



tangenten 3/2024

tidsskrift for matematikkundervisning

35. årgang

tangenten 3/2024

Tidsskrift for matematikkundervisning

Utgitt av Caspar Forlag AS

Kopiering fra tidsskriftet er ikke tillatt
uten redaksjonens godkjenning

ISSN 0802-8192

Ansvarlig redaktør

Bjørn Smestad

Redaksjonsgruppe

Trude Fosse

Rune Herheim

Terje Lerø

Toril Eskeland Rangnes

Janneke Tangen

Gry Anette Tuset

For LAMIS: Renate Jensen

Redaksjonsråd

Marit Johnsen-Høines

Aasmund Kvamme

Ole Einar Torkildsen

Adresse

Caspar Forlag

Postboks 3 Slettebakken

5821 Bergen

tangenten@caspar.no

www.tangenten.no

Abonnementspriser (fra 1.1.2023)

Ordinært 499,- per år

Studenter 289,- per år

Klassesett 270,- per år
(ved minimum 12 studenter)

Utland 500,- per år

Abonnement bestilles på

post@caspar.no

Utgivelsesdatoer

20. februar, 20. april

20. september, 20. november

Layout

Caspar Forlag / Aasmund Kvamme

Grafisk produksjon

John Grieg, Bergen

Artikler til bladet sendes til

tangenten@caspar.no

Omslaget

Utforming: Sigrun Werner

Adresseendringer

Medlemmer i LAMIS må bruke

post@lamis.no

for å melde fra om adresseendringer.

Direkteabonnenter hos Caspar Forlag bruker

post@caspar.no

Retningslinjer for vanlige artikler

tangenten.no/for-bidragssytere/retningslinjer-for-forfattere/

Retninglinjer og informasjon for fagfellevurderte artikler

tangenten.no/for-bidragssytere/retningslinjer-for-niva-1-artikler/

Fagfellevurderte artikler er merket som dette i
boksen med forfatteropplysninger.

Leik og eksamen

Tangenten ønsker å løfte fram to tema som er viktige og aktuelle: leik og eksamen. Tangenten nr. 2/25 skal vere eit temanummer om leik, kor vi kan inspirera og utfordra kvarandre til eit meir leikande matematikkfag. Vi har også fleire spørsmål om eksamen som vi gjerne vil ha belyste i Tangenten.

Fem-seks-åringane bør få meir tid til leik, og dei bør få meir matematikk. Det er to av konklusjonane i evalueringa av seksårsreforma. Korleis kan vi få til meir matematisk leik og leikande matematikk, ikkje berre for fem-seks-åringane, men for alle elevar i skole og barnehage? Kva er passande leikprega matematikkaktivitetar for 18-åringar?

Matematikk kan vere eit leikande fag, der fantasi, kreativitet, undring og utforsking står sentralt. Eit fag der spørsmål som «Kva om ...?» eller «Er det mogleg å ...?» blir stilte. «Berre prøv!» er ein naturleg reaksjon på eit forslag, og «Kan du teikne det?» er ei oppfordring som kan passa viss elevar står fast. Leiken har ein naturleg plass i faget, og matematikk har ein naturleg plass i leiken – som i livet elles. Det dreier seg ikkje om leik eller læring, men leik og læring.

Vi håper på mange gode bidrag til eit temanummer som til saman viser ulike sider ved leiken. Sjå invitasjon på side 44.

Eksamen er eit anna tema som Tangenten ønsker å løfte fram. Læreplanen er prega av kjerneelement og utforsking, undring og matematiske samtalar, men samtidig av opne og somme tider uklare kompetansemål. Korleis får vi til ein munnleg-praktisk eksamen som gir elevane rom for å vise bredda i kompetansen sin? Og korleis støttar skriftleg eksamen opp under intensjonane i læreplanen, utan å bli meir styrande enn læreplanen? Vi ønsker gode eksempel på kreative lokale løysingar, men også ros og kritikk av sentralgitte eksamensoppgåver. Artiklar om eksamen får ikkje eit eige temanummer, men får plass i dei andre nummera av Tangenten.

Har du erfaringar om leiken eller om eksamen – eller om andre sider ved matematikkfaget – som andre kan ha glede av, så send oss eit artikkelutkast. Tangenten skal vere eit blad som tar godt vare også på dei som skriv artiklar for første gong, og redaksjonen brenn for å få dei gode ideane fram til ferdige artiklar.



Glomstad, Swift

Tenning på resonnering

I denne artikkelen presenterer vi en undervisningsøkt der målet var at elevene skulle resonnerere. Økten hadde tre ulike aktiviteter som vi anbefaler andre lærere å prøve ut. Artikkelen er blitt til i samarbeid mellom en lærer og en lærerutdanner.

Utforskning og resonnering trekkes fram i kjerneelementene og er viktige elementer i matematikkundervisningen for å stimulere til matematisk tenking og refleksjon. Disse elementene ga læreren for denne klassen motivasjon for å prøve ut en annen undervisningspraksis enn det klassen var vant til. Læreren mente at klassen var vant til tradisjonell undervisning i matematikk, og ønsket å utvikle sin egen kompetanse ved å prøve ut nye innfallsvinkler med en mer utforskende matematikkundervisning som stimulerer til større elevengasjement og resonnering.

Vi tok utgangspunkt i følgende kompetansemål etter 5. trinn: *utvikle og bruke ulike strategier for regning med positive tall og brøk og forklare tenkemåtene sine* (Kunnskaps-

departementet, 2019), og laget læringsmålet: *Jeg kan resonnerere og argumentere i en gitt problemløsningsoppgave.*

Undervisningstimen startet med en klasse-diskusjon der elevene skulle vurdere (Smestad et al., 2021, s. 16):

- «Kan man være først og sist samtidig?»
- «Må det være sommer før høst?»

Den lave inngangsterskelen i oppgaven ga alle elevene mulighet til å argumentere for sine resonnementer. Elevene skulle først snakke sammen i tilfeldige treergrupper, før en på gruppa skulle fortelle hvordan de hadde tenkt, og argumentere for gruppas resonnementer. Oppstarten med klasseromsdiskusjon var interessant og engasjerende, og ved eksempelet på spørsmålet «Kan man være først og sist på samme tid?» resonnererte en av gruppene på følgende måte: «Hvis man går bakerst og går rundt i en runding, da er man på en måte først også, for det er folk bak deg når du går rundt i en runding.» Ettersom det i denne klassen ikke har vært satt av tid til å drøfte slike påstander tidligere, var ikke læreren forberedt på at så mange av elevene var villige til å fortelle hva de tenkte. Alle gruppene hadde ulike og kreative svar, og elevene fant også en sammenheng i resonnementene hos hverandre på spørsmålet «Må det være sommer før høst?». Da en av gruppene mente at sommer må komme før

Linn Therese Kjær Glomstad

Sem skole

linn.therese.kjer.glomstad@tonsberg.kommune.no

Cecilie Swift

Universitetet i Sørøst-Norge

Cecilie.Swift@usn.no

høst, fordi vi trenger varme fra sola for at planter og gress skal vokse, var det en annen gruppe som resonnererte videre: «Hvis vi hopper over sommeren, så vokser ikke plantene, og da får ikke dyrene mat, og alle kommer til å dø.» Resonnementene fikk god respons fra medelever og læreren, og ga en givende oppstart til matematisk tenking. Samtlige elever argumenterte for sine resonnementer, og det som karakteriserte resonnementene i denne oppgaven, var elevenes fantasi og forkunnskap. De benyttet seg lite av hverandres resonnementer for å argumentere, likevel opplevdes det som at det var en lav terskel for å beskrive sin tenking, og elevene viste respekt for hverandre.

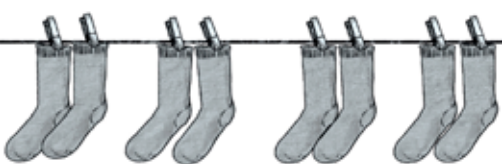
Etter ti minutter fikk elevene en ny oppgave. Denne skulle løses med synlig tilfeldige treergrupper på vertikale ikke-permanente tavler rundt om i klasserommet. Oppgaven de skulle løse, var hentet fra *Tall og tankes* aktivitetsbok og handlet om å finne et par like sokker (Smestad et al., 2021, s. 24).

Oppgaven ga elevene et godt utgangspunkt for å begrunne og reflektere sammen, før man senere utvidet oppgaven slik at det blir sokker med tre ulike farger. Det var ønskelig at elevene skulle argumentere for at mønsteret de fant, ikke var tilfeldig.

Oppgaveteksten ble vist på den interaktive tavlen, og læreren leste den én gang. Da elevene skulle vise fram sine representasjoner, var det flere grupper som hadde misforstått oppgaven. Noen hadde gjettet seg fram til en løsning, og noen hadde vært opptatt med å tegne fine sokker uten å prøve å finne løsninger. Læreren gjentok oppgaveteksten, vektla fargene på sokkene og begrepet «minst antall». Oppgaven ble samtidig utvidet til tre farger på sokkene, og samtlige elever ble ivrige etter å finne løsninger selv.

Det er viktig at elevene forstår den matematiske hensikten i oppgaven, for da viser de interesse, og det fremmer læringsorientering (Wæge & Nosrati, 2018, s. 93). Én gruppe tok

B4.1 Sokkeproblemer



Ann-Kristin ga elevene sine følgende oppgave:

På et loft henger det mange sokker til tørk. Sokkene er enten svarte eller hvite, ellers er de helt like. Du skal opp og hente et par, men lyset er gått, så du kan ikke se fargen på sokkene. Hva er det minste antall sokker dere må ta med for å være sikre på å få et par i samme farge?

Tom: To, da har du et par.
 Marianne: Fire, for da kan du få to par.
 Gaute: Tre, for da må du få minst to i samme farge.

Har noen av elevene rett? Og i tilfelle hvorfor?

Utfordringen er å begrunne:

Hvor mange sokker er det *nødvendig* og hvor mange sokker er det *tilstrekkelig* å ta med ned fra loftet?

Figur 1. Sokkeproblemer, hentet fra Smestad et al. (2021).

fram matematiske kuber der de hadde lagt fire lilla, fire hvite og fire grønne kuber i ett lokk, og viste hvordan de kunne trekke fire kuber uten å se, og garantert få et par som var like. Denne representasjonen var svært overbevisende for de andre elevene, og læreren viste tydelig glede over ideen om å bruke konkreter som representasjon i stedet for tegning. En annen gruppe hadde tegnet sokker på sin tavle og brukt en slags elimineringsmetode med å krysse ut ulike sokker for å luke ut muligheter.

Det var givende å observere elevenes representasjoner når det gjaldt å finne løsninger, da samtlige elever viste glede, var aktivt involvert og benyttet seg av ulike strategier for problemløsningsoppgaver. Dette kan henge sammen med indre motivasjon, nettopp fordi elevene var interessert og engasjert i læringsprosessen. Wæge og Nosrati beskriver i hvilken grad elevene opplever sin deltakelse i matematiske avgjørelser og vurderinger i undervisningen, og knytter dette opp mot elevenes følelse av autonomi (2018, s. 24–25).

Oppgaven var motiverende for elevene da de likte å samarbeide om matematiske oppgaver på vertikale tavler. LIST-oppgaven og oppgaven på vertikale tavler gir elevene matematiske utfordringer. Elevene tilbys matematisk tenking og aktivitet. Samtidig fikk elevene mulighet til å samarbeide i tilfeldige treergrupper, som henger sammen med lærerens ledelse av læring. Det som karakteriserte resonnementet i denne oppgaven, var i stor grad påvirket av elevenes forståelse av oppgaveteksten. At elevene brukte ulike strategier, var ikke overraskende, og de gruppene som startet umiddelbart, benyttet seg av egen tenking for å finne svar. De gruppene som ikke kom i gang, tok seg tid til å se på de andre gruppene og ble inspirert til å resonnerer på sin egen tavle. Den gruppa som ikke forsto oppgaven, resonnerte lite, men brukte fantasi og kreativitet når de tegnet fine sokker og skrev tilfeldige regnestykker på sin tavle. Til tross for at de ikke besvarte oppgaven, opplevde læreren at

elevene syntes det var engasjerende og interessant, fordi de fikk velge hvilke løsningsstrategier de ville bruke, noe som er viktig for å utvikle autonomi i matematikk (Wæge og Nosrati, 2018, s. 25).

I siste del av undervisningsøkten ble elevene presentert for en ny oppgave, magisk trekant (Realfagsløypene, 2023). Magisk trekant er en aktivitet der elevene får kortene 1–6 fra en kortstokk. Tallkortene plasseres fra 1 til 6 langs sidene i trekanten, slik at summen er den samme langs de tre sidene. Det skal være ett tall i hvert hjørne og ett tall på hver side. I denne oppgaven skulle elevene samarbeide to og to, og forske på hvilke ulike muligheter det var for summen.



Figur 2. Eksempel på løsning i magisk trekant.

Samarbeidet startet i et energisk læringsmiljø. To læringspartnere var ekstremt ivrige, og de kom raskt fram til en lik sum på alle sider. Den ene gutten forklarer sin strategi slik: «Det er tiere på hver side her, fordi jeg brukte tiervenner. På spørsmål om hvorfor han gjorde det, svarte han: «Fordi jeg la sammen to kort og så prøvde å finne tiervenner til det kortet som lå igjen der, fordi summen på hver side blir tier, fordi $3 + 2 = 5$, og det siste er 5, og det blir 10. Og så $1 + 4 = 5$, + 5, igjen 10. Og $1 + 6 = 7$,

og $7 + 3 = 10$. Da læreren spurte om de kunne finne summen ni, svarte den andre gutten: «Det gjorde vi nettopp, før du kom!»

