjorde denne aktiviteten var det én gruppe som undersøkte mye om ladehastigheter og hvor lang tid det ville ta å lade en bil med solceller. Flere grupper konkluderte med at «Nei, det er lite ekstra rekkevidde å hente med solceller på el-bil». Én gruppe tok en helt annen retning og vurderte dette i forhold til miljø. I første omgang var nok lærerne litt usikre på om miljøperspektivet ville ha noen verdi i denne oppgaven, men det viste seg at denne gruppa også fikk gjort mye meningsfull matematikk. Over en bils levetid var det absolutt av betydning med ren fornybar energi. Konklusjonen ble derfor «Ja, det er vits» for denne gruppa.

Figur 2 viser deler av tre gruppers arbeid med solcellebilene. Vi ser en blanding av beregninger de har gjort og konklusjoner ut fra beregningene. Arbeidsformen og åpenheten i oppgavene var ny for elevene, og de fleste gruppene hadde mer kontroll på å gjøre beregninger og å komme til resultater, enn på hvordan disse ble kommunisert. Vi så upresis bruk av både benevnninger og resultater. Ofte måtte vi spørre elevene «Hva mener dere her?», før vi kunne gå videre i dialog om innholdet.



Figur 2: Elevarbeider om bil med solceller.

I midten i Figur 2 ser vi hvordan en gruppe har regnet $4,8 : 1,7$ og fått omtrent $2,5$. Deretter konkluderer de med at det er plass til 1,5 solcellepanel på en bil. Når de ble spurt om dette så kunne de forklare at de ikke regnet på areal, men at benevningene i divisjonen var meter og at pga. frontvinduet på bilen ble det bare plass til 1,5 og ikke 2,5 solcellepaneler på lengden av bilen. Her korrigerte elevene det matematiske resultatet i overgangen til verden utenfor matematikken.

Det øverste bildet i Figur 2, nede i høyre hjørne, viser hvordan en gruppe bruker ordene «lang» og «bredd», de multipliserer disse og

dobler resultatet til 17,28 kvm tilgjengelig areal på en bil. Deretter dividerer disse også med 1,7 og får 10 som antall solcellepaneler på en bil. På spørsmål her svarer gruppen at de har regnet med arealer og at bilen har to sider. Når vi holdt oss i matematikkverdenen så var det naturlig å spørre denne gruppen litt mer om hvordan de tenkte med arealberegningene. I overgangen til verden utenfor matematikken diskuterte vi sammen med elevene om det finnes solceller som kan brukes på vinduer, om det er realistisk å dekke hele bilen og hvor det er best i forhold til solinnstråling.

Med begge disse gruppene var det viktig for oss å ikke diskutere rett eller galt i forhold til antagelser og valg de hadde gjort. Vi fikk elevene til å forklare sine beregninger noe som medførte at de vurderte seg selv samtidig, og de fikk forklare sammenhengen mellom modellen og verden utenfor matematikken. Uten å gi én gruppe rett påpekte vi at de hadde fått veldig forskjellig resultat med sine forskjellige valg og antagelser.

Nederst i Figur 2 vises en tredje gruppes arbeid. Denne gruppen hadde en bil som brukte 10 ganger mer strøm enn det som er vanlig pr. mil, og de multipliserte opp maks effekt 440 Wp for 1 panel med 360 dager i året, og fikk dermed en helt urealistisk strømproduksjon. Konklusjonen «Nei – det er ikke vits med solceller på el-bil» valgte de så kun å begrunne med de ekstra kostnadene med solceller. Denne gruppa ser ut til å ha mistolket kildene sine om solcellepaneler og el-biler. Allikevel vektla vi her modelleringskompetanse og veiledet dem til å ta utgangspunkt i tall og beregninger når de skulle komme med sine konklusjoner. Tallene kan alltid korrigeres senere. Både «Ja-gruppene» og «Nei-gruppene» fikk beholde sine konklusjoner, men måtte begrunne sine valg. Dette er eksempler på det tredje prinsippet:

Prinsipp 3: Tillat og utnytt forskjeller i klasserommet.

Slutten på syklusen

Vi tok utgangspunkt i anbefalingene fra Smith og Stein (2011) om hvordan man kan (1) følge med på elevenes arbeid underveis, (2) velge noe fra elevenes arbeid, (3) bestemme en rekkefølge og (4) hjelpe elevene med å se sammenhenger. Figur 2 viser hvordan vi med blått kritt og rød smartboardtusj valgte ut noe vi ba elevene om ikke å viske ut, fordi vi ville bruke det i oppsummeringen. Både hva vi valgte, og rekkefølgen vi brukte det i, ble bestemt ved hjelp av modelleringssyklusen.

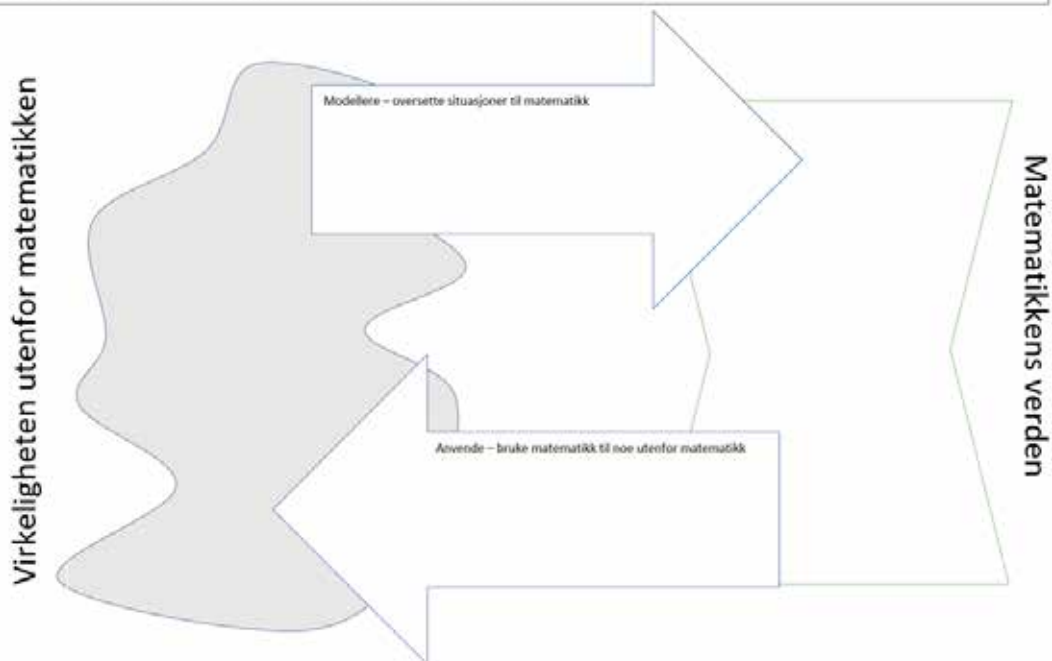
Vi startet med å diskutere med elevene antagelser og forutsetninger vi så noen steder, og knyttet dette til starten av modelleringssyklusen. Vi spurte om utregninger og snakket om matematikkens verden. Hvis en gruppe hadde en formel eller eksempelutregning så kalte vi det en *modell*. Vi spurte hvordan de hadde kommet til sine konklusjoner fra både matematikken og fra en kontroll mot verden utenfor. Spørsmål som kunne hjelpe elevene til å trekke linjene fra eget arbeid til modelleringssyklusen kunne være: «Hvilke antagelser gjorde dere i starten for å komme til dette?», «Her var dere vel bare i matematikkens verden og tenkte ikke så mye på hva dette betyr, eller?» Gjennom gruppenes arbeid oppsummerte vi oss gjennom modelleringssyklusen.

Også i dialogen underveis i timen fikk vi støtte av «Den tomme modelleringssyklusen». Liljedahl (2023) beskriver hvordan man kan svare på spørsmål som får elevene til å fortsette å tenke. En teknikk for å få til det er å holde dialogen på et overordnet nivå. I modellerings-timene kunne vi bruke modelleringssyklusen til komme til dette nivået. Om eleven spurte om noe er riktig eller galt, et typisk «stoppe-og-tenke-spørsmål», kunne vi holde dialogen på et prosessnivå om antagelsene de har gjort, og om resultatene deres validert mot verden utenfor. Dette førte til det fjerde prinsippet:

Prinsipp 4: Bruk modelleringssyklusen i dialogen underveis, og til sekvensering og oppsummeringen av matematikken.

Modellering og anvendelser

En modell i matematikk er en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk. Elevene skal ha innsikt i hvordan modeller i matematikk brukes for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers. Modellering i matematikk handler om å lage slike modeller. Det handler også om å kritisk vurdere om modellene er gyldige, og hvilke begrensninger de har, vurdere modellene i lys av de opprinnelige situasjonene og vurdere om de kan brukes i andre situasjoner. Anvendelser i matematikk handler om at elevene skal få innsikt i hvordan de skal bruke matematikk i ulike situasjoner, både i og utenfor faget.



Figur 3 Den tomme modelleringssyklusen

Resultater i «Den tomme modelleringssyklusen»

Ordene som ble skrevet på plakaten gjennom timene var knyttet både til elevenes handlinger og følelser om modelleringen. Ingen av klassene hadde erfaring med time-out og refleksjon om prosessen de var i. Det var allikevel forskjeller i klassene og vi opplevde at dialogen om modelleringssyklusen måtte være tettere knyttet til eksemplene på 8. trinn enn for de eldre elevene. Om «Virkeligheten utenfor matematikken» ble det skrevet ord som *søke, velge, klargjøre, forutsetning, fakta, anta, sammenlikne, lese og samarbeide*, i pila «Modellere» skrev vi *finne oppbyggingen, plan, prøve, se i boka, slitsomt, telle og lage tabell, usikkerhet og tabell/system*. Det letteste var kanskje å fylle ut «Matematikkens verden», her kom det ord som *laget diagram og formel, laget tabell, tall, regne, feile, pluss, multiplikasjon, prøve og feile, formel, sammen-*

likne to formler og lage liste med punkter. Det vanskeligste var nok kanskje å få fylt inn i pila «Anvende», kanskje litt fordi dette ofte kom mot slutten av timene: *sjekke, si noe om sykkel, avgrenset funksjon, forklare, presentere, vurdere og tolke og sjekke med virkeligheten* var ord om å anvende matematikk. Alle disse ordene kom fra modellering i mange forskjellige timer, og for alle klassene kan vi nok si at dette bare var starten på en bevisstgjøring om modellerings-



Figur 4: Elev skriver i «den tomme modelleringssyklusen».

syklusen. En av elevene skrev på arket «Lage matteoppgave selv og løse den». I etterkant sa denne eleven at dette var hens måte å uttrykke egentlig hele modelleringssyklusen.

Oppsummering

Å lede en klasse i modellering er en krevende øvelse. Vi måtte tenke nøye gjennom hva det vil si å modellere og hvordan det skulle informere oss om vår rolle i klasseromsfelleskapet under modelleringsaktivitetene. Etter flere gjennomføringer kom vi fram til fire prinsipper som utpekte seg som viktige for gjennomføring av modellering og for samtidig å lære om modelleringssyklusen:

1. La elevene finne retningen og gi tid til det.
2. Bruk elevenes bidrag til å skape framdrift og felleskap om matematikken.
3. Tillat og utnytt forskjeller i klasserommet.
4. Bruk modelleringssyklusen i dialogen underveis, og til sekvensering og oppsummeringen av matematikken.

Hvert av prinsippene er i seg selv utfordrende å gjennomføre, men «Den tomme modelleringssyklusen» gir en støtte til å få det til. Gjennom plakaten kan læreren eksemplifisere og være eksplisitt om hva det vil si å modellere, og elevene kan lettere akseptere utfordringene som modellering gir. Samlet kan prinsippene gi anbefalinger om en god klasseromspraksis i modelleringsaktiviteter.

Torkildsen (2020) skriver at når vi skal lede undervisningen fram mot et læringsmål så er det nyttig å se for seg både det langsiktige målet for en periode og det mer kortsiktige målet for undervisningsøkten. Vi så på aktivitetene vi har presentert her som starten på en langsiktig opplæring i modellering, samtidig som kunnskaper om forholdsregning, areal og benevnninger var mer kortsiktige mål. Vi måtte balansere

den hjelpen vi ga om matematikk knyttet til girutveksling og solceller slik at våre nære mål for undervisningsøkten ikke kom i veien for et langsiktig mål om kompetanse i modellering.

For at elevene skal lære seg modelleringskompetanse, trenger vi at lærerens rolle og normene i klasserommet utvikler seg i en annen retning enn når elevene arbeider med matematikken fra læreboka. Vi hadde ikke noe fasit, vi hadde oppgaver som kom utenfra, vi lot elevene finne sin egen vei og vi spurte om hva dette kan brukes til. For å få til dette måtte vi først bli bevisste om hva dette betyr for våre handlinger i klasserommet, og deretter være eksplisitte om det for elevene. Det fikk vi hjelp til gjennom å bruke plakaten med «Den tomme modelleringssyklusen».

Referanser

- Berget, I. (2022). Identifying positioning and storylines about mathematical modelling in teacher–student dialogues in episodes from two upper secondary classrooms. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 42(3), 289–303. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrac020>
- Blomhøj, M. (2019). Towards integration of modelling in secondary mathematics teaching. I G. Stillman & J. Brown (Red.) *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*. (s. 37–52). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_3
- Frejd, P. & Vos, P. (2023). The spirit of mathematical modelling – a philosophical study on the occasion of 50 years of mathematical modeling education. *The Mathematics Enthusiast*, 21(1), 269–300. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1626>
- Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn (MAT01-05)*. Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer>
- Liljedahl, P. (2023). *Å bygge tenkende klasserom i matematikk* (A. Sjøbu, Overs.). Cappelen Damm Akademisk. (Opprinnelig utgitt 2021).

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*. National Council of Teachers of Mathematics.

Torkildsen, S. H. (2020). *Praksiser i ambisiøs matematikkundervisning*. <https://www.matematikkenteret.no/sites/default/files/2022-03/Torkildsen%20Praksiser%20i%20ambisiøs%20matematikkundervisning.pdf>

Utdanningsdirektoratet. (2019, 18. november). *Hva er kjerneelementene?* <https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/>

Fra arkivet



I Tangenten 4/2009 viste Kyrre Johannesen eksempel på arbeid med modellering av volumet av korn i en kornsilo.

Les denne artikkelen og andre godbiter fra Tangentenarkivet på tangenten.no



Rønning

Preskriptiv modellering og læreplanen

Ulike aspekter ved matematisk modellering

I den gjeldende læreplanen for norsk skole (LK20) er Modellering og anvendelser ett av seks kjernelementer. Dette kjerneelementet er beskrevet slik:

En modell i matematikk er en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk. Elevene skal ha innsikt i hvordan modeller i matematikk brukes for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers. Modellering i matematikk handler om å lage slike modeller. Det handler også om å kritisk vurdere om modellene er gyldige, og hvilke begrensninger de har, vurdere modellene i lys av de opprinnelige situasjonene og vurdere om de kan brukes i andre situasjoner. Anvendelser i matematikk handler om at elevene skal få innsikt i hvordan de skal bruke matematikk i ulike situasjoner, både i og utenfor faget. (Utdanningsdirektoratet, 2020)

Den definisjonen som her gis av modellering, synes å være inspirert av *modelleringskompetansen* slik denne er formulert i det danske KOM-prosjektet (Niss & Jensen, 2002), der

Frode Rønning
NTNU Trondheim
frode.ronning@ntnu.no

matematisk kompetanse beskrives som sammensatt av åtte kompetanser. En av disse er modelleringskompetanse, og den er formulert slik:

Denne kompetence består på den ene side i at kunne *analysere* grundlaget for og egenskapene ved foreliggende modeller og at kunne bedømme deres rekkevidde og holdbarhet. Hertil hører at kunne «*afmatematisere*» (træk ved) foreliggende matematiske modeller, dvs. at kunne afkode og fortolke modelementer og -resultater i forhold til det felt eller den situation som er modelleret. På den anden side består kompetencen i at kunne *udføre aktiv modelbygning* i en given sammenhæng, dvs. at bringe matematik i spil og anvendelse til behandling af anliggender uden for matematikken selv. (Niss & Jensen, 2002, s. 52)

Her beskrives to sider ved modellering, *modellanalyse* og *modellbygning*, dvs. henholdsvis det å analysere en eksisterende modell og selv å lage en modell.

En *matematisk modell* beskrives ofte som et system som består av et utenformatematisk område (D), et matematisk område (M), og en avbildning (oversettelse) fra D til M. Prosessen starter i D, der den aktuelle situasjonen beskrives og systematiseres. Ofte gjøres det forenklinger i situasjonen før den oversettes til matema-

tisk språk i M. Innenfor M foregår det matematisk arbeid, for eksempel beregninger, og resultatene av disse oversettes tilbake til D og tolkes og valideres innenfor D. Valideringsprosessen innebærer å sammenligne resultatene fra det matematiske arbeidet gjort i M med den kjente virkeligheten i D (Niss, 2015, s. 68–69). Dersom samsvaret med D ikke er tilfredsstillende, vil det være behov for å revidere modellen, dvs. endre den matematiske beskrivelsen av D for eksempel ved å trekke inn aspekter som man i første runde valgte å utelate eller ikke tenkte på. Et konkret eksempel kan være å beskrive en kastebevegelse matematisk der man velger å se bort fra luftmotstanden. Dersom beregningene ikke samsvarer godt nok med det man kan måle, må man se hvordan man kan innlemme luftmotstanden i den matematiske beskrivelsen. Denne prosessen beskrives ofte som en syklus, modelleringssyklusen, og den er fremstilt på ulike måter (se f.eks. Niss, 2015, s. 68).

Modelleringssyklusen beskriver et samspill mellom en eksisterende virkelighet (D) og en matematisk beskrivelse (M) av denne virkeligheten. I formuleringen av modelleringskompetansen i Niss og Jensen (2002) svarer dette til *modellbygging*. Dette er også det som vektlegges i det aktuelle kjerneelementet i LK20 når det står at en modell «er en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk», og at «[m]odellering i matematikk handler om å lage slike modeller» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Formuleringene i kjerneelementet passer også godt til det som kalles *deskriptiv modellering*. Dette innebærer at man ønsker å beskrive noe som *er*, en virkelighet. En annen viktig form for modellering er det som kalles *preskriptiv*, eller *normativ*, modellering. Slik modellering innebærer ikke å *beskrive* en eksisterende virkelighet, men, som Niss sier, å designe, foreskrive, organisere eller strukturere visse deler av en virkelighet (Niss, 2015, s. 69) – å *skape* en virkelighet. Når man bruker begrepet *normativ modellering*, legger man også inn et aspekt av *verdier* (normer). Jeg vil videre i artikkelen argumentere for at pre-

skriptiv, eller normativ, modellering er et viktig aspekt av matematisk modellering, og at dette synes å være lite vektlagt i læreplanen.

Jeg har tidligere (Rønning, 2023) diskutert matematisk modellering i et videreutdannings-tilbud for lærere. I denne artikkelen tar jeg med et eksempel fra denne virksomheten, men det viktigste er en diskusjon av modelleringsbegrepet slik det fremstår i gjeldende læreplan, LK20.

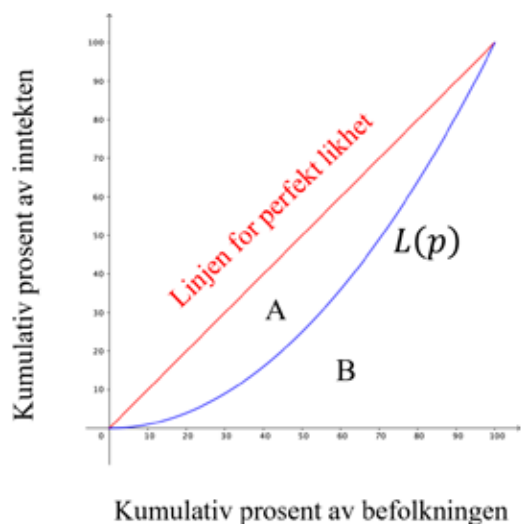
Preskriptiv (normativ) modellering

Niss (2015) nevner flere eksempler på preskriptiv modellering gjennom spørsmål som hvor man skal plassere et nytt kraftverk eller et kjøpesenter, og han går detaljert inn på tre eksempler. Jeg vil se på to av disse her, A-formatet for papir og Gini-indeksen.

A-formatet for papir er laget etter følgende oppskrift: Ta utgangspunkt i et rektangel på 1 m^2 (A0) som er slik at dersom man deler det i to ved å brette om midtnormalen som forbinde de lengste sidene, så skal hver av halvdelene (A1) være formlik med det opprinnelige rektanget. Fortsett så denne prosessen for å lage A2, A3 osv. Ved en formlikhetsbetraktning finner man ut at forholdet mellom langsiden og kortsiden i disse rektangelene må være $\sqrt{2}$. Her har man laget en matematisk modell og ved hjelp av denne skapt en virkelighet. Dermed gir det ikke mening å snakke om hvorvidt modellen er *gyldig*. Den prosessen som fører til forholdstallet $\sqrt{2}$, kan sees på som det Niss og Jensen (2002) kaller modellanalyse. En viktig forskjell fra deskriptiv modellering er akkurat det at begrepet gyldighet ikke gir mening fordi det ikke finnes en virkelighet å sammenligne med, da virkeligheten er skapt gjennom modellen. I dette eksempelet er ikke det normative aspektet så sterkt. Man kan diskutere om formatet er hensiktsmessig, og om det er vakkert, men ellers er det få verdivurderinger knyttet til dette modellvalget.

De andre eksemplene jeg vil nevne, er litt annerledes i så måte. Jeg vil først gå litt inn på den såkalte Gini-indeksen. Den illustreres

ofte som vist på Figur 1. Her representerer den blå kurven (Lorenz-kurven) funksjonen $L(p)$, definert som andelen av de totale inntektene i en befolkning som inntjenes av den andelen p av befolkningen som har lavest inntekt. Den rette linjen $y = p$ i figuren kalles linjen for perfekt likhet, som betyr at p % av befolkningen står for p % av inntekten. A er arealet av området mellom $y = p$ og $y = L(p)$, B er arealet av området mellom $y = L(p)$ og den horisontale aksene, og Gini-indeksen G defineres som $G = A/(A + B)$. G blir da et tall i intervallet $0 \leq G \leq 1$, der $G = 0$ representerer perfekt likhet ($A = 0$) og $G = 1$ representerer maksimal (perfekt) ulikhet ($B = 0$), som innebærer at én person har all inntekten (Epland & Tuv, 2019).



Figur 1: Gini-indeksen.

Eksempellet med Gini-indeksen viser hvorfor begrepet *normativ modellering* blir brukt, fordi den ofte blir brukt normativt for å uttrykke verdier et samfunn er bygget på. Man kan for eksempel høre at politikere fremhever det som ønskelig at et samfunn har lav Gini-indeks. I Nasjonalbudsjettet for 2023 nevnes flere mål for inntekts- og formuesfordeling, deriblant Gini-indeksen. Økende økonomisk ulikhet beskrives som noe man forsøker å motvirke, når

det sies at «[s]osial og geografisk omfordeling er en del av hovedprosjektet for denne regjeringen» (Meld. St. 1 (2022–2023), s. 148). Denne modellen kan heller ikke forkastes gjennom en validering mot en virkelighet, men den kan kritiseres. Gini-indeksen er enkel å håndtere fordi den søker å beskrive en situasjon gjennom ett enkelt tall, og dermed er det lett å bruke den til å sammenligne ulike land. Den har imidlertid også begrensninger fordi det er flere relevante aspekter som den ikke tar hensyn til, for eksempel velferdsordninger. Slik den er konstruert, er den mer sensitiv overfor endringer på midten av inntektsskalaen, og mindre overfor endringer i topp og bunn (Sittihyt & Holasut, 2020; Steinbachner & Nagy, 2023). Et alternativ til Gini-indeksen kunne være å se på forholdet R mellom andelen av inntektene til de 10 % rikeste og de 10 % fattigste. Dette kan gi et annet bilde, for eksempel at i 2015 hadde Hellas og Thailand samme Gini-indeks, mens i Hellas var $R = 13,8$, og i Thailand var $R = 8,9$ (Sittihyt & Holasut, 2020, s. 3).

Mandatfordeling i en nasjonalforsamling er også et eksempel på preskriptiv (normativ) modellering. I Norge fordeles 150 av de 169 stortingsmandatene, distriktsmandatene, ved hjelp av en modifisert versjon av den såkalte Sainte-Laguës metode med divisorer $k_1 = 1,4$ og $k_i = 2i - 1$, $i = 2, 3, \dots$. For hvert valgdistrikt divideres stemmetallene først på k_1 , og det partiet som får størst kvotient, vinner det første mandatet. For hvert mandat et parti vinner, blir stemmetallet til partiet dividert på k_i , $i = 2, 3, \dots$, og partiet går inn i neste runde med den kvotienten som da oppstår (Valgdirektoratet, 2023; Aardal, u.å.). Dette fortsetter til alle mandatene i valgdistriktet er fordelt. I tillegg til disse 150 kommer 19 utjevningsmandater (ett for hvert valgdistrikt), men hvordan disse fordeles mellom partiene, vil jeg ikke komme inn på (se Valgdirektoratet, 2023). En annen modell, som for eksempel brukes i Storbritannia, er flertallsvalg i enmannskretser. Dette innebærer at hver valgkrets sender én representant til nasjo-

nalforsamlingen, og den kandidaten som får flest stemmer i valgkretsen, blir valgt. Denne modellen vil føre til at man får to store, dominerende partier. Også her skaper man en virkelighet gjennom en matematisk modell, og man kan diskutere hvorvidt resultatene av modellen er rettferdige eller ikke. Om fordeling av stortingsmandater, se også Smestad (2005b).

Innenfor tradisjonen kritisk matematikkundervisning finner en tallrike innslag av normativ modellering. Dette er belyst for eksempel i Tangentens temahefte om matematikk og demokrati, nr. 3 i 2005. Her beskriver Ole Skovsmose tre utfordringer ved matematikk, der én av disse er det han kaller matematikk som handling. Innenfor denne utfordringen beskriver han flere aspekter, der ett av disse er at matematikk kan forskyve og filtrere etisk ansvarlighet. Skovsmose stiller her spørsmål om hvor ansvaret for handlingene som er designet og implementert gjennom en modelleringsprosess, ligger. Han skriver videre at matematikkbaserte handlinger kan være for eksempel rimelige, forferdelige, glimrende eller velgjørende (Skovsmose, 2005, s. 7). Dette tolker jeg til å bety at modelleringsprosessen kan føre til handlinger som ikke er verdinøytrale. I dette ligger da det normative aspektet. I samme hefte skriver Bjørn Smestad om tre aspekter ved matematikk: Matematikk for å beskrive og forstå verden, matematikk for å forandre verden, og matematikk for å overkjøre motparten (Smestad, 2005a, s. 43–45). I det første aspektet kan man finne deskriptiv modellering, mens de to siste aspektene kan kobles til preskriptiv eller normativ modellering.

Modellering og tverrfaglige temaer

I den gjeldende læreplanen er det fastsatt tre tverrfaglige tema: folkehelse og livsmestring, demokrati og medborgerskap, og bærekraftig utvikling. Modellering i matematikk er særskilt godt egnet dersom en vil arbeide med matematikk knyttet til tverrfaglige tema. For eksempel vil det med utregning av mandater til nasjonalforsamlingen kunne kobles til undervisning i

samfunnsfag og temaet demokrati og medborgerskap. Sainte-Laguës metode er enkel matematisk, men den kan gi opphav til viktige diskusjoner. I den originale Sainte-Laguës metode er $k_1 = 1$, så den modifiseringen som brukes i Norge, innebærer altså å velge en annen verdi for k_1 . Her kan man regne på konkrete stemmetall fra et stortingsvalg og se hvilken effekt det ville ha på mandatfordelingen om man valgte andre verdier for k_1 .