Oppgaven ble en utfordring for alle elevene og fremmet godt samarbeid der de lot seg inspirere av hverandre. Læreren klarte å skape en stor grad av autonomi hos elevene da de diskuterte løsninger og strategier i fellesskap. Hun utfordret en gruppe til å forske på hva som skjedde dersom de brukte alle oddetallskortene i kantene. I elevenes representasjon fortalte de om oddetallskortene og at de hadde byttet dem ut med partallskortene i kantene, og at det hadde gitt ulike summer. Gruppa fant ubevisst et mønster selv da de sorterte kortene; tre minste, de tre største, oddetallskortene, partallskortene og at med dette som utgangspunkt for å finne summer var det enklere å plassere de resterende kortene langs sidene.

Elevene likte å resonnerer og jobbe i grupper. Samtlige elever argumenterte for sine resonnementer og ga uttrykk for at de opplevde mestring og autonomi, og at de følte seg verdsatt i gruppearbeidet. Læreren ble selv overrasket over at alle elevene var engasjert i oppgavene. Hun uttrykte at samtlige elever så ut som de hadde mestringsfølelse denne timen, og at elevene likte å dele sine ideer, tankerekker og resonnementer med hverandre. I fremtiden ønsker hun å ta

aktivt i bruk LIST-oppgaver hver uke. Hun vil sette av mer tid der elevene i grupper deler sine resonnementer, slik at elevene er mer muntlige i faget enn de har vært tidligere i hennes undervisning.

Referanser

- Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01–05)*. Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv19?lang=nob&GrunnleggendeFerdigheter=true>
- Matematikksenteret. (2023, 12. oktober). *Magisk kvadrat*. <https://www.matematikksenteret.no/l%C3%A6ringsressurser/grunnskole/magisk-kvadrat>
- Realfagsløypene. (2023, 12. oktober). *Magisk trekant*. <https://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-08/T2.P1.M3D%20Beskrivelse%20Magisk%20trekant.pdf>
- Realfagsløypene. (2023, 12. oktober). *Didaktisk kompetanseutvikling i realfagene*. <https://realfagsloyper.no/>
- Smestad, B., Eriksen, E. & Solem, I. H. (2021). *Tall og tanke aktivitetsbok*. Gyldendal.
- Valenta, A. (2015). *Matematikklærerkompetanse*. Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen. <https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/Valenta%20MatematikkI%C3%A6rerkompetanse.pdf>
- Wæge, K. & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk*. Universitetsforlaget.

Moen

Mønsterintroduksjon

I denne artikkelen viser jeg et eksempel fra egen undervisning hvor elever ble introdusert for mønster gjennom gruppearbeid og opphengte tavler. I undervisningsøkten fokuserte vi på kjerneelementene «resonnering og argumentasjon» og «utforskning og problemløsning». Jeg vektla at elevene ikke skulle få en metode, og at de selv skulle forklare tenkemåter til hverandre. Min jobb var å stimulere resonnering og argumentasjon gjennom ulike spørsmål. Undervisningsopplegget ble brukt i fire klasser på åttende trinn. Elevene hadde lite forkunnskaper om mønster, men hadde jobbet med algebra i en periode. Et mål var at de skulle se sammenheng mellom et voksende mønster og et algebraisk uttrykk. Undervisningsøkten brukte eksamensoppgave 2, del 1 fra 2023 som utgangspunkt.

Starten av timen

Timen startet med at elevene ble delt inn i tilfeldige grupper, ble presentert en problemstilling på lærerens tavle og skulle skrive svaret på sine egne opphengte tavler. De hengende tavlene var nytt for både meg og elevene og trengte en introduksjon. Tavlene var whiteboardtavler som kan festes på veggen (kjøpt på Clas Ohlson). På disse

tavlene kan elever både skrive og viske ut, og alle kan se hverandres tavler. Før vi begynte var reglene at alle skulle holde seg på sin gruppe og at alle på gruppen skulle kunne svare hvis lærer stilte et spørsmål. Hvis lærer stilte et spørsmål til en elev og hen ikke kunne svare, gikk læreren «en runde», mens de andre elevene hjalp hen til å forstå. Dette ble gjort for å stimulere til at alle skulle være aktive.

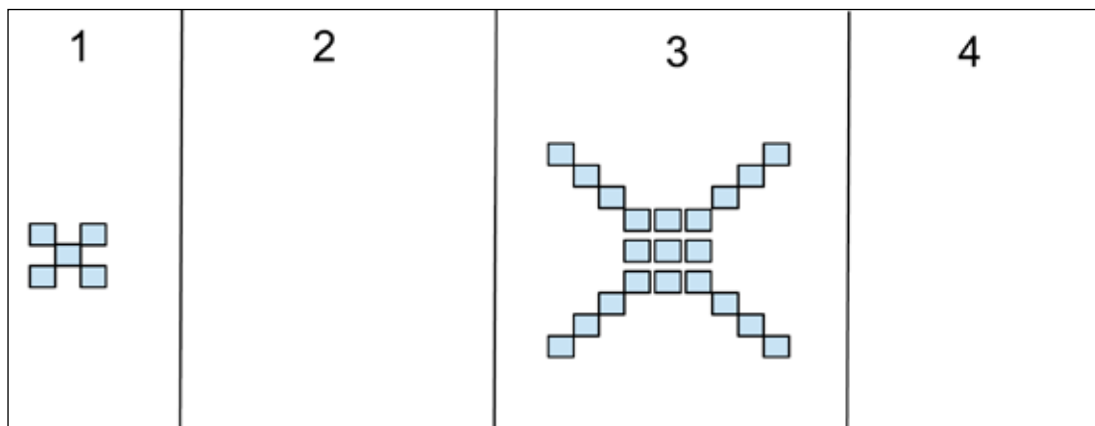
På lærertavlen tegnet jeg et mønster, se Figur 1–4. Elevene fikk i oppgave å tegne av mønsteret og i tillegg tegne inn figurene 2 og 4. Etter fem minutter var elevene i gang.

Timens utvikling

Ved bruk av de hengende tavlene var det lett å få en oversikt og dermed hjelpe der det trengtes. De som ikke forsto, ble påminnet om å starte med å kopiere lærertavlen. Da klarte elevene lettere å se en sammenheng mellom figuren og tallet over figuren, og tenke på hva som kunne være på nummer 2 og 4. Oppgaven hadde lav terskel for å starte. Tilnærmet alle elevene kom i gang av seg selv, og de som ikke gjorde det var lette å få i gang. Et hint jeg ga dem som trengte det, var at de skulle finne ut hva nummeret over figuren hadde med figuren å gjøre. «Der står det en og da ser figuren slik ut og der står det tre og da ser figuren slik ut, hvordan vil da figur 2 se ut?» Dette spørsmålet fikk alle i gang.

Alexander Moen

Storetveit Ungdomsskole
axmoen@gmail.com



Figur 1–4: Mønstrene jeg tegnet på tavlen.

På forhånd hadde jeg forberedt noen spørsmål for de som ble ferdig med å tegne figur 2 og 4. Disse spørsmålene fant jeg essensielle i undervisningsøkten for å fremme refleksjon og å få elevene til å lete etter sammenhenger. Regelen som sa at alle elevene skulle kunne svare på mine spørsmål, var ment for å stimulere elevene til å arbeide seg frem til en felles forståelse. Spørsmålene var som følger:

1. Hvordan vet dere at dere har tegnet riktig?
2. Hvordan vil figur 5 se ut?
3. Kan dere tegne figur 10 der (pek på en ledig plass på tavlen)?
4. Skriv på antall firkanter til alle mønstrene.

Når elevene ble ferdig med å tegne figur 2 og 4 gikk jeg bort og stilte spørsmål 1. Under er det gitt et eksempel på en typisk samtale. Dette er ikke nøyaktig det som ble sagt, men noe som ble skrevet ned i etterkant og her er «elev» tenkt som ulike elever på gruppen:

Lærer Hvordan vet dere at dere har tegnet riktig?

Elev Vi så det.

Lærer Hva så dere?

Elev «Peker på tavlen».

Lærer Så dere en tavle?

Elev Nei, mønsteret.

Lærer Hva så dere i mønsteret?

Elev Ja, der er det så mange firkanter og der er det så mange firkanter og da må de andre være sånn.

Lærer Nå skjønte jeg ikke helt. Hva mener dere med så mange firkanter der og der og hva har så mange firkanter med hvordan de andre må være?

Elev Ja, der er det en firkant i midten (peker på figur 1) og der er det tre bort og tre ned firkanter i midten (peker på figur 3). I tillegg er det en rundt der (peker på figur 1) og 3 rundt der (peker på figur 3). Derfor må det være 2 bort og ned der (peker på der figur 2 skal være) og 4 bort og ned der (peker på der figur 4 skal være).

Lærer Hvordan vet dere at det skal være 2 der og 4 der?

Elev Jo, fordi det står tall der, 1 over der det er en og 3 over der det er tre. Derfor må det være 2 der og 4 der.

Det er viktig at elevene kommer med informative svar, at elevene reflekterer og utvikler argument fra «vi så det» til et gyldig og informativt argument. I diskusjonene hverken bekreftet eller avkreftet jeg det de sa, men passet på å spørre og grave til jeg fikk dem til å resonnerer og argumentere til jeg var tilfreds med svaret.

Jeg var også nøye med å ikke «arrestere» språket tidlig i prosessen. Når eleven bruker ord som «tre bort» og «rundt der» brukte jeg også disse ordene. Dette er noe jeg opplever senker terskelen for å få elevene til å være med i diskusjonen. Etter hvert som forståelsen økte, introduserte eller spesifiserte jeg fagord. For eksempel sa flere elever «det tallet der» for figurnummer. Dette ble ikke korrigert av meg og jeg kalte det også for «det tallet der». Når vi nærmet oss slutten av timen hadde jeg en gjennomgang og sa at «det tallet der heter figurnummeret», for så å kalle det figurnummeret resten av timen. Dermed er ikke fagordene viktig for å få i gang resonnering og argumentasjonen. Lærer spiller elevens ord i argumentasjonen og noterer mentalt at her må en korreksjon av fagord inn senere.

Elevene klarte etter hvert å presisere at figurnummer passet med antall firkanter bort og opp i midten av figuren og at figurnummer passet med antall firkanter i de fire «armene» på figuren. Elevene har sett hvordan figurnummer passer med mønsteret. En slik samtale tror jeg fører til god læring. Elevene har nå en god intuitiv forståelse av hvordan mønsteret utvikler seg og kan beskrive det. Her kan det være greit å stoppe opp og spørre alle i gruppen om de forsto det. For eksempel ved å spørre flere i gruppen om hvordan figur 5, 6 og 7 ville sett ut. På alle gruppene var det minst en elev som forsto hvordan figur nummer 2 og 4 ville se ut. I noen tilfeller ba jeg en spesifikk elev på gruppen om å svare. Kunne ikke den eleven svare, kom jeg tilbake om et par minutter for å få et svar fra eleven. Dette opplevde jeg som en positiv ting. Det samme kan fungere når man har kommet frem til det algebraiske uttrykket. Kan du regne ut hvor mange firkanter det er i figur 1, 2, og så videre? Ved å be alle forklare i tur og orden er det lurt å starte med de elevene som har god forståelse og gå over til de som ennå ikke helt har forstått.

Det neste er at elevene finner ut hvordan de kan regne ut antall firkanter i alle figurene, helst i figur n . Det er dette spørsmål 3 og 4 leder til.

Spørsmål om antall firkanter i alle mønstrene stimulerer til å se etter en metode for å hurtig regne ut antall firkanter i hver figur. Mange elever telte antall firkanter i figur 1, 2 og 3 og regnet ut antall firkanter i figur 4, 5 og 10. I figur 1, 2 og 3 er det forholdsvis lett å telle antall firkanter, men for figur 4, 5 og 10 tar det lang tid å telle. Det tar spesielt lang tid å telle firkanter i figur 10 og derfor er det viktig å få de til å tegne en figur med høyt figurnummer. Når elevene finner at det tar lang tid å gjøre en oppgave, leter elevene etter egne, hurtigere, metoder. Her er det viktig å få elevene til å forklare hvordan de regnet ut antall firkanter og få dem til å skrive det ned. De fleste elever svarer noe slikt om hvordan de telte:

Du ganger bare bortover og nedover i midten, for eksempel i figur 5 så er det fem bort og fem ned og da har du 25. Så må du få med armene og de er det alltid fire av. Så da må du gange fire med fem og plusse dem sammen.