I prosjektet CiviMatics (Interdisciplinary Mathematical Modelling Meets Civic Education)¹ ble det arbeidet med å kombinere matematikk med samfunnsfag (political education) med det formål å utvikle materiell for skole og lærerutdanning der matematisk modellering brukes for å håndtere politiske, sosiale og økologiske tema (Vajen & Strømskag, 2023). I CiviMatics har særlig det normative aspektet ved matematisk modellering blitt vektlagt, og et overordnet tema har vært *klimaendringer*. Som del av prosjektet har man blant annet sett på temaet utslipp av metangass både fra et matematikkdiraktisk og et samfunnsfagdiraktisk perspektiv (Fleischmann et al., 2021). Utgangspunktet for dette arbeidet var klimaendringene og metangassens bidrag til disse. Det overordnede spørsmålet fra matematikkfagets side var «hva er bidraget fra metangass til drivhuseffekten?», og dette spørsmålet ble belyst ved at en også trakk inn kunnskap fra kjemi og biologi. Fra den samfunnsfaglige siden var det overordnede spørsmålet «hvordan kan større bevissthet om metansyklusen skapes av eller formidles til borgerne slik at de kan ta mer kunnskapsbaserte beslutninger?». I tilknytning til dette spørsmålet ble det diskutert i hvilken grad «metanproblemet» er skapt av samfunnet, og hvilke sosiale strukturer som bidrar til det. Videre ble politiske konsekvenser av problemet og hvilke politiske beslutninger som kan tas for å håndtere det, diskutert. Disse spørsmålene vil være direkte relevante for det tverrfaglige temaet bærekraftig utvikling.

Normativ modellering i skolen

Ved NTNU har det vært tilbudt et matematikkemne som videreutdanning for lærere der matematisk modellering har vært sterkt vektlagt. Som del av vurderingsgrunnlaget i emnet har deltakerne skrevet en prosjektoppgave med matematisk modellering som tema. De har selv kunnet velge om de ville se på en deskriptiv eller en normativ (preskriptiv) modelleringsprosess. Videre ble de oppfordret til, dersom de valgte en deskriptiv modelleringsprosess, å reflektere over hvordan situasjonen kunne endres til også å omfatte normative aspekter. Jeg vil vise et eksempel fra en prosjektoppgave i dette emnet fra høsten 2022. Arbeidet med emnet er mer detaljert beskrevet i Rønning (2023). Eksempelet er gjengitt med tillatelse fra kandidaten.

Sammenligning av pris og energiforbruk til ulike kjøleskap

Utgangspunktet for denne oppgaven er kombinasjonen av økte strømpriser og utvikling av mer energieffektive elektriske produkter, for eksempel kjøleskap. I oppgaven stilles det to spørsmål:

1. Hvor lang tid tar det før man har tjent inn pengene hvis man erstatter sitt gamle kjøleskap med et nytt og mer energieffektivt kjøleskap?
2. Hvordan avhenger denne tiden av hvor gammelt det nåværende kjøleskapet er?

Videre studeres ulike situasjoner basert på antatt energiforbruk til det gamle kjøleskapet og prisen på det nye. Strømprisen estimeres ved en lineær regresjonsmodell basert på prisutviklingen på strøm de siste 20 årene. De totale strøm-utgiftene etter n år for et gammelt kjøleskap som bruker 850 kWh per år, og som i verdi settes til null, sammenlignes med et nytt kjøleskap med innkjøpspris kr 6995 og et energiforbruk på 115 kWh per år. Ved hjelp av en grafisk fremstilling konkluderer kandidaten med at etter ca fire år

ville man ha nådd et punkt der de totale utgiftene er like store, og etter det vil det nye kjøleskapet gi lavere utgifter.

Det er her verdt å merke seg at det eneste kriteriet som blir brukt for å avgjøre om man skal beholde det gamle kjøleskapet eller kjøpe et nytt, er de direkte utgiftene som forbrukeren har. Jeg vil karakterisere denne modelleringsprosessen som deskriptiv, men at den samtidig har normative aspekter. Den er deskriptiv i den forstand at den tar utgangspunkt i en virkelighet (strømpris, energiforbruk, priser på kjøleskap), gjør noen antakelser om og forenklinger av denne virkeligheten, og på denne bakgrunnen gjøres det noen beregninger for å beskrive denne virkeligheten. Spørsmålene som stilles, passer også inn i en deskriptiv modell, for eksempel hvor lang tid det tar før man har tjent inn utgiftene til et nytt kjøleskap. Samtidig har valg av spørsmål normative aspekter i og med at det eneste som tas hensyn til i vurderingen om hvorvidt man skal kjøpe nytt kjøleskap eller ikke, er forbrukerens direkte utgifter. Kandidaten reflekterer i oppgaven over disse begrensningene ved å kommentere at modellen kunne ha trukket inn andre aspekter, for eksempel ressursbruk ved produksjon av nytt og kondemnering av gammelt kjøleskap, og at slike aspekter ville være relevante fra et miljøperspektiv. Dette eksempelet viser at modellering som (tilsynelatende) er rent deskriptiv, kan ha normative aspekter. De normative aspektene kan ha innflytelse på forenklinger og antakelser som gjøres i modelleringssyklusen.

Diskusjon

Jeg har argumentert for at formuleringene i kjerneelementet Modellering og anvendelser hovedsakelig er preget av deskriptiv modellering. Dette er særlig synlig gjennom formuleringene å beskrive en virkelighet, og det å vurdere om modellen er gyldig. I normativ modellering *skapes* den virkeligheten som studeres, den finnes ikke på forhånd. Derfor gir det heller ikke mening å vurdere om en slik modell

er gyldig, fordi det ikke finnes en virkelighet å validere den mot – «confrontation of the model with reality has no meaning» (Niss, 2015, s. 73). Begrensningene ved deskriptiv modellering kommer særlig til uttrykk ved bruk av matematikk i tverrfaglige sammenhenger, og der det handler om å treffe valg basert på verdirelaterte forutsetninger. Med tanke på de tverrfaglige temaene i læreplanen vil jeg hevde at normativ modellering er særdeles relevant for temaene demokrati og medborgerskap, og bærekraftig utvikling. Eksempelene fra eksamensbesvarelsene ovenfor kan klart knyttes til bærekraftig utvikling. Det kan dermed fremstå som noe av et paradoks at temaet bærekraftig utvikling ikke inngår i læreplanen for matematikk.

Note

- 1 <https://www.idd.uni-hannover.de/en/research/projekte/civimatics>

Referanser

- Epland, E. & Tuv, N. (2019, 9. mai). *Slik måler SSB ulikhet*. Statistisk sentralbyrå. <https://www.ssb.no/inntekt-og-forbruk/inntekt-og-formue/statistikk/inntekts-og-formuesstatistikk-for-husholdninger/artikler/slik-maler-ssb-ulikhet>
- Fleischmann, Y., Rønning, F., Strømskag, H., Berger, C. & Mogiani, B. (2021). *Methane emissions causing climate change: An interdisciplinary inquiry*. The CiviMatics Consortium. https://www.idd.uni-hannover.de/fileadmin/idd/Projekte/CiviMatics/Fleischmann_et_al._2021_Methane_Emission_Inquiry.pdf
- Meld. St. 1 (2022–2023). *Nasjonalbudsjettet 2023*. Finansdepartementet. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-1-20222023/id2931224/>
- Niss, M. (2015). Prescriptive modelling – challenges and opportunities. I G. A. Stillman, W. Blum & M. S. Biembengut (Red.), *Mathematical modelling in education research and practice. Cultural, social and cognitive influences* (s. 67–79). Springer.
- Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet.
- Rønning, F. (2023). Mathematical modelling in a professional development programme. I B. Vajen & H. Strømskag (Red.), *CiviMatics: Interdisciplinary mathematical modelling meets civic education* (s. 141–151). The CiviMatics Consortium.
- Sittihyot, T. & Holasut, K. (2020). A simple method for measuring inequality. *Palgrave Communications*, 6(112), 1–9.
- Skovsmose, O. (2005). Kritisk matematikundervisning – for fremtiden. *Tangenten – tidsskrift for matematikundervisning*, 16(3), 4–11.
- Smestad, B. (2005a). Matematikkens makt. *Tangenten – tidsskrift for matematikundervisning*, 16(3), 43–45.
- Smestad, B. (2005b). I disse valgtider. Om matematikken bak fordelingen av stortingsrepresentantene. *Tangenten – tidsskrift for matematikundervisning*, 16(3), 46–48.
- Steinbachner, J. & Nagy, N. (2023). Is climate catastrophe fair? Fairness, responsibility and decolonial perspectives. I B. Vajen & H. Strømskag (Red.), *CiviMatics: Interdisciplinary mathematical modelling meets civic education* (s. 152–163). The CiviMatics Consortium.
- Utdanningsdirektoratet. (2020). *Matematikk 1-10 (MAT01-05)*. Kjerneelement. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nno>
- Vajen, B. & Strømskag, H. (Red.). (2023). *CiviMatics: Interdisciplinary mathematical modelling meets civic education*. The CiviMatics Consortium. <https://www.idd.uni-hannover.de/en/research/projekte/civimatics#c116141>
- Valgdirektoratet. (2023, 11. januar). *Valoppgjer ved stortingsval*. Valgdirektoratet. <https://www.valg.no/om-valg/valgene-i-norge/stortingsvalg/valgopp-gjor-ved-stortingsvalg/>
- Aardal, B. (u.å.). *Sainte-Laguës metode*. <https://aardal.info/valgordningens-enkle-mysterier-sainte-laguës-metode-steg-for-steg/>

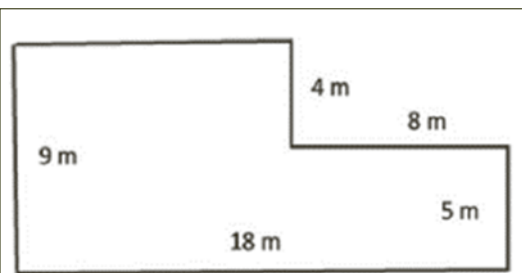
Borromeo Ferri

Å endre lærebokoppgave til modelleringsproblem

Matematisk modellering har blitt en nøkkelkompetanse i skole- og læreplaner i mange land, men likevel skjer gjennomføringen av matematisk modellering i skolen sjelden. Dette til tross for at den internasjonale forskningen på området understreker betydningen av å arbeide med modellering, og har kommet med praktiske tips og eksempler på modelleringsoppgaver til bruk for alle trinn i skolen. I denne artikkelen skal jeg vise et praktisk eksempel på et modelleringsproblem og dets gjennomføring for elever i barne- og ungdomsskolen. Målet med artikkelen er å klargjøre, i tillegg til å avklare begrepet matematisk modellering, hvordan lærere med enkle grep kan gjøre matematisk modellering tilgjengelig og engasjerende for elevene og seg selv. Matematisk modellering er ikke vanskelig å mestre, og det får i tillegg elevene til å tenke annerledes om matematikk og dens anvendelser i den virkelige verden. Basert på min 25 års erfaring med undervisning i modellering i skolen og i lærerutdanning, og som forsker på feltet, tror jeg det lille eksempelet i artikkelen vil motivere

lærere til å modellere med elevene sine på skolen allerede i morgen.

Jeg vil gjerne få introdusere lærer Kurt. Han har 12 års erfaring i å undervise i matematikk i grunnskolen. Allerede i 6. og 7. klasse introduserte han temaet beregning av overflatearealer for sine elever, og de arbeidet med arealoppgaver knyttet til ulike gitte polygoner. For å forberede elevene i 9. klasse for Pytagoras' setning ønsket Kurt å utdype beregningen av overflateareal. Elevene fikk oppgaven «Parkeringsplassen» (se Figur 1). Oppgaven har åpenbart en pseudokontekst.



I Oslo var et stort firma heldig og fikk tillatelse til å bygge en parkeringsplass. Beregn overflaten til den nye parkeringsplassen.

Figur 1: Parkeringsplassen

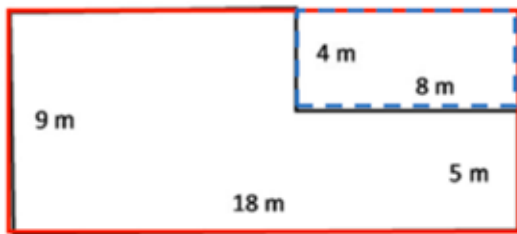
Kurt hadde sett for seg at elevene først skulle beregne den totale størrelsen på det «store» (rød farge) rektangulære området (se Figur 2), deretter beregne størrelsen på det «lille» (i blått)

Rita Borromeo Ferri

Universitetet i Kassel, Tyskland

borromeo@mathematik.uni-kassel.de

Oversatt av Pauline Vos og Inger Elin Lilland,
Høgskulen på Vestlandet



Figur 2: Løsningsstrategi for «Parkeringsplassen».

rektangelet til høyre, for til slutt å trekke det minste området fra det største.

Denne oppgaven er ikke en utfordring for alle elever. Målet må være å gjøre en slik tradisjonell oppgave mer dynamisk for elevene. Hvordan kan han motivere dem til å jobbe som et team med et problem i den virkelige verden og presentere ideene? Hvordan kan Kurt endre på «Parkeringsplass»-oppgaven for å fremme en slik praksis for en 9. klasse?

1. Hva er matematisk modellering, og hva er modelleringsproblemer?

I internasjonal forskning finner man ulike forestillinger om matematisk modellering. Det er likevel en sterk konsensus om at matematisk modellering i skolen, men også i den profesjonelle virkeligheten, kan beskrives som en aktivitet som involverer overganger mellom vir-

Parkeringsgarasjen

I Oslo skal det bygges et nytt parkeringshus på en eiendom på 4226 m², som en del av et nytt kjøpesenter. Arkitekten bør på forhånd bestemme det omtrentlige antallet biler som får plass i parkeringshuset. Hva tenker du, hvor mange biler bør stå i det nye parkeringshuset til neste år?

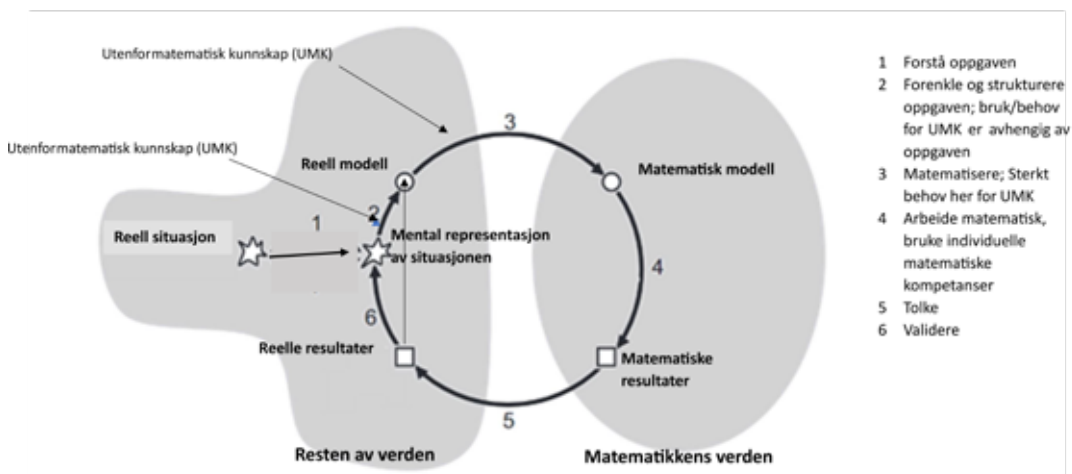


Begrunn og spesifiser løsningen din.

Figur 4: Modelleringsproblem: «Parkeringsgarasjen».

kelighet og matematikk. Disse overgangene er et vesentlig trekk ved matematisk modellering (Borromeo Ferri, 2013). Figur 3 viser trinnene i en 'ideell modelleringsprosess'. I realiteten går elevene fram og tilbake gjennom syklusen til de får en tilfredsstillende løsning.

Modelleringsproblemer tydeliggjør de ulike trinnene av syklusen. Dette fører til spørsmålet:



Figur 3: Matematisk modelleringssyklus

Hva er et modelleringsproblem, og hvordan kan det karakteriseres. Se på oppgaven (Figur 4) kalt «Parkeringsgarasjen».

Forskjellene mellom hva som kan være et modelleringsproblem, og hva som ikke er det, blir tydelige når man sammenligner «Parkeringsplassen» fra Kurts undervisning og «Parkeringsgarasjen». Begge oppgavene har en kontekst, men bare «Parkeringsgarasjen» er et modelleringsproblem. Foruten størrelsen på eiendommen (4226 m^2) er det ikke gitt ytterligere data i oppgaven. Elevene har fått en reell situasjon. Dette er startposisjonen i den demonstrerte modelleringszyklusen. Skal man fortsette, må problemet forstås av elevene (trinn 1, forstå oppgaven), noe som hjelper til med å få en mental representasjon av situasjonen. Dette betyr at en person på den ene siden forestiller seg situasjonen gitt i problemstillingen eller har assosiasjoner som er knyttet til egne erfaringer med parkeringsgarasjer, med biler osv. På den andre siden må elevene forstå innholdet i problemet. I dette tilfellet må elevene finne antall biler som passer i denne garasjen, basert på dataene for den gitte eiendommen.

Det andre trinnet (2) i syklusen handler om at elevene må gjøre antagelser og forenkle problemet. Innenfor dette trinnet trengs det mye data, som elevene må undersøke. Dataene kan finnes via internett, bøker eller annet som lærerne tilbyr dem. Det som er viktig, er initiativet til gruppen for å sikre de nødvendige dataene. For eksempel må elevene undersøke følgende:

- Størrelsen på en bil (lengde, bredde)
- Størrelsen på en enkelt parkeringsplass
- Størrelsen på garasjen
- Hvor mange plan bør parkeringsgarasjen ha, hva er realistisk?
- Parkeringsplasser for funksjonshemmede – hvor mange?
- ...

For å få en oversikt over en inndeling av området og hvilke elementer som skal være del av parkeringshuset, kan en skisse være til hjelp. Skissen og listen av data forstås som den «reelle modellen». Det er veldig mange ting å finne og mange aspekter å tenke på og diskutere under modelleringsprosessen, men også etterpå når løsningene presenteres.

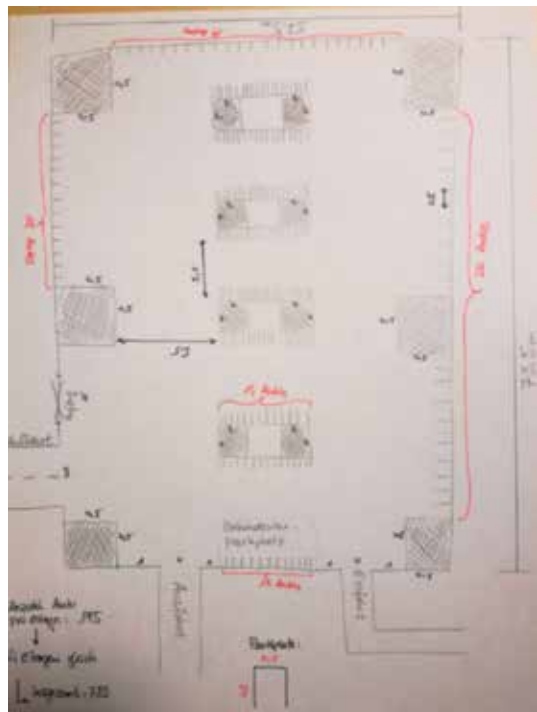
I trinn 3 brukes forutsetningene for å matematisere og for å bygge den matematiske modellen. Til problemet «Parkeringsgarasjen» består den matematiske modellen av arealberegninger og dermed av multiplikasjoner. For å finne et tilfredsstillende matematisk resultat kan det være nødvendig å ta følgende faktorer i betraktning (trinn 4):

- Rektangulært grunnplan for god utnyttelse av arealet
- Plassering av parkeringsplasser
- Antall heiser
- Forbindelser ved hjelp av adkomst til/fra etasjer
- Antall og arrangement av bærestolper/søyler
- Arrangement av nødutganger og plassering av inn- og utganger.

I det følgende vises en prototypeskisse for ett nivå i parkeringsgarasjen:

Basert på forutsetningen om at grunnplanet skal være rektangulært, kan vi fra et gitt gulvareal på 4226 m^2 ha en lengde på $73,5 \text{ m}$ og en bredde på $57,5 \text{ m}$: $57,5 \text{ m} \cdot 73,5 \text{ m} = 4226,25 \text{ m}^2$. Dette er en god tilnærming til 4226 m^2 .

Søylene i ytterkant av parkeringshuset skal hver måle $4,5 \text{ m} \cdot 4,5 \text{ m}$. For å spare plass og for å la sjåfører komme inn og ut måler vi dimensjonene på en parkeringsplass til $2,5 \text{ m} \cdot 4,5 \text{ m}$. De åtte søylene arrangert i par i midten har hver dimensjon $2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m}$. Innkjøringene i etasjene mellom radene med parkeringsplasser skal være $5,5 \text{ m}$ i bredde. Inn- og utgang er hver på 4 m ,



Figur 5: Skisse «et nivå av parkeringsgarasjen».

og rampen for opp- og nedstigning mellom etasjene er til sammen 8 m i bredden. I tillegg kommer heis for kundene på 6 m i bredden. Setter vi elementene som skal vurderes, i forhold til lengden og bredden på parkeringsgarasjen, er det klart at dimensjonene på de enkelte elementene i sum ikke må overstige disse målene.

På østsiden av parkeringsgarasjen er det tre søyler, som til sammen opptar en lengde på 13,5 m. Det er dermed 60 m igjen til parkeringsplasser med en bredde på 2,5 m hver. Som et resultat vil 24 biler kunne stå ved siden av hverandre på denne siden ($60 \text{ m} : 2,5 \text{ m} = 24$). På nordsiden er to søyler, som til sammen opptar 9 m. Her vil det være plass til 19 biler ved siden av hverandre ($48,5 \text{ m} : 2,5 \text{ m} = 19,4$).

På den vestlige siden trekker du fra $3 \cdot 4,5 \text{ m} = 13,5 \text{ m}$ for søyler, 6 m for heisen og 8 m for opp- og nedstigninger, og står igjen med en lengde på 46 m. Derfor er det her plass til 18 parkeringsplasser ($46 \text{ m} : 2,5 \text{ m} = 18,4$). På sørsiden, mellom inn- og utkjøring, ligger par-

keringsplasser for bevegelseshemmede. Trekk fra $2 \cdot 4,5 \text{ m} = 9 \text{ m}$ til søylene og $2 \cdot 6 \text{ m} = 12 \text{ m}$ av innganger og utganger. Da sitter man igjen med 14 parkeringsplasser ($36,5 \text{ m} : 2,5 \text{ m} = 14,6$). For all parkering skal det i midten langs søylene være en bredde på $2 \cdot 4,5 \text{ m} = 9 \text{ m}$ for ytre støtter og $2 \cdot 5,5 \text{ m} = 11 \text{ m}$ for passasjerer. Når disse trekkes fra, sitter vi igjen med plass til en rad med 15 biler ($37,5 \text{ m} : 2,5 \text{ m} = 15$). Legges parkeringsplassene til de enkelte områdene sammen, beregnes parkeringskapasiteten for én etasje til å være: 8 · 15 biler av de midterste parkeringsplassene + 24 biler på østsiden + 19 biler på nordsiden + 18 biler på vestsiden + 14 biler på handikapparkeringsplassene gir 195 parkeringsplasser per etasje. Parkeringsgarasjen skal ha fire etasjer, og har dermed en total kapasitet på $4 \cdot 195 = 780$ parkeringsplasser.

Dette er det matematiske resultatet, men nå skal dette tolkes, som er trinn 5 i modellerings-syklusen. Elevene bør tenke over hva 780 betyr i denne sammenhengen, som er antall parkeringsplasser i hele parkeringsgarasjen. Til slutt i trinn 6, og dette er den viktigste fasen, her må elevene validere resultatet og spørre seg selv: Er 780 parkeringsplasser realistisk eller ikke? Når de gjør dette, må de gå tilbake til antagelsene de gjorde, og selvfølgelig til deres matematiske modell. De kan også sammenligne løsningen deres med parkeringshus i virkeligheten og så videre. Validering er en sentral del av modellering, fordi elevene får kompetanse til å kunne stille kritiske spørsmål til resultatene sine og verden de lever i.

Her er det vist kun én mulig modell og løsning basert på forutsetningene. Andre resultater, basert på forutsetningene, i betydningen antall biler i parkeringshuset er også mulig. Så lenge resultatene er realistiske og kan valideres, er en rekke korrekte resultater mulig. I matematikkfaget i skolen er det ikke uvanlig at det skal være ett og bare ett riktig svar på oppgaver, som i den opprinnelige parkeringsplassoppgaven til Kurt, og de fleste elever har av den grunn ofte problemer med å akseptere mer enn ett riktig

resultat på et matematisk problem. Dessverre innebærer dette et ensidig syn på matematikk. Her kan matematiske modelleringsproblemer bidra til å gi elever et mer dynamisk og anvendt perspektiv på matematikk.

Sammenligningen av de to oppgavene «parkeringsplass» og «parkeringsgarasjen» illustrerer at et modelleringsproblem har spesielle egenskaper. Maaß (2007) utviklet et flerdimensjonalt klassifiseringsskjema for modellering av problemer og tilsvarende aktiviteter for klasserommet. Videre pekte hun på noen egenskaper som kan sees på som typiske for modelleringsoppgaver. Ifølge Maaß er modelleringsoppgaver:

åpne, komplekse, realistiske og autentiske problemer, og løsbare gjennom en modelleringssprosess.

Disse kriteriene er svært nyttige for å sjekke om det er et modelleringsproblem eller bare en oppgave med en pseudokontekst. Før vi viser til gjennomføringen av «Parkeringsgarasjen» i en klasse, skal vi i neste avsnitt se på hvordan Kurt kunne ha endret den kjedelige oppgaven «Parkeringsplassen» fra oppgaveboken til modelleringssproblemet «Parkeringsgarasjen».

For det kan være en lur strategi å se på matematiske oppgaver i skolebøkene med følgende spørsmål i tankene: Hvordan gjøre oppgavene mer interessante, motiverende og med høyere kognitive krav ved å endre dem til problemer fra det virkelige livet? Følgende aspekter er viktige, både for å gjøre en vellykket transformasjon av en oppgave til et modelleringsproblem og for å bruke den effektivt i klasserommet (for mer, se Borromeo Ferri, 2018):

- redusere de gitte dataene eller utelate alle data og spesifikk lukkede oppgavespørsmål
- endre den virkelige situasjonen om nødvendig for å gjøre den mer autentisk
- formulere et åpent spørsmål

- definere verktøyene elevene kan bruke (internett, bøker, programvare, spesialmaterieell osv.)

2. Glimt fra en modelleringstime med «Parkeringsgarasjen»

I det følgende vises utdrag fra en 90-minutters undervisningstime med en 9. klasse i Tyskland. Lærer Kurt hadde invitert meg til å bli med på undervisningstimen, som ble beskrevet innledningsvis. Før timen startet, fortalte Kurt meg om målet sitt med undervisningen – at han ønsket å motivere elevene mer for matematikk, men han visste ikke hvordan. Så han startet timen og brukte oppgaver som «Parkeringsplassen». Etter at Kurt hadde deltatt på et etterutdanningskurs for lærere i matematisk modellering, begynte han med å prøve ut modelleringsproblemer i klassen.

I etterutdanningskurset lærte Kurt å endre oppgaver fra læreboken til modelleringsoppgaver, og i samspill med de andre deltakerne på kurset endret Kurt oppgaven «Parkeringsplassen» til «Parkeringsgarasjen». Deretter planla og gjennomførte Kurt på egen hånd en undervisningsplan i egen klasse, mens jeg observerte aktivitetens forløp i klasserommet.