Får jeg elevene til å svare noe slikt klarer elevene å resonner seg fram til et algebraisk uttrykk. Her vekslet jeg mellom to ulike spørsmål avhengig av elevenes fagkompetanse:

Spørsmål 1, for elever med høyere faglig kompetanse: *Kan dere bruke algebra til å si hvor mange firkanter det er i enhver figur?*

Spørsmål 2, for elever med lavere faglig kompetanse: *Kan dere skrive opp for meg hvordan dere regner for hver av figurene, under hverandre, start med figur 1?*

På grunn av at det var tilfeldige grupper ble som regel spørsmål 1 stilt. Med noe veiledning fikk jeg elevene til å skrive:

$$\begin{aligned} 1 &+ 4 \cdot 1 \\ 2 &\cdot 2 + 4 \cdot 2 \\ 3 &\cdot 3 + 4 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$4 \cdot 4 + 4 \cdot 4$$

$$5 \cdot 5 + 4 \cdot 5$$

$$10 \cdot 10 + 4 \cdot 10$$

Her vil første ledd av regnestykkene være midten (rad gange kolonne) og andre ledd være de fire «armene» i mønsteret. For noen grupper ba jeg elevene forklare hva som var «midten» og «armene» i regnestykket. Dette var et vanskelig spørsmål, men som fremmet bedre forståelse mellom regnestykkene og figurene. Ofte spurte jeg elevene om hva som forandret seg og hva som ikke forandret seg i de seks regnestykkene. Deretter ba jeg elevene om å bruke algebra der det forandret seg. Blir det stilt opp slik, så elevene kjapt at $4 \cdot 4 + 4 \cdot 4$ er likt, mens det andre forandret seg. Elevene klarte med litt diskusjon å skrive: $a \cdot a + 4 \cdot a$. I noen tilfeller ba jeg elevene å skrive om $a \cdot a + 4 \cdot a$ til $a^2 + 4a$.

Her er også en mulighet for å diskutere hvorfor ikke a^2 og a kan adderes og trekkes sammen. Da kan forbindelse fra hva de har tegnet brukes til å reflektere over hvordan a^2 og a kan være ulike, men noen ganger like (som i figur 1).

I de gruppene som fikk spørsmål 1 klarte de fleste å komme frem til det algebraiske uttrykket presentert i forrige avsnitt. Disse gruppene brukte lenger tid. Gruppene hadde også mer diskusjon rundt det å bruke algebra for å beskrive noe som gjelder for enhver figur, fremfor en enkelt figur. Disse gruppene virket til å ha bedre forståelse når de skulle forklare «Hvordan vet dere at dette er riktig?»

De fleste elevene brukte hele timen til å komme frem til det algebraiske uttrykket. Dermed var det ikke mye tid til å gå gjennom hverandres tenkemåter i detalj. Timen ble som regel avsluttet med en felles gjennomgang av min forståelse av elevenes tenkemåter. I denne gjennomgangen var det rom for å introdusere fagord. Her var det også en god mulighet for å ta opp ulike gruppers ulike løsninger på samme problem.

En gruppe kom frem til at hvis de multipliserte figurnummer med figurnummer pluss fire

fikk de riktig svar. Det algebraiske uttrykket er da $a(a + 4)$. Dette var ikke jeg forberedt på, men det utviklet seg til en spennende mulighet for læring. Gruppen klarte ikke å stille opp det algebraiske uttrykket over, kun å beskrive det med ord. Dette skyldes nok at de ikke har mye erfaring med algebra og parenteser. For det andre var klassen enig i at man kunne beregne på denne måten, men ingen klarte å se sammenhengen mellom de to algebraiske uttrykkene:

$$a^2 + 4a \quad \text{og} \quad a(a + 4).$$

Jeg brukte litt tid på å vise hvordan man kunne gå fra $a(a + 4)$ til $a^2 + 4a$ ved å gange ut parentesen.

Oppsummert

I denne undervisningsøkten jobbet vi med én oppgave gjennom hele timen. Jeg gikk vekk fra mengdetrening og stimulerte til dybdelæring. Elevene jobbet i treergrupper, og som lærer kunne jeg følge progresjonen ved å studere de hengende tavlene. Jeg erfarte at det var enkelt å bevege seg mellom gruppene og stimulere til diskusjon og refleksjon innad i gruppen, med adekvate spørsmål.

Elevene ble hele tiden stimulert til å argumentere for og resonnere om tenkemåten sin gjennom mine forberedte spørsmål. Jeg som lærer kunne når som helst spørre hvem som helst på gruppen. Ved å kunne spørre alle hindret jeg at en elev «tar over» oppgaven og løser den for gruppen. Dette gjør at alle elevene på en gruppe må følge med på hverandres matematiske tankerekker. Spørsmålene var rettet mot å forstå at et algebraisk uttrykk ikke er tilfeldig, men følger fra en logikk i mønsteret. De skal forstå hvordan de kan hurtig regner ut antall firkanter i figur 10, og at det har en sammenheng med det algebraiske uttrykket. Det ble vektlagt at elevene måtte grunngi framgangsmåter og resonnement. I etterkant ser jeg at jeg kunne hatt et avsluttende spørsmål som fremhevet at det ikke er noe tilfeldigheter i uttrykket. For eksem-

pel hvor er a^2 i figur 2 og/eller 4? Hvor er $4a$ i figuren? Hadde jeg gjort det ville jeg også ha lagt fint opp til neste time med mønster. Da kunne jeg ha tegnet opp mønsteret, plassert på delene fra det algebraiske uttrykket og avsluttet med at nå skal vi finne det samme i andre mønstre.

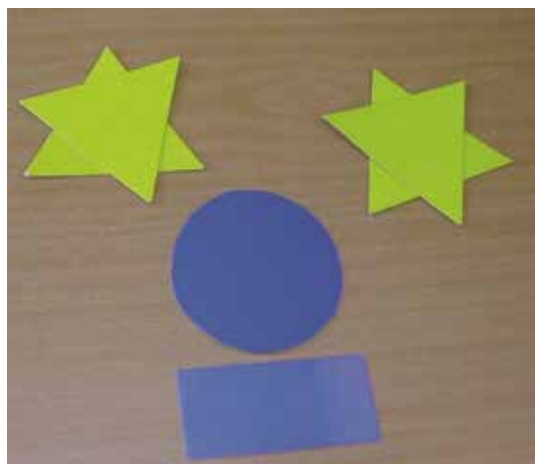
De forberedte spørsmålene var viktige for meg. Jeg følte at de hjalp elevene videre i tankeprosessen. I tillegg gav spørsmålene meg en rettesnor på hvor elevene var kommet i tankeprosessen. Jeg visste rekkefølgen på spørsmålene, og dermed kunne jeg lettere skifte mellom gruppene. Hvis en gruppe var på spørsmål 1 og en annen var på spørsmål 4 var det enklere å hjelpe gruppene.

I etterkant av timene ser jeg at istedenfor å ha en felles gjennomgang til slutt, kunne jeg ha slått sammen grupper og bedt dem grunngi det algebraiske uttrykket til hverandre. Dette kunne

ha stimulert ytterligere til å følge hverandres matematiske tenkemåter og sammenligne med egen.

I alle fire klasser var alle elevene aktivt med. De uttrykte i varierende grad forståelse for mønsteret og det algebraiske uttrykket og sammenhengen mellom de to. Elevene uttrykte mestring og viste stolthet når jeg fortalte at dette var en eksamensoppgave på tiende trinn. Jeg opplevde timen som veldig gøy og hektisk, men meget stimulerende for å reflektere over matematikken. I etterkant ser jeg at det kan være en del venting for grupper. Gruppene venter på at lærer blir ledig for å snakke med dem. Neste gang vil jeg forberede noe som gjør at elevene har noe å gjøre mens de venter, for eksempel kan de oppsøke andre gruppers tavler og dele og diskutere løsninger.

Fra arkivet



I Tangenten 4/2008 beskrev Bjørg Skråmestø lekpregede aktiviteter på 1. trinn, hvor elevene gikk på sløyden for å bygge hus.

Les denne artikkelen og andre godbiter fra Tangentenarkivet på tangenten.no



Meier

Å lage kakao

I forbindelse med samarbeidsavtalen som Høgskulen i Volda har med en barneskole, ble jeg kjent med lærer Trygve. Sammen utviklet og gjennomførte vi en kontekstbasert praktisk oppgave i 6. klasse, der han er matematikklærer.

Læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020) vektlegger i sine kompetansemål at elevene skal jobbe med praktiske situasjoner og problemer fra egen hverdag. Vi finner mange oppgaver med kontekster fra det virkelige livet i lærebøker, nasjonale prøver og PISA-tester. En realistisk kontekst i grunnskoleoppgaver blir ofte brukt for å gi en gjenkjennelig og motiverende ramme for en oppgave som blir løst på en kjent måte. Av erfaring ser vi at det ikke ofte er slik at konteksten er det viktige og matematikken blir verktøyet. Denne typen oppgave ønsket vi å lage.

Elevene sliter ofte mer med slike oppgaver enn med vanlige regneoppgaver. En analyse av elevsvarene til PISA-oppgavene fra 362 indonesiske elever fra 9. og 10. klasse (Wijaya et al., 2014) viser at elevene gjorde flere feil når de skulle forstå en oppgave med realistisk kontekst og omforme denne konteksten til et matematisk problem, enn med selve utregningen. Det tyder

på at elever trenger mer øvelse med denne typen oppgaver.

Det er mulig å finne kontekstbaserte oppgaver i lærebøker eller på nettet, men i dette tilfellet har vi utviklet en egen idé, med kontekst «å lage kakao».

Hva må til for at en oppgave er en god praktisk oppgave?

Ved siden av en praktisk kontekst skal elevene få muligheten å lære og/eller øve seg på noe matematikkfaglig. Spesielt fire kriterier (Gustningsi et al., 2023, s. 326) kan det være nyttig å tenke over i planleggingsprosessen: 1: Oppgaven skal være forståelig. Det vil si at elevene må kunne forstå språket, begrepene og situasjonen som er brukt. 2: Oppgaven må være mulig å løse for alle elevene med sine ulike kunnskaper og ferdigheter på årstrinnet. Kompetansemål i læreplanen gir en pekepinn, men også kunnskapsnivået i klassen er viktig å kjenne. 3: Entydige formuleringer er viktig. En oppgave skal ikke gi rom til å tolke den på andre måter enn læreren ønsker. 4: Oppgaven skal være relevant og interessant for elevene.

Planlegging og didaktiske valg

En høyskolelærer (jeg) laget et utkast til en oppgave. Den var inspirert av en oppgave fra nasjonale prøver i regning, «Sander skal lage kakao til klassen og skal fylle den i 6 termoser

Antje Else Hete Frieda Meier

Høgskulen i Volda

antje.else.hete.frieda.meier@hivolda.no

som hver rommer 1,5 L». Jeg tok utgangspunkt i to kompetansemål fra læreplanen for 6. klasse (Utdanningsdirektoratet, 2020): «formulere og løse problemer fra sin egen hverdag som har med desimaltall, [...] å gjøre, og forklare egne tenkemåter» og «utforske mål for areal og volum i praktiske situasjoner og representere dem på ulike måter». Ifølge lærer Trygve var mitt utkast altfor ambisiøst til å kunne gjennomføres i hans 6. klasse. Deretter fulgte en lengre prosess med en konstruktiv utveksling av våre ulike perspektiv.

Etter mye drøfting kom vi fram til følgende oppgavetekst:

Klassen skal lage kakao for 27 elever og læreren. Elevene skal velge en gryte som passer til mengden ingredienser. Til slutt skal kakaoen fylles i termoskanner på 1,5 L, og vi lurer på hvor mange kanner det blir. læreren har funnet en oppskrift som passer for 4 personer. Oppskriften inneholder 1 L melk, 5 ss sukker og 5 ss kakao.

For å tilpasse oppgaven til det «virkelige livet» i Trygves klasse jobbet vi med de fire kriteriene (Gustnings et al., 2023).

1. Forståelig for elever

Trygve har erfaring i hvordan oppgaven må være formulert slik at elevene kan forstå den. For at oppgaven skulle være forståelig i hele prosessen, drøftet vi bruk av konkrete, f.eks. målebeger, linjal og gryter. For enkelte elever ville det hjelpe å forstå volum ved å bruke målebeger. For å velge en passende gryte er det nyttig å se og å kunne måle ulike gryter. Vi drøftet hvilke grytestørrelser som ville gi gode matematikk-samtaler. Vi valgte en gryte som var altfor liten (2 liter), en gryte som var altfor stor (18 liter), og to mellomstore gryter (4,5 liter og 6 liter).

Ville det være nyttig for noen elever å også ha de fysiske ingrediensene (sukker, kakao og melk) tilgjengelig? Vi drøftet spørsmålet, men

valgte å ikke ha disse konkretene. De kunne lett ta oppmerksomheten fra den matematiske prosessen.

2. Mulig å løse

Læreren kjenner regneferdighetene og kunnskapene til elevene og vet hva elever på ulike nivå mestrer å løse. Dette var nyttig da vi planla gruppeinndelingen. Hver gruppe besto av 6–7 elever, satt sammen etter nivå. To grupper besto av elever med gjennomsnittlig måloppnåing, én gruppe med lavt presterende og én gruppe med høyt presterende elever. På denne måten kunne vi observere hvordan oppgaven fungerte for de ulike nivåene.

For at en skulle kunne mestre utregningen, måtte oppgaven ha passende tall. Den måtte inneholde tall som ville fungere bra i hele omregningsprosessen og samtidig passe til virkeligheten. Tallet skulle kunne deles på fire, og videre omregning måtte være mulig å utføre. Elevene måtte forstå situasjonen, regne ut $27 + 1$ og bruke kunnskap om 4-gangen for å finne hvor mange ganger de måtte øke oppskriften. Vi diskuterte om de ville få til å multiplisere $35 \cdot 15$? De har ikke lært standardalgoritmen for multiplikasjon av to tosifrede tall enda, og vi vurderte derfor bruk av kalkulator. Vi ønsket at elevene skulle finne en strategi selv, og derfor bestemte vi oss for å ikke ha kalkulator tilgjengelig.