9.-klassen til Kurt bestod av 18 elever med stor variasjon med hensyn til matematikkprestasjoner. I tillegg var elevene ikke vant til å samarbeide i grupper, og matematisk modellering er en gruppeaktivitet. Det å samarbeide konstruktivt som gruppe er noe som må læres. Dette er et viktig mål da komplekse problemer i virkeligheten løses i bedrifts- eller forskningsteam og ikke av en enkelt person. Derfor passer samarbeidslæring perfekt med matematisk modellering.

Undervisningsplaner knyttet til arbeid med matematisk modellering i klasserommet kan struktureres på forskjellige måter. Kurt valgte i sin undervisningsplan å dele en undervisningsøkt på 90 minutter inn i fem faser: 1. introduksjon, 2. organisering (gruppeinndeling,

avklaring av spørsmål osv.), 3. arbeid (elevene arbeider i grupper med problemet og forbereder en plakat med gruppens løsning), 4. presentasjon (noen grupper velges ut til en muntlig presentasjon, mens de andre gruppene blir invitert til å føye til ideer, resultater og gi forslag til andre matematiske modeller), 5. validering og refleksjon (plenumsdiskusjon hvor de ulike modellene reflekteres over og valideres).

Kurt startet timen med å minne elevene om å fordype seg i formler for overflateareal. «Å nei, ikke nå igjen!» utbrøt elevene, «det er kjedelig, og vi vet hvordan vi skal gjøre dette». «Kjedelig er én ting», sa Kurt, «men hvis du virkelig kan det, kan du bevise det selv med dette virkelige problemet her.» Dette var en god start, for han ønsket å minne elevene på at de hadde arbeidet med dette temaet med en lignende oppgave for fire måneder siden.

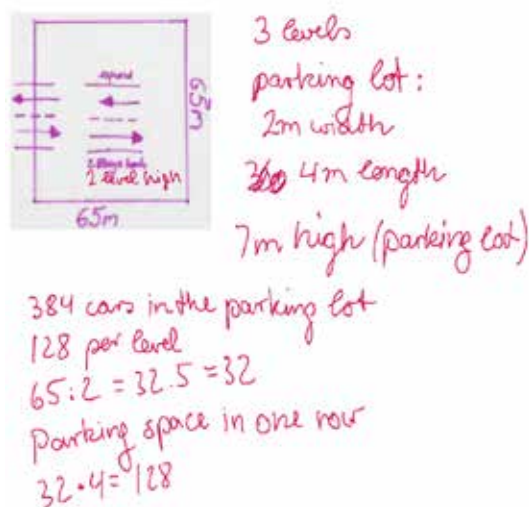
De fire gruppene i klassen arbeidet intensivt med problemet og fikk noen utfordringer i starten fordi det manglet data, som de selv måtte finne. Ofte spurte noen elever om formler for å beregne ulike overflatearealer. Da foreslo Kurt at de skulle se i læreboken, og han ble overrasket: «Å, dere sa jo at dere kunne formlene.» «Ja», sa én elev, «men dette er en virkelig sammenheng, vi vet at vi må anvende det, det er annerledes!»

Gruppene produserte ulike løsninger og hadde grundige diskusjoner om problemet. Kurt bestemte først at elevene ikke skulle bruke internett, kun bildet vist i teksten og deres egne erfaringer fra virkeligheten. Alle elevene var enige i at de hadde sett en parkeringsgarasje før og ikke trengte flere bilder fra nettet. Når det gjaldt størrelsen på en bil, sjekket Kurt de estimerte størrelsene til hver gruppe ved å gå rundt i klasserommet. Han forsøkte å bruke strategien med minimale og tilpassede inngrep fra sin side, slik at elevene arbeidet mest mulig selvstendig. Typer av lærerinngrep under modelleringsaktiviteter hadde også vært et tema i etterutdanningskurset. Nedenfor vises løsninger fra to grupper, som skiller seg fra hverandre når det gjelder kvaliteten på modelleringsprosessen og

hvordan plakatpresentasjonen ble utformet.

Den første gruppen (Student løsning 1) så ikke ut til å ha en klar idé om hvordan de skulle planlegge parkeringsplassen, selv om de så på bildet.

Den valgte skissen fremstår som tilfeldig og ustrukturert. Første etasje var formet som en firkant og var den eneste etasjen som var riktig merket. Det er vanskelig kun ut fra den skisserte elevløsningen å rekonstruere de enkelte modelleringstrinnene for hvor de enkelte resultatene ble oppnådd. Generelt jobbet denne gruppen på en ustrukturert måte.



Figur 6: Elevløsning 1 (Parkeringsgarasjen).

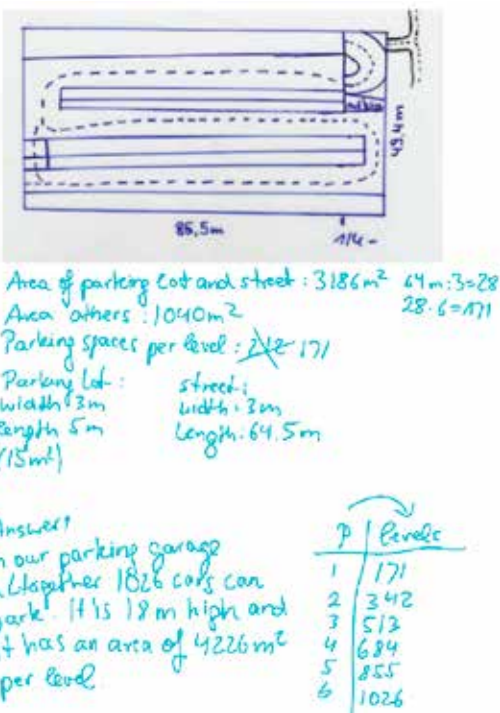
Valget av størrelse på parkeringsplassen, 2m·4m, ser ut til å være gjort uten mye overveielse og uten introduksjon av en sammenlignende størrelse. Høyden på parkeringshuset er oppgitt til 7 m, selv om dette var irrelevant for oppgaven. Gruppen oppgir et totalt antall parkeringsplasser for parkeringsgarasjen, men uten å vise til en tydelig beregning som for eksempel tar utgangspunkt i hvor mange biler som passer på ett gulv. Når det er sagt, så kan vi finne et ufullstendig forsøk på å beregne et mulig antall parkeringsplasser per etasje. Denne elevløsningen mangler en klar struktur som kunne vært manifestert gjennom

tydelige beregninger og svar. Videre er konstruksjonen og planleggingen av parkeringsgarasjen lite gjennomtenkt, da det ble antatt at det 4226 m² store området skulle være helt dekket med parkering. Her mangler vurderinger for tilgangsvier, heiser og søyler. Etter presentasjonen til denne gruppen i plenum hadde hele klassen en intens og livlig diskusjon om matematikk og hvordan matematikk er nødvendig for flere yrker, for eksempel for ingeniører som planlegger slike parkeringshus.

Kurt var fornøyd, for elevene hans hadde aldri tidligere vært involvert i slike kritiske diskusjoner. Spesielt aspektet med at søylene ble glemt under planleggingen av parkeringshuset, fikk denne gruppen til å tenke seg grundig om. «Dette er mer enn bare matematikk», sa en av elevene, «du må åpne øynene for den virkelige verden!» For Kurt var dette et klart tegn på interesse og økt motivasjon blant elevene for matematikk.

Den andre gruppeløsningen er annerledes, og under diskusjonen gav spesielt denne gruppen mange hint til klassekameratene med den forrige løsningen.

Denne gruppen skisserte parkeringsgarasjen sin med parkeringsplasser i seks lange rader og en vei som slynger seg som en slange gjennom parkeringsgarasjen. De valgte en rektangulær form på grunnflaten med en bredde på 49,4 m og en lengde på 85,5 m. Det er uklart hvordan gruppen kom fram til disse verdiene. Beregningen er generelt forståelig skrevet, selv om sammenhengene av og til kan fremstå noe uklare. Det er planlagt 3186 m² for parkering og vei, og 1040 m² for «andre formål». Tilsynelatende ble bare omtrent en fjerdedel av det tilgjengelige arealet på 4226 m² planlagt for heiser og søyler. En parkeringsplass er estimert med en bredde på 3 m og en lengde på 5 m eller 15 m², noe som er et ganske realistisk mål. Veiene er av gruppen planlagt med en bredde på 8 meter og en lengde på 64,5 meter. Bredden virker tilstrekkelig til at to biler skal kunne passere hverandre. Hvordan gruppemedlemmene har kommet



Figur 7: Elevløsning 2 (Parkeringsgarasjen).

fram til lengden på veiene, er ikke klart. I tillegg er det en selvmotsigelse i planleggingen. Parkeringsgarasjen er bestemt av gruppen til å ha en bredde på 49,4 m, men legger en sammen dimensjonene til seks rader med parkeringsplasser og tre veier, burde den faktisk ha en bredde på 54 m (6 · 5 m + 3 · 8 m = 54 m). Videre deler gruppemedlemmene lengden på veiene der parkeringsplassene skal være, med bredden på en parkeringsplass: 64 m : 3 m = 28. Dette tallet blir multiplisert med seks, som er antallet rader. Men her kommer elevene fram til et resultat på 171 plasser og ikke 28 · 6 = 168. 171 brukes da som antallet parkeringsplasser for ett plan og blir multiplisert med seks i siste trinn, ettersom gruppen planlegger seks etasjer: 171 · 6 = 1026. Gruppen avslutter arbeidet med eksplisitt å formulere resultatet på antall biler som kan parkere i parkeringsgarasjen, på tekstform. Dette er bemerkelsesverdig, da det knytter resultatet til den virkelige situasjonen. Alt i alt virker løsningen til gruppen forståelig, selv om det kan se

ut som om noen isolerte antagelser er vilkårlige og det er gjort feil i beregninger.

Elevene i Kurts klasse er på god vei til å utvikle sin modelleringskompetanse, som bare er mulig når elevene arbeider regelmessig med modelleringsproblemer. Kurt jobber også med å utvikle sin egen kompetanse som lærer i matematisk modellering. «Det ble klart for meg», sa han, «at modellering ikke er mystisk eller for vanskelig for undervisning og læring. På den annen side, som praktiserende lærer, trenger du opplæring for å få grunnleggende kunnskap om modellering og utvikle egen modelleringskompetanse. Mine elevers syn på matematikk endret seg gjennom modellering, og modellering gjør min matematikkundervisning fantastisk!»

3. Oppsummering og diskusjon

Målet med artikkelen var å beskrive hva matematisk modellering innebærer, å vise hva som kjennetegner modelleringsproblemer sammenlignet med oppgaver fra øvingsboken, og hvordan modellering kan implementeres i matematikkundervisningen. Historien om lærer Kurt viser at opplæring i hvordan man underviser i matematisk modellering, er viktig for gjennomføringen i skolen. Matematisk modellering gir elever et klart perspektiv på bruken av matematikk i den virkelige verden. «Parkeringsgarasjen» er et godt eksempel for å vise elever at for eksempel ingeniører også trenger matematikk for å konstruere slike objekter. Selvfølgelig kreves det, i tillegg til matematikken som ble brukt på et svært lavt nivå i 9. klasse, også andre

fagområder som fysikk og kunnskap om statikk for å kunne bygge et parkeringshus i virkeligheten. Disse aspektene ble overhodet ikke diskutert i denne leksjonen. Selv om elevene kunne anvende matematikken, var det fortsatt nytt for dem å lage antagelser, matematisere, tolke og validere.

Læring av modellering tar tid for både elever og lærere, men det viktige er å starte med det i morgen, bare ved å ta utgangspunkt i «Parkeringsgarasjen» og dermed følge etter Kurt.

Referanser

- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 86-95.
- Borromeo Ferri, R. (2007). Modelling from a cognitive perspective: Individual modelling routes of pupils. I C. Haines; P. Galbraith; W. Blum; S. Khan. (Red.) *Mathematical Modelling. Education, engineering and economics* (ss. 260-270). Horwood Publishing.
- Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematical Modelling in European Education. *Journal for Mathematics Education at Teachers College*, Vol. 4, 18-24.
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How To Teach Mathematical Modelling – in School and Teacher Education*. Springer.
- Maaß, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn? I C. Haines; P. Galbraith; W. Blum; S. Khan. (Red.) *Mathematical Modelling. Education, engineering and economics* (pp. 65-78). Horwood Publishing.

Skånstrøm, Blomhøj

MatematikMorgener

Det er tidlig mandag morgen i 7. klasse. Der er stadig 10 minutter til timen starter. Ikke alle eleverne er kommet frem endnu.

Læreren, Aksel er ved at pakke sin ting ud og starte computeren, mens han lytter til eleverne samtale:

- Liv Det bare heldigt, jeg nåede det i dag, selv om bussen var forsinket. Men så kunne jeg da nå at tjekke både Facebook og Insta her til morgen.
- Noah Min far havde lovet at køre mig, men han skulle afsted alt for tidligt, så jeg tog cyklen min.
- Oliver Hjemme hos mig skulle min søster absolut bruge et kvarter på baderummet. Og så havde nu brugt det sidste tandpasta.
- Gry Jeg kunne simpelt hen ikke finde ud af hvilket tøj jeg skulle have på
- Oliver Du har bare for meget at vælge imellem ... :-)

Mikael Skånstrøm

Læreruddannelsen i VIA, Nørre Nissum
misk@via.dk

Morten Blomhøj

DPU, Aarhus Universitet
blomhoej@edu.au.dk



- Lucas Jeg var hos min far i weekenden, og så har jeg jo længere til skole, så jeg skulle tidligere op.

Her bryder Aksel ind i elevernes samtale:

- Aksel I skal da bare tage jeres matematikbriller på, lige når I vågner - alt det I taler om lige her, har jo med matematik at gøre!
- Liv Hvordan dog det?
- Aksel Hele livet er fyldt med matematik - det gælder bare om at få øje på det. Så næste gang laver vi alle et par matematikbriller. Husk mig lige på det, inden vi skilles i dag: I medbringer selv et par briller, så tager jeg alt det andet, vi skal bruge, med.

MatematikMorgener er et undervisningsforløb med fokus på undersøgende matematikundervisning og matematisk modellering. Forløbet er gennemført på folkeskolens 5.-10. klasse på læreruddannelsen. I starten af forløbet fremstiller eleverne/stu-

denterne et par matematikbriller, som en del af metaforen: 'at se på sin omverden med matematikbriller' (Blomhøj & Skånstrøm, 2006).

Når matematik anvendes til at beskrive, beregne, forudsige, forstå eller forme forhold i den virkelige materielle verden, er der altid involveret en eller anden form for model. Hvis man i matematikundervisningen arbejder med at bruge matematik på problemstillinger uden for matematikken selv, arbejder man derfor med matematisk modellering.

I Danmark er 'Modelleringskompetencen' en af de seks matematiske kompetencer i Fælles Mål (2020).

Modellering som undervisningsform handler om at arbejde bevidst med relationen mellem matematik og den virkelige verden. Det kræver, at man tager både virkeligheden og matematikken alvorligt. En matematisk model angår en relation mellem noget matematik og en virkelig situation, og kun hvis man kan fastholde en synsvinkel, hvor man kan se både matematikken og virkeligheden under et, kan man erkende, kritisere eller bevidst opstille en matematisk model. Det kræver lærerens bevidste fokus, hvis de anvendelser af matematik som eleverne arbejder med skal bidrage til, at de oplever og forholder sig til relationen mellem matematikken og deres omverden.

Det behøver imidlertid på ingen måde at være avanceret matematik. Det vigtige er, at der skabes situationer, hvor eleverne på en og samme tid både kan opleve og forholde sig til relationen mellem et fænomen eller en problemstilling, som giver mening for dem i forhold til deres viden og hverdagserfaringer, og en matematisk beskrivelse heraf.

Matematikken kan være et simpelt regnestykke, som eleverne selv kan opstille ud fra en problemstilling, der giver mening for dem, og hvor tal med enheder og regneudtryk har direkte forbindelse til virkeligheden. Eksempler kan være beregning af, hvad det koster at male et klasseværelse eller af hvor mange elever, der kan gå på skolen, hvis alle klasser skal have

deres eget klasselokale. Det sidste giver grundlag for, at man kan beregne skolens aktuelle udnyttelsesprocent. En beregning og et tal, der kan få politisk betydning ved sammenligning af skoler i en situation med skolelukninger. Sådanne eksempler giver mulighed for, at eleverne kan tage stilling til relevansen af beregninger, som deres antagelser bygger på, bestemmelse af de anvendte talstørrelser og deres usikkerhed, samt mulige anvendelser af resultaterne. Set fra et modelleringsperspektiv er det essentielt, at eleverne kan opleve og forholde sig til relationen mellem en for dem meningsfyldt problemstilling fra virkeligheden sammen med noget matematik, som de kan forstå og beherske. Hvis det dyrkes tilstrækkeligt ofte i undervisningen, vil eleverne kunne opleve, at matematik er en måde at se og forstå deres omverden på.

Det er denne tilgang, der er rammesat og udfoldet i *MatematikMorgener*. Her er det elevernes dagligdagserfaringer, der er udgangspunktet. Denne tilgang har vist sig at være effektiv til at engagere elever i arbejdet med matematisk modellering på 6.-8. klassetrin. På de ældste klassetrin i ungdomsskolen og i videregående skole kan udgangspunktet være brug af matematik i samfundsmæssige problemstillinger. Velegnede eksempler kan fx findes gennem matematisk avislæsning, hvor eleverne bliver udfordret til selv at finde eksempler i avisen, hvor der bliver brugt matematik. En matematikundervisning, der igennem hele skolesystemet behandler matematikkens relation til virkeligheden er essentiel for undervisningens bidrag til elevernes almene dannelse og deres mulighed for aktiv medleven i et demokratisk samfund.

At tage sine 'matematikbriller' på kan bruges som metafor for et ønske om at få øje matematikken i alle typer af situationer.

Hvordan kan så en undervisning med dette udgangspunkt og sigte tilrettelægges og gennemføres?

Her er inspiration at hente i den undersøgende matematikundervisning, hvor der arbejdes med denne grundlæggende didaktisk model med tre faser (Blomhøj & Skånstrøm, 2016):

- 1) Iscenesættelsen
- 2) Elevernes selvstændige undersøgende arbejde
- 3) Fællesgørelsen

Iscenesættelse som pædagogisk virkemiddel

En iscenesættelse som i *Matematik Morgener* muliggør et samspil mellem elevernes erfaringer, undervisningens indhold og matematisk modellering. Den kan tillige skabe en ramme omkring undervisningen, der giver plads til alle elever. Den enkelte elev kan bruge sit eget sprog til at give mening til den problemstilling og den matematik, der arbejdes med.

Iscenesættelsen giver mulighed for, at elev-

erne selv kan danne sig en mening med deres konkrete faglige undersøgelser, indsamling og bearbejdning af data. Det er iscenesættelsen, der giver grundlaget for, at eleverne kan styre deres egen virksomhed. Når det sker, opstår nye pædagogiske muligheder. I samtaler med elever, der er optaget af at løse et problem, som de føler er deres eget, har læreren gode muligheder for at få indsigt i elevernes tankeprocesser, og der opstår uvilkårligt muligheder for meget læringseffektive dialoger mellem lærer og elev og – ikke mindst – mellem eleverne indbyrdes.

Et eksempel på iscenesættelse kan være som teksten i rammen, som enten vises til eleverne på en skærm eller udleveres til hver enkelt elev som en invitation.

I de danske *Fælles Mål* beskrives elevernes modelleringskompetence på tre niveauer, som hver for sig modsvarer eksempler på det, der

Vækkeuret ringer!

Din hånd rammer uret, som falder på gulvet. Du får fat i det og slukker det med et suk ...

Du vender dig om på den anden side og prøver at forestille dig, at det er blevet lørdag. Men så mærker du den – lysten. Lysten til at komme i gang fordi der står Matematik Morgener på skemaet.



Klokken 8:00 skal du være sammen med alle de andre. En ny og spændende dag står forventningsfuld og venter på at blive taget i brug af netop dig!



Du børster tænder og forestiller dig måske, hvor sjovt det ville være at se, hvor lang en stribe du kunne lave, hvis du rykkede al tandpastaen ud ...

Du lader det varme vand pjaske ned over din krop i flere minutter - hov, hvor meget vand gik der egentlig til det?

Der er også matematik i:

Klokken; vejret; værelset; morgenmaden; reiseplanen; cykelturen; blandt andet

Du skal lave nøjagtige optegnelser over det, du ser med dine matematikbriller – fra du vågner, til du møder på skolen. Din notater skal så bearbejdes med matematik, og dine resultater og overvejelser skal formidles på slide til klassens fælles powerpoint-præsentation.

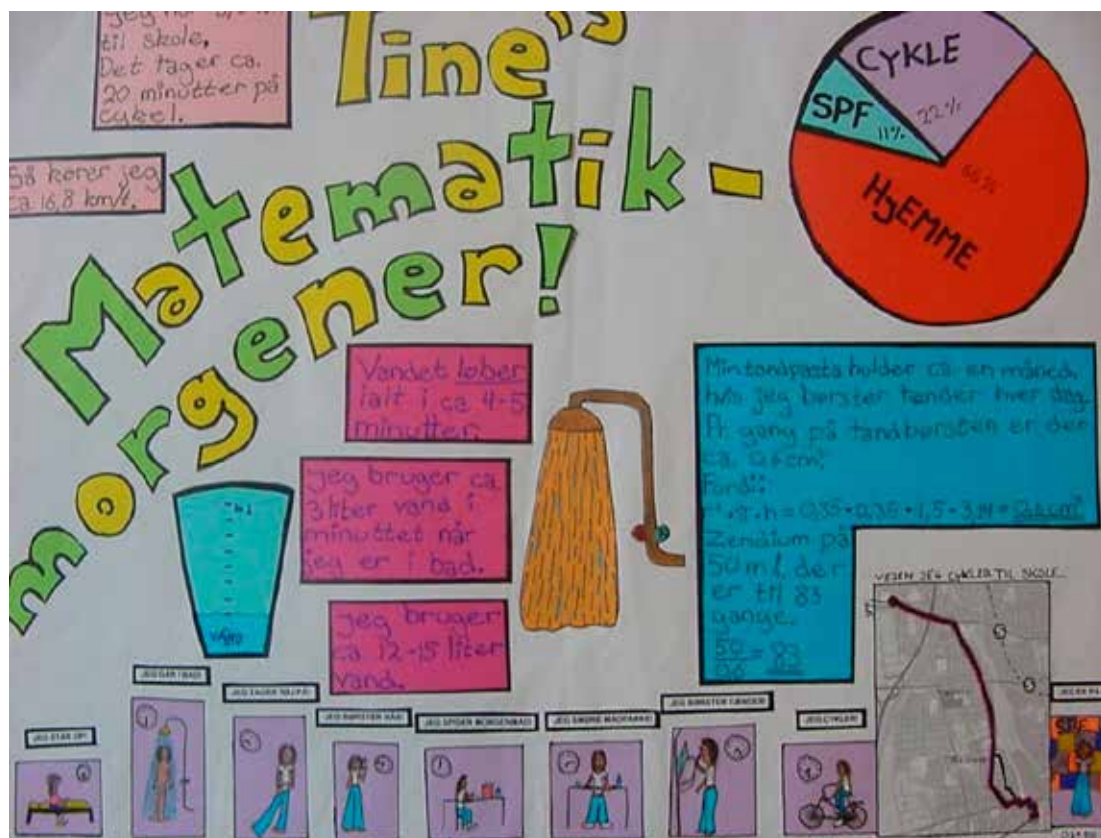
i den undersøgende arbejdsmodel benævnes 'elevens selvstændige undersøgende arbejde' i fase 2: Her refereres til både hverdagssituationer og problemstillinger fra omverdenen, som taler direkte ind i det, der er elevernes opgave i forløbet med *MatematikMorgenerne*.

I arbejdet med matematik skal eleverne undersøge enkle hverdagssituationer og deres omverden med 'matematikbriller' på.

Iscenesættelsen af *MatematikMorgenerne* foregår fælles i klassen, hvorefter eleverne i første omgang udfører deres selvstændige arbejde uden for skolen - enten hjemme eller om morgenen fra de vågner til de ankommer til skolen. Utallige forløb fra praksis refererer fx til forbruget af tid fra opvågning til mødet på skolen, mulighederne for forskellige valg af påklædning, forbruget af vand til bad eller

Tine's matematikmorgener

Tine er elev i 8. klasse, der har fået som hjemmearbejde at notere, hvad hun bruger sin tid til - fra hun vågner til hun ankommer til skolen. Hun tjekker sit tidsforbrug undervejs, fortager beregninger og fremstiller et cirkeldiagram, der viser, at hun bruger cirka en fjerdedel af tiden fra hun vågner til skolen begynder på at cykle fra 'Hjemme' til SPF, som er skolen. Vi kan se, hun er på SPF i god tid, inden matematiktimen starter. Tidsforbruget 'Hjemme' illustreres desuden med en tegneserie, der viser, at hun står op, går i bad, spiser morgenmad og børster tænder. Tine ved, at en tube tandpasta, Zendium, holder cirka en måned - hendes beregning viser, at det passer meget godt med et par gange i døgnet plus det løse.



Inden teknologien med anvendelse af fx powerpoint som et muligt formidlingsformat, udførte eleverne deres produkt til fællesgørelsen på en A3. Den lange række af A3-ark blev så hængt op side ved side på en væg i klassen,

Matematisk modellering kan altså kort sagt bidrage til at synliggøre matematikken for eleverne i deres nære erfaringsverden. Arbejdet med matematisk modellering kan skabe motivation til matematiklæring, og det kan støtte elevernes læring af specifikke matematiske emner, men det kræver bevidst tilrettelæggelse, fx støttet af faser i en undersøgende matematikundervisning.

Beregningerne med tandpastaforbruget opstod i skolen, da hun var i gang og der kom i tanke om, hun jo også havde børstet tænder. Hun købte en tube tandpasta over hos købmanden og foretog beregningerne ved skolebordet.



Referencer

Blomhøj, M. & Skånstrøm, M. (2006): Matematik Morgen – matematisk modellering i praksis. I O. Skovmose & M. Blomhøj (Red.), *Kunne det tænkes – om matematiklæring*, Malling Beck

Blomhøj, M. & Skånstrøm, M. (2016): Det kommer an på – I T.E. Rangnes & H. Alrø (Red.), *Matematikklæring for framtida – Festskrift for Marit Johnsen-Høines*. Caspar Forlag.

Fælles Mål - lokalisert på https://emu.dk/sites/default/files/2020-09/GSK_F%C3%A6llesM%C3%A5l_Matematik.pdf

Fra arkivet

I Tangenten 4/2007 beskrev Kjersti Wæge og Nils Kristian Rossing et undervisningsopplegg for videregående skole kalt «Strikkhopp med Barbie» og viste hvor mye matematikk denne modelleringsaktiviteten kan lede til.

Les denne artikkelen og andre godbiter fra Tangentenarkivet på tangenten.no



Enoksen

Big Foot

Med innføringa av Fagfornyinga har modellering fått større plass i læreplanen (Berget & Bolstad, 2019), og *Modellering og anvendingar* er inkludert som eit kjerneelement i matematikkfaga (Utdanningsdirektoratet, 2020). I læreplanen i Matematikk P er til dømes *Modellering og anvendingar* skildra slik:

Ein modell i matematikk P er ei beskriving av verkelegheita i matematisk språk. Elevane skal ha innsikt i korleis modellar i matematikk blir brukte for å beskrive dagleglivet, arbeidslivet og samfunnet elles. Modellering i matematikk P handlar om å lage slike modellar. Det handlar òg om å kritisk vurdere om modellane er gyldige, og kva avgrensingar dei har, vurdere modellane i lys av dei opphavlege situasjonane og vurdere om dei kan brukast i andre situasjonar (Utdanningsdirektoratet, 2020).