3. Entydig i formuleringene

Både en god formulering av oppgaven og at læreren vet om hvorvidt oppgaven er forstått riktig, er viktig. Vi valgte en muntlig presentasjon av oppgaven, noe som Liljedahl (2023) fremhever i sin bok om tenkende klasserom som mest effektivt. Elevenes oppmerksomhet kan da brukes til å forstå og ikke til å avkode en tekst.

4. Interessant og relevant

Å lage kakao er en kjent situasjon for klassen. Av erfaring vet vi at en kontekst fra mat og helse er interessant og motiverer.

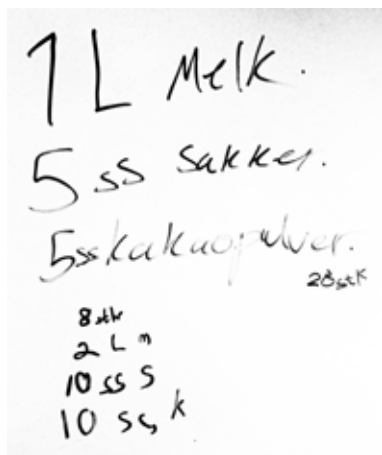
Gjennomføring

Gjennomføringen var lagt til et verkstedarbeid med fire grupper (etter hverandre) med 15–20 minutter til hver gruppe. En vertikal tavle var tilgjengelig for hver gruppe.

Oppgaven ble presentert muntlig og repetert flere ganger til alle hadde forstått. Elevene måtte nå tilpasse oppskriften til riktig antall personer (1), omregne fra antall spiseskjeer til mL (2) og velge en passende grytestørrelse (3). Et tilleggsspørsmål (4) ble gitt til enkelte elevgrupper.

Tilpass oppskrift til antall personer

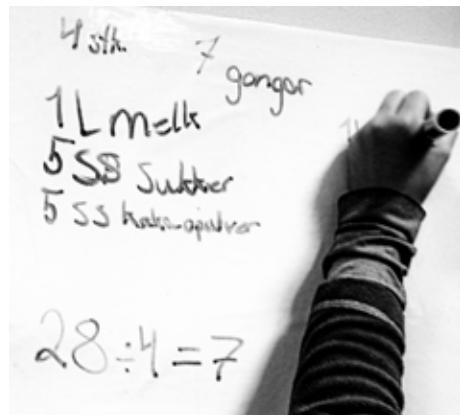
Den gitte oppskriften er beregnet for fire perso-



Figur 1: Starter med doubling.

ner, mens klassen har 27 elever og én lærer. Her måtte elevene forstå situasjonen for å finne ut hvordan oppskriften kunne tilpasses. Vi så ulike strategier for utregningene: En gruppe (Figur 1) begynte å doble oppskriften, men oppdaget fort at det ikke var så lurt å fortsette med denne strategien. En annen gruppe (Figur 2) brukte 4-gangen og fant at de måtte multiplisere med 7. Noen jobbet systematisk, se Figur 3, og tok utregningen i hodet. Vi ser at det er en stor nivåforskjell på strategiene elevene brukte. Slett ikke alle klarte denne omregningen uten støtte.

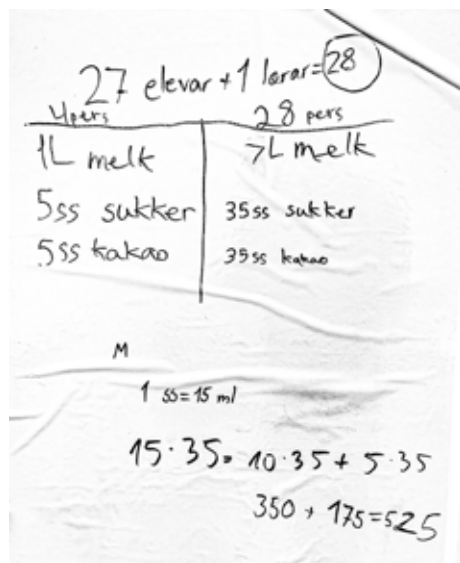
Oppskriften for 28 personer har 7 liter melk og 35 spiseskjeer med sukker og kakao.



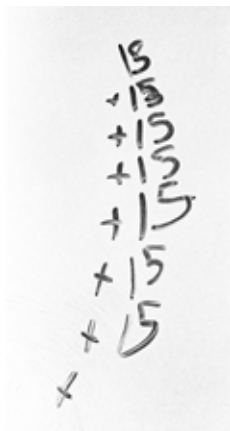
Figur 2: Bruk av 4-gangen.

Hvordan kan vi måle mengdene?

Elevene kom med forslag. 7 liter melk kan vi måle med målebeget, men sukker og kakao? Det blir mange spiseskjeer å telle! Vi spurte om det fantes en enklere måte enn å telle 35 spiseskjeer. Elevene fikk vite at 1 ss tilsvarer 15 mL i volum. Nå var det et behov for å regne $35 \cdot 15$, noe de som nevnt tidligere ikke hadde en algoritme for enda. Med ulik grad av støtte fra Trygve eller meg kom alle elevene fram til svaret. Strategi-ene var både hoderegning og skriftlig utregning.



Figur 3: Systematisk oppsett. Utregning i hodet.



Figur 4: Forsøk på gjentatt addisjon.

$$\begin{aligned} 35 \times 10 &= 350 \\ 35 \times 5 &= 175 \\ 350 + 175 &= 525 \text{ ml} \end{aligned}$$

Figur 5: Oppdeling av tosifret multiplikasjon.

En gruppe begynte med gjentatt addisjon av 15 (Figur 4). De innså etter kort tid at det ikke var så lurt. De fleste delte opp tallet 15 i 10 og 5, se Figur 5. Ingen valgte å dele opp tallet 35. Noen snudde på rekkefølgen, som var gitt fra den praktiske situasjonen, og brukte 15×35 , se Figur 6.

Etter at elevene kom fram til resultatet (525 mL sukker og 525 mL kakao), spurte vi dem hvor stort volum det var til sammen av melk, sukker og kakao. Noen satte i gang med utregningen og klarte også omgjøringen fra mL til L uten problem, se Figur 7.

Andre trengte mer støtte. Målebegeret som viste mL og L var veldig nyttig i forklaringsprosessen. Slik kunne alle elevene forestille seg hvor mye kakao og sukker dette er i virkeligheten.

Valg av grytestørrelse

Vi vet nå at volum til hele massen er 8,05 liter.
Vi snakket med elever om hvor mange liter

1 ss 15 ml
15.35
 $10.35 + 5.35$
350 + 175 = 525 ml
8050 ml

Figur 6: Snudd rekkefølge.

1 L melts
 5 SS Sucha
 5g kalavo
 7 L₁ L₂
 male
 529 ml sub-car
 525 ml
 kal/cevo
 $525 + 525 = 1050 \text{ ml} = 1,05 \text{ l}$
 $1,05 + 7 = 8,05 \text{ l}$

Figur 7: Siste utregning og omgjøring til liter.

gryten burde romme. Her er det viktig å ikke bare tenke matematikk, men å ha den praktiske situasjonen i hodet. Melk stiger når den kokes. Elevene fikk presentert fire ulike gryter (2 L, 4,5 L, 6 L og 18 L) uten at vi oppga volum til grytene. De skulle vurdere hvilken gryte som passet best til å koke kakaoen i. Noen elever valgte den største gryten. Da var de iallfall på den sikre siden. Men de fleste mente en gryte som rommer 9 eller 10 liter, ville være passende. Andre elever diskuterte mulig volum av de to midterste grytene. Gryten på 4,5 liter var



Figur 8: Måle diameter for å finne volum.

høyere, men hadde en mindre diameter enn gryten på 6 liter. Elevene diskuterte engasjert hvordan de kunne finne volumet av grytene ved å måle diameter og høyde, se Figur 8. Elevene fikk etter hvert oppgitt volum til grytene og kunne velge riktig gryte.

Tilleggsspørsmål:

Fyll kakaoen i termoskanner på 1,5 L.

Enkelte elevgrupper rakk å regne ut hvor mange termoskanner vi trengte. Her var en liten utfordring at divisjonen ikke gikk opp.

Refleksjon i etterkant

De fire kriteriene til Gustingsi et al. (2023) ga oss en rettesnor for planleggingen av opplegget. Når vi ser tilbake på gjennomføringen av opplegget, kan vi konkludere:

Forståelig

Oppgaven var forståelig for mange, men ikke for alle. Situasjonen «å koke kakao» var kjent for alle elever, men noen elementer var nye for dem (f.eks. omregning fra antall spiseskjeer til volum, og multiplikasjon av to tosifrede tall). De fleste elever trengte flere forklaringer, noe som var mulig å gi i vårt verkstedopplegg.

Mulig å løse

Oppgaven var mulig å løse for alle, men med ulike grad av støtte. Noen av elevene klarte å løse oppgaven helt selvstendig, mens de fleste elever trengte litt og de svakeste elever en god del støtte. Å ha konkrete, som målebeger og gryter, var til god hjelp for alle.

Vi gjennomførte dette opplegget i nivådelte smågrupper med vertikale tavler. Dette fungerte bra. Elevene kunne jobbe og samtale i sin gruppe på sitt nivå og brukte tavlene aktivt. Å gi denne oppgaven som tekstopp-gave i klasserommet eller som lekse (uten støtte) hadde ikke fungert, mener lærer Trygve.

Vi valgte et verkstedopplegg på 15 minutt for hver gruppe. Det viste seg å være for kort tid for de fleste elever. Elever som presterer lavt, trengte

mer støtte og tid for å komme i mål. Elever med stort læringspotensial var raske med utregningene, men fikk ikke nok tid til å utforske nye strategier for å finne volum til grytene. Hadde vi hatt mer tid, kunne de elevene med stort læringspotensial utforsket mer og etter hvert blitt introdusert til formelen for volum av en sylinder og så regnet ut selv.

Noe å tenke på er at utregningen av volum til sylinder også innebærer utregning av areal av en sirkel. Ut ifra kompetansemålene i LK20 burde det være mulig å jobbe med volum av sylinder. På tidspunktet til gjennomføringen av oppgaven var volum av et prisme jobbet med, men ikke volum av sylinder.

Tall fra virkeligheten (f.eks. 1 ss tilsvarer 15 mL) er ikke alltid lett å bruke i undervisningen. Tall som virker enkle, kan ofte bli for vanskelige når en begynner å regne med dem. Læreren må gjøre grundige utregninger og forberedelser for at elevene får en passe, ikke for vanskelig, utfordring.

Å transformere den praktiske situasjonen til matematikken som måtte brukes, var overraskende krevende for enkelte. Dette er i tråd med observasjonene til Wijaya et al. (2014).

Entydig i formuleringen

Oppgaven var entydig formulert, men, som nevnt før, de fleste elevene trengte mer utfyllende forklaringer. Til tross for at elevene ikke var vant til en muntlig presentasjon av oppgaveteksten, fungerte det bra for de fleste. Trygve mente at for noen hadde det vært nyttig å ha en skriftlig presentasjon. Siden elevforutsetningene er så forskjellige, kan vi anbefale å gi det viktigste av oppgaven muntlig, men skrive tall og andre detaljer på tavla.

Interessant og relevant

Observasjonen viste engasjerte og konsentrerte elever, og tilbakemeldingene i etterkant tyder på at oppgaven var interessant. En situasjon fra hverdagen er lett å kjenne igjen og engasjere seg i for elevene.

Til tross for noe forbedringspotensial var denne kontekstbaserte praktiske oppgaven egnet til å gi tilpasset øving og læring for alle elever. Arbeidet i smågruppe med vertikale tavler og individuell støtte var egnet til å engasjere elevene til høy konsentrasjon og innsats.

Referanser

- Gustiningsi, T., Putri, R. I. I., Zulkardi, Z. & Hapizah, H. (2023). Developing a PISA-like mathematical problem: Using traditional food context. *International Journal of Education & Curriculum Application*, 6(3), 324–337.
- Liljedahl, P. (2023). Å bygge tenkede klasserom i matematikk. Cappelen Damm Akademisk.

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., Doorman, M. & Robitzsch, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: an analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast*, 11(3), 555–584.

Utdanningsdirektoratet (2020). *Kompetansemål og vurdering*. Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemal-og-vurdering/kv21?lang=nob>

Utdanningsdirektoratet (2022). *Eksempeloppgaver og tidligere nasjonale prøver*. <https://www.udir.no/eksamen-og-prover/prover/eksempeloppgaver-tidligere-nasjonale-prover/>

Fra arkivet

Åse: Jeg vil si at det er mange mål inne i den aktiviteten. Altså, det viktigste er jo dette med å bruke matematikken aktivt, at matematikken ikke bare er et skolefag ... noe som de sitter med pulten og skriver, en pluss en ... men at de må bruke det, at de må kunne litt tall og de må kunne benevnninger som kroner i dagliglivet sitt rett og slett, og butikk er da noe som alle unger har vært innom.

Dette sitatet er fra læreren Åse, etter en praktisk aktivitet basert på bruk av en butikkaktivitet i undervisningen. Artikkelen heter «Praktiske aktiviteter – ikke noen lek» og i den drøfter Frode Olav Haara hvordan butikkaktiviteter kan fungere i matematikkundervisningen.

Les denne artikkelen og andre godbiter fra Tangentenarkivet på tangenten.no

Vøllestad

Palindrome hentekoder

Jeg parkerte bilen og gikk inn på Coop Extra. Jeg hadde ikke noe jeg skulle handle, skulle bare hente en pakke. Noen ganger kommer de med Posten, men denne gangen var pakken sendt med PostNord.

På vei til skranken tok jeg opp telefonen for å lete fram hentekoden. Tidligere på dagen hadde jeg registrert at hentemeldingen tikket inn på telefonen min. Nå stod jeg der med telefonen i handa. Jeg kjente at en varme gikk gjennom meg. Jeg ble stående og se på hentekoden. Det føltes nok som mye lenger enn de få sekundene det egentlig var. Det var gått opp for meg at hentekoden var palindrom.

Ville den unge mannen i henteskranken bry seg om jeg fortalte han det? Ville han bli skremt eller bare se rart på meg? Han var i ferd med å få overlevert noe som kanskje ikke skjer så ofte. Kanskje han aldri før hadde blitt fortalt om denne underlige og behagelige egenskapen noen tall har. Han var kanskje i ferd med å oppdage en helt ny verden, tallenes verden. Jeg vurderte det fram og tilbake, men endte med at jeg lot være. Jeg tenkte også at jeg hadde lyst å spørre han om jeg skulle gi han koden forveis eller baklengs, for det ville jo ikke spilt noen rolle.

Ørjan Hoyd H. Vøllestad

Andøya Space Education
orjan@hoyd.net

Jeg lot være. Det var ikke noen jeg kjente. Kanskje var det feil beslutning. Kanskje ville han blitt like glad som meg av oppdagelsen. Kanskje frarøvet jeg han den gleden?

Kom igjen, Ørjan, virkelig? Har du så lite å gjøre at du tenker på sånne ting? Palindrome hentekoder?

PostNords hentekoder er altså numeriske og (opptil?) femsifret. De fleste eller kanskje alle kodene jeg har sett fra dem, har vært femsifret, i alle fall. Jeg hadde fått et av dem som var like begge veier. Skjer det ofte? Hvor mange slike numre er det egentlig?

Som vanlig nevner jeg slike tanker for noen av kollegene mine. Noen av dem. Andre ser rart på meg om jeg gjør det, så jeg har filtrert ut hvem som bryr seg og til og med blir begeistret. Noen likesinnede. Vi har et godt arbeidsmiljø. Etter at jeg tok det opp i en lunsj dagen etter, ble vi sittende og prate om dette gjennom hele måltidet. Samtalen dreide raskt mot at vi lurte på hvor ofte slikt skjer. Hvor mange palindrome hentekoder er det mulig å oppleve med PostNord? Da vi gikk fra lunsjen, skulle vi gå hver våre veier. Vi var altså kommet til et veiskille. Ei ønsket å regne seg fram til antall mulige palindromer ved hjelp av penn og papir. For meg var det mer naturlig å finne fram til et svar ved hjelp av programmering.

Tankene vandret fram og tilbake over tallene. Med kraften til en datamaskin kunne jeg

```

palindromer = []

for tall in range(00000, 99999 + 1):
    sjekk = f'{tall:05}'
    if sjekk == ".join(list(reversed(sjekk)))":
        palindromer.append(tall)

print(f'For et femsifret tall, er det {len(palindromer)} palindromer')

```

Figur 1

lynraskt sjekke samtlige tall mellom 00 000 og 99 999. Litt «brute-force».

Løsning med Python-programmering

En datamaskin kan regne utrolig raskt, så det ville ikke være noe stress å gå gjennom samtlige 99 999 tall og sjekke hvert enkelt om de er palindrom. Jeg satte noen regler for det, det måtte hele tiden være fem siffer når jeg gjorde sjekkene. Altså ikke telle fra 0, men bruke alle fem siffer, 00000 til 99999. Det skulle ikke mye Python-kode til (Figur 1).

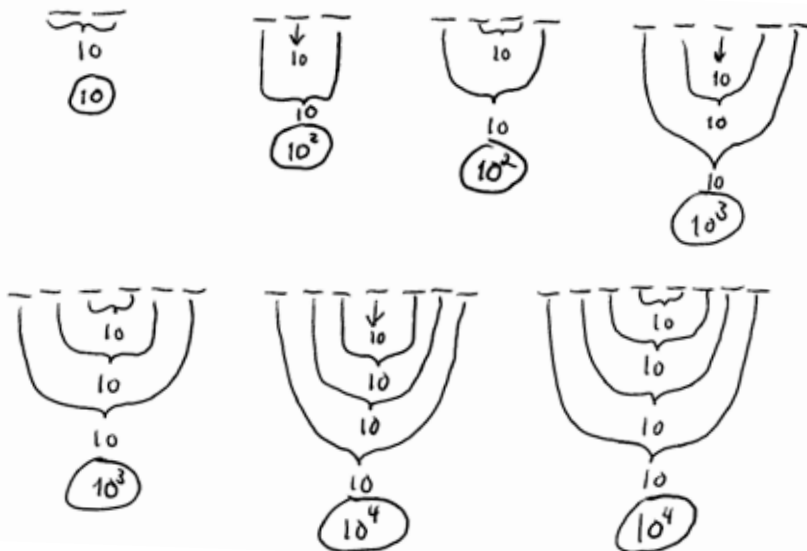
Etter å ha regnet gjennom alle de 100 000 kombinasjonene gir programmet ut teksten «For et femsifret tall, er det 1000 palindromer».

Løsning med penn og papir

Min kollega, som ønsket å se på en løsning med penn og papir, laget skissen i Figur 2.

Hun forklarte meg at for et tall med fem siffer er det symmetri rundt det midterste sifferet. For sifferet i midten har man 10 ulike muligheter (0–9).

Videre, for hver av de 10 mulighetene kan siffer #2 og siffer #4 bestå av 10 ulike siffer (0–9), men de må være like for at det skal være palindrom. Derfor bare 10. Da har vi så langt $10 \cdot 10$ mulige palindromer. Siffer #1 og #5 må også være like, også kun variere mellom 0–9, og det er dermed 10 ulike muligheter for de $10 \cdot 10$ mulighetene vi har. Vi ender opp med $10 \cdot 10 \cdot 10$ (eller $10^3 = 1000$) palindromer.



Figur 2
20

Selv om våre veier skiltes etter lunsjen, fant vi tilbake til samme mål. Vi fant ut at det var 1000 PostNord-hentekoder som ville være palindrome.

Jeg hadde altså opplevd å få én av dem, noe det er 1 % sjanse for (1000 av 100000).

For en tilfredsstillende følelse å kunne utforske slike ting! Men jeg var på et spor. Jeg følte at 1000 ikke var helt så spesielt, selv om 1 prosent er ganske lite. Et nytt spørsmål dukket opp i mitt indre: *Hvor mange av disse palindrome hentekodene er i tillegg et primtall?*

Jeg holdt dette spørsmålet for meg selv denne gangen og utvidet Python-koden med en sjekk for primtall. Utvidelsen sjekker bare de palindrome tallene og finner til sammen 94 primtall. Det var enda mer spesielt. Det viser seg altså at det er bare 0,09 % sjanse for å få en palindrom-prim hentekode fra PostNord på SMS.

Den utvidede koden ser nå ut som i Figur 3. Nye spørsmål kommer til meg: *Hvor ofte gjenbraker PostNord kodene sine? Brukes noen koder samtidig i ulike deler av landet?*

Vi vet ikke om PostNord har alle 99999 hentekodene i bruk over hele landet samtidig. Kanskje noen tallrekker er forbeholdt bestemte steder, ulike postkoder? De har sikkert også et system for å gjenbruke kodene, når de er løst

inn. Det må de, ellers ville de har brukt opp kodene for lengst, tenker jeg.

Dette var PostNord, men hva med Posten eller MyPack? Hvor mange ulike hentekoder har de?

Posten har fire alfanumeriske tegn. De følger et fast mønster. Hver kode består av først to bokstaver og deretter to siffer. Hvor mange ulike varianter har de til rådighet da? Hvis vi går ut fra at de ikke bruker Æ, Ø eller Å i kodene sine, blir det $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10$. Det blir 67 600 totalt. Det vil i alle fall ikke kunne finnes noen palindrome varianter der. Det er litt kjedelig egentlig, men de klarer mange ulike koder på færre tegn.

MyPack er eid av PostNord og bruker fire numeriske siffer, noe som betyr at de muligens må levere et mindre antall pakker for å kunne klare seg med færre tilgjengelige koder. De har bare 9999 ulike koder hvis vi ser vekk fra 0000.

Kanskje koder kobles til postnumre, at flere kan ha samme kode samtidig, fordi de hentes på ulike steder i landet? Det hadde vært spennende å finne ut. Er det noen koder som brukes oftere enn andre? Gjelder de store talls lov her?

Jeg lurar på om jeg kommer til å oppleve flere palindrome hentekoder i fremtiden, og enda bedre om de også er primtall. Tross alt bare 94 av dem!

```
palindromer = []
palindromprimtall = []

for tall in range(00000, 99999 + 1):
    sjekk = f'{tall:05}'
    if sjekk == ''.join(list(reversed(sjekk))):
        palindromer.append(tall)
        if all(int(sjekk) % i for i in range(2, int(sjekk))):
            palindromprimtall.append(tall)

print(f'For et femsifret tall, er det {len(palindromer)} palindromer')
print(f'Av de {len(palindromer)} palindromtallene, er {len(palindromprimtall)} også primtall')
```

Figur 3

Brugård, Ottem

Abelegøyer, podkast om matematikk

Abelegøyer er en podkast vi har drevet i snart to år. Vi er Anne Brugård og John Christian Ottem, som er henholdsvis stipendiat og professor i matematikk ved Universitetet i Oslo. Høsten 2022 fikk Anne en idé om å lage en podkast om matematikk. Ideen resulterte i podkasten *Kalkulus med Anne og gjengen*, der hun inviterte vitenskapelige ansatte ved universitetet til å snakke om utvalgte begreper som introduseres i begynneremnet MAT1100 – Kalkulus. John Christian gjestet podkasten to ganger og var ikke vanskelig å overtale til å bli med på å lage en julekalenderversjon kalt *Kalkjulus med Anne og John Christian*. Selv om det var mye arbeid å lage 24 episoder, ønsket vi å fortsette å lage matematikkpodkast, og *Abelegøyer* ble til.

Episodene i *Abelegøyer* er på 20–30 minutter hver og har et «nøttebasert» format. En typisk episode starter med at vi presenterer en oppgave og diskuterer problemstillingen og hvordan vi burde gå fram for å løse den. Deretter går vi mer systematisk gjennom løsningen, hele tiden som en

diskusjon mellom oss. Vi har også kortere spalter med litt mer lettbeint matematikkinnhold – for eksempel funfacts om tall som π og e .

Det vi ønsker med en slik podkast, er å formidle gode matematikknotter som kan engasjere lytterne. Vi håper også at episodene, for tiden 78, kan brukes som inspirasjon i undervisningssammenheng.

I denne artikkelen forteller vi om hvilke tanker vi har gjort oss rundt hva som kan være en god podkastepisode, og hvilke typer oppgaver som fungerer godt, og hvilke begrensninger podkastformatet har. Vi begynner med det siste.

Det er tre åpenbare forskjeller mellom å formidle matematikk i en podkast og å gjøre dette foran en klasse, i en forelesning eller i en samtale med en elev. For det første har vi ingen tavle. Vi må si alt vi vil at lytteren skal få med seg, og vi må beskrive med ord de bildene vi vil at lytteren skal se for seg. For det andre kan ikke lytteren stille spørsmål underveis i episoden. Vi må prøve å forutse hva lytteren kan tenkes å lure på, og forklare det. For det tredje kjenner vi ikke til lytterens kunnskaper i matematikk. Det er stor forskjell på en videregåendeelev, en bachelor- eller masterstudent i matematikk, en matematikklærer eller en ikke-matematiker. Forskjellene blant lytterne er spesielt synlige når det gjelder hvilke begreper man har hørt om. Ord som «induksjon»,

Anne Brugård

Universitetet i Oslo
annebrug@math.uio.no

John Christian Ottem

Universitetet i Oslo
johnco@math.uio.no

«irrasjonal», «rekke» og «moduloregning» er ikke nødvendigvis like kjent for alle.

Vi har erfart at det viktigste for å kunne lage gode episoder er å velge ut gode oppgaver. Av tiden vi bruker på hver episode, går aller mest tid på å velge ut hvilken oppgave vi skal snakke om. I tillegg bruker vi tid på å finne ut hvordan vi skal presentere oppgaven, og hvordan vi skal gå gjennom løsningen.

Hvilken oppgave skal vi snakke om?

Vi har et felles idédokument med rundt 200 forslag til oppgaver som er hentet inn fra forskjellige kilder (bøker, matematikkkonkurranser eller eget hode). Terskelen er lav for at en oppgave havner i dette idédokumentet, men høy for at oppgaven blir brukt i en episode. Så hva krever vi av en oppgave for at den skal kunne få bli med i en episode?