I læreplanen er det trekt fram at modellering både handlar om å bruke matematikk til å skil-dre røynda gjennom modellar, og å vurdere gyldigheit, avgrensingar og gjenbruksverdi for modellane. Mi erfaring er at lærebøkene i stor

grad legg vekt på å finne ein matematisk modell gjennom bruk av regresjon, og at aspekta av modellering som er meir knytte til kritisk tenking, får mindre plass, trass i at begge aspekta er nemnde i læreplanen. I denne artikkelen vil eg presentere ein type aktivitet som eg meiner kan bidra til eit breiare modelleringsomgrep i klasserommet: det Lesh et al. (2000) kallar modellframkallande aktivitetar (*model-eliciting activities*). Gjennom ein versjon av den klas-siske aktiviteten «Big Foot» vil eg forsøke både å forklare kva modellframkallande aktivitetar er, kva erfaringar eg har gjort meg med dei, og korleis dei kan nyttast i klasserommet.

Kva er modellframkallande aktivitetar?

Modellframkallande aktivitetar er kjenneteikna av at elevane, gjennom arbeidet med aktiviteten, skal utvikle «powerful, sharable, and reusable concept tools» (Lesh & Caylor, 2007, s. 175). Gjennom modellframkallande aktivitetar skal elevane utvikle og vidareutvikle eigne modellar, gjennom stadige revisjonar av modellen. Model-len treng ikkje å vere ein matematisk formel, det kan vere ein metode / ei oppskrift, ein graf, ein figur, ei forklaring eller ein formel, eller ein kombinasjon av fleire av desse elementa. Lesh et al. (2000) trekker fram at forskarar som vil undersøke korleis elevar tenkjer for å løyse ei matematikkoppgåve, kan bruke modellframkal-lande aktivitetar som eit alternativ til intervju,

Eva Holthe Enoksen

Edvard Munch VGS

eva.enoksen@osloskolen.no

fordi tenkemåten til elevane vil bli synleg gjennom aktiviteten.

Lesh et al. (2000) trekker fram seks ulike prinsipp for modellframkallande aktivitetar:

1. Modellkonstruksjon: Vil aktiviteten føre til at elevane utviklar ein modell?
2. Røyndomsprinsippet: Kunne dette ha skjedd i røynda? Gjev aktiviteten mening for elevane?
3. Sjølvevaluering: Er det mogleg for elevane å forstå kva dei skal gjere og vurdere om modellen oppfyller krava?
4. Modelldokumentasjon: Vil elevane som ein del av opplegget måtte dokumentere tankegangen sin og matematikken dei vel å bruke?
5. Modellgeneralisering: Fører aktiviteten til ein modell som kan nyttast i andre samanhengar?
6. Den effektive prototypen: Vil arbeidet med modellering kunne fungere som ein referanse for elevane i arbeidet med andre oppgåver?

For å illustrere desse prinsippa vil eg ta utgangspunkt i aktiviteten Big Foot (Purdue University, u.å.; Stohlmann, u.å.). I denne aktiviteten vert elevane presenterte for eit digert fotspor, og målet er å finne høgda til personen. Lesh et al. (2000) introduserer òg sjølve oppgåva ved at elevane først les ein fiktiv avisartikkel om temaet og svarer på nokre spørsmål. Det aktuelle fotsporet kan skrivast ut og teipast på golvet, slik at elevane sjølv kan måle det. Dette er to element som kan bidra til at aktiviteten oppfyller røyndomsprinsippet. Prinsippet om modellkonstruksjon vert oppfylt dersom elevane ser behovet for å lage ein modell. Sjølvevurderingsprinsippet kan oppfyllast dersom elevane vurderer om høgda dei har kome fram til, er realistisk. Elevane arbeider med aktiviteten i grupper. Det bidreg til å oppfylle prinsippet om modelldokumentasjon, gjennom at elevane må overtyde kvarandre og treng å skrive ned det dei finn ut

av undervegs. Aktiviteten kan nyttast som ein introduksjon til modellering. Då kan læraren seinare referere til aktiviteten for å minne elevane om kva modellering er, og såleis kan han fungere som ein effektiv prototype. Prinsippet om modellgeneralisering kan oppfyllast gjennom at elevane og læraren seinare kan nytte dei same arbeidsmåtene til å løyse nye problem.

Erfaringar med Big Foot i matematikk 1P

Våren 2023 prøvde eg og tre kollegaer ut ein lokal variant av Big Foot i matematikk 1P. I forkant fekk lærarane grundig informasjon om aktiviteten. I etterkant samla eg lærarane for å høyre kva erfaringar dei gjorde seg. I staden for å bruke ein fiktiv avisartikkel, slik Lesh med fleire (2000) gjorde, vart aktiviteten introdusert for elevane gjennom ein kort film om korleis fotspor kan nyttast i politietterforsking med tilhøyrande spørsmål (Figur 1). Deretter vart sjølve aktiviteten introdusert, som vist på Figur 2.

Oppstartsoppgave

Diskuter spørsmålene i grupper etter å ha sett filmen:

- 1) Hvordan samles fotavtrykk fra åsteder inn?
- 2) Hvilken type informasjon kan du få fra fotavtrykk?
- 3) Kan du bruke et fotavtrykk til å finne ut hvem som er mulige mistenkte?
- 4) Fyll ut tabellen under:

Person	Høyde	Skostørrelse	Fotlengde
1			
2			
3			
4			
5			

Figur 1

Til aktiviteten hørde det òg eit 37 cm langt fotspor, som vart teipa fast på golvet. Lærarane som prøvde ut aktiviteten, valde å bruke han på litt ulike tidspunkt i undervisningsløpet. Den første læraren prøvde ut aktiviteten som ein introduksjon til modellering. Her brukte elevane 90 minutt på å kome fram til ein modell, og det var stor variasjon i kva model-

Et kjempestort fotspor!

I dag tidlig oppdaget lærere og elever på Edvard Munch videregående skole at noen hadde reparert den ødelagte asfalten i Nordahl Bruns gate i løpet av natta. Rektor Ellen Lysne vil gjerne takke de ansvarlige, men dessverre så ingen hvem som ordnet det. Det eneste vi så var fotspor i den våte asfalten. Et av fotsporene var av to enorme joggesko! Rektor regner med at det vil være enklest å finne personen med de store skoene først, men mener det vil bli enklere dersom hun vet hvor høy personen er.

Deres oppgave er å lage oppskrift som rektor (og andre) kan bruke for å finne høyden til folk ved å studere fotsporene deres. Den bør både fungere på fotsporet dere fant og på andre fotspor.



Fotomanipulasjon. Bildet av inngangspartiet er fra skolens arkiv.

Figur 2

lane til elevane bestod av. Elevane laga mellom anna ein formel utan hjelpemiddel, teikna ein graf utan hjelpemiddel, brukte regresjon i GeoGebra og laga ein graf i Excel. Ettersom elevane brukte lang tid på oppgåva, fekk dei lite tid til å drøfte dei ulike modellane og presentere dei for kvarandre. I ei anna gruppe hadde læraren tidlegare introdusert modellering og lært elevane å bruke GeoGebra til å lage ein regresjonsmodell. Alle elevane i denne gruppa valde å bruke regresjon for å kome fram til ein modell. Dette gjekk raskare, og elevane rakk dermed i større grad å snakke om variablane i modellane og gyldig-

heitsområdet for modellen. I dei to siste gruppene som prøvde ut aktiviteten, vart steget frå tabellen med høgde og skolengde til ein modell for stort, og elevane klarte ikkje å kome i gang med å lage ein modell på eiga hand. Aktiviteten vart dimed gjennomført som ein aktivitet i plenum. Desse tre situasjonane illustrerer ulike utfordringar med modellering. Det er berre i den første gruppa at aktiviteten kan seiast å ha fungert som ein modellframkallande aktivitet, der elevane utvikla eigne modellar. Ettersom heile økta gjekk med til å utvikle modellane, vart det ikkje tid til å samanlikne dei ulike modellane. Dette gjorde det vanskeleg for læraren å ta utgangspunkt i modellane til elevane vidare. I den andre gruppa fekk elevane erfaring med å vurdere modellen, men ettersom alle elevane tok utgangspunkt i at dei skulle bruke regresjon, fungerte aktiviteten i større grad som det Lesh og Caylor (2007) kallar rettleia utforsking (guided discovery activity). Dei fekk likevel erfaring med å vurdere modellane, noko som vert trekt fram som relevant i kjerneelementet *modellering og anvendingar*. I dei siste to gruppene vart utfordringa for elevane for stor til at dei klarte å skape eigne modellar. Gjennom at aktiviteten vart gjennomført i fellesskap, fekk dei likevel sett eit døme på modellering. Utan anna datagrunnlag enn erfaringane til læraren (inkludert mine eigne, for eg var vikar i ei av desse gruppene) er det vanskeleg å seie om grunnen til at elevane ikkje kom i gang, var at dei mangla verktøy eller motivasjon, eller om oppgåva var uklart formulert.

Erfaringar med Big Foot i matematikk 1P-Y

Inspirert av utprøvinga i matematikk 1P prøvde eg hausten 2023 den same aktiviteten i matematikk 1P-Y. I denne gruppa gjennomførte eg aktiviteten på 45 minutt. For å kome elevane som opplevde aktiviteten som vanskeleg, i møte valde eg her å lage ein enkel støttestruktur i form av eit A3-ark som elevane kunne notere på undervegs (sjå Figur 3). I tillegg til oppgåveteksten hadde eg tilgjengeleg tilleggsmateriell

Big Foot	
Navn på gruppe-medlemmene:	
Vår metode for å finne høyden:	Kladd:
Begrunnelse:	

Figur 3

dersom elevane sakna meir data. Dette bestod av eit fotlengde-høgde-skjema for barn, ein tabell som viste høgde/skостorleik/fotlengde for barn, og ein tabell med om lag 30 høgder og fotlengder for både menn og kvinner. Elevane brukte lang tid på å kome i gang med oppgåva. Dette er òg observert av Aliprantis og Carmona (2003, s. 262) i arbeidet med ein annan

modellframkallande aktivitet. Av fem grupper i 1P-Y som arbeidde med aktiviteten, klarte fire grupper å kome fram til minst ein modell. Desse modellane er vist i Figur 4 (med løyve frå elevane). Fleire av gruppene viste teikn til å revidere modellane sine undervegs, og ei av gruppene foreslo to separate modellar (løysing 2 og løysing 5), der løysing 5 er meir avansert. Løysing 1 er den enklaste løysinga. Her har elevane blanda fotlengde og skostørrelse, og deretter brukt tabellen som viste høgde/skostørrelse/fotlengde for barn, til å kome fram til høgda. Elevane har ikkje reflektert over at høgda dei har funne, ikkje var spesielt stor. Løysing 2 har òg teke utgangspunkt i samanhengen mellom fotlengde og høgde for born, men her har elevane tenkt seg at fotlengde og høgde er proporsjonale storleiker, slik at om dei halverer høgda, vil dei òg halvere fotlengda. Løysingane 3, 4 og 5 dreier seg alle om å finne forholdstal, men elevane har gjort dette på litt ulike måtar. Medan

Løysing 1: Først så målte vi fotlengden og da fikk vi 36,5 cm, og så da fikk vi skostørrelse 37. Vi brukte deretter tabellen på arket og prøvde å finne skostørrelsen med høyden, og da fikk vi dermed 150/155 cm, og det tror vi er høyden til personen.	Løysing 2 Foten er 36,5 cm lang. $\frac{36,5 \text{ cm}}{2} = 18,25 \text{ cm}$ Størrelse 30 = 18-18.7 cm Høyde: Barn = 122 cm høy, 28-30 størrelse i sko. (· 2) Person 244 cm høy og 60 størrelse
Løysing 3 Vi tok lengden på fotavtrykk og ganget med 6,6 for å finne en ca høyde. Vi fant tallet 6,6 ved å prøve oss frem, og så testet vi det ut på høydene på gruppa, før vi brukte det og fant at høyden til personen var 244 cm.	Løysing 4 Vi tok gjennomsnittshøyden og delte på fotlengden. Da fikk vi 6,3. Deretter multipliserte vi forholdet med skoavtrykket, for å finne høyden. Vi fikk da $6,3 \cdot 36,5 = 232 \text{ cm}$
Løysing 5: Fant gjennomsnittsförhold mellom fotlengde og høyde for menn. Gjennomsnitt: 5,7 $36,5 \text{ cm} \cdot 5,7 = 208,05 \text{ cm}$	Vi fant ut at forholdet mellom skostørrelse og fotlengde var 1,5, og fant ut at personen hadde størrelse 54

Figur 4: Løysingane til elevane. Løysingane er digitalisert av forfattaren, men elles ikkje endra.

elevane som kom fram til løysing 3, prøvde seg fram med sine egne fotlengder og høgder for å finne eit forholdstal, brukte gruppa med løysing 4 gjennomsnittshøgda og gjennomsnittsfotlengda til elevane på gruppa. I løysing 5 har elevane teke utgangspunkt i mennene i tabellen med høgder og fotlengder for vaksne og rekna ut gjennomsnittsforholdet. Elevane gjekk ut ifrå at fotsporet måtte vere frå ein mann, sidan det var så stort.

Modellframkallande aktivitetar i klasserommet

Lesh et al. (2000) presiserer at modellframkallande aktivitetar korkje skal vere vanskelege, morosame eller opne. Mange av elevane har likevel synst at oppgåva var vanskeleg, særleg i starten. Dette kan skuldast at elevane er vande med å løyse oppgåver med éin framgangsmåte og eitt svar, og at det er vanskeleg å handtere at dei sjølv må utvikle sin eigen framgangsmåte. Når Lesh et al. (2000) presiserer at det ikkje er eit mål at aktiviteten skal vere morosam, handlar det både om at det er vanskeleg å vite kva elevane kan vere interesserte i, og at ein lærar kan vekke interesse hjå elevane med mange slags aktivitetar. I matematikk 1P-Y vekte aktiviteten i seg sjølv interessa til elevane – det er lite interessant i utgangspunktet med eit papirfotavtrykk på golvet, men elevane likte å forsøke å løyse eit mysterium. Det siste poenget til Lesh et al. (2000) er at aktiviteten ikkje er open, for elevane skal forstå når dei har kome fram til ei tilstrekkeleg god løysing. Elevane oppfattar likevel aktiviteten som open når han har fleire moglege framgangsmåtar og moglege svar. Utpøvinga viste òg at det kan vere vanskeleg for elevane å kome fram til ein endeleg modell, ettersom elevane brukar lang tid på aktiviteten og kanskje ikkje rekk å gå mange rundar for å vidareutvikle modellen.

Målet med modellframkallande aktivitetar er at elevane skal utvikle eigne system for tolking av informasjon som er kraftig, gjenbrukbar og mogleg å dele med andre. Dersom vi ser på

løysingane til elevane i matematikk 1P-Y, så er i alle fall gruppa som kom opp med både løysing 2 og løysing 5, på veg mot eit slikt system. Vi såg òg at desse gjenbrukbare systema vil variere basert på forkunnskapane til elevane. Dette betyr at same aktivitet kan fungere på ulike klassetrinn. Det kan likevel kome til eit punkt der elevane betraktar oppgåva som ei rutineoppgåve dei alt har ei løysing for, og då er ikkje lenger aktiviteten modellframkallande. Eit døme på dette var klassen der alle elevane nytta regresjon. Her kan tabellen som elevane fekk utdelt som ein del av oppgåvearket, ha spelt inn. For å bidra til at aktiviteten fungerer modellframkallande for desse elevane, er det mogleg å fjerne denne tabellen og la elevane kome fram til passande variablar sjølv.

Modellframkallande aktivitetar kan vere eit utgangspunkt for å arbeide med fleire av kjerneelementa i Fagfornyinga. Når elevane sjølv må omsetje problemet frå røynda til eit matematisk problem, vil dei trene på å skildre røynda ved hjelp av matematikk. Fordi elevane sjølv har omsett problemet, vil det òg kunne vere enklare å tolke og vurdere løysinga. Koplinga til røynda kan i tillegg hjelpe elevane til å sjå relevansen i faget. Gjennom arbeidet med modellframkallande aktivitetar vil òg elevane kunne arbeide med andre kjerneelement i tillegg til *modellering og anvending*, som *utforskning og problemløysing* når dei sjølv må utvikle ein løysingsmetode, og *representasjon og kommunikasjon* når dei må velje korleis dei skal uttrykke modellen sin og deretter presentere den for andre.

Dømet over viser òg at det kan vere krevjande å arbeide med modelleringsaktivitetar. Aktivitetane krev at elevane konsentrerer seg over lengre tid, og elevane må utvikle eigne løysingsmetodar. Begge desse punkta skil seg frå tradisjonell oppgåverekning. I tillegg kan aktivitetane vere krevjande for læraren, som til ein viss grad mister kontrollen på det elevane gjer. Mi erfaring er likevel at elevane set pris på å arbeide på nye måtar, og at det er verdifullt å utforde elevane til å tenkje nytt, sjølv når dei

ikkje kjem i mål med løysingane. Alle døma over var dessutan frå introduksjonen av denne typen aktivitet. Dersom modellframkallande aktivitetar vert nytta fleire gongar med dei same elevane, er det grunn til å tru at elevane i større grad vil vere vande med arbeidsmetoden. Både læraren og elevane kan deretter referere tilbake til erfaringane med den modellframkallande aktiviteten seinare, og slik kan han nyttast som ein prototype i arbeidet med andre matematikkoppgåver. I tillegg kan læraren og elevane saman generalisere og vidareutvikle strategiane elevane har brukt. Slik kan erfaringane frå arbeidet med den modellframkallande aktiviteten òg kome til nytte når elevane løysar meir tradisjonelle tekstoppgåver som relaterer røynda til matematikken.

Referanser

- Aliprantis, C. D. & Carmona, G. (2003). Introduction to an economic problem: A models and modeling perspective. I R. A. Lesh & H. M. Doerr, *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (s. 255–264). Routledge.
- Berget, I. & Bolstad, O. H. (2019). Perspektiv på matematisk modellering i Kunnskapsløftet og Fagfornyinga. *Nordisk tidsskrift for utdanning og praksis*, 13, 83–97. <https://doi.org/10.23865/up.v13.1882>
- Lesh, R. A. & Caylor, B. (2007). Introduction to the special issue: Modeling as application versus modeling as a way to create mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 12(3), 173–194. <https://doi.org/10.1007/s10758-007-9121-3>
- Lesh, R. A., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. I R. A. Lesh & A. Kelly (Red.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (s. 591–646). Routledge.
- Purdue University. (u.å.). *Case studies for kids: Bigfoot*. Hentet 9. februar 2023, fra <https://engineering.purdue.edu/ENE/Research/SGMM/CASESTUDIES/SKIDSWEB/bigfoot.htm>
- Stohlmann, M. (u.å.). *Bigfoot MEA Teacher Materials*. <https://www.micahstohlmann.com/uploads/8/0/1/1/80113308/bigfoot-mea-teacher-materials.pdf>
- Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk fellesfag vg1 praktisk (matematikk P) (MAT08-01)*. Fastsett ved forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat08-01>

Steffensen

Modellering av CO₂-utslipp

Modellering i samfunnet dreier seg om å undersøke virkelige situasjoner ved hjelp av matematikk. Det kan handle om biltrafikk, folks handlemønstre eller reisevaner. Man har gjerne et ønske om å forstå, beskrive eller forutsi samfunnsmessige problemstillinger, som hvordan et virus sprer seg, eller hvordan klimaet endres. Slike komplekse problemstillinger krever mye av de som skal modellere. Når modellering skal foregå i skolen, kan elever samle informasjon, studere sammenhenger og formulere hypoteser for hva som kan skje dersom ... Det er samtidig relevant at lærere og elever reflekterer over selve modelleringsprosessen. Hvordan skal elevene starte? Hvilke beslutninger skal de gjøre underveis? Hvordan blir matematikken synlig?

Modelleringsproblem kan fremstilles som syv faser hvor man veksler mellom å oversette fra virkeligheten til matematikk og fra matematikk til virkelighet. Figur 1 illustrerer at man starter med å formulere en problemstilling fra en virkelig situasjon (se tall 1 på figuren). Området som skal undersøkes, avgrenses, og

man samler og systematiserer informasjon (2). Informasjonen (dataene) bearbeides matematisk og formuleres som problem (3). Problemet bearbeides, analyseres, man utvikler matematiske løsninger (4). Resultatene blir så tolket og evaluert i lys av det opprinnelige problemet (5). Det har betydning å sikre at løsningene er relevante og troverdige sett opp mot utgangspunktet (6). Resultatene formidles i et språk som aktualiserer situasjonen som problemstillingen utgår fra, samtidig som en etterstreber presise matematiske beskrivelser. Slik blir formidlingen del av modelleringsprosessen (7). Man beveger seg fram og tilbake mellom fasene, prosessen drives fram gjennom kritiske tilbakeblikk. Beskrivelsen over kjennetegner modelleringsprosesser som foregår i samfunnet. Samtidig er det en beskrivelse av hvordan lærere og elever arbeider med modellering i skolen. Å se på modelleringsprosessen som en syklus slik den er vist på Figur 1, kan betraktes som et overordnet verktøy og en plan for modelleringsaktiviteten, heller enn en oppskrift som skal følges fra 1 til 7. Men hvordan kan dette foregå i praksis? I det følgende beskrives en modelleringsaktivitet som foregår på 4. trinn med læreren Marit. Hun er bevisst på at elevene i utgangspunktet ikke kjenner til alle fasene, men vil at de skal bygge erfaringer som har trekk av modellering, og lede dem til en stadig bedre innsikt i hva modellering dreier seg om.

Lisa Steffensen

Høgskulen på Vestlandet

lisa.steffensen@hvl.no

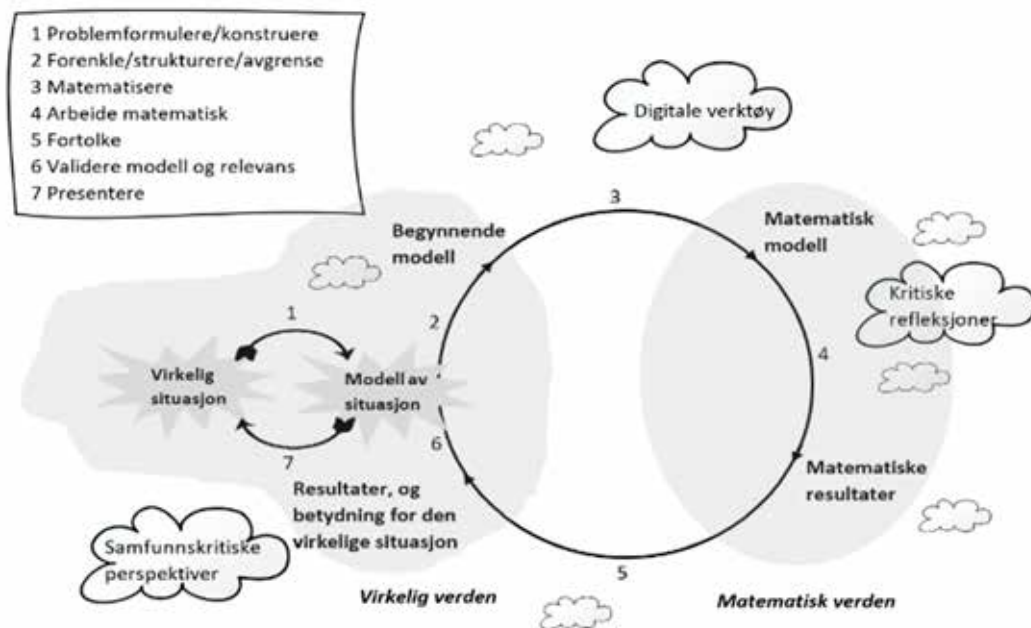
Artikkelen er et utdrag omskrevet fra Steffensen (2023).

Fase 1: Problemformulere

Konteksten som velges, har betydning for hvordan elever engasjerer seg i oppgaven, og for deres læringsutbytte. Marit har valgt CO₂-utslipp som tema. Klimaendringer og utslipp av klimagasser er et samfunnsproblem som elevene har diskutert tidligere. Nærhet til problemstillingen kan stimulere elevenes motivasjon og engasjement, de utforsker noe som er aktuelt, og som angår dem. Det kan gjøre at de engasjerer seg i noe som er viktig for samfunnet. Marit knytter problemstillingen til en lokal kontekst, noe de møter i dagliglivet; utslipp fra trafikken ved skolen. Når Marit spisser problemstillingen mot hvor mye CO₂-utslipp bilene utenfor skolen har, kan det høres ut som en enkel oppgave. Imidlertid kan det være vanskeligere enn man tror, og det krever trening å formulere et ikke-matematisk problem til å bli en matematisk løsbart problemstilling for elever. Marit arbeider sammen med elevene med å avgrense problemstillingen tilstrekkelig til at det er mulig å finne løsninger, samtidig som det skal gi mening å løse problemet. Hun viser et bilde med ulike

kjøretøy, og lar elevene arbeide i læringspar og utfordrer dem til å formulere matematiske problemstillinger. De studerer bildet og diskuterer hva de ser. Hensikten er at de trener seg på å stille spørsmål ut fra «virkeligheten», de skal få øye på matematikken i situasjonen. Flere av spørsmålene de stiller, har likheter med lærebokoppgaver, er urealistiske og har kun ett riktig svar. Marit ønsker imidlertid at elevene skal se at problemstillinger kan ha mange svar, avhengig av hvordan man definerer spørsmålet. Hun utfordrer derfor elevene underveis ved å stille spørsmål som kan gi ulike svar. Elevene reflekterer i lag over hvorfor de ikke får samme svar, og de diskuterer at premisset for spørsmålet og hvordan man tolker spørsmålet, kan bidra til at det finnes flere mulige svar. Problemformuleringsprosessen fører til at elevene får et mentalt bilde av situasjonen og problemet og kalles gjerne en «situasjonsmodell» (se Figur 1).

Gjennom å øve på å formulere matematiske problemer fra ikke-matematiske situasjoner kan elevene se at matematikk er nyttig og relevant for å løse utfordringer i samfunn og dagligliv.



Figur 1 Modelleringsprosessen visualisert som en syklisk prosess, inspirert av Blum og Leiß (2007).

Kjøretøy	Gruppe	Antall		Totalt
Bil	1		12	50
	2		13	
	3		16	
	4		9	
Buss	5		2	4
	6		2	

Tabell 1: Klassens observasjoner i en systematisert form, med overgang fra elevenes tellestreker.

Å la elever formulere problemstillinger avhenger av elevenes alder og erfaring med modellering. Elever kan få erfaringer med både det å velge kontekst (som klimaendringer, CO₂-utslipp) og formulere problemstilling (for eksempel mengde CO₂-utslipp fra biler).

Fase 2: Forenkle, strukturere, og avgrense
Marits avgrensning til biler utenfor skolen bidrar til at tallene blir håndterbare for elever på 4. trinn. De arbeider i firergrupper og observerer trafikken i 10 minutter. Hensikten er å få praktisk erfaring med datainnsamling og tilknytning til temaet de skal undersøke. Slike avgrensninger er nyttige og nødvendige, og det er viktig at de blir kommunisert til brukerne av modellene, slik at de ikke tror at modellen gjelder for noe annet enn den faktisk gjør. Modeller viser kun deler av virkeligheten. Ved problemstillingen CO₂-utslipp må man for eksempel avgjøre hvilke utslipp som skal tas med; fra kjøretøy, industri eller andre kilder.

Det har betydning for elevene at de samler data som de bruker. Gjennom biltellingen danner de mentale bilder av den virkelige situasjonen. Det er meningsskapende, det bidrar til å mobilisere bakgrunnskunnskap og øke

forståelsen for problemet. Slike pre-matematiseringsopplevelser er avgjørende for modelleringsprosessen. I aktiviteten blir elevene bevisste på at det er forskjell på typene biler som kjører utenfor skolen deres. Senere vil denne bevisstgjøringen kunne omfatte at biler har ulike CO₂-utslipp. Elevene systematiserer observasjonene med tellestreker, det er en enkel og effektiv måte å notere ned fortløpende observasjoner på. Utfordringene blir mer oversiktlige og mindre kompliserte ved at de enkelte gruppene får ulike ansvarsområder (elektriske/fossilbiler/busser/store kjøretøy). Samtidig får klassen et nyansert datamateriale å arbeide med.

Tilbake i klasserommet samles dataene, og de enkelte gruppenes bidrag blir tydelige når elevene fører tellestrekene opp på tavlen (tabell 1). Marit leder dem gjennom en prosess der de systematiserer slik at dataene fremstår i en oversiktlig tabell. Overgangen fra tellestreker til tabell kan oppleves stor, det handler om å synliggjøre antall og ulike typer kjøretøy, det skal brukes til å beregne CO₂-utslipp. Marit tar kontroll over prosessen som fører fram til en oversiktlig tabell, samtidig som hun tenker at elevene senere skal gjøre det uten hennes hjelp. De er med i hele prosessen; fra å gjøre faktiske observasjoner, føre oversikt med tellestreker, overføre til en felles oversikt som overføres til tallverdier i en systematisert form.¹

Elever på mellomtrinn og ungdomstrinn kan bruke større mengder trafikkdata som kan hentes fra Statens vegvesen.² De må også gjøre forenklinger og valg knyttet til å avgrense data. Hvilket område skal velges? Skal de se på døgntrafikk, månedstrafikk, eller årstrafikk? Lengde på kjøretøy? Elevene erfarer å håndtere store datamengder når de tar i bruk slike databaser. Mange vil bruke databehandlingsverktøy, som regneark, til å systematisere, strukturere og gjøre forenklinger og avgrensninger som de ser naturlige ut fra den aktuelle problemstillingen. Forenkling, avgrensning og strukturering fører til at elevene får en begynnende modell (se Figur 1).

Fase 3: Matematisere

I matematiseringsfasen handler det om å sette matematisk språk på en praktisk situasjon. Man gjør antakelser og velger relevante kriterier og faktorer som kan brukes i den matematiske modellen. Det kreves kunnskap og trening i å identifisere relevante data og i å identifisere sammenhenger mellom dataene. Samtidig er det viktig å anerkjenne kunnskaper som strengt tatt ikke er matematiske, også i matematiseringsprosessen. Elevene utfordres til å tenke over hvilken type matematikk som kan være relevant å bruke til å løse problemstillingen. Det er mange gode modelleringsoppgaver der elever kan klare seg med de fire regneartene, grunnleggende statistikk og algoritmisk tenkning. Når aktuelle data er valgt, handler matematiseringen først og fremst om å ferdigstille oversettelsen fra det praktiske problemet til matematiske sammenhenger.

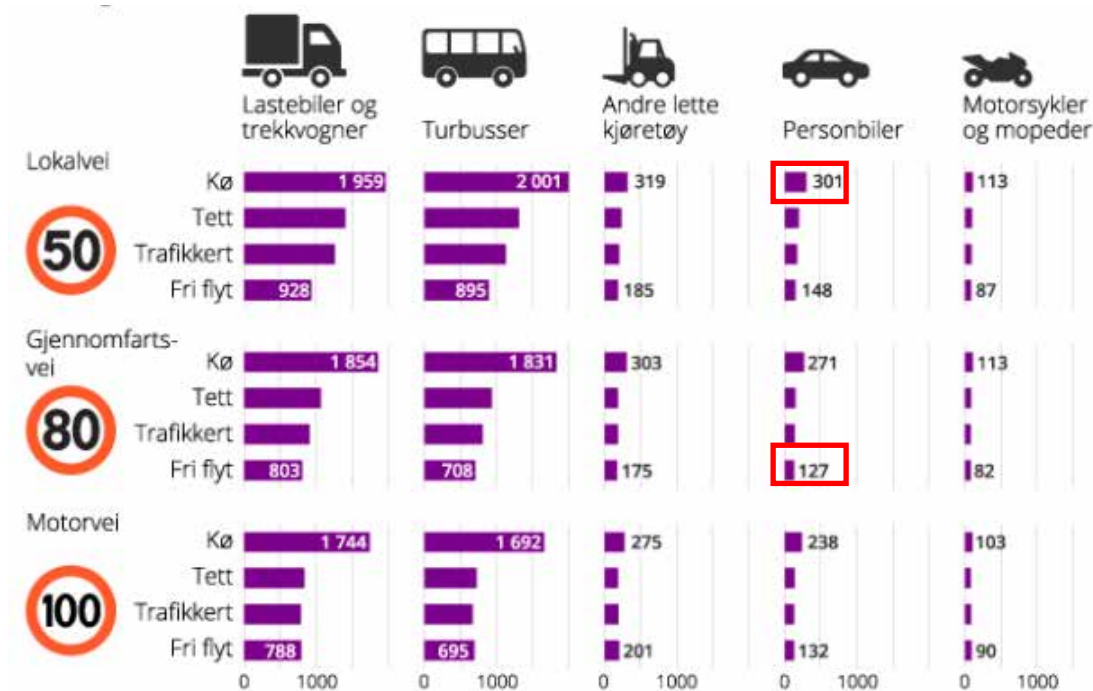
Å beregne CO₂-utslipp er ingen enkel sak, selv ikke for forskere. Bilers CO₂-utslipp vil variere etter alder, drivstofftype, hastighet, kjøring og bratthet. Man må bestemme om man skal beregne utslipp ut fra hvor mye drivstoff som er brukt, eller om man skal beregne utslipp fra bilens livsløp. Statistisk sentralbyrås oversikt viser CO₂-utslipp per kjørte kilometer for utvalgte kjøretøy i ulike trafikksituasjoner (Figur 2). Marit har hentet informasjon om CO₂-utslipp til kjøretøy på forhånd (som at en bil slipper ut 6 gram per 100 meter). Det at hun selv henter og viser informasjon til elevene, kan bero på at det ikke er tid til at elevene gjør det, eller på at informasjonen er utilgjengelig for elevene på grunn av alder. Det kan imidlertid være positivt å inkludere elevene i slike prosesser. For å unngå formålsløse Internettsøk kan man gi elever oversikter som de finner hos Statistisk sentralbyrå. De må fortsatt bearbeide dataene og foreta valg. Det kommer fram av Figur 2 at omregnet til en strekning på 100 m varierer utslipp fra personbiler fra 12,7 gram til 30,1 gram per 100 km (innrammet i rødt).

Hvilke utslippsverdier som velges, vil derfor ha stor betydning for resultatene elevene ender opp med.³ Matematiseringsprosessen fører til at elevene får en matematisk modell (se Figur 1).

Ved å inkludere elever i informasjonsinnhenting kan en bidra til å øke forståelsen av at utslippstall ikke er en klart definert størrelse. Elevene kunne diskutert faktorer som fartsgrense utenfor skole og flyt i trafikken før de bestemte seg for et bestemt utslippstall. Dette ville vært verdifullt når elevene senere skal reflektere over sine løsninger. Modelleringsprosessen inneholder som regel slike valg, og resultatet vil alltid inneholde et visst rom for usikkerhet. Det kan derfor gi elever et mer nyansert bilde av matematisk modellering om de kan reflektere over slike forhold.

Fase 4: Arbeide matematisk

Å arbeide matematisk innebærer å anvende matematiske begreper, teknikker og tenkemåter, som å beregne og løse likninger. Marits elever skal anslå hvor mange biler som passerer i løpet av 20 minutter, basert på data de samlet inn i løpet av 10 minutter. De kan velge å arbeide alene, eller med en læringspartner. De får ingen instruksjon for hvordan oppgaven skal løses, elevene utvikler selvstendige valg underveis. Marit ønsker at elevene deler matematiske tenkemåter og strategier, noe som i seg selv kan bidra til bevisstgjøring hos den enkelte. Innsikt i medelevers fremgangsmåter bidrar også til å revurdere egne strategier. Det bygges et samtalemiljø der elevene tenker sammen, og der læreren får anledning til å snakke om tema som gjentatt addisjon og multiplikasjon, og hoderegningstrategier. De har ulike antakelser, og det kommer fram mange ulike fremgangsmåter. Noen benytter standardalgoritmen for multiplikasjon, mens andre bruker gjentatt addisjon. Noen velger å beregne hvor mange biler og busser som passerte på en time. Flere elever foreslår at det vil passere 100 biler forbi skolen på 20 minutter, og Marit inviterer til samtale:



Figur 2: Oversikt over CO₂-utslipp (g/km) av ulike kjøretøy i ulike trafikksituasjoner. <https://www.ssb.no/natur-og-miljo/artikler-og-publikasjoner/hva-pavirker-utslipp-til-luft-fra-veitrafikk>

- Marit Er alle enige om at det vil passere 100 biler på 20 minutter?
- Inger Ja, jeg og Elin fant ut at siden 20 minutter er det dobbelte av 10 minutter, kunne vi bare doble antall biler.
- Elias Men hvordan vet vi at det er nøyaktig 100 biler på 20 minutter? Dersom vi måler i rushtrafikken, vil det kanskje være flere?
- Dan Ja, eller hva med natten? Da vil det være mye færre biler ... kanskje ingen i det hele tatt!

Marit bruker utsagnene til å innlede en diskusjon om hvorvidt dataene deres er realistiske og representative for biltrafikken i området. Elevene kommer med flere innspill, og de blir enige om at det ikke er helt realistisk i forhold til virkeligheten. Dersom de hadde telt biler på et annet tidspunkt, kunne det ha passert flere – eller færre – biler. Kjellrun, en av elevene, er

imidlertid ikke fornøyd og oppjonerer mot konklusjonen. Hun mener at det kan være realistisk fordi natt-trafikken og rushtrafikken utliknes.

Når elevene beregner CO₂-utslipp fra bilene, bruker de anslaget på 6 gram CO₂ per 100 meter (tilsvarende strekningen utenfor skolen). Ole benytter seg av gjentatt addisjon, han adderer 50 seks ganger og får at 50 biler slipper ut 300 g CO₂ på strekningen i løpet av 10 minutter. Han overfører dette også til multiplikasjon, ved å føre opp multiplikasjonsstykket 50 · 6. Han benytter seg av det høyeste tallet siden det er mest effektivt. Muligens har han forstått sammenhengen mellom gjentatt addisjon og multiplikasjon. Ole sier at det kanskje hadde vært mest effektivt å kunne 6-gangen helt opp til 50 i hodet, men at han ikke kan dette. Han løser det på den måten som er mest effektiv for ham. Å jobbe matematisk fører til at elevene får matematiske resultater (se Figur 1).

Fase 5: Fortolke

Å fortolke innebærer at man vurderer resultater fra den matematiske modellen i lys av den virkelige situasjonen. Elevene kan tolke om resultatene er rimelige og troverdige. De kan vurdere om svarene er komplette, og om de dekker alle relevante tilfeller av situasjonen som ble modellert. Hvor sensitivt er resultatet som følge av antakelsene som er gjort underveis? Er data og andre variabler nøyaktige? Når Marit diskuterer med elevene om hvorvidt det var tilstrekkelig å måle 10 minutter midt på dagen, eller hvordan russtrafikk og trafikk om natten kunne forskyve modellresultatene, diskuteres premisene for modellen. Dersom elevene hadde valgt utslippstall selv, kunne de endt opp med ulike tall og løsninger, noe som ville gitt grunnlag for diskusjoner gruppene imellom. Modellering vil som regel inneholde slike valg, og resultatet vil alltid inneholde et visst rom for usikkerhet. Å kunne reflektere over dette kan bidra til at elevene utvikler et nyansert bilde på modellering og modeller. Det kan bevisstgjøre dem om at når et resultat presenteres, gir det rom for videreutvikling, og ikke bare er et sluttprodukt. Det er derfor modelleringsprosessen ofte fremstilles syklistisk. Marit ønsker også at elevene fortolker i et videre perspektiv om hvilke påvirkninger og følger CO₂-utslipp kan ha for elevene lokalt, og for jorden generelt. Hun engasjerer dem i klasseromsdiskusjoner om hva forurensning betyr, hva CO₂ og CO₂-utslipp er, og ber elevene reflektere over kjøretøy og miljøvennlighet. Gjennom modelleringsaktiviteten har elevene fått et grunnlag for å delta i samtaler om CO₂, om hvordan utslipp kan påvirke miljø og klima. Når elevene arbeider med fortolkning, tolker de resultatene i lys av den virkelige situasjonen og betydningen resultatene kan ha (se Figur 1).

Fase 6: Validere

I modelleringsaktiviteter er det viktig å evaluere matematiske prosesser og resultater opp mot virkeligheten. Validere betyr at man kontrollerer om metoden man har benyttet, er gyldig i

lys av de data man har, og om metoden er egnet til formålet. Å validere innenfor modellering kan innebære at man vurderer om prognoser er rimelige, eller om modelleringsprosessen er korrekt utført. Elevene til Marit kan arbeide med å bekrefte riktigheten av matematiske resultater opp mot den matematiske modellen de har funnet. For eksempel om beregninger er korrekt utført, om utvalgte data beskriver situasjonen tilstrekkelig, eller om resultatet stemmer med forventet resultat. Selv om elevene på 4. trinn kanskje ikke kan vurdere om beregnet mengde CO₂ stemmer med forventet resultat, kan de gi en vurdering om beregnet antall biler virker rimelig. Å validere relevans betyr at elevene må vurdere nytten i modellen ut fra den faktiske situasjonen, de må oppdras til å spørre om svarene er relevante og nyttige for formålet, for eksempel er det nyttig å vite hvor stort CO₂-utslippet er utenfor skolen. Resultater av modellering er gjerne ikke et svar på hvordan man bør handle i den aktuelle situasjonen, men kan betraktes mer som et grunnlag for beslutninger. Kritiske vurderinger er nødvendige, både av de som har foretatt modelleringen, og i kommunikasjon med andre som resultatene er relevante for. Selv om beregningene til Marit og elevene ikke skulle brukes til noe konkret (for eksempel beslutningsgrunnlag for antall biler i Bergen), kan man tenke seg at svarene de fikk, medførte en bevissthet om bilers CO₂-utslipp i nærmiljøet. Valideringsfasen foregår kontinuerlig, og gjerne på kryss og tvers av modelleringsprosessen (se Figur 1), for eksempel ved at man validerer matematiske resultater opp mot modellen (fase 4), eller validerer matematisk modell opp mot begynnende modell (fase 3).

Fase 7: Presentere

I modelleringsprosesser i samfunnet stilles det krav til at resultater formidles på slike måter at folk får innsikt i og kan ta stilling til problemet. Tilsvarende kan elevene oppmuntres til å dele arbeidet sitt på ulike fora, lage plakater og delta i klasseromsdebatter, og presentere resultater

muntlig og skriftlig til medelever. De skal forklare og argumentere for hva de har gjort, være lyttende i diskusjoner og kunne gjøre endringer. Elevene kan bruke diagrammer, tekst, bilder, muntlighet, brev til myndigheter osv. De kan lage skoleavis, nettsider eller interaktive presentasjoner, og de kan invitere foresatte, kommunerepresentanter eller andre beslutningstakere inn og legge fram resultater for dem.

Å presentere modellresultatet kan også innebære at man gir anbefalinger og deltar i beslutningsprosesser vedrørende den aktuelle problemstillingen. Under COVID-19-pandemien ble resultater fra matematiske modeller brukt til å begrunne politiske beslutninger. I undervisningssammenheng, kan Marit og elevene for eksempel reflektere over om det er noe skolen kan gjøre for å redusere CO₂-utslippet utenfor skolen. Kan man tilrettelegge for mer bruk av offentlig transport? Påvirke busselskap til å ha busstopp utenfor skolen, koordinere bussrutene med skoletidene, eller innføre gratis skoleskys for alle? Kan elevene sende brev til kommunen og etterlyse eller foreslå tiltak som kan redusere lokale og globale CO₂-utslipp? Elevene kan på slike måter lære at bruk av matematikk ikke bare skjer i klasserommet, men at matematikk er i bruk i samfunnet. Modelleringsaktiviteter kan på dette viset ikke bare handle om å lage tabell, eller legge sammen tall, men kan være en måte å lære å utøve myndighet i samfunnet på, som ansvarlige og kritiske borgere. I denne fasen presenterer elevene modellen i lys av den virkelige situasjonen (se Figur 1).

Avsluttende kommentarer

Å gjennomføre modelleringsprosessen som beskrevet ovenfor kan være tidkrevende og kan oppleves som uoversiktlig og kanskje også kaotisk underveis, både for lærere og elever. Likevel har det verdi at elevene får gjøre seg slike erfaringer. De trenger å lære om kom-

plekse problemstillinger hvor de selv er med på å drive fram prosessen. Det har verdi at de kan omforme situasjoner fra virkeligheten til matematisk håndterbare problemstillinger og håndtere disse, og gjøre seg kritiske refleksjoner underveis. At de kan skissere forslag tilbake til virkeligheten, hvor det gjerne ikke er ett korrekt svar, men flere mulige alternativ, basert på valg de har gjort underveis. Det har også verdi at de gjør seg metarefleksjoner om modelleringsprosessen, altså at de lærer om selve modelleringen, hva dette er – og hvordan dette foregår. At de erfarer at dette ikke er en strømlinjeformet prosess, men at de får stå i problemstillinger hvor de må gå fram og tilbake i prosessen og være kritisk fram- og tilbakeskuende.

Noter

- 1 For andre eksempler på strukturering og matematisering i en modelleringsprosess, se kapittel 5 i *Begynneropplæringen*, Johnsen-Høines (2020).
- 2 Statens vegvesen har digitale trafikkdata hvor elever kan laste ned data etter selvvalgte kriterier, for eksempel utvalgte steder, dager eller kjøretøylengde: <https://www.vegvesen.no/trafikkdata/start/kart>
- 3 Ut fra tabellen til SSB kan det se ut som om Marits anslag var noe lave, noe som bare understreker relevansen av å inkludere elevene i innhenting av data, og kritiske vurderinger av disse.

Referanser

- Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red.), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics-ICTMA* (Bind 12, s. 222–231). Horwood Publishing.
- Johnsen-Høines, M. (2020). *Begynneropplæringen. Matematikdidaktikk – barnetrinnet*. Caspar Forlag.
- Steffensen, L. (2023). *Modellering: matematikk for skole og samfunn*. Caspar Forlag.

Nordskog, Lien

Modellering – å bryte med forventningene

Vi har undersøkt hvordan elever i matematikk IT jobber med modelleringsoppgaver, med særlig fokus på de aspektene ved modellering som skiller denne typen oppgaver fra mer tradisjonelle tekstoppgaver. I denne artikkelen tar vi utgangspunkt i resultater fra vår masteroppgave i matematikdidaktikk, som ble levert våren 2023 (Lien & Nordskog, 2023). Vi vil belyse de resultatene som vi mener har størst relevans for lærere i skolen.

Motivasjon for studien

Mange vil påstå at de ikke har fått bruk for den matematikken de lærte på skolen, og at denne har lite til felles med matematikken de benytter i hverdagen (Pollak, 2011). Ved å arbeide med modellering og åpne oppgaver vil flere elever være i stand til å se at skolematematikken er nyttig for livet ellers (Boaler, 2001). I tillegg har «modellering og anvendelser» fått en sentral plass i læreplanen som ett av kjerneelementene (Utdanningsdirektoratet, 2020). Læreplanen er

relativt ny for både lærere, lærerutdannere og lærerstudenter, og matematisk modellering er et nytt og ukjent område for mange. Derfor så vi det som interessant i masteroppgaven vår å se på hvordan elever arbeider med modelleringsoppgaver.

Pre-matematisering og validering

Det finnes flere modeller som beskriver idealtypiske løsningsprosesser for modelleringsoppgaver, og ofte fremstilles disse som sykliske. Felles for slike modelleringssykluser er at de beskriver de ulike stegene som ofte inngår i en løsningsprosess av modelleringsoppgaver, både i «den matematiske verden» og «resten av verden». Resten av verden omtales ofte som «den ekstra-matematiske verden», der begrepet «ekstra-matematisk» refererer til det som ligger utenfor det matematiske domenet. Et eksempel på en slik modelleringssyklus er Blum og Ferris (2009) firestegsmodell (Figur 1), som går ut på å dele opp et problem i (1) *å forstå problemet*, (2) *finne/systematisere/anta informasjon*, (3) *gjøre matematiske utregninger* og (4) *forklare og vurdere resultatet*. I noen tilfeller vil det være nødvendig å bevege seg gjennom syklusen flere ganger for å oppnå et resultat som er meningsfullt med tanke på situasjonen som er gitt i oppgaveteksten. For eksempel kan man se seg nødt til å endre antakelsene man har gjort i første omgang, dersom de viser seg å være utilstrek-

Martin Nordskog

Universitetet i Agder
martin.nordskog@uia.no

Beate Lien

Universitetet i Agder
beate.lien@uia.no

kelige når man senere vurderer det matematiske resultatet man har kommet frem til.

I vårt masterprosjekt ønsket vi å undersøke hvordan elevene jobbet i *pre-matematiske steg*, og hvordan de *validerte* resultatene sine. Med begrepet *pre-matematiske steg* sikter vi til stegene før utviklingen av en matematisk modell. Dette innebærer elevenes arbeid med å forstå problemet, samt finne, systematisere og anta informasjon. Med validering av resultatet menes elevenes arbeid med å forklare resultatet og vurdere løsningen i lys av situasjonen som er gitt.

En av grunnene til at vi ønsket å rette søkelys mot nettopp disse stegene, var at dette er steg som har blitt problematisert i tidligere forskning innenfor modellering (Blum & Ferri, 2009; Jankvist & Niss, 2020). Dette er også steg som kanskje markerer det største skillet mellom modelleringsoppgaver og mer «tradisjonelle» tekstopp-gaver, og vil kunne være utfordrende for elever med lite modelleringserfaring. Særlig validering av resultatene sett i lys av den opprinnelige situasjonen trekkes frem som et tydelig skille mellom modellering og tradisjonelle tekstopp-gaver (Pollak, 2011).

Optimaliserende modellering

I vår studie har vi undersøkt hvordan elever i matematikk 1T jobber med to modellerings-

Oppgave 1 – Sommerjobb

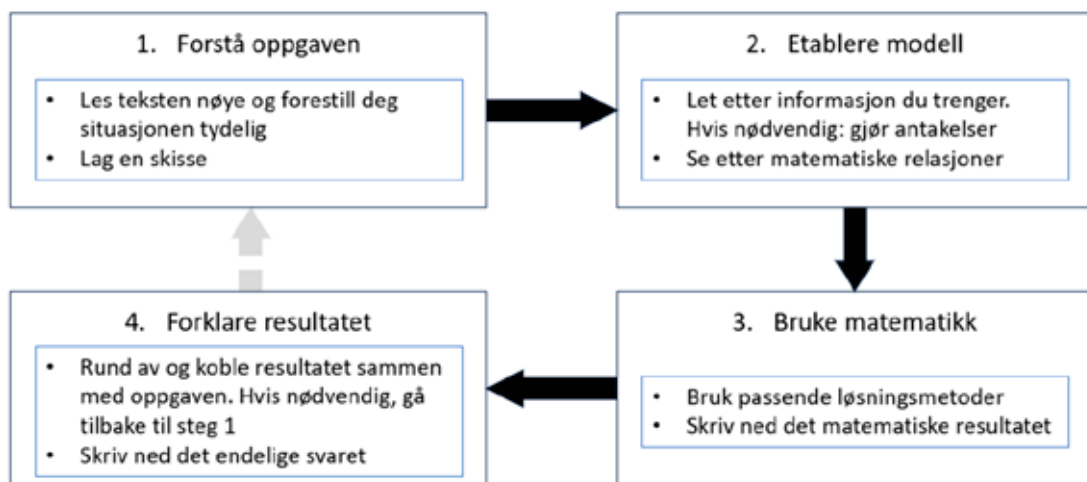
Sommerferien nærmer seg, og din venn Jørgen vil ha en sommerjobb. Han fant en jobb som betaler 20 kroner i timen over minstelønna, og en annen jobb som tilbyr halvparten av minstelønna pluss provisjon på 20 kroner per solgte vare. Jørgen spør etter din hjelp. Hvilken jobb ville du anbefalt han å ta?

Oppgave 2 – Fylle tanken

Helen bor på Lund, like ved en bensinstasjon. Hun kjører en Toyota Yaris, og skal fylle opp bensintanken. Venninna til Helen sender bilde av bensinprisene i Grimstad, hvor det viser seg at bensinen er 3 kroner billigere. Er det verdt å ta turen til Grimstad for å fylle opp bensintanken?

oppgaver der elevene skal bestemme hva som er den beste løsningen av to alternativer. Dette er oppgaver som involverer det English (2021) kaller *optimaliserende modellering*, altså at man bruker modellering til å velge det «beste» av flere alternativer. Oppgavene er gjengitt i rammen.

Oppgave 1 er hentet fra et emne vi selv hadde i løpet av studietiden i arbeid med modellering. I oppgaven nevnes begrepet *minstelønn*, noe som kan gjøre oppgaven ekstra utfordrende.



Figur 1: Blum og Ferris (2009) firesteps «løsningsplan» (oversatt av oss).

Elevene må ta stilling til og gjøre antakelser om hva slags jobb det kan være snakk om, og hva en eventuell minstelønn kan være. Minstelønn er heller ikke et lovfestet begrep i mange bransjer, og elevene må bruke egne erfaringer og ekstra-matematisk kunnskap for å gjøre fornuftige antakelser. Oppgave 2 er inspirert av oppgaven «Filling up» fra Blum og Leiß (2006), og er tilpasset en norsk kontekst. Begge oppgavene bærer preg av manglende informasjon i oppgaveteksten, og stiller dermed krav til at elevene må gjøre nødvendige antakelser for å kunne *matematisere* situasjonen, *arbeide matematisk*, og finne resultater som indikerer en anbefaling til henholdsvis Jørgen og Helen. Hva som menes med det «beste» alternativet, er heller ikke gitt i oppgaven, men stiller i stedet krav til at elevene selv må velge faktorer de vil vektlegge når de skal anbefale et alternativ. Noen vil vektlegge lønnsomhet, mens andre vil fokusere på tidsbruk, forurensning, trygghet eller andre faktorer.

Elevene jobbet sammen i grupper på tre, og hele klassen jobbet med de samme oppgavene. To av gruppene satt på eget grupperom der det ble tatt lydopptak av oppgaveløsingen. I tillegg ble disse to gruppene intervjuet om oppgavene i etterkant av løsningsprosessen. For resten av klassen var deres faglærer til stede i klasserommet, med instruksjon om å legge til rette for mest mulig selvstendig arbeid med oppgavene. Elevbesvarelser fra hele klassen og lydopptak fra de to gruppene utgjorde datagrunnlaget i masteroppgaven vår.

«Da er det ikke matematikk lenger»

Den franske matematikkdiraktikeren Guy Brousseau introduserte begrepet *didaktisk kontrakt*, noe som beskriver en underbevisst avtale mellom lærer og elever om hvilke normer og regler som gjelder i en undervisningssituasjon (Brousseau & Otte, 1991). Den didaktiske kontrakten viser til en gjensidig forventning mellom lærer og elever, ofte basert på forventninger og vaner som er utviklet over flere år.

Avtalen kan innebære at det er lærerens oppgave å fortelle hvordan en kan løse en gitt oppgave, mens elevenes oppgave er å gjennomføre løsningsmetoden på en eller flere liknende oppgaver.

Funn fra vår studie viser at elevene i stor grad gjorde relevante antakelser for å veie opp for manglende informasjon i oppgaveteksten. Til tross for at elevene kom opp med slike antakelser, vegret de seg i stor grad for å bruke dem. De forsøkte heller å løse oppgavene ved å utvikle generelle uttrykk, der de brukte variabler i stedet for antatte verdier for de ulike størrelsene. Elevene uttrykte eksplisitt at ved å bruke antakelser eller informasjon de selv fant, var det ikke lenger snakk om en matematikkoppgave. Det kan virke som de oppfattet det som juks, og at det brøt med deres forståelse av hva en matematikkoppgave skal være, og hva som er «lovlige» steg i løsningsprosessen. Hva som regnes som lovlige steg, kan være påvirket av den didaktiske kontrakten som er etablert i klasserommet. I arbeid med modelleringsoppgaver må elever ofte bryte den didaktiske kontrakten, ettersom modelleringsoppgaver gjerne er mer åpne enn tradisjonelle matematikkoppgaver. Løsningsmetoden er ikke gitt, og kan variere fra elev til elev, og fra oppgave til oppgave.