For det første må det være en oppgave. Med det mener vi at det må være et spørsmål i oppgaven som vi eller lytteren skal besvare. Eksempler på spørsmål vi har stilt, er

«Hva er den verste stokkingen av en kortstokk?»,

«Kan et tetraeder kuttes opp i biter og stables sammen igjen til en kube?» og

«Hvor mange hjørner, kanter, sideflater og 3-dimensjonale sider har en 4-dimensjonal pakke?».

Vi forsøkte en gang å lage en episode uten et eksplisitt spørsmål også, men det synes vi ikke fungerte særlig godt. Vi hadde lenge hatt lyst til å lage en episode om fordelingen av primtall og spesielt snakke om *Bertrands postulat*, som sier at mellom et naturlig tall n og $2n$ finnes det minst ett primtall. Vi klarte først ikke å finne en konkret oppgave der det ville bli nødvendig å snakke om fordelingen av primtall, så vi forsøkte å spille inn en episode der vi heller fortalte om det man vet om primtallenes fordeling. Da vi hørte gjennom episoden for å redigere den, følte vi selv at den ikke ble like fengende som de andre episodene, og at vi ikke hadde samme flyt som vi har i

andre episoder. Vi valgte derfor ikke å publisere episoden. Noen måneder senere kom vi i stedet på en oppgave som kunne passe:

Tut tut! Vi skal på biltur på tallinja med en bil som bruker 1 liter bensin på å komme seg fra ett heltall til det neste. Hver gang vi er ved et primtall, kan vi fylle bensin tilsvarende primtallet vi er ved. Hvis vi begynner ved 2, kan vi fylle to liter bensin. Så bruker vi 1 liter på å kjøre til 3, og fyller tre liter bensin. Slik fortsetter vi så lenge det går. Spørsmålet er hvor langt vi kommer! Stopper vi, eller kan vi fortsette til uendelig?

Vi brukte denne oppgaven til å lage og å publisere *Episode 40 – Biltur fra primtall til primtall*, som vi ble fornøyd med.

For det andre må oppgaven ha riktig vanskelighetsgrad. Dette er en utfordring når vi ikke vet hvilket kunnskapsnivå lytteren har. For å imøtekomme dette har vi endt opp med å ha to hovedinndelinger av vanskelighetsgrader. Den ene typen er oppgaver som vi presenterer og løser i samme episode, mens den andre typen er oppgaver som er ment for lytteren, og som vi løser i podkasten uken etter at vi presenterte oppgaven. På den måten kan lytteren tenke gjennom oppgaven i en uke før vi gir løsningen på oppgaven. Tanken er at oppgavene vi gir i forkant, skal ha en slik vanskelighetsgrad at lytteren kan løse oppgaven på egen hånd. Oppgaven bør da kunne løses uten avansert matematikk, og det bør også være mulig å få litt intuisjon på hva som kan være riktig svar, selv om det kanskje blir for vanskelig å finne selve løsningen.

Et eksempel på en oppgave som vi har gitt lytteren en uke på å løse, er i *Episode 37 – Sum av etterfølgende tall*, der vi spør om hvilke tall som kan skrives som en sum av etterfølgende tall, slik som at $6 = 1 + 2 + 3$ og $10 = 2 + 3 + 4$. Det er ikke nødvendigvis så lett å se eller å bevise med en gang, men hvis man prøver å skrive de første heltallene som slike summer, ser man raskt at tallene 4, 8 og 16 ikke kan skrives på den måten. Hvis man

da ser at disse tallene alle er toerpotensen og på den bakgrunn gjetter på at det er toerpotensene som ikke kan skrives som en slik sum, er man kommet langt. Det er selvfølgelig mer igjen før en slik påstand er bevist, men vi tror at det er mye læring i å finne ut hva som skal bevises, selv om man ikke nødvendigvis kommer på beviset selv. Hvis lytteren selv har kommet fram til påstanden om at alle tall utenom toerpotensene kan skrives som en sum av etterfølgende tall, vil det sannsynligvis være enklere for å følge med når vi gjennomgår beviset i episoden.

Når vi velger ut en oppgave som vi løser i samme episode som den presenteres, tenker vi mye på om problemstillingen er enkel å forstå, og om løsningen kan formidles på en klar og forståelig måte. Spesielt tenker vi på om vi klarer å forklare både oppgaven og løsningen kun ved hjelp av ord. Det er mange oppgaver i idédokumentet vårt som ikke har blitt en episode fordi vi ikke finner en måte å forklare dem på uten en figur. Vi har også lært oss at oppgaveteksten ikke kan være for lang, for komplisert eller tvetydig. Et eksempel på en oppgave som ikke har blitt en episode på grunn av tvetydighet, er følgende:

Finnes det funksjoner $f(x)$ slik at $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$

Eller sagt med ord: Finnes det funksjoner $f(x)$ slik at f invers er lik f invers? Det finnes naturligvis andre ord man kan bruke for å snakke om disse to størrelsene, men vi frykter likevel at det ville vært forvirrende å høre på.

En oppgavetype vi synes har fungert bra, er oppgaver innenfor tallteori. De fleste har en viss følelse for tall, og i slike oppgaver trenger vi ikke å visualisere en graf eller et geometrisk objekt. Oppgaver vi har gitt innenfor tallteori, er blant annet «Hvilke tall kan skrives som en sum av to kvadrater?», «Hvilke tall kan skrives som en sum av tre kuber?» og «For hvilke n er $1 + 2^2 + \dots + n^2$ et kvadrat?».

Selv om det er vanskelig å finne oppgaver i geometri som lar seg løse i podkastformatet, har vi for-

søkt med noen. I *Episode 47 – Kvadrater, summer og et glemt teorem* finner vi ut hvilke arealer det er mulig å ha for kvadrater i xy -planet der alle hjørnene har heltallskoordinater. Vi har også laget en oppgave om den isoperimetriske ulikheten, som sier at sirkelen er den kurven som har størst areal.

Til slutt ønsker vi også at oppgaven skal komme med et poeng som er mer enn bare løsningen av oppgaven i seg selv. Oppgaven er kanskje et spesialtilfelle av noe mer generelt, en introduksjon til en gren av matematikken eller til og med et bevis av et kjent teorem. Oppgavene i *Episode 1 – Veibygging og fektende frosker* og *Episode 52 – Bordplassering med mange fiender* er begge eksempler på oppgaver fra grafteori. I sistnevnte episode går oppgaven ut på fordele 100 matematikere, med opptil 49 fiender hver, rundt et bord slik at ingen sitter ved siden av sin egen fiende. Lar man matematikerne være noder og tegner en sti mellom par av matematikere som ikke er fiender, blir spørsmålet om det finnes en sti som går innom alle nodene nøyaktig én gang.

Et eksempel på en oppgave som beviser et teorem, er fra julekalenderen *Kalkjulus 16. desember*. Oppgaven går ut på å finne antall måter man kan pynte en stjerneformet pepperkake med Non Stop på i opptil tre forskjellige farger, og der hver av de fem armene på stjernen skal ha én Non Stop hver. Etter å ha løst denne oppgaven har man også bevist Fermats lille teorem! Det er dessverre ikke alltid så lett å finne oppgaver som har slike gode poenger, men det er definitivt de gangene vi klarer det, vi er mest fornøyd med episoden.

Når vi har funnet en oppgave vi vil lage en episode om, reiser det neste spørsmålet seg. Nemlig hvordan vi skal presentere oppgaven for lytterne.

Hvordan skal vi presentere oppgaven?

For å gjøre en oppgave morsommere, mindre skremmende og lettere å forstå pakker vi den noen ganger inn i et komisk scenario. Et eksempel er tallteorioppgaven som ble nevnt tidligere,

om hvilke n som er slik at $1 + 2^2 + \dots + n^2$ er et kvadrattall. Måten vi presenterte oppgaven på i podkasten, var at en liten nisse hadde fått beskjed av julenissen om å bestille appelsiner til julefeiringen. Julenissen vil imidlertid ha et antall appelsiner slik at han kan stable dem i en pyramide. Den lille nissen ringer for å bestille appelsiner, men får beskjed fra leverandøren om at de kun tillater bestillinger med et kvadrattall antall appelsiner. Spørsmålet i oppgaven blir dermed å finne et antall appelsiner som tilfredsstiller både julenissen og appelsinleverandøren. Det finnes faktisk bare én bestilling som fungerer her: $1^2 + 2^2 + \dots + 24^2 = 70^2$, og forklaringen kan høres i *Kalkjulus 24. desember*.

Vi bruker altså samspillet mellom julenissen og appelsinleverandøren til å sette opp en likning som den lille nissen må løse, og vi opplever at en slik fremstilling av oppgaven gjør det enklere å forstå hva som er problemet. I tillegg slipper vi å svare på spørsmålet om hvorfor denne oppgaven må løses – vi må jo hjelpe den lille nissen! Vi har brukt den lille nissen i flere episoder. I *Kalkjulus 17. desember* blir den lille nissen bedt av julenissen om å lage en eske som er slik at alle kantene og alle diagonalene på sideflatene skal være av heltallig lengde. Man kan se for seg den stakkars lille nissen som står overfor et vanskelig problem som både vi og lytteren må prøve å løse.

Vi har også erfart at *roboter* kan gjøre at en oppgave blir lettere å forstå. I *Episode 13 – Den lille roboten* møter vi en liten robot som er degradert til en matematisk brøkmaskin! Vi har lyst til at roboten skal skrive alle mulige brøker på skjermen sin. Reglene er at alle brøker må skrives en eller annen gang, og at ingen brøk kan skrives to ganger. Spørsmålet er om dette er mulig, og i så fall hvordan det skal gjøres. Den matematiske formuleringen av oppgaven er spørsmålet om hvorvidt de rasjonale tallene er *tellbare*. Ved å løse oppgaven hjelper vi roboten med å lage en plan for i hvilken rekkefølge tallene skal skrives slik at ingen tall blir glemt, og vi beviser at de rasjonale tallene er tellbare, uten engang å ha definert tellbarhet eksplisitt. Vi opplever at det er enklere

for lytterne å forestille seg en robot som skal programmeres til å skrive alle de rasjonale tallene på skjermen, enn å snakke om abstrakte konsepter som tellbarhet.

Det er ikke alltid oppgaven blir klarere av å bli pakket inn i et absurd scenario, og i slike tilfeller lar vi det være. Vi ønsker ikke å forvirre eller teste hvor godt lytteren klarer å ta fra hverandre elementene i oppgaven. Vi vil bare fremstille matematikken på enklest mulig måte. For eksempel ble oppgaven nevnt tidligere om hvilke arealer det er mulig å ha for kvadrater i xy -planet der alle hjørner har heltallskoordinater, presentert akkurat som gjengitt her.

Etter at vi har funnet ut både hvilken oppgave vi skal snakke om, og hvordan vi skal presentere den, går vi løs på den siste delen av planleggingen og den største delen av episoden. Vi må bestemme oss for hvordan vi skal gå gjennom løsningen av oppgaven.

Hvordan skal vi gå gjennom løsningen?

Vi skulle gjerne spurt hva lytteren tenker når vi presenterer oppgaven. Siden podkast er enveiskommunikasjon, har vi ikke muligheten til det slik som man har i klasserommet.

Vi ønsker likevel å snakke om oppgaven før vi løser den, for å gjøre lytteren kjent med den og kanskje svare på noen spørsmål som lytteren umiddelbart stiller seg.

Ved at vi er to i podkasten, kan vi stille hverandre spørsmål som kan oppklare potensielle misforståelser eller uklareheter i oppgaven. Et eksempel på dette finner vi i gjennomgangen av den tidligere nevnte oppgaven om et tetraeder som skulle kuttes opp i biter og bli forsøkt stablet sammen til en kube. For det første diskuterte vi hva et tetraeder er, og om vi stiller noen krav til tetraederet. Skal det ha et bestemt volum eller være regulert? Og hva mener vi med at det skal kuttes opp og stables sammen igjen? Det viktigste å få fram er at tetraederet ikke kan pusses ned til støv og legges i en kubeformet beholder. Det må være et endelig antall biter, som fås fra tetraederet ved et endelig antall kutt. En slik metasam-

tale om oppgaven før den løses, opplever vi bidrar til å ufarliggjøre oppgaven og til å hjelpe lytteren til skjønne hva som egentlig er spørsmålet i oppgaven. I podkastformatet føles det naturlig å ha en slik samtale, da lytteren selv ikke kan lese oppgaveteksten, slik man vanligvis kan når oppgaven blir gitt i klasserommet. Vi opplever det derfor som en styrke ved podkastformatet at vi blir tvunget til å snakke om selve oppgaveformuleringen mer enn det vi ville gjort om oppgaven ble gitt skriftlig.

Før vi går løs på løsningen, går vi ofte gjennom noen konkrete eksempler. I *Episode 25 – Multiplum med bare 0-ere og 1-ere* går oppgaven ut på å vise at ethvert heltall har et multiplum som består av bare 0-ere og 1-ere. Før vi prøver å bevise dette, går vi gjennom de første heltallene og ser at utsagnet faktisk stemmer. Vi bruker altså en del tid på å bli godt kjent med problemet.

Selve gjennomgangen av løsningen på oppgaven er dialogbasert, der Anne stiller spørsmål til John Christian, som svarer og forklarer. På den måten kan vi flette inn spørsmål som vi tror lytteren eller i det minste noen av lytterne vil ha. En slik fremgangsmåte fører også til at gjennomgangen av løsningen foregår i et lavere tempo enn om én av oss skulle forklart løsningen uten avbrytelser fra den andre, noe vi ser på som en fordel. Vi regner med at flere av lytterne våre hører på podkasten samtidig som de for eksempel sitter på T-banen, lager mat eller trener. Da kan det være nødvendig med en saktere gjennomgang enn om lytteren hadde hatt fullt fokus på oss. Den dialogbaserte gjennomgangen åpner også opp muligheten for at den ene av oss repeterer det som er blitt sagt av den andre, gjerne med litt andre ord. Dette grepet bruker vi stadig vekk, til og med så mange ganger at vi av og til har måttet klippe ut noen av repetisjonene for at det ikke skal bli for mye.

Når vi velger temaer for episodene, foretrekker vi oppgaver som kan forklares uten altfor mye regning. Det er for eksempel slitsomt for en

lytter å følge med på lange utregninger og komplisert algebra. I de nøttene der det forekommer noe regning, fungerer det ofte bra å forklare hva som skjer, i stedet for å gjengi alle stegene («det viser seg at hvis vi rydder opp i dette uttrykket, finner vi til slutt at ...»).

Etter å ha brukt svært mange timer på å lage alle disse podkastepisodene sitter vi igjen med mange erfaringer rundt det å finne det vi oppfatter som gode oppgaver og forklaringer.

Hva har vi lært?

For det første har vi lært at det er en stor fordel å være flere når man skal finne gode oppgaver. Dersom den ene av oss har et forslag til en oppgave som den andre ikke liker, må det argumenteres for hvorfor oppgaven likevel er bra, eller diskuteres om hvorvidt den kan endres slik at den blir bra. Noen ganger har oppgaven virket for vanskelig ved første øyekast, men etter litt diskusjon kommer vi fram til en enklere måte å forklare løsningen på. Eller omvendt – ved å diskutere oppgaven har vi kommet fram til at den er mye vanskeligere enn vi først trodde. Dette fører imidlertid til at det tar lang tid å finne gode oppgaver og forklaringer. Hvor lang tid det tar å lage en episode, er nok den største overraskelsen for vår del. Vi bruker hver minst én arbeidsdag på hver episode. Her bruker vi mest tid på utviklingen og valg av oppgave, etterfulgt av planlegging av gjennomgangen av løsningen. Innspilling og redigering tar faktisk minst tid av hele prosessen.

Episodene som har fungert best, er ofte de enkleste, både i formulering og løsning. Episoden som har høyest lyttertall, er *Episode 11 – Togs Skinner i Karl Johans gate*. Her diskuteres følgende spørsmål:

Du har en jernbaneskinne som er 1 kilometer lang, og legger til 1 meter jernbaneskinne. Hvis endepunktene forblir de samme, hvor høyt over bakken er det høyeste punktet på jernbaneskinna nå?

Her er oppgaven lett å forstå. Vi starter med å «gjette» på hva svaret er: er det 1 mm, 1 cm, 1 m ...? Til slutt er det et overraskende svar, som en kan forklare ved hjelp av Pythagoras setning.

Vi tenker at de fleste lytterne vil synes at det er selve oppgaveformuleringen og diskusjonen rundt den som er det mest engasjerende. Det viktigste er å få vite om problemet og forstå hva det går ut på. Her kommer podkastformatet virkelig til sin rett: å kunne snakke litt rundt problemet og planlegge hvordan man skal gå fram for å finne løsningen.

Vi har også blitt flinkere til å akseptere at ikke alle argumenter må bevises fullstendig. For de fleste holder det å forstå ideen i løsningen, og de

ivrige kan sjekke detaljene selv. Vi sier at vi gjerne vil «føle» hvorfor det stemmer, ikke bare snakke oss gjennom et tørt bevis. *Episode 51 – Magnetiske mynter* gir et eksempel på dette. Her dreier det seg om et eksperiment med mynter, og selv om det er mulig å forklare det med formler fra sannsynlighetsteori, har vi en forklaring som kun involverer kortstokking og enkel matematikk.

Selv om podkasten tar mye tid og vi ofte må kverne hodene våre for å komme fram til episoder vi er fornøyd med, er det både morsomt og lærerikt å lage en podkast om matematikk. Selvfølgelig håper vi også at andre har eller vil få glede av den!

Fra arkivet

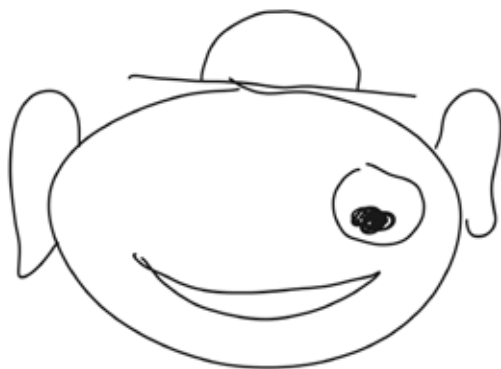
Henrik Kirkegaard,
lærer ved Flisnes skoler i Ålesund

Dette spillet er basert på idé fra Skal vi leke matte av Kristin Dahl:

Her kan det være så mange spillere dere vil. Alle må ha hvert sitt ark og en blyant. Hvis der er terninger til alle, er det best. Hver spiller begynner med å tegne en sirkel på arket sitt (kan være kopiert av læreren i forveien). Det blir klovnens ansikt. Så kastes terningen etter tur. Spillet går ut på å tegne ferdig klovnens ansikt.

6 = en hatt 5 = ett øre 4 = ett øye
3 = en nese 2 = en munn 1 = ett øyenbryn

Det kan lages regler med 2 terninger og partall, oddetall, addisjonstabell, multiplikasjonstabell eller ...



I 2001 hadde Tangenten et temahefte om spill.

Les denne artikkelen og andre godbiter fra Tangentenarkivet på tangenten.no

Smestad, Bolstad, Fossum

Kven er representert?

Elevar blir eksponerte for lærebøker og anna undervisningsmateriell gjennom mange års skulegang. Lærebøkene og oppgåvene som blir brukte i matematikk, er rike på bilete og kontekstar, og i desse finst det mange personar – unge og gamle, kvinner og menn. At det er eit mangfald blant desse personane, kan vere av betydning. Mangfaldet kan bidra til at alle elevar ser seg sjølve representert, men det kan også vise eit mangfald som ikkje nødvendigvis finst i klasserommet. Slik fungerer kontekstane både som ein spegel og som eit vindauge (Horn & Garner, 2022; Luecke, 2011). Då er det viktig at undervisningsmaterialet reflekterer mangfaldet i samfunnet.

Vi har undersøkt korleis dette mangfaldet har arta seg og artar seg i dag i norske matematikkoppgåver. Nærare bestemt har vi undersøkt 1514 matematikkoppgåver frå grunnskuleeksamen i perioden 1962–2020 (Smestad & Fossum,

2024) og alle oppgåvene i tre lærebøker i matematikk for ungdomsskulen etter LK20 (Bolstad & Smestad, 2023). Vi har undersøkt kjønn, etnisitet, kulturelle uttrykk, religion, funksjonalitet, seksualitet og i nokon grad klasse. I denne artikkelen presenterer og diskuterer vi nokre resultat frå desse forskingsprosjekta. Deretter gir vi eksempel på dilemma vi støytte på i undersøkinga av mangfald i matematikkoppgåver. Til slutt presenterer vi eit døme som viser korleis mangfald kan inkluderast i matematikkoppgåver.

Oversyn over funn

Vi ser at det har skjedd betydelege endringar i eksamensoppgåvene i perioden 1962–2020. Men endringane har ikkje skjedd samstundes for alle grupper. Medan kvinner blei representerte oftare frå 1980-åra, blei dominansen av stereotypiske «norske» personar for alvor redusert frå 2000-talet. Vi finn berre to eksempel på funksjonshemma – begge var gamle menneske med stokk. Vi ser få teikn til utradisjonelle familierformer, og ingen teikn til homofili. Analysen av eksamensoppgåvene viser at representasjonen endrar seg over tid, men ikkje synkront og ikkje for alle mangfalddimensjonar.

I lærebøkene sett under eitt er situasjonen liknande som i dei nyaste eksamensoppgåvene: Medan førekomsten av personar som vi tolkar som kvinner og ikkje stereotypisk norske, er

Bjørn Smestad

Høgskulen i Volda/OsloMet – storbyuniversitetet
bjorn.smestad@hivolda.no

Oda Heidi Bolstad

Høgskulen i Volda
oda.heidi.bolstad@hivolda.no

Aina Fossum

ainafossum@hotmail.com

betydeleg, er andre grupper, som funksjonshemma og LHBT-personar, usynlege. Likevel er det variasjonar mellom lærebøkene. For eksempel er stereotypisk «norske» personar langt meir dominerande i éi bok enn i dei andre. Lærebøkene har altså eit visst mangfald, men ikkje for alle mangfaldsdimensjonane og ikkje på same måte i alle bøkene.

Fråværet av funksjonshemma og homofile, både i eksamen og lærebøker, har ikkje årsak i at funksjonalitet og seksualitet ikkje er til stades. Det var mange personar med eksplisitte funksjonsevner, til dømes i idrett. Det var forholdsvis få eksempel på heterofili, men nokre tilfelle der teksten var nøytral medan ein illustrasjon gjorde personane heterofile. Eit døme på dette er oppgåva presentert i Figur 1. Her refererer oppgaveteksten til «familien Hansen», medan ein illustrasjon syner eit tradisjonelt familieforhold med kvinne, mann og barn.

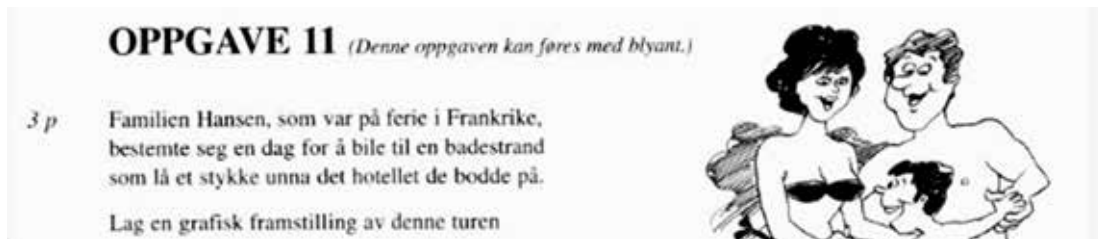
Diskusjon

I studiane våre har vi berre sett på talet på representasjonar av ulike grupper og på framstillinga av desse (Bolstad & Smestad, 2023; Smestad & Fossum, 2024). Vi kan difor ikkje seie om nokon grupper blir stereotyp framstilte. Vi har heller ikkje sett etter såkalla tokenisme, som betyr at lærebokforfattarane berre endrar namn eller utsjånad til personane utan å endre konteksten rundt.

Det er naudsynt å undersøke om den talmessige likestillinga mellom kvinner og menn også speglar seg i dei rollene dei blir tildelte i oppgåvene. I mange land viser forskning (t.d. Piatek-Jimenez et al., 2014) at kvinner og menn

blir tildelte ulike roller i matematikkoppgåver – der kvinner lagar mat og i mindre grad blir framstilte i andre yrke, medan menn har jobbkarriere og er fysisk aktive. Det kan snevre inn kva slags roller elevane kan sjå for seg for både for seg sjølve og for andre. Vi argumenterer for at (talmessig) representasjon er ein føresetnad for at kvinner og menn kan bli viste på ein fornuftig måte. Tilsvarende gjeld for dei andre mangfaldsdimensjonane. Studiar frå andre fag i andre land (t.d. Hardin & Hardin, 2004) viser at funksjonshemma blir framstilte på ein stereotyp måte i lærebøker, som personar som treng hjelp. Viss dei etter kvart får ein større plass i oppgåvene, kan vi sikre at dei blir framstilte på ein mangfaldig måte som òg viser kva ressursar som ligg i mangfaldet.

Representasjonen i oppgåvene er selektiv – nokre mangfaldsdimensjonar er prioriterte, medan andre er oversette. Vi lurar på om dette har samband med at nokre grupper er enklare å unngå enn andre – det er enklare å unngå religion og seksualitet enn å unngå kjønn og etnisitet. Nokon grupper blir kanskje også opplevde som vanskelegare å inkludere enn andre – kanskje fordi dei er knytte til meir sensitive tema. Jensen et al. (2021) undersøkte m.a. lærebokforfattarar sine grunngjevingar for å utelate personar med funksjonshemmingar i lærebøker. Lærebokforfattarane kom med fem forklaringsar: 1) Temaet var oversett og difor umedvite utelate, 2) Dei fann ikkje at funksjonshemming var eksplisitt nemnt i læreplanen, 3) Dei fann ikkje gode tekstar om funksjonshemming, 4) Dei såg ikkje på funksjonshemming som relevant for faget, og 5) Dei såg på funksjonshem-



Figur 1 Frå matematikkeksamen 2002: del 1, oppgåve 11.

ming som eit vanskeleg og sensitivt tema. Sjølv om desse fem grunngevingane handlar om funksjonshemming, trur vi dei også kan spele ei rolle for (mangelen på) inkludering av andre mangfaldsdimensjonar.

Dersom ein ser på somme mangfaldsdimensjonar som vanskelege og sensitive, kan ein også kjenne på frykt for å representere personar på ein måte som kan opplevast som støytande eller stigmatiserande. Då vil det vere enklare å ikkje inkludere dei i det heile. Vi meiner det er viktig å finne meningsfulle kontekstar som involverer personar innanfor alle mangfaldsdimensjonane. Dersom eit mål for undervisninga er å bidra til anerkjenning av mangfald og å bygge eit inkluderande samfunn, må ein prøve å finne måtar å inkludere også dei mangfaldsdimensjonane som er vanskelege.