Et annet funn, som er mer spesifikt knyttet opp mot optimaliserende modellering, er hvordan elevene definerte det «beste» alternativet. Elevene i vår studie hadde utelukkende fokus på lønnsomhet i utviklingen av en reell modell. Dette påvirket videre den matematiske modellen, og dermed også det matematiske resultatet. Fra et matematikkdiraktisk perspektiv er det interessant hvordan elevene tok stilling til andre faktorer da de senere skulle validere resultatet på oppgaven. Da endret de sine kriterier for det «beste» alternativet, og endret dermed også sin reelle modell ved å inkludere faktorer som forutsigbarhet i oppgave 1 og tidsbruk og trafikkrisikoer i oppgave 2. Elevene lot likevel ikke denne endringen påvirke resten av løsningspro-

sessen, og beholdt den matematiske modellen til tross for endret reell modell. Med andre ord gjorde elevene ingen utregninger knyttet til andre faktorer enn lønnsomhet, men de vurderte likevel disse faktorene opp mot resultatet de fikk basert på modellen som kun tok stilling til lønnsomhet. Faktorer som forutsigbarhet og trafikkrisiko er riktignok faktorer som er utfordrende å implementere i en matematisk modell.

Czocher (2018) beskriver hvordan man kan se på validering som en sammenlikning mellom et valideringsobjekt og en valideringsstandard, der objekt er det man validerer, mens standard er det man sammenlikner med. For eksempel kan en validering av en matematisk modell (valideringsobjekt) innebære en sammenlikning med den reelle modellen (valideringsstandard), for å sørge for at alle antakelser og variabler ble inkludert i den matematiske modellen. Hun påpeker at alle fasene i modelleringssyklusen kan være valideringsobjekt eller valideringsstandard. Sett i lys av Czochers beskrivelse av validering ser vi at elevene i vår studie stort sett validerte ved å sammenlikne det reelle resultatet med den reelle modellen. Selv om elevene utelukkende fokuserte på lønnsomhet når de skulle definere hva som mentes med det «beste» alternativet, så endret elevene på denne definisjonen når de validerte resultatet. Elevene gikk også tilbake til den reelle modellen for å undersøke om svaret de hadde fått, ga mening sett i forhold til antakelsene og informasjonen de baserte den matematiske modellen på.

Hvordan kan vi dra nytte av dette i fremtidig matematikkundervisning?

Resultater fra studien tyder på at det kan være hensiktsmessig å jobbe med elevenes forventninger til matematikkfaget, og utvide den didaktiske kontrakten som angår elevenes forventninger om hva en matematikkoppgave skal være. Det er viktig å påpeke at den didaktiske kontrakten sjelden er uttrykt eksplisitt mellom lærer og elever, men at den heller er en underbevisst avtale. Som lærer bør man være seg bevisst

de forventningene elevene har til lærere, oppgaver og faget som helhet. I tillegg kan det være fordelaktig at læreren trygger elevene i en tidlig fase av modelleringsprosessen, ved å opplyse at kvalifiserte antakelser kan veie opp for manglende informasjon i oppgaveteksten.

Julie (2002) påpeker at det vil være hensiktsmessig å arbeide med modellering som en kompetanse i seg selv, og ikke kun som et verktøy for å lære andre matematiske temaer. Dette er påstander som støttes av resultater fra vårt masterarbeid. Å gjøre elevene bevisst på hva modellering er, og på de ulike stegene i modelleringssyklusen, tror vi vil være nyttig. For eksempel kan man arbeide spesifikt med å lage og bruke fornuftige antakelser, eller diskutere hva som er gyldige matematiske modeller og gyldige resultater. Om man legger vekt på hva modellering er, og snakker om at matematiske modeller kan være gyldige representasjoner av virkelige situasjoner, vil elevene muligens bli mer komfortable med å anerkjenne løsningsene sine som gyldige.

I tillegg indikerer resultatene fra vårt masterprosjekt, i likhet med blant annet Blum og Ferris (2009) studier, at det er hensiktsmessig å bruke tid på å utvikle og bruke strategier for å løse modelleringsoppgaver. På samme måte som mange lærere og elever har fokusert på å utvikle problemløsningsstrategier, kan det være fornuftig å gjøre det samme med tanke på modelleringsoppgaver. For eksempel kan man bruke enkle modelleringssykluser for å løse oppgaver, med konkrete beskrivelser av hva som må gjøres i hvert steg for å komme frem til en løsning. Firestegsmodellen til Blum og Ferri (2009), som illustrert på Figur 1, er spesifikt designet for å bistå elever i håndteringen av modelleringsoppgaver. Ved å bruke en slik modelleringssyklus aktivt kan elevene bli seg bevisst sine egne strategier i arbeid med modellering, og samtidig utvikle modelleringskompetansen sin.

Oppsummering

Funnene fra masteroppgaven vår tyder på at

modelleringsoppgavene bryter med elevenes forventninger til hva en matematikkoppgave skal være. Elevene har de matematiske og ekstra-matematiske forutsetningene som kreves for å løse oppgavene, men hindres av sine egne oppfatninger av hva som er gyldige trinn i en løsningsprosess.

Det er tydelig at elevene ikke er vant til å måtte finne og bruke sine egne antakelser, og de uttrykker eksplisitt at oppgavene bryter med deres oppfatning av hva en matematikkoppgave er. Med modellering som en sentral del av læreplanen er det viktig å legge til rette for god undervisning som fremmer modelleringskompetanse. Resultater fra masterprosjektet vårt indikerer at det kan være hensiktsmessig at læreren er bevisst på elevenes holdninger til faget og forsøker å utvide den didaktiske kontrakten slik at elevene aksepterer og får erfaring med et bredere spekter av oppgaver. Det kan også virke hensiktsmessig å trygge elevene i pre-matematiske faser ved å opplyse at kvalifiserte antakelser kan veie opp for manglende informasjon i oppgaveteksten. Vi mener at det kan være fordelaktig at elevene jobber med modellering som en kompetanse i seg selv med mål om å utvikle egne modelleringsstrategier.

Det er viktig å påpeke at det ikke bare er elever som strever med modelleringsoppgaver. Mange lærere strever også med slike oppgaver, og har manglende kunnskaper om både modelleringssykluser og -strategier. Solid modelleringskompetanse hos læreren er viktig for å sikre god og hensiktsmessig undervisning om modellering.

Referanser

- Blum, W. & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 45–58.
- Blum, W. & Leiß, D. (2006). "Filling Up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. I M. Bosch (Red.), *CERME 4–Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 1623–1633). FUNDEMI IQS–Universitat Sant Feliu de Guíxois. http://erme.site/wp-content/uploads/2021/06/CERME4_WG13.pdf
- Boaler, J. (2001). Mathematical modelling and new theories of learning. *Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA*, 20(3), 121–128.
- Brousseau, G. & Otte, M. (1991). The Fragility of Knowledge. I A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. van Dormolen (Red.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (Bd. 10). Kluwer Academic Publishers.
- Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process? *Educational Studies in Mathematics*, 99(3), 137–159. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9833-4>
- English, L. D. (2021). Mathematical and Interdisciplinary Modeling in Optimizing Young Children's Learning. I J. M. Suh, M. H. Wickstrom & L. D. English (Red.), *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners* (s. 3–23). Springer.
- Jankvist, U. T. & Niss, M. (2020). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. *International Journal of mathematical education in science and technology*, 51(4), 467–496. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1587530>
- Julie, C. (2002, Juli). *Making relevance relevant in mathematics teacher education*. Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level), New York.
- Lien, B. & Nordskog, M. (2023). «Helen vil spare 42 kroner hvis bilen kunne fly» [Masteroppgave, Universitetet i Agder]. AURA. <https://hdl.handle.net/11250/3074450>
- Pollak, H. O. (2011). What is mathematical modeling? *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 2(1), 64.
- Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i Matematikk T (MAT09-01)*. Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat09-01/om-faget/kjerneelementer?lang=nob>

Husevik

Matematisk modellering med pendel

I denne klasseaktiviteten lar jeg elever undersøke hvilke faktorer som påvirker svingetiden til en pendel, og gir elevene i oppdrag å reflektere matematisk for å beregne svingetiden på en ny pendel. Disse aktiviteter baserer seg på en matematisk modell av pendelen som er tilpasset elevenes forutsetninger.

Matematisk modellering

Matematisk modellering i grunnskolen gir elevene en mulighet til å oppdage og knytte matematisk kunnskap til situasjoner hentet fra en virkelighet mer eller mindre nær opptil elevens hverdag. Matematisk modellering har en viktig plass i LK20 som et av kjerneelementene i matematikkfaget der en modell er beskrevet som: «En modell i matematikk er en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk» (Kunnskapsdepartementet, 2020). En modell av modellering (en modelleringsmodell) av Niss og Blum (2020), vist i Figur 1, viser at en ser på modellering som en prosess som knytter sammen to ofte tilsynelatende ikke-overlappende områder. Det matematiske domenet, og det utenformatematiske domenet.

Mikael Husevik

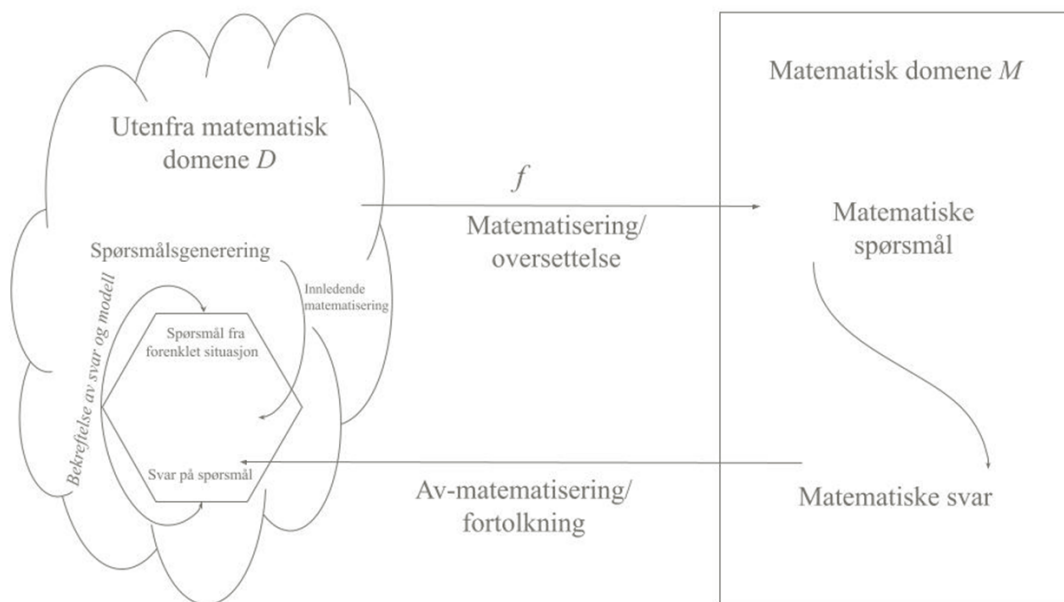
Foldnes skule

mikaelhusevik@gmail.com

Når det dukker opp et problem fra virkeligheten vil dette kunne analyseres, antakelser blir gjort, tegninger kan tegnes og forenklinger gjøres for at problemet kan bli overkommelig matematisk. Situasjonen blir altså oversatt til matematisk språk og symboler. Her kan elevene bruke det de har av tidligere kunnskap om matematikk for å løse det forenklete problemet. Når de matematiske utregningene er gjort blir svaret og konklusjonene «av-matematisert» og tolket på nytt i det utenformatematiske domenet. Stemmer løsningen med det utenformatematiske domenet, i dette tilfellet fysikkfaget? Kan modellen besvare spørsmål fra virkeligheten? Stegene gjentas så for å få en modell som tar hensyn til så mye relevant som mulig fra virkeligheten. En modell vil aldri bli perfekt, og dette er godt illustrert i sitatet fra George Box (1987): «Essentially, all models are wrong, but some are useful.»

Svingetiden til en pendel

Uten å gå for mye i detaljer, kan man si at svingetiden til en pendel påvirkes av lengden til pendelen. En pendel er et legeme festet til en snor og som kan svinge fritt. For en nøyere gjennomgang av teorien bak pendelens svingetid anbefaler jeg nærmeste fysikkbok. Selv brukte jeg «Physics for scientists and engineers with modern physics» av Serway og Jewett (2018).



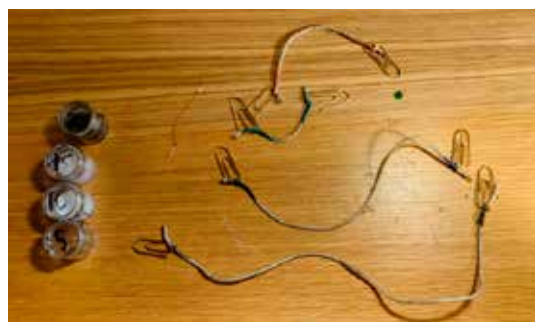
Figur 1: Modelleringsyklus av Niss og Blum (2020) oversatt til norsk av forfatteren..

Formelen som viser sammenhengen mellom tyngdekraftkonstanten g , trådlengde L og svingetiden T ser slik ut:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Forberedelser til undervisningsopplegget

For å gjøre modelleringsprosessen så strømlinjeformet som mulig for elevene hadde jeg gjort mesteparten klart på forhånd. Halvparten av pultene var satt sidelengs og jeg festet en knappel til et stolben for at elevene enkelt kunne gjennomføre pendelforsøket. Jeg hadde også forberedt både pendler med ulik lengde og vekt i form av tråder med binders og små smykkebeholdere fylt med sand, salt eller ingenting som vist i Figur 2. Elevene hadde også fått hver sin gruppe på forhånd og hver gruppe hadde hvert sitt A3 ark vist i Figur 3 som de skulle notere på. Jeg skrev navnene til deltakerne på gruppene før elevene kom inn i klasserommet slik at elevene raskt fant ut hvor de skulle være. Figur 4 viser



Figur 2: Ulikt utstyr forberedt på forhånd. Like pendler med ulik vekt, og fargekodede tråder med ulik lengde.

hvordan utstyret ser ut når elevene svinger på pendler og tar tiden.

Undervisningsopplegget

Undervisningsopplegget ble gjennomført med en elevgruppe på 7. trinn. Det kan gjerne tilpasses til å bli brukt på hele mellomtrinnet og ungdomstrinnet. Elevene kom inn i klasserommet og fant sine egne plasser og viste nysgjerrighet til opplegget for timen. Jeg hadde så en kort presentasjon for å vise hva elevene skulle

Deltakere på gruppa:				Notater og utregning:			
Vekt: 5g		Vekt: 30g					
Lengde	Tid (10 ganger)	Lengde	Tid (10 ganger)				
10cm		10cm					
15cm		15cm					
20cm		20cm					
25cm		25cm					
30cm		30cm					
35cm		35cm					
40cm		40cm					
Vekt: 15g		Vekt: 30g					
Lengde	Tid (10 ganger)	Lengde	Tid (10 ganger)				
10cm		10cm					
15cm		15cm					
20cm		20cm					
25cm		25cm					
30cm		30cm					
35cm		35cm					
40cm		40cm					

Figur 3: Ark skrevet ut i A3-format og som elevene noterte på underveis.

gjøre. Elevene skulle fylle ut tabellen ved å gjøre målinger med pendler. Jeg viste til elevene at de måtte ha kort utslag på pendelen, at de skulle slippe og så telle 10 perioder før de stoppet tiden, og at de videre måtte prøve ut alle kombinasjoner av lengde og vekt.

Elevene fikk to oppgaver denne økten:

1. Undersøk hvilke faktorer som påvirker svingetiden til en pendel
2. Bruk målingene til å beregne tiden til en pendel fra lærer

Elevene skulle altså matematisk modellere svingetiden til en pendel der arket fungerer som en del av den innledende matematiseringen, se Figur 1 på venstre side i modellerings-syklusen. Elevene gikk så i gang med å hente utstyr. De brukte egne telefoner til å gjennomføre tidtaking. Tidtakingen kunne også blitt gjort på elevenes egen chromebook eller med stoppeklokke. Når elevene var ferdige med å ta målinger brukte de egne data til å utforske hvor lang svingetiden vil være på en pendel som ble presentert i fellesskap til elevene. Den hadde en lengde på 80cm med vekt på 40g. For å unngå ordet hypotese som elevene ikke ennå er vant med, valgte jeg å bruke ordet gjetting i klassen.

Elevenes arbeid og mine refleksjoner

Elevene fikk velge navn til gruppene selv for



Figur 4: Elever svinger pendler.

å bevare anonymiteten. Nesten alle gruppene hadde gjennomført alle målingene de trengte innen 20 minutter. Alle elevene kom fram til konklusjonen at vekten ikke hadde noe å si for svingetiden. Gruppen Pendl testet dette ved å sette to like lange pendler ved siden av hverandre med ulik vekt, og observerte at de hadde lik svingetid.

Det var usikkert på forhånd om elevene kom til å ha tid til å gjennomføre alle målingene, og om dette kom til å bli gjennomført på en nøyaktig nok måte. Dette viste seg å ikke være noe problem, noe jeg antar kommer av godt forarbeid. Elevene viste at de raskt skjønnte hvordan man skulle fylle inn tabellen og ta tiden på pendelen. I tillegg var lengdene på snorene og vekten på pendlene godt merket, slik at det dukket opp svært få spørsmål om hva elevene

Vekt: 5g		Vekt: 10g	
Lengde	Tid (10 ganger)	Lengde	Tid (10 ganger)
10cm	5,88 7,01	10cm	7,68
15cm	8,25	15cm	8,12
20cm	8,25	20cm	9,62
30cm	10,95	30cm	10,57
40cm	12,41	40cm	12,60

Vekt: 15g		Vekt: 20g	
Lengde	Tid (10 ganger)	Lengde	Tid (10 ganger)
10cm	5,88 7,39	10cm	7,28
15cm	8,25 8,96	15cm	8,12 8,62
20cm	8,97	20cm	9,40
30cm	10,22	30cm	10,88
40cm	12,62	40cm	12,86

Vekt: 5g		Vekt: 10g	
Lengde	Tid (10 ganger)	Lengde	Tid (10 ganger)
10cm	6,33	10cm	6,58
15cm	7,22	15cm	7,62
20cm	8,68	20cm	8,49
30cm	10,73	30cm	10,63
40cm	12,00	40cm	12,17

Vekt: 15g		Vekt: 20g	
Lengde	Tid (10 ganger)	Lengde	Tid (10 ganger)
10cm	6,12	10cm	6,47
15cm	7,38	15cm	7,46
20cm	8,77	20cm	8,81
30cm	10,88	30cm	10,97
40cm	12,13	40cm	12,35

Figur 5: Data fra gruppa JA og Jim.

skulle gjøre. Med målingene hadde gruppene altså matematisert pendelsvingen. De utfylte tabellene er en matematisk beskrivelse av noe i virkeligheten, altså det matematiske domenet M fra Figur 1. Elevene hadde dermed en matematisk modell de kunne bruke for å finne et matematisk svar på andre spørsmål.

Variasjonene i de ulike resultatene elevene fikk, samt variasjon fra forventet teoretisk resultat, kan skyldes unøyaktighet når jeg laget

utstyret. Utstyret ble laget ved å bruke linjal for å knyte tråd til binders. Jeg ville valgt en tynnere tråd og vært mer nøyaktig i målingene om jeg skulle gjennomført opplegget på nytt. Tiden samsvarer heller ikke helt med det en skal kunne forvente matematisk. Eksempel er lengden på 40 cm som burde hatt en svingetid på 12,7 sekunder på 10 perioder. Et gjennomsnitt av et utvalg av elevenes resultatene i Figur 5 gir en svingetid på 12,39 sekunder, som tilsier at lengden på pendelen kan være nærmere 38 cm. Dette førte nok til at elevene ikke like lett kunne se ut fra tabellen at svingetiden til pendelen på 40cm var dobbelt så mye som svingetiden til pendelen på 10 cm. Likevel kan målingen svakt indikere at økningen av svingetiden minket litt hver gang at snoren ble 10 cm lengre.

Til å finne svar på det andre spørsmålet, altså å beregne tiden til en pendel på 80cm, brukte alle gruppene sin tabell. Som man kan se i Figur 6 faller gjettingene inn i to grove kategorier. Ikke-linearisering på ca 16–17 sekunder, og linearisering omtrent 25 sekunder. Figur 7 viser begrunnelsene for den siste kategorien, altså en linearisering fordi de gjør en dobling av resultater fra 40 cm.

Gruppen Kevin derimot forklarte at for å beregne pendelen på 80 cm og 40 g la de sammen resultatene som de hadde for å oppnå den ønskede lengden og vekten. Jeg synes det er interessant at de som hadde gjettingen innenfor lineariseringskategorien ikke brukte sine andre data til å forsøke å falsifisere denne strategien. Om elevene tenker at det er en generalitet at dobling av lengde fører til dobling av svingetid kunne de ha falsifisert det gjennom å se på egne data gjennom å observere at svingetiden til pendelen på 40 cm åpenbart ikke er dobbelt så lang som svingetiden til pendelen på 20 cm.

De andre gruppene viste ingen god forklaring på hvordan de kom fram til sin gjetting, med unntak av gruppen HC som skrev: «16:30 fordi jeg tenkte fordi når vi dobler 20 cm og 10 g» men ingen forklaring på hvorfor. Pendel beskrev muntlig at de la merke til at forskjell-

Østgard: 16.24 sekunder
Pendl: 16.27 sekunder
HC: 16:30 sekunder
XOXOGG: 16.34 sekunder
JA: 17.87 sekunder
MPG: 23.86 sekunder
Jim: 24.70 sekunder
Eple 25.40 sekunder
Kevin: 28.64 sekunder

Figur 6: Alle gjettinger



Figur 7: Begrunnelse gjetting Jim.

len mellom målingene økte, og gjettet derfor ut fra dette. Noen grupper forsøkte å henge to 40cm pendler på hverandre for å måle på denne måten, men jeg oppfordret dem til å forsøke å bruke tabell sin til å gjøre en matematisk beregning istedenfor. Det var en anmodning for å jobbe innen matematiske området, se Figur 1

på venstre siden. Likevel er det ikke umulig at noen grupper klarte å gjennomføre en validering i det utenformatematiske domenet uten at jeg la merke til det. Med sine svar hadde elevene altså gått gjennom hele modelleringssyklusen.

Dette var mitt første møte med modellering i et klasserom der elevene skulle gjennomføre et relativt åpent opplegg, og jeg er glad for at økten gikk så bra og at elevene også i etterkant har gitt uttrykk for at de fremdeles husker resultatet og lærdommen de tok fra modelleringen.

Jeg er også overbevist om at noe som gjorde at opplegget fungerte så bra var godt forarbeid i form av nøye utvalgte gruppesammensetninger, minimalistisk skjema, tydelig forklaring og presentasjon i starten av timen og at tråder og vekter var laget klar på forhånd og fargekodet for at elevene enkelt kunne gjennomføre målingene. Det var en morsom økt å gjennomføre med elevene, og anbefales på det sterkeste!

Referanser

- Box, G. E. P., & Draper, N. R. (1987). *Empirical model-building and response surfaces*. John Wiley & Sons.
- Kunnskapsdepartementet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.-10.trinn (MAT01-05)*. Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.
- Niss, M & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge.
- Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2018). *Physics for scientists and engineers with modern physics*. South Melbourne, VIC, Australia: Cengage Learning.

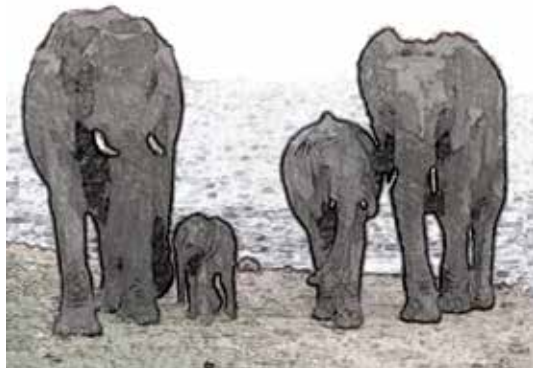
Elefanten i klasserommet

Ei modelleringsoppgåve som kan prøvast ut på for eksempel 4. trinn er formulert slik: *Har vi plass til ein elefant i klasserommet?*

I arbeidet med denne oppgåva kan det vere nyttig å ha nokre meterstokkar med lengd 2 m, linjalar, bildet i figur 1 og informasjon om at elefanten heilt til høgre på bildet er omtrent 3 meter høg.

Ut i frå bildet i figur 1 kan elevane anslå høgda og breidda til dei ulike elefantane. Denne høgda og breidda gir ei førestilling av elefanten, som ein kan oppfatte som ein modell. Ved hjelp av meterstokken kan elevane finne ut kor høgt klasserommet er, og høgd og breidd av dør- og openinga. Når elevane har gjort vurderingar og kan svare på spørsmålet, må dei grunngje svaret ved å gjere greie for forenklingar dei har gjort, og kva dei har tatt utgangspunkt i for å kome fram til svaret sitt. I denne modellen er det for eksempel berre høgda og breidda til elefanten som er relevant. Medan andre eigenskapar som grå hud, snabel eller støyttenner, er irrelevant.

Som hjelp når elevane sjølve skal vurdere løysinga si, kan dei lage ein annan modell, for eksempel ein modell av berre hovudet til elefanten i målestokk 1 : 1, for få hjelp til å sjå føre seg kor stor elefanten verkeleg er (for eksempel som i figur 2). Denne pappmodellen er då ein fysisk representasjon av det dei har kome fram til i utrekningane dei har gjort, og samtidig er den



Figur 1: Ein familie afrikanske elefantar.

ein delvis 3-dimensjonal matematisk modell til forståing av ekte størrelsar av vaksne elefantar.

Det er vel heller sjeldan at ein får besøk av elefantar i norske klasserom, så dette må ein forstå som ein konstruert kontekst. Som lærar kan ein heller føreslå gjestar som er meir kjente for elevane. Er det mogleg at ein elg, hjort, rein eller ponni kan kome inn i klasserommet?



Figur 2: Elefanhovud i papp. Bildet er henta frå Llantarnam Grange – Arts Centre, lgac.org.uk

Ingeborg Lid Berget

Høgskulen i Volda
bergeti@hivolda.no

Pauline Vos

Høgskulen på Vestlandet
pauline.vos@hvl.no



MATEMATIKKSENTERET

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen



NYTT FRA MATEMATIKKSENTERET

Matematikksenteret er en partner i lokalt utviklingsarbeid, vi forsker på matematikkundervisning og tilbyr forskningsbasert etter- og videreutdanning.

I dette nummeret skriver vi om:

- DEKOM Trøndelag:
God undervisnings- og
vurderingspraksis etter LK20
- Vil du bidra på
Novemberkonferansen 2024?

Vi har spisskompetanse på matematikkdiraktikk og jobber tett på lærere og elever. Vi er et bindeledd mellom praksis, forskning og utvikling. Vårt mål er at alle barn og unge skal erfare at matematikk er engasjerende, utfordrende og meningsfullt.

Besøk våre nettsider:

Matematikksenteret.no
Fagstoff og læringsressurser

MatteLIST.no
Oppgaver og aktiviteter for utforskning
og problemløsning

Matematikk.org
Spill, oppgaver og fakta om matematikk

Alleteller.no
Vurderingsverktøy for talloppfatning og
tallforståelse

Realfagsloyper.no
Kompetanseutvikling i realfagene



MATEMATIKKSENTERET

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

DEKOM Trøndelag – God undervisnings- og vurderingspraksis etter LK20

Astrid Bondø og Kjersti Pleydum Spigset

De to siste årene har ungdomstrinns lærere i Trøndelag fått tilbud om å delta i et fellestiltak om god undervisnings- og vurderingspraksis. Målet er at lærere skal utvikle en god læreplanforståelse, og at de skal kunne gjennomføre vurdering som er i tråd med intensjonene i forskrift og læreplan. Tiltaket tar utgangspunkt i fagene norsk, matematikk og engelsk, men kan også bidra til en mer generell forståelse av kompetansebegrepet i LK20 og vurdering etter læreplaner i andre fag. Det er også et mål at skolene som deltar skal utvikle sitt tolkningsfellesskap knyttet til læreplanforståelse og vurderingspraksis; både internt på skolene og mellom skoler. Tiltaket består av fem fagsamlinger (tre fysiske og to digitale) fordelt på tre semestre. Innholdet på de ulike samlingene belyser liknende problemstillinger både i engelsk, matematikk og norsk. Planlegging og gjennomføring av fagsamlingene er lagt til henholdsvis Fremmedspråksenteret, Matematikksenteret og Skrivesenteret.

Bakgrunn for tiltaket

Høsten 2020 ble nytt læreplanverk for grunnopplæringen innført. Evalueringen av LK06 viste at implementeringsarbeidet tok tid, og at det var behov for støtte i et slikt arbeid. Parallelt med innføringen av nytt læreplanverk ble vurderingsforskriften endret, og det ble gjort et større fornyingsarbeid på eksamensområdet med hensyn til oppgavetyper og øvrige rammer for eksamen. Dette medførte et behov for støtte i vurderingsarbeidet – både underveis og sluttvurdering.

Vurdering er utfordrende

Overordnet del av læreplanen sier at «vurderingen av elevenes faglige kompetanse skal gi et

bilde av hva elevene kan, men et sentralt formål med vurderingen, er også å fremme læring og utvikling. God vurdering, der forventningene er tydelige og eleven deltar og blir hørt underveis i læringsarbeidet, er en nøkkel til å tilpasse undervisningen» (KD, 2017). Samtidig vet vi at elevvurdering er utfordrende for mange lærere. Elever er prisgitt lærernes tolking av kompetansemål og vurderingsforskrift (Brookhart et al., 2016). Det finnes per i dag ingen nasjonale vurderingsverktøy for lærere. Derfor er lærere nødt til, på egen hånd, å utvikle forståelse for hvordan læreplanen kan operasjonaliseres til god undervisnings- og vurderingspraksis. Dette, og et trolig fravær av tolkningsfellesskap mellom lærere, gjør utviklingsarbeid innen læreplanforståelse og vurderingskompetanse viktig.

I sluttvurderingen skal lærere vurdere elevenes kompetanse ved avslutningen av opplæringen. Mens eksamen ofte diskuteres, og det finnes spesielle skoleringsordninger for sensorer, forventes lærere å håndtere standpunktvurderingen uten ekstra støtte. En rapport (Björnsen & Skar, 2021) viste et fravær av tolkningsfellesskap mellom sensorer i norsk. Det er rimelig å anta at om lærere ikke er enige om vurdering ved sensur av eksamen, så vil de heller ikke være det når det kommer til den mer omfattende standpunktvurderingen.

Når læreren fastsetter standpunktarakteren, skal kompetansen eleven har vist i løpet av opplæringen være en del av grunnlaget for vurderingen. Elevens kompetanse og progresjon i faget vises gjennom den løpende underveisvurderingen, og underveisvurderingen bidrar til å fremme læring og lærelyst. Kompetanse eleven viser underveis er en del av vurderingsgrunnlaget læreren har, og læreren må vurdere i hvilken

grad kompetanse vist underveis, gir relevant informasjon om kompetansen til eleven ved avslutningen av opplæringen (Utdanningsdirektoratet, 2022).

Samlingene i matematikk

Lærere fra 49 skoler i Trøndelag har deltatt i fellestiltaket om god undervisnings- og vurderingspraksis. I tillegg har lærere fra voksenopplæring samt representanter fra PPT, kommuneledelse og fylkeskommune deltatt. I planleggingen av samlingene tok vi utgangspunkt i at undervisning og vurdering er to sider av samme sak. Et gjennomgående tema på samlingene var god undervisningspraksis i matematikk, og hvordan vurdering kan bidra til læring og å fremme lærelyst. I arbeidet med ulike aktiviteter modellerte vi lærerens rolle, mens deltakerne inntok elevrollen. I etterkant drøftet vi begge rollene i lys av god undervisningspraksis etter LK20. Deltakerne fikk erfaringer med å vurdere egen arbeidsprosess, egne løsninger, deltagelse i gruppearbeid og reelle elevløsninger på utvalgte oppgaver. Vi introduserte samtaletrekk (Wæge, 2015) som verktøy for å lede en målretta matematisk samtale, og utviklingspil (Liljedahl, 2023) for å vurdere kompetanse innen kjerneelementene. Vår erfaring fra andre prosjekt er at lærere synes det er utfordrende å vurdere kompetanse, og at de i hovedsak konsentrerer vurderingen rundt kjerneelementet *Matematiske kunnskapsområder*. For oss ble derfor valg av aktiviteter viktig for å få mer fokus på de andre kjerneelementene og kompetansebegrepet i LK20.

Alle oppgavene startet med at deltakerne måtte innta elevrollen og løse den valgte oppgaven, før vi hadde en oppsummering av deres tanker og løsningsmetoder. Hensikten var å lære mer om vurdering av kompetanse ut fra elevenes arbeid (oftest i grupper), å kunne forutse elevsvar som forberedelse til undervisning og formativ vurdering, og hvordan støtte elevene med spørsmål og/eller hint underveis i arbeidet.

Vi diskuterte deretter lærerens rolle, hvordan forberedelse, tilrettelegging og gjennomføring bidrar til at elevene får vist sin kompetanse.

Eksempel 1: Matematisk kompetanse

Målet var at deltakerne skulle få et innblikk i hva som kjennetegner matematisk kompetanse. Utgangspunktet i dette arbeidet var en oppgave fra eksempel på eksamen etter 10. trinn, januar 2022.



Figur 1: Eksempeloppgave eksamen i matematikk 10. trinn (januar, 2022).

Teksten om undervegsvurdering etter 8. trinn sier at:

Elevene viser og utvikler også kompetanse når de utforsker i praktiske sammenhenger og oversetter mellom representasjonsformer i problemløsning og modellering. Videre viser og utvikler de kompetanse i matematikk når de resonnerer over og argumenterer for framgangsmåter og løsninger. (KD, 2019).

Etter å ha arbeidet med oppgaven ble deltakerne presentert for reelle elevsvar og diskuterte i grupper: Hvilken matematisk kompetanse viser elevbesvarelsene? Hvilken framovermelding vil dere gi elevene? Hvilken matematisk kompetanse ønsker du at elevene skal sitte igjen med etter 10 års opplæring? Hvordan vil du under vise for å oppnå dette?

Eksempel 2: Resonnering og argumentasjon

Målet var få en dypere innsikt i hva som ligger i

kjerneelementet resonnering og argumentasjon og hvilken betydning det vil få for vurderingsarbeidet i faget.

Teksten om fagets relevans og sentrale verdier i matematikk sier at:

Kritisk tenkning i matematikk omfatter kritisk vurdering av resonnementer og argumenter og kan ruste elevene til å gjøre egne valg og ta stilling til viktige spørsmål i sitt eget liv og i samfunnet (KD, 2019).

Utgangspunkt for arbeidet var en oppgave utviklet av Matematikksenteret.

Til høyre ser du et hundrekar. I hundrekarer er tre tall markert.

Lydia har funnet et mønster i hundrekarer.

Sommen blir alltid tre ganger det minste tallet, så lenge tallene er markert eller samme nummer?

Argumenter for om påstanden til Lydia stemmer eller ikke.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figur 2: Oppgaven er utarbeidet av Matematikksenteret.

Etter å ha arbeidet med oppgaven og sett på reelle elevsvar diskuterte deltakerne i grupper: Hva kjennetegner gode resonnementer? Hva kjennetegner gode argumenter? Hva må vi vektlegge i undervisningen for at elevene skal bli bedre til å resonnerer og argumentere for løsningene sine?

Eksempel 3: Vurdering av samarbeid

Målet var å få innsikt i hvordan samarbeid bidrar til inkludering både i undervisning og vurdering i matematikk.

Under punkt 2.1 Sosial læring og utvikling i Overordnet del står det:

Å lære å lytte til andre og samtidig argumentere for egne syn gir elevene et grunnlag for å håndtere uenighet og konflikter, og for å søke løsninger i fellesskap. Alle skal lære å samarbeide, fungere sammen med andre og utvikle evne til medbestemmelse og medansvar (KD, 2017).

Utgangspunktet for arbeidet var oppgaven Sjørøverens diamant (etter idé fra Liljedahl, 2023, s. 232):

41 sjørøvere avsluttet et tokt og hadde fordelt gullet mellom seg. Det eneste som gjenstod var å bestemme hvem som skulle få den store diamanten. Kapteinen pekte ut hvem som skulle starte (nr. 1). Denne sjørøveren sendte bort nr. 2, nr. 3 sendte bort nr. 4 osv ... Slik fortsatte det med at annenhver forsvant helt til det stod igjen én sjørøver som ble eier av diamanten. På hvilken plass må kapteinen stille seg for at han skal være sikker på å ende opp med diamanten?



Figur 3: Lærere arbeider med Sjørøverens diamant.

Etter å ha arbeidet med oppgaven diskuterte vi i fellesskap hva som kjennetegner godt samarbeid. Vi sammenfattet dette og lagde en utviklingspil, som deltagerne brukte som utgangspunkt for egenvurdering av samarbeidet i gruppa.

Utviklingspil
SAMARBEID

1. Holder på med andre ting mens noen på gruppa snakker.

2. Melder seg ut av arbeidet.

3. Overstyrer andre på gruppa.

1. Lytter til hverandre.

2. Alle på gruppa deltar og bidrar.

3. Tar ansvar for at andre skjønner hva du mener.

Figur 4: Utviklingspil for samarbeid.

Eksempel 4: Generalisering

Målet var å øve på å beskrive matematisk kompetanse i generalisering, i arbeid med en konkret aktivitet.

Teksten om undervisvurdering etter 10. trinn sier at:

Elevene viser og utvikler også kompetanse når de utforsker og generaliserer matematiske sammenhenger og strukturer gjennom algebra og hensiktsmessige representasjoner. [...] Videre viser og utvikler de kompetanse i matematikk når de resonnerer over og argumenterer for sine egne og andres framgangsmåter og løsninger. (KD, 2019).

Utgangspunkt for arbeidet er oppgaven Strandhytter, hentet fra MatteLIST (mattelist.no/572).



Figur 5: Strandhytter (mattelist.no/572)

Etter å ha arbeidet med oppgaven tok deltakerne utgangspunkt i eget arbeid (i grupper) og beskrev kompetanse i generalisering. Til hjelp med å komme i gang, fikk de tre eksempelsetninger som de kunne endre og/eller bygge videre på:

Eleven generaliserer enkelte sammenhenger i geometriske mønster og tallmønster, og eleven er god til å kommunisere sammenhengene hen finner.

Eleven har vist god kompetanse i å finne, beskrive og uttrykke sammenhenger rekursivt, altså bygge på forrige, og kan uttrykke noen sammenhenger eksplisitt.

Eleven bruker gjett og sjekk som tilnærming til generalisering, altså at eleven prøver seg fram med tall og regneoperasjoner for å lage en regel som passer situasjonen.

Eksempel 5: Modellering

Målet var å få innsikt i hva som kjennetegner matematisk modellering og diskutere hvordan kompetanse i matematisk modellering kan vurderes. Teksten om undervisvurdering etter 10. trinn sier at:

Læreren skal legge til rette for elevmedvirkning og stimulere til lærelyst ved at elevene får utforske matematikk og løse matematiske problemer gjennom å være kreative, modellere og reflektere (KD, 2019).

Utgangspunktet for arbeidet var oppgaven Rundballer (Borromeo Ferri, 2018, s. 14)

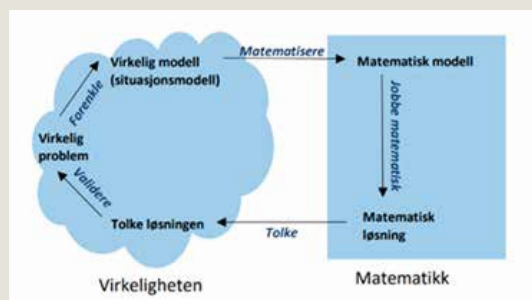


Figur 6: Rundballoppgaven.

Etter å ha arbeidet med oppgaven og diskutert hva som ligger i begrepet matematisk modellering, drøftet vi en modell for matematisk modellering (Maaß, 2006), se Figur 7. Deretter vurderte deltagerne egen modelleringskompetanse fra arbeidet med rundballoppgaven ut fra følgende spørsmål:

- Hva gjorde dere når dere arbeidet med rundballoppgaven?
- Gå gjennom punkt for punkt (1–6) og kom med konkrete eksempler.
- Vurder det dere gjorde (både som gruppe og enkeltindivider).

1. Forstå oppgaven
2. Forenkle og strukturere oppgaven
3. Matematisere
4. Arbeide matematisk
5. Tolke
6. Validere/reflektere



Figur 7: Maaß (2006) sin modell for matematisk modellering.

Eksempel 6: Lærings- og vurderingsmuligheter i oppgaver

Målet var å diskutere lærings- og vurderingspotensial i ulike oppgaver.

Matematisk kompetanse innebærer mye mer enn å huske fakta og kunne følge en bestemt algoritme eller prosedyre. Skal elevene få mulighet til å utvikle en helhetlig matematisk kompetanse kan de ikke bare arbeide med oppgaver som stiller lave kognitive krav (Valenta, 2016).

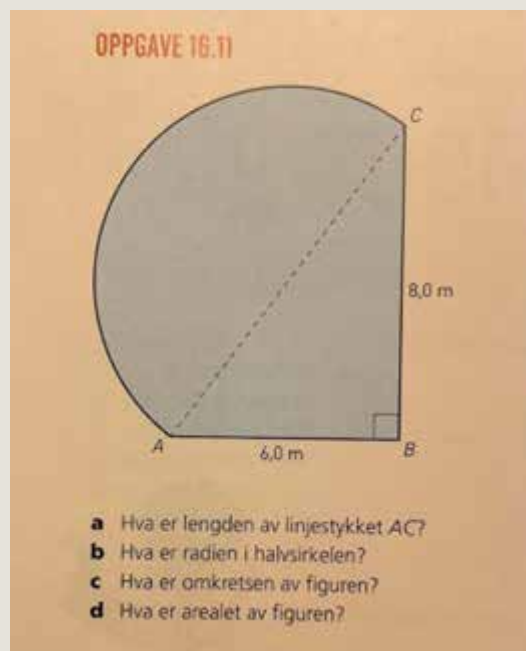
Under punkt 2.2 «Kompetanse i fagene» i overordnet del står det:

«Skolen skal gi rom for dybdelæring slik at elevene utvikler forståelse av sentrale elementer og sammenhenger innenfor et fag, og slik at de lærer å bruke faglige kunnskaper og ferdigheter i kjente og ukjente sammenhenger» (KD, 2017).

En av oppgavene vi brukte var oppgave 16.11 fra Matemagisk 9 (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 192), se Figur 8.

Etter å ha løst oppgaven diskuterte deltakerne følgende spørsmål i grupper:

Hvilken kompetanse har elevene mulighet til å vise ved å løse denne oppgaven? Hvilke endringer kan gjøres i oppgaveformuleringen for at elevene skal få mulighet til å vise en større bredde av sin kompetanse?



Figur 8: Oppgave fra Matemagisk 9.

Oppsummering

Eksempelene på innhold er hentet fra fellestil-takets første pulje (2022–2023). Høsten 2024 starter tiltaket opp igjen med en ny pulje i Trøndelag. Her skal nye skoler og lærere delta. Lærerne som deltok i pulje 1 har jevnt over kommet med gode tilbakemeldinger på faginnholdet. De har også løftet frem nytten av å møtes på tvers av skoler og kommuner for å diskutere praksis knyttet både til vurdering og undervisning. At tiltaket har inkludert tre fag (matematikk, norsk og engelsk) trekker også lærerne fram som positivt. Det har medført at skolens vurderingspraksis har blitt satt på dagsorden, og at kollegiet har diskutert vurdering både i fag og overordnet.

Referanser

Bjørnsson, J. K. & Skar, G. B. (2021). *Sensorreliabilitet på skriftlig eksamen i videregående opplæring*. <https://folk.ntnu.no/gustafsk/Bjornsson-Skar-2021-Sensorreliabilitet-pa-skriftlig-eksamen-i-vgo.pdf>

- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer.
- Brookhart, S. M., Guskey, T. R., Bowers, A. J., McMillan, J. H., Smith, J. K., Smith, L. F., Stevens, M. T. & Welsh, M. E. (2016). A Century of Grading Research. *Review of Educational Research*, 86(4), 803–848. <https://doi.org/10.3102/0034654316672069>
- Kongsnes, A. L. & Wallace, A. K. (2020). *Matemagisk 9*. Aschehoug.
- Kunnskapsdepartementet (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.
- Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.
- Liljedahl, P. (2023). *Å bygge tenkende klasserom i matematikk: 14 praksiser for bedre læring*. Cappelen Damm.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113–142.
- Utdanningsdirektoratet (2022). *Standpunktvurdering*. <https://www.udir.no/laring-og-trivsel/vurdering/sluttvurdering/standpunktvurdering/>
- Valenta, A. (2016). *Kognitive krav i matematikkoppgaver*. Matematikksenteret. <https://matematikksenteret.no/sites/default/files/2022-10/Kognitive%20krav%20i%20matematikkoppgaver.pdf>
- Wæge, K. (2015). Samtaletrekk – redskap i matematiske diskusjoner. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 26(2), 22–27.

Vi søker bidrag til Novemberkonferansen

Novemberkonferansen er den største årlige konferansen for matematikklærere i Norge. Temaet i 2024 er «Å undervise gjennom problemløsning». Har du lyst til å dele kunnskap, erfaring, forskning eller eksempler fra praksis om temaet? Send oss ditt bidrag

Problemløsning handler om å løse et problem hvor elevene ikke kan bruke en løsningsmetode de kjenner fra før. Elevene må utvikle nye metoder og bruke kunnskapen sin i nye situasjoner. Problemløsning er et av kjerneelementene i matematikk, og er en viktig del av elevenes matematiske kompetanse.

Lærerens rolle er svært viktig i en undervisning som vektlegger problemløsning. Læreren må velge gode problemløsningsoppgaver, stille gode spørsmål, vurdere, utfordre og støtte elevene i problemløsningsprosessen.

Har du kunnskap, erfaring, praksiseksempler eller forskning knyttet til temaet, som du vil formidle til andre? Aktuelle tema kan være:

- Hvordan lede elevene mot læringsmålet?
- Hvordan ivareta og bygge på elevenes tenking?
- Hvilke grep kan læreren gjøre for å øke elevaktiviteten?
- Hva kan være god undervisningsvurdering?

Vi ber om bidrag til verksted på 80 minutter der tiden hovedsakelig benyttes til en aktivitet, eller en kombinasjon av presentasjon (maks 15–20 minutter), aktivitet og diskusjon. Vi legger vekt på at verkstedene må være aktivitets- og/eller diskusjonsbaserte. Rene foredrag vil ikke bli prioritert.

Verkstedene skal knyttes opp mot konkrete læringskontekster og matematiske temaer. I første omgang ønsker vi:

- Forslag til tittel på verkstedet
- Kort presentasjon av verkstedsholder med bilde
- En kort beskrivelse av verkstedet (ca. 200–300 ord)
- Presisering av målgruppe (småtrinn, mellomtrinn, ungdomstrinn, videregående, alle)
- Maks antall deltakere

Alle som skal holde verksted må være forberedt på å gjennomføre verkstedet to ganger i løpet av konferansen. Dette for at så mange som mulig skal få mulighet til å delta på det de ønsker.

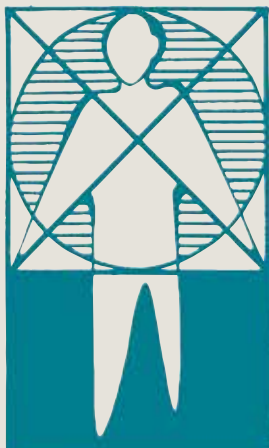
Novemberkonferansen 2024 arrangeres 19.–20. november på Scandic Lerkendal, Trondheim. Påmeldingen åpner 20. august.

Vi betaler ikke honorar, men dekker konferanseavgift, reise og opphold for de som får sitt bidrag antatt.

Send inn ditt forslag til konferanse@matematikksenteret.no innen 15. mai 2024. Vi gir tilbakemelding innen 22. mai.



NOVEMBERKONFERANSEN
2024 | Å UNDERVISE GJENNOM PROBLEMLØSING



LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
c/o Elin Unstad
Postboks 181
1371 Asker

post@lamis.no • www.lamis.no

Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Organisasjonssekretær: Elin Unstad, org.sek@lamis.no

Styret for LAMIS

<i>Leder</i>	Inger-Lise Risøy, Buskerud	Barnetrinn
<i>Ledergruppe</i>	Renate Jensen, Vestland	Barnetrinn/ungdomstrinn
	Mona Røsseland, Vestland	Høgskole/universitet
<i>Sentralstyret</i>	Elisabeth Hast Rønnestad, Møre og Romsdal	Barnehage
	Hilde Svendsen, Akershus	Barnetrinn
	Hege-Lisbeth Johansen, Troms	Mellomtrinn
	Kari-Anne Bjørnø Rummelhoff, Østfold	Ungdomstrinn
	Morten Munthe, Oslo	Videregående skole
<i>Vararepresentanter</i>	Henrik Kirkegaard, Møre og Romsdal	Barnetrinn
	Odd-Bjørn Lunde, Rogaland	Videregående skole

Fra formålsparagrafen

Det er en demokratisk rett å få en matematikkundervisning som setter en i stand til å delta aktivt som borger i et demokrati. Derfor vil Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) sette fokus på matematikk for alle.

Medlemskontingent

450 kr for enkeltmedlem, 300 kr for studenter/pensjonister, 975 kr for skoler/institusjoner



Ledergruppen har ordet



Kjære LAMIS-medlemmer!

Tiden flyr, og når denne utgaven av Tangenten når dere, er det to måneder igjen til sommerferien.

Unge Abel konkurransen er nå avsluttet etter gjennomført semifinale og finale. Finalen gikk av stabelen 17.–18. april 2024. Du kan lese mer om arrangementet og vinnerne på vår hjemmeside.

I januar hadde vi en spennende og engasjerende lokallagssamling i Oslo. Mange av lokallagene var representert, og vi ønsket ekstra velkommen til deltakere fra to ferske lokallag. Disse er i ferd med å etablere seg i Romsdal og i Telemark. Samlingen bød på faglig påfyll, med argumentasjon og problemløsning som tema. Det var også gode økter med verdifull erfaringsutveksling mellom lokallagene. Representantene fikk ta med seg plakater og spillhefter tilbake til lokallaget sitt. Og vi er nå i gang med å jobbe fram flere

ressurser. Det bare å glede seg! Dere kan lese mer om lokallagssamlingen på side 77.

Sentralstyret i LAMIS er fornøyd med at vi har sendt ut nyhetsbrev med det utforskende verktøyet som inneholder både plakat og nettressurs til alle våre medlemmer. Vi håper mange av dere allerede har tatt det i bruk. Vi tar gjerne imot tilbakemeldinger på hvordan dere har brukt det i undervisningen, eventuelt om dere har drøftet det med lærerkollegaer eller andre. Det er en dynamisk ressurs, og vi ønsker å justere det ut fra hvilke erfaringer som gjøres. Plakatene kan lastes ned, eller de kan bestilles på post@lamis.no. Da tar vi en pris på kr 10 pr. plakat + porto/emballasje (170 kr). Minimumsbestillingen er fem plakater.

Sentralstyret og sommerkonferansekomiteen gleder oss til årets sommerkonferanse i Ålesund. Programmet er klart, og i denne

utgaven av Tangenten får dere smakebiter fra dette på side 80. Det er lagt opp til et faglig, variert og spennende program som har som mål å tenne en gnist hos deltakerne. Dere vil møte andre engasjerte matematikklærere og delta i matematiske refleksjoner og samtaler, og ikke minst – ha det gøy sammen!

Påmeldingen vil være åpen ved mottak av dette bladet – all informasjon vil ligge på www.lamis.no. Vi gleder oss til sommerens høydepunkt, og håper at vi sees i Ålesund 09.–11. august 2024. Vi anbefaler dere også å følge LAMIS på Facebook – der blir det lagt ut informasjon jevnlig. Meld deg på og tips kollegaer om konferansen.

Vi minner til slutt om viktigheten av oppdatert kontaktinformasjon, slik at nyhetsbrevet som blir sendt ut kommer fram til dere.

Hilsen Inger-Lise, Mona og Renate

Lokallagssamling til nytte og glede

v/ sentralstyremedlem Hege-Lisbeth Johansen



Sentralstyret i LAMIS arrangerte 27.–28. januar lokallagssamling i Oslo der 25 matematikkentusiaster fra sentralstyret og våre lokallag møttes for faglig påfyll, idemyldring og sosialt lag.

Anne-Gunn Svorkmo startet samlingen med et flott innlegg om «Vurdering av matematisk kompetanse». Vi fikk her blant annet prøve oss på en eksamensoppgave på vertikale tavler der argumentasjon var sentralt. Argumentasjon i LK20 handler om at elevene grunngir fremgangsmåter, resonnement, og løsninger og beviser at disse er gyldige. Svorkmo skilte mellom ufullstendige og holdbare argumenter, men også tre nivåer for matematisk argumentasjon. Vi

fikk teste i tilfeldige grupper på tre og jobbet på vertikale tavler, der vi diskuterte kvaliteter ved argumentasjon på de ulike nivåene.

Svorkmo viste oss eksempler på elevsvar. På laveste nivå så vi at elevene kunne gjenta en påstand, referere til lærer eller vise tegninger, figurer eller regnestykker som bevis. På nivået over

valgte elevene gjerne å vise til eksempler for å jobbe mot generalisering eller bruke et generisk eksempel for å fremme det som er generelt (hva skjer og hvorfor). Det høyeste nivået av argumentasjon bygget blant annet videre på gyldige påstander, brukte logisk språk eller brukte variabler, representasjoner og uttrykksformer for å generalisere flere eksempler.

Lærerens rolle i elevenes utvikling av argumentasjonskompetanse ble også løftet. Svorkmo viste til at lærerens valg av oppgaver, rolle underveis i oppgaveløsningen og evne til gode tilbakemeldinger er sentralt. Lærerens rolle kan være å utvide oppgavesituasjonen, være tvilende og spørrende og forsøke å tette hull i argumentasjonen til elevene. Det må etterstrebes å gi tilbakemeldinger på riktig tids-





punkt, som handler om målet for arbeidet og som bidrar til mestring og motivasjon.

SVorkmo engasjerte deltagerne i to gode økter der vurderingsformer og undervisningsmåter ble sett i sammenheng. Et tankekors var hvor mye tid lærer bruker på tilbakemelding i forhold til hvor lite tid elevene får jobbe med og bearbeide tilbakemeldingene.

Mona, Morten og Renate fra sentralstyret hadde deretter en økt om elevrollen og lærerrollen i utforskende arbeid. De presenterte en plakart med tilhørende digital ressurs som LAMIS har utviklet og som medlemmer mottok i nyhetsbrevet som ble sendt ut i februar. Læringsplakaten viser elev- og lærerrollen i utforskende arbeid, og den digitale ressursen for læreren har med forklaringer for hvert steg i prosessen. Ressursen inneholder også en oppgavebank, forslag til arbeidsmetoder og artikler om temaet.