Uansett årsaker er det tydeleg at ulike elevgrupper er ulikt representerte i oppgåvene, og det er grunn til å tru at dette kan gjere at skulefaget blir opplevd mindre relevant for somme enn for andre. Viss matematikkoppgåver ofte handlar om joggeturar og aldri om aktiviteter med rullestol, rettar faget seg mot joggarane meir enn rullestolbrukarane.

Det er altså behov for auka merksemd om ulike usynleggjorde grupper. I undervisninga kan lærarane vere kritiske til kva oppgåver dei brukar, og justere oppgåver for å gjere dei meir representative. Når det gjeld lærebøker og eksamen, ligg hovudansvaret hos oppgåveforfattarane, forlaga og Utdanningsdirektoratet for at oppgåvene skal vere representative.

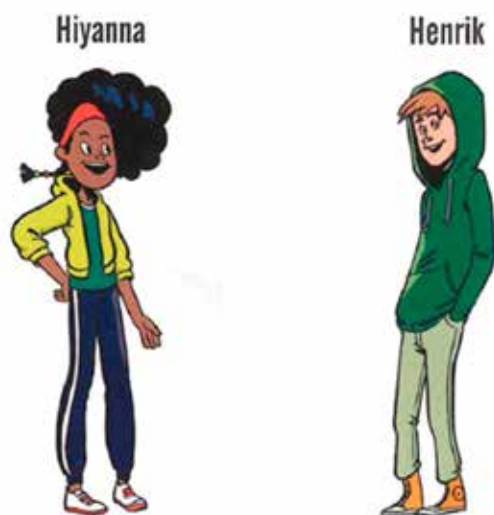
I samband med mangfaldsdimensjonar er det også viktig å nemne interseksjonalitet. Det inneber at personar ofte identifiserer seg med fleire ulike dimensjonar på same tid. Interseksjonalitet kan gjere at ein kjenner seg representert i fleire dimensjonar samstundes. Dette inneber òg at ein kan vere ekskludert på fleire måtar samstundes, til dømes om ein er innvandrar og funksjonshemma (Bullock, 2018). Desse dimensjonane samhandlar, og det er ikkje alltid ein greier å føresjå kven som veg tyngst i ulike

kontekstar. Til dømes vil ei fotballinteressert jente kanskje kunne identifisere seg med ei oppgåve om ein gut som spelar fotball. På den andre sida kan det hende jenta ikkje identifiserer seg med oppgåvekonteksten fordi han handlar om ein gut.

Etiske omsyn

Vi møtte betydelege etiske utfordringar i analysane av oppgåvene. Noko så grunnleggjande som å vurdere om ein person er jente eller gut, berre på bakgrunn av utsjånad, er trøblete. Når vi i tillegg blandar inn etnisitet og religion, hamnar vi i eit lite minefelt. Men det vi ønskjer å gjere, er å analysere korleis personane i oppgåvene blir lesne – kva grupper vil dei bli lesne som å høyre til. Dette er «personar» som vi ofte har berre eit par opplysingar om, ofte berre eit namn eller eit pronomen, og av og til eit bilete. Verktøyet vårt for å svare på det er stereotypiar. Dette er sensitive tema, men vi ser ikkje nokon måte å analysere representativitet på utan å ta i bruk stereotypiane av dei enkelte gruppene i analysearbeidet.

Derfor: Vi vil ikkje påstå at personen til venstre i Figur 2 er jente, medan personen til høgre



Figur 2 Frå Kongsnes og Wallace (2020, s. 5).

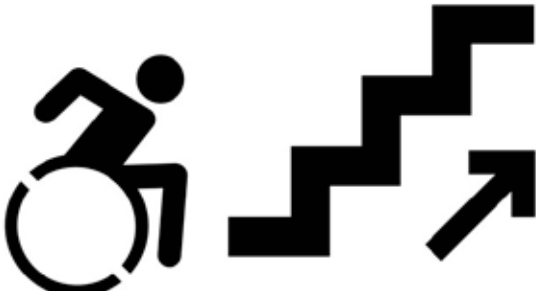
er gut. Vi vil heller ikkje påstå noko om personane på bakgrunn av for eksempel hudfarge. Men i analysen går vi ut frå at personen til venstre passar til stereotypien «ikkje-norsk» jente, og at den til høgre har ein utsjånad og eit namn som passar til stereotypien av ein norsk gut.

Vi hadde også utfordringar knytte til andre mangfaldsdimensjonar. Mange oppgåver handlar eksplisitt om fysisk aktivitet, slik som symjing, sykling, skigåing osv. Dette er aktivitetar som også personar med funksjonshemmingar driv med. Ein kunne difor tenke seg at personen i oppgåva var ein person med ei funksjonshemming. Tilsvarande kunne ein tenke om seksualitet – ein kan ikkje vurdere seksualitet ut frå eit bilete eller eit namn. Igjen prøver vi i analysen å vurdere korleis vi trur personane blir oppfatta av norske elevar på bakgrunn av vanlege stereotypiar. Det viktige poenget er uansett ikkje kva mangfaldsdimensjon personane teoretisk sett kan representere, men at desse dimensjonane ikkje er eksplisitt inkluderte i lærebøkene og eksamensoppgåvene.

Eit forslag

Redsla for å representere personar på ein støytande eller stigmatiserande måte er legitim og forståeleg. Korleis skal ein så gå fram? Om ein i oppgåvene berre byter ut ein mangfaldsdimensjon med ein annan, til dømes byter ut ein funksjonsfrisk person med ein funksjonshemma, er dette ein overflatisk måte å inkludere underrepresenterte grupper på (tokenisme). Då vil det vere betre å identifisere matematiske utfordringar, til dømes knytte til rullestolbruk, og lage ei oppgåve basert på dette (Smestad & Fossum, 2024). Figur 3 viser eit eksempel.

Den første versjonen vi (Bjørn) laga av denne oppgåva, var formulert slik: «Per kjem seg ikkje inn i kantina på skulen [...] Du vil skissere [...]» Altså blei «du» posisjonert som ein som skulle hjelpe ein elev i rullestol, og eleven i rullestol blei posisjonert som ein som treng hjelp. Eksempellet viser dermed kor lett det er å bringe vidare stereotypiar, særleg når ein lagar oppgåver om noko ein kan lite om.



Du kjem deg ikkje inn i kantina på skulen, fordi det er ei trapp opp for å komme dit.

Du vil skissere korleis skulen kan løyse dette problemet ved å lage ei rampe. Bruk opplysningane frå NHF sin informasjon til å lage eit forslag.

Universell utforming. Oversikt over krav.

	Byggteknisk forskrift	NHFs kvalitetskrav
Rampe (§ 12-16)	Stigning 1:15 Bredde min. 0,9 m Hvileplan 1,5 m langt pr 1,0 m stigning Håndløper 0,8 m høyde eller 0,7 og 0,9 m Fargemarkering v/ rampens start	Maks 1:20 Areal min. 1,6 x 1,6 m foran og etter rampe Hvileplan min. 1,6 x 1,6 m pr 0,6 m stigning Håndløpere i høyde 0,7 m og 0,9 m Ikke teppe/matte i rampe innendørs

Figur 3 Eksempel på oppgåve som kanskje er relevant for rullestolbrukarar. Informasjonen er henta frå Henriksen og Myrdal (2017).

Representasjon er viktig for at elevane skal sjå mangfaldet i samfunnet (vindauge), men òg for at elevane skal sjå seg sjølv (spegel). Ideelt sett skal dei òg sjå seg sjølv som aktive brukarar av matematikk til å løyse reelle problem. Då må mangfaldet og matematikken syast saman – og inntil dei som forfattar lærebøker og lagar oppgåver til eksamen, tek ansvar, blir det opp til lærarane å auke mangfaldet i eksempel og oppgåver som dei nyttar i klasserommet.

Referansar

- Bolstad, O. H. & Smestad, B. (2023). Diversity dimensions in Norwegian mathematics textbooks. I P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (Red.), *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*. Alfréd Rényi Institute of Mathematics. <https://hal.science/hal-04407349>
- Bullock, E. C. (2018). Intersectional analysis in critical mathematics education research: A response to figure hiding. *Review of Research in Education*, 42(1), 122–145. <https://doi.org/10.3102/0091732x18759039>
- Hardin, B. & Hardin, M. (2004). Distorted pictures: Images of disability in physical education textbooks. *Adapted Physical Activity Quarterly*, 21(4), 399–413. <https://doi.org/10.1123/apaq.21.4.399>
- Henriksen, G. & Myrdal, S. (2017). *Tilgjengelige bygg og uteområder*. Norges Handikapforbund. <https://nhf.no/tilgjengelige-bygg-og-uteomrader/>
- Horn, I. & Garner, B. (2022). *Teacher learning of ambitious and equitable mathematics instruction: A socio-cultural approach*. Routledge.
- Jensen, M. S., Herrebrøden, M. & Andreassen, U. R. (2021). The invisible minority: Why do textbook authors avoid people with disabilities in their books? *International Journal of Inclusive Education*, 1–17. <https://doi.org/10.1080/13603116.2021.1889049>
- Kongnes, A. L. & Wallace, A. K. (2020). *Matemagisk 9. Lærebok*. Aschehoug Undervisning.
- Luecke, J. C. (2011). Working with transgender children and their classmates in pre-adolescence: Just be supportive. *Journal of LGBT Youth*, 8(2), 116–156. <https://doi.org/10.1080/19361653.2011.544941>
- Piatek-Jimenez, K., Madison, M. & Przybyla-Kuchek, J. (2014). Equity in mathematics textbooks: A new look at an old issue. *Journal of Women and Minorities in Science and Engineering*, 20(1), 55–74.
- Smestad, B. & Fossum, A. (2024). Diversity in Norwegian mathematics examinations, 1962–2020. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 1–15. <https://doi.org/10.1080/00313831.2024.2322950>

Krohg Østby

Representasjoner av brøk i lærebøker

I denne artikkelen vil jeg undersøke hvordan lærebøker bruker representasjoner i multiplikasjon og divisjon av brøk. Bruk av representasjoner er sentralt i enhver matematisk aktivitet, og forståelsen av disse representasjonene er essensiell for utviklingen av matematisk tenkning (Mainali, 2021). Duval (2006) skriver at ingen matematiske operasjoner kan gjøres uten å representere, og han vektlegger hvor sentrale overgangene mellom representasjonene er for alle prosesser i matematikk. «Symboler og semiotiske representasjonsoverganger er kjernen av matematisk aktivitet» (Duval, 2006, s. 107, min oversettelse). I læreplanen LK20 er *Representasjon og kommunikasjon* eget kjerneelement, det er presisert at elever skal kunne veksle mellom ulike representasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2020). Det betyr at representasjoner skal ha stor plass i matematikkun-

dervisningen i norsk skole. Bruk av visuelle modeller og andre representasjoner er spesielt viktig innenfor brøk (Rau et al., 2015). En grunn til det er at brøk er et sammensatt begrep som består av flere aspekter (Behr et al., 1983), blant annet brøk som en del av en hel, brøk som måltall, brøk som forholdstall, brøk som deling og brøk som operator. Denne flersidigheten gjør at brøk kan være vanskelig å forstå ved ensidig bruk av representasjoner. Spesielt er det vanskelig å forstå verdien av svaret på oppgaver i multiplikasjon og divisjon av brøk (Siegler & Lortie-Forgues, 2015).

Det er mange faktorer som påvirker undervisningens kvalitet, lærebøkens utforming er en av dem. En lærebok kan være en god støtte for læreren, men den kan også være en «tvangstrøye» som all undervisningen styres etter. Tidligere studier har vist at lærebøker i matematikk påvirker hva lærere underviser, hvordan de underviser, og hvilke aktiviteter og oppgaver elevene får i skole- og hjemmearbeid (Fan et al., 2013; Reys et al., 2004). Temaer som står i lærebøkene, oppleves som viktige av lærere, og det er liten sannsynlighet for at temaer som ikke er i lærebøkene, vil tas opp i undervisningen (Van Den Ham & Heinze, 2018). I norsk sammenheng rapporterte i 2011 så mange som 97 prosent av lærerne at de bruker læreboka som basis for planlegging i faget (Mullis et al., 2012, s. 392). Bolstad (2019) undersøkte hvordan lærere

Marte Krohg Østby

OsloMet – storbyuniversitetet
marthekr@oslomet.no

Dette er en fagfellevurdert artikkel på nivå 1. Tangenten er et sted der læreres og forskeres perspektiv på matematikkundervisning møtes og derfor har vi med praksisrelaterte forskningsartikler.

Les mer: www.tangenten.no/nivaa1

begrunner arbeid med matematisk literacy. Ni lærere fra tre forskjellige skoler ble intervjuet. Lærerne ser ut til å være klar over at å følge læreboka ikke er den beste måten å undervise på, men mangelen på spesifikk veiledning og mål i læreplanen gjør at de opplever det som vanskelig å legge den bort.

Rezat og Sträßer (2015) påpekte at det er overraskende lite og løst tilknyttet forskning på matematikklærebøker, gitt lærebokas viktige rolle i matematikk. Blant nordiske studier av lærebøker har blant annet definisjoner av firkanter