I økten fikk vi være i elevrollen gjennom en økt med en konkret problemløsningsoppgave. Dette gjorde alle med stor begeistring og smittende engasjement. Oppstarten i denne arbeidsmetodikken står i kontrast til metodikken der lærer starter læringsøkter ved gjennomgang av fagstoff før individuelt arbeid. Ved utforskende oppstart må eleven jobbe med å forstå oppdraget og de matematiske begrepene som blir brukt. De skal ikke begynne å løse oppdraget, men finne ut hva som er nødvendig informasjon og hente opp forkunnskaper og reflektere over om de har forstått oppdraget. Denne «tenketiden» gjør

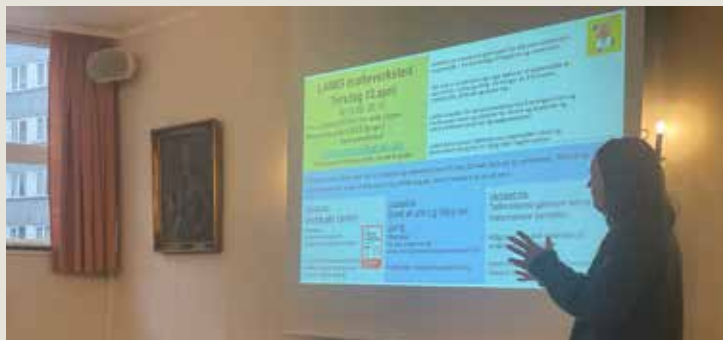
først individuelt og så sammen med sin læringsvenn eller gruppe.

I delingsfasen etterpå sikrer læreren en felles forståelse av oppdraget gjennom å lytte til elevene, bekrefte eller korrigere. Målet er å gi elevene trygghet i at de har skjønnet hva de skal gjøre i dette oppdraget, samt at de vil lære ord, begreper og metoder for å forstå fremtidige oppdrag.

I neste fase utforsker og foreslår elevene på sine læringsgrupper hvilke strategier de kan bruke for å løse oppdraget. De er fortsatt i en fase hvor ikke oppdraget skal løses, men de skal diskutere ulike fremgangsmåter eller strategier som kan benyttes. Delingsfasen etterpå gir elevene mulighet til å hente ideer fra hverandre. Her er det sentralt at elevene argumenterer for og begrunner sine strategier.

Fasen for å arbeide og utforske videre er gjennomføringsfasen. Her benytter elevene planlagte strategier, reviderer sine planer hvis de ser behov for det, og prøver å løse problemet/oppgaven. I denne fasen kan elevene oppleve å sitte fast eller at det de har tenkt fungerer. Det å oppleve at man står fast kan oppleves som





ubehagelig, men med trening blir elevene komfortable med å tåle det og jobbe seg gjennom det. I delingsfasen etterpå utfordres elevene til å dele løsningsmetoder og strategier, men de må også argumentere for hvorfor.

I siste fase av denne utforskende arbeidsmetoden vil elevene kritisk vurdere gjennomføringsfasen og løsningene. Refleksjoner rundt argumenter som er benyttet, se etter regnefeil, utvide løsningen til en bredere kontekst ved hjelp av generalisering og vurdere om løsningsmetoden

kan benyttes i flere tilfeller hører til denne fasen. Siste delingsfase blir en oppsummering av økten og hva elevene har lært. Læreren må bidra til at elevene ser sammenheng mellom ulike strategier og løsninger som har kommet fram.

På lokallagssamlingen var det også satt av god tid til å dele erfaringer og ideer i lokallagsarbeidet. Hvert lokallag fikk presentere seg selv. De fortalte hvordan de organiserer seg, hva de hadde lyktes med, hva som ikke hadde vært like stor suksess og hvilke

temakvelder de hadde arrangert i det siste.

Det ble til slutt satt av tid til idèmyldring for framtidige lokallagskvelder, og her kom det fram mange gode forslag. Flere lokallag ønsket å arrangere temakvelder der man presenterte og arbeidet med utforskende matematikk, slik vi også gjorde på lokallagssamlingen. Andre planla temakvelder med matematikkvansker, underveisvurdering, tenkende klasserom og bærekraftsmålene der LAMIS har utarbeidet tverrfaglige undervisningsopplegg.

Det var enighet om at helgen hadde gitt faglig påfyll og idèer til å ta med til både klasserom og lokallag. Det var en god blanding av gode diskusjoner og refleksjoner, gruppearbeid og aktiviteter. Opplevelsen av å møtes i et profesjonsfellesskap der vi i LAMIS strekker oss faglig sammen er en berikelse.

Velkommen til Ålesund og sommerkonferanse 9.–11. august

v/ Sommerkonferansekomiteen



Endelig er vi klare, og har åpnet for påmelding til sommerens møteplass for alle som er interesserte i god matematikkundervisning i skole og barnehage.

I år er det Sunnmøre lokallag og sentralstyret som arrangerer LAMIS Sommerkonferanse. Årets tema er «Å tenne en gnist». Vi kan by på et variert program som løfter frem kunnskap og ideer om hvordan man kan gi elevene mulighet til å lære gjennom en utforskende og lekende tilnærming. Vi har hentet inn engasjerte og dyktige krefter både lokalt i Ålesund og fra andre steder i landet.

Konferansen holdes på Quality Hotel Ålesund som ligger med nydelig sjøutsikt i sentrum av byen. For at dere skal bli kjent

med den vakre Jugendarkitekturen i byen vår har vi lagt inn et rebusløp fredag ettermiddag, der vi kombinerer matematisk problemløsning med byvandring.

I programmet for årets konferanse vil du oppleve fem spennende plenum som spenner fra barnehage og småskole, helt opp til videregående. Vi er spesielt glade for å ønske velkommen til foredrag med Andreas Holmstrøm som arbeider i videregående skole her i Ålesund.

Love and Math i digitale flater -
Andreas Holmstrøm



I digitale læremidler og annen matematisk programvare blir matematikken ofte innkodet ut ifra et formelt system, der alt bygger på logikk og formelle definisjoner. I elevenes møte med matematikken vil det logiske og

formelle bare være ett perspektiv blant mange, og det er av avgjørende betydning at disse andre perspektivene også får plass i fremtidens læremidler.

Ved å hente sentrale ideer fra kognitive vitenskaper og matematikkfilosofi kan vi trekke begreper som følelser, visuelle uttrykk, bilder, metaforer og analogier inn i klasserommet og inn i de digitale flatene. Disse begrepene er nøkler til inspirasjon, dybdelæring og matematisk helhetsforståelse.

Andreas Holmstrøm har doktorgrad i matematikk fra University of Cambridge og har arbeidet som forsker i matematikk og matematisk AI ved CERN, Max Planck Institute og mange europeiske universiteter. Han underviser i dag i matematikk ved Ålesund Videregående skole, og er også en del av teamet som utvikler den nye matematikkplattformen PeakMath.

I tillegg blir det plenum med Holmboeprisvinneren 2024, Mona Nicolaysen, Anne Gunn Svorkmo og en debatt om Kunstig Intelligens i skolen.

På konferansen har vi lagt opp til 12 flotte verksteder fordelt på tre økter. Her presenterer vi et lite utvalg, men går du inn på hjem-

mesiden til LAMIS finner du informasjon om alle verksteder. Vi er stolte av å kunne presentere flere nye og lokale verkstedsholdere.

FIRST Lego League og algoritmisk tenkning - Kristine Rogne og Rebecca Terøy

Målgruppe: mellomtrinnet

I den nye læreplanen vektlegges det at elevene skal bli gode problemløsere gjennom å utforske matematikken og kommunisere om den. Algoritmisk tenkning fremheves som en viktig strategi som kan bidra til utviklingen av matematisk forståelse. I arbeidet med First Lego League (FLL) i skolen har vi en unik mulighet til å gi elevene læringserfaringer og utfordringer som oppleves som meningsfulle, ekte og engasjerende. Gjennom programmering av Lego SPIKE Prime kan vi støtte opp under utviklingen av ferdigheter som kreativitet, kritisk tenkning, utholdenhet og utforskning; essensielle egenskaper for å håndtere ukjente problemer. På verkstedet skal deltakerne få gjennomføre oppgaver som kan brukes til dette formålet.

På verkstedet blir det eksempler på hvordan skolen kan bruke FLL som et tverrfaglig prosjektarbeid, men også for å bygge et godt læringsmiljø i klasserommet. Verkstedsholderne vil vise hvordan de legger opp til at elevene skal bruke algoritmisk tenkning til å løse prosjektet med konkrete eksempler. De vil si litt om konseptet og gjennomføring av FLL i klasserommet. Etter hvert vil oppmerksomhe-



ten rettes mot å bygge en robot og programmere den til å løse ulike oppgaver. Hoveddelen av verkstedet vil bestå av å utforske blokkprogrammering med Lego SPIKE prime roboter. Her ser de på hvordan man kan organisere dette i klasserommet og de forteller om sine erfaringer.

Fisk og fanteri - Cecilie Skåre

Målgruppe: ungdomstrinn og VGO (P-matematikk).

Velkommen til et praktisk verksted der vi høster fra naturen og kombinerer det med matematikk. Målet er at elevene skal oppleve matematikken både relevant og meningsfylt. Aktiviteten gir også praktisk erfaring (bilder/knagger) som kan brukes i undervisningen når man jobber teoretisk: «Husker dere ...»

På verkstedet bearbeides dagens fangst fra fiskebåten – både fysisk og matematisk. Økten tar utgangspunkt i praktisk arbeid (sortering, veiing, filetering) og viser hvordan dette kan flettes inn store deler av pensum i faget

(som måling, omgjøring, formler, enheter, statistikk, prosentregning med vekstfaktor, beregning av pris, regnskap, budsjett, funksjoner, geometri, diskusjon og argumentasjon). Vurdering av elevene sin matematiske kompetanse i slike praktiske økter blir en viktig diskusjon..

Aktiviteten er et eksempel fra 1PY-Naturbruk, og opplegget kan overføres til andre praktiske gjøremål der man høster fra naturen og lager ulike produkter, som for eksempel ripsgele, eplemos eller liknende.

Fra gnist til flamme - Lone Næss og Gunnhild Husebø Svendsen

Målgruppe: alle

Det å starte matematikktimen med å fange oppmerksomheten, tenne gnisten, er noe mange tenker er viktig – men som kanskje kan være utfordrende å få til. På verkstedet vil vi ta utgangspunkt i en metode som på engelsk heter «I think, I notice, I wonder.» Metoden tar utgangspunkt i bilder som

vekker matematisk undring og nysgjerrighet hos elevene. Når gnisten er tent, arbeider man videre med matematikken som finnes i bildet. Dette blir utgangspunkt for læring forankret i elevens egen undring. På verkstedet vil de presentere metoden og du vil få mulighet til å øve på å finne matematikken i bildene.

Verkstedet passer for alle, ettersom det matematiske innholdet kan tilpasses den aldersgruppen man underviser.

På sommerkonferansen vil du også møte verkstedsholdere som mange kjenner godt, men som bringer inn nye og viktige tema på konferansen. Et eksempel er Camilla fra Matematikksenteret.

Utforskende matematikkundervisning i flerspråklige klasserom
– Camilla N. Justnes

Målgruppe: småtrinn og mellomtrinn, samt andre som er interessert i flerspråklighet og matematikk.

Hvordan kan vi designe matematikkundervisningen slik at flerspråklige elevers språklige og kulturelle verktøykasse blir en ressurs for alle elevene i matematikkundervisningen? Hvilke muligheter bringer flerspråklige elever med seg inn i matematikklasserommet? Globalisering og migrasjon gir et økende antall flerspråklige elever i norske klasserom. Til tross for at prinsipper for god matematikkundervisning også gjelder disse elevene, føler likevel mange lærere at de mangler eksplisitte strategier for å legge til rette for gode læringsmuligheter for denne elevgruppen.

På dette verkstedet kan du få ideer og inspirasjon, og prøve ut noen strategier som skaper flere muligheter for flerspråklige elevers deltakelse i utforskning i matematikk. Forskning viser at noen strategier lærere kan bruke for å støtte flerspråklige elever bidrar til å redusere de kognitive kravene i matematikkoppgaver og aktiviteter. Vi vil derfor

i dette verkstedet blant annet se på strategier som kulturelt relevante kontekster og bruk av visuelle representasjoner. Vi vil sammen analysere og utvikle noen matematikkoppgaver slik at de fasiliterer flerspråklige elevers deltakelse i matematikk. Ved å se på nærmere på betydningen av flerspråklige elevers kulturelle og språklige verktøykasse, kan vi lage et læringsmiljø som støtter alle elevers læring i matematikk.

Verkstedet baserer seg på erfaringer og utprøvinger fra undervisning i barneskoler med stor andel flerspråklige elever, samt forskning og materiell utviklet av National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Påmelding er åpnet på hjemmesiden vår lamis.no. Her finner du hele programmet med informasjon om alle verksteder og plenum, i tillegg til all praktisk informasjon.

Meld deg på og du kan glede deg til en sosial, inspirerende og lærerik helg i Ålesund.

Velkommen!

Lokallag i Østfold – Utforskende matematikdidaktikk på vertikale tavler

v/ Monica Nordbakke og Victoria Sandberg-Kristoffersen

Vi i LAMIS Østfold møter stadig spørsmål knyttet til hvordan undervisvurdering kan integres som en aktiv del av matematikkundervisningen. Hvordan ser slik undervisning ut? Hvordan kan man få til en undervisvurdering som fremmer læring i matematikk, slik læreplanen er så tydelig på?

I LAMIS Østfold stilte vi oss spørsmålet om vi kunne tilby et øvingsrom for undervisvurdering, der erfarne og kommende matematikklærere kunne få øve seg sammen. Før vi ruller ut et tilbud, for flere grunnskoler i Østfold, ønsket vi å gjennomføre en testpilot. Tema for årets første lokallagskveld ble derfor modellering av undervisvurdering i et tenkende klasserom på vertikale tavler. Et viktig premiss var at deltakerne skulle få rikelig med anledning til å utforske og reflektere, sammen med erfarne matematikklærere og matematikklærerutdannere. Piloten traff tydelig et behov.

Hva er undervisvurdering?

Det siste tiåret har norske matematikklærere gradvis gått mer over til utforskende matematikkundervisning (Kaufmann og Ryve, 2022, s. 29). I utforskende matematikkopplæring leter elevene etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg frem

til felles forståelse, under ledelse av matematikklæreren. Denne typen matematikkundervisning utfordrer tradisjonelle måter å praktisere vurdering på. Undervisvurdering er derfor naturlig nok en utfordring, som både framtidige og erfarne matematikklærere ønsker å oppdatere seg på og få mer praktisk erfaring med. Endringen er ofte mer krevende enn mange forestiller seg.

Black og Williams (2009) beskriver undervisvurdering som bestående av tre prinsipper, nemlig å fastslå

- hvor elevene befinner seg i læringsprosessen
- hvor elevene skal i læringsprosessen
- hvordan elevene skal komme seg dit

I tillegg skal undervisvurdering fremme læring og bidra til lærelyst i tråd med opplæringslovens formål (Forskrift til opplæringsloven, 2020, § 3-3).

De siste 20 årene med vurderingspraksis blir beskrevet som en informasjonsstrøm som går fra lærer til elev (Liljedahl, 2023, s. 235). Den formative vurderingen i det tenkende klasserommet skal imidlertid bidra til å hjelpe eleven med å forstå hvor de er, og hvor de er på vei (s. 252).

Utprøving på vertikale tavler

For at studenter skal kunne legge til rette for gode vurderingspraksiser i framtidig matematikkundervisning, må de selv få erfare hvordan dette fungerer. Vi modellerte derfor en økt med utgangspunkt



Bilde 1: Introduksjon til økt om undervisvurdering knyttet til arbeid på vertikale tavler.

i en utforskende oppgave. Arbeidet med å finne løsninger skulle foregå på vertikale tavler, slik som i Liljedahls tenkende klasserom (Liljedahl, 2023). Studentene ble delt inn i tilfeldige treergrupper, plassert gruppevis ved hver sin tavle og fikk utdelt én tussj.

Oppgaven de skulle samarbeide om var hentet fra Tangenten nr. 4 fra i høst, kalt Deilige disleksjoner (Naylor, 2023) og hadde følgende ordlyd:

Fem venner skal dele en kvadratisk bursdagskake. Kaken er frostet på toppen og på alle fire sider. Vennene vil at alle får like mye kake og like mye frosting. Hvordan kan kaken deles?

Dette er en såkalt LIST-oppgave og har derfor en lav inngangster-skel og er samtidig rik på faglige utfordringer (Matematikksenteret, 2024, 16. februar). Oppgaven kan knyttes til læreplanen på både 5., 6. og 7. trinn (Kunnskapsløftet, 2019). Etter kompetansemålene finner vi beskrivelse av underveisvurderingens fokus og hensikt, og en av disse tekstene ble delt ut til studentene. Et utdrag av denne lyder slik: Elevene viser og utvikler kompetanse i faget når de utforsker og reflekterer over matematiske sammenhenger, benytter matematiske begreper i kommunikasjoner og bruker ulike representasjoner og problemlø-singsstrategier. Elevene viser og utvikler også kompetanse når de bruker kunnskap og ferdigheter til å formulere og løse problemer som er knyttet til praktiske situa-



Bilde 2: Gruppe 1

sjoner i hverdagen og i samfunnet. Videre viser og utvikler de kompetanse i matematikk når de resonnerer over og argumenterer for matematiske sammenhenger (Kunnskapsløftet, 2019).

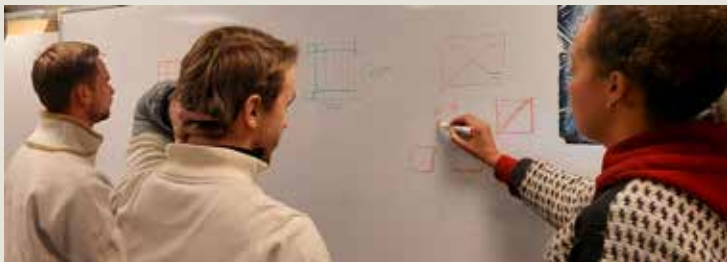
Studentene gikk i gang med høyt engasjement. De snakket sammen og forsøkte flere framgangsmåter samtidig som de fikk støtte i bruk av presise matematiske begreper. Dette kjenner vi igjen fra ordlyden i muntlige ferdigheter der utviklingen av muntlige ferdigheter i matematikk går fra å bruke hverdagsspråk til gradvis å bruke et mer presist

matematisk språk (Kunnskapsløftet, 2019). Undervisningssituasjonen åpner for gode muligheter for underveisvurdering.

Gruppe 1 (se bilde 2) valgte å dele opp både kantene og det indre området av kaka. De viser flere representasjoner, både visualiseringer og symboler som nummerering og brøk i mulige framgangsmåter. Det kom tydelig frem i studentenes kommunikasjon hvordan deres kompetanse utviklet seg gjennom resonnerer og bruken av ulike representasjoner, som åpnet opp for gode veiledningssituasjoner rundt



Bilde 3: Gruppe 2.



Bilde 4: Gruppe 3.

undervisningsvurdering.

Gruppe 2 (se bilde 3) forsøkte å brette ut omkretsen av kaka, for på denne måten å fordele denne rettferdig. De tegnet kaka og satte på fiktive mål, for å bruke disse i beregninger. Studentene viste og utviklet sin kompetanse, gjennom sine resonnementer og argumentasjon for de matematiske sammenhengene. Deres tenkning og kompetanse kom tydelig frem, og muliggjorde viktige refleksjoner og undervisningsvurdering.

Gruppe 3 (se bilde 4) så på flere alternative inndelinger, både gjennom inndeling av kanter og det indre området. De forsøkte å sette konkrete mål for sidekantene i den geometriske figuren. Både det å visualisere framgangsmåtene og prøve seg fram er viktige problems Lösingsstrategier, som denne gruppa fikk vist og utviklet gjennom sine refleksjoner.

Læring av hverandre

I et tenkende klasserom er det et prinsipp at elevene lærer av hverandre. Det gjelder å mobilisere kunnskapen som allerede finnes i rommet (Liljedahl, 2023, s. 151). Etter en stund med egen utforsking la vi derfor opp til en klasseromsvandring, en såkalt «gallery walk», der de studerte hverandres tavler. Her ble det god mulighet for enkeltgrupper til å sette seg inn i de andre gruppenes strategier. Slike klasseromsvandringer har til hensikt å bringe flere ideer sammen, og inspirere og mobilisere kunnskapen som finnes i fellesskapet i den videre utforskningen.

Verktøy for å tilrettelegge for utforskende arbeid

Det finnes mange ulike verktøy som egner seg for planlegging og gjennomføring av utforskende

undervisning, når man skal ta utgangspunkt i elevenes tenkning og refleksjoner.

I læringsøkta med studentene benyttet vi De fem praksiser (Smith og Stein, 2018), som konsentrerer seg om fem konkrete praksiser (oversatt og tilpasset fra Smith & Stein, 2018; Wæge, 2019):

- Forventning til hvilke strategier elevene kommer til å benytte seg av
- Observasjon av elevenes responser mens de jobber
- Prioritering av hvilke løsningsforslag som skal diskuteres i helklassesamtale
- Prioritering av hvilken rekkefølge på løsningsforslagene
- Eksplisitt studere sammenhenger mellom elevenes strategier og forslag opp mot den matematiske ideen som utforskes

En enklere tilnærming, som er utarbeidet av LAMIS, viser hvordan hele prosessen med utforskende arbeidsmåter kan gjennomføres med elever. Forklaringer av hvordan man tar verktøyet i bruk finnes på lamis.no.

Utbytte i et tenkende klasserom

Formålet med læringsøkta var at studentene skulle få rikelig anledning til å utforske og reflektere med hverandre, rundt hvordan undervisningsvurdering kan integreres som del av matematikkundervisningen. Underveis fikk studentene mulighet til både å innta lærerperspektivet og elevperspektivet,



Bilde 5: Deling av hverandres fremgangsmåter.



Bilde 6: Utforsningsplakaten til LAMIS.

som viste seg i nyttige og lærerike refleksjoner.

Studentenes didaktiske refleksjoner dreide seg i hovedsak rundt tema som tilfeldige grupper, LIST-oppgaver, elevenes utholdenhet og forankring til læreplanen, både til overordnet del og til selve matematikkplanen med både kjerneelementer og undervisningsvurdering.

Umiddelbare kommentarer fra studentene var at LIST-oppgaven var kognitivt krevende. Andre fulgte opp med at det nettopp derfor var fint at de arbeidet i grupper, slik at de kunne dra veksler på hverandres ressurser og kunnskaper og bygge på hverandres forslag. Det ble også nevnt ord som «gøy» og følelsen å være en «del av et lag som drar i samme retning».

Veien videre

Lokallagssamlingen traff tydelig et behov hos studentene, som uttrykte at de opplevde modelle-

ringen og den konkrete økta som lærerik. Vårt inntrykk var at det å lære gjennom å gjøre og delta i refleksjoner og diskusjoner av denne typen, i et øvingsrom, har tydelige gevinster og læringseffekter. Det virker å være et behov i skolene for å utforske tema undervisningsvurdering nærmere, sammen med kollegaer i sitt eget profesjonsfelleskap.

Etter den positive responsen og de gode tilbakemeldingene har lokallagsstyret i Østfold justert og utformet et tilbud til grunnskoler i Østfold med mål om å rigge til to eller tre lokallagssamlinger i 2024. Vår tanke er at LAMIS kommer til en skole nær deg og reiser ut til profesjonsfelleskapene. Tema er undervisningsvurdering, vertikale tavler, refleksjon og kollektiv læring for matematikklærere.

Referanser

Black, P. & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational*

Assessment, Evaluation and Accountability 21, 5–31.

Forskrift til opplæringslova. (2020). Kapittel 3. Individuell vurdering i grunnskolen og i videregående opplæring. Lovdata. https://lovdata.no/dokument/SF/forskrift/2006-06-23-724/KAPITTEL_5#KAPITTEL_5

Naylor, M. (2023). Deilige diseksjoner. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 34(4), 35–36.

Kaufmann, O. T., & Ryve, A. (2022). Transition between discourses – portraying teaching practices in collegial discussions. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 27(4), 25–46.

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05)*. Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=no>

Liljedahl, P. (2023). *Å bygge tenkende klasserom i matematikk. 14 praksiser for bedre læring*. Cappelen Damm Akademisk.

Matematikksenteret (2024, 16. februar). *Mattelist*. <https://mattelist.no/>

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2018). *5 practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions. Second Edition*. National Council of Teachers of Mathematics.

Wæge, K. (2019). Samtaler i matematikk. I E. Klaveness, L. Karlsen & K. Kverndokken (Red.), *101 grep for å aktivisere elever i matematikk*. Fagbokforlaget

Løsning på UngeAbel-oppgaven i Tangenten 01/2024

v/Marianne Maugesten, leder av jury

Åttesifrede tall (semifinalen 2022)

Det kan være greit å innføre noen variabler (a, b og c), og oversette betingelsene slik:

- i) $3 \cdot 4 \cdot a = 216$, dvs $a = 216/12 = 18$. Aktuelt sifferprodukt her er $2 \cdot 9$ (i passende rekkefølge).
- ii) $5 \cdot 9 \cdot b = 270$, dvs $b = 270/45 = 6$. Aktuelt sifferprodukt her er $2 \cdot 3$ (i passende rekkefølge).
- iii) $6 \cdot 4 \cdot c = 1344$, dvs $c = 1344/24 = 56$. Aktuelt sifferprodukt her er $7 \cdot 8$ (i passende rekkefølge).

Kravene i) og ii) gir sammen at én av siffersekvensene 53294 eller 49235 må inngå.

Krav iii) gir at én av siffersekvensene 4786 eller 4876 eller 6784 eller 6874 må inngå. Samlet gir dette dermed fire mulige løsninger:

5	3	2	9	4	7	8	6
5	3	2	9	4	8	7	6
6	7	8	4	9	2	3	5
6	8	7	4	9	2	3	5

UngeAbel-oppgave

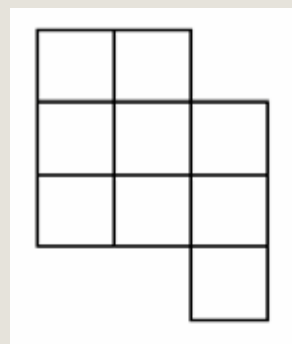
v/Marianne Maugesten, leder av jury

Tallene 1 – 9 (fra finale 2022)

Dere skal plassere tallene 1–9 i de ni rutene i diagrammet. Krav til løsningene:

- to nabetall (f.eks. 3 og 4) kan ikke stå i ruter som har *en felles side* eller *et felles hjørne*
- ingen tall kan stå i den samme ruten på de ulike løsningene

Finn så mange løsninger som mulig.



Vil du bidra til å forme fremtiden for undervisning i matematikk og teater?

Høgskulen på Vestlandet, i samarbeid med LAMIS, inviterer lærere, dramapedagoger, og andre med relevant bakgrunn til å bli instruktører i vårt Teater-i-Matematikk (TIM) prosjekt. Dette Erasmus+ initiativet, som involverer Italia, Norge, Portugal, og Hellas, sikter mot å integrere matematikk og drama gjennom et tverrfaglig samarbeid for å skape innovative undervisningsmetoder. Les mer om prosjektet: <https://www.theatreinmath.eu/no/>



Som del av teamet får du:

Opplæring i prosjektets metoder på Lésvos, Hellas, 1.–7. oktober 2024, med alle utgifter dekket (unntatt lønn). Mulighet til å bli del av et kreativt internasjonalt nettverk og motta veiledning fra eksperter innen både drama og matematikk.

Vi ser etter deg som:

- er entusiastisk over å integrere drama i matematikkundervisningen
- har erfaring med eller interesse for matematikk som fag
- har ønske om og tid til å lære nye metoder og formidle det til andre

Som instruktør vil du med tett oppfølging av fagpersoner fra drama og matematikk ved HVL lære opp andre lærere i prosjektets metoder.

Bli med oss for å utforske og formidle nye veier i undervisningen!

Skriv en kort søknad, der du presenterer deg selv og begrunner hvorfor du ønsker å bli vår instruktør. Søknad sendes på mail til prosjektleder Mona Røsseland: Mona.Rosseland@hvl.no innen 30. mai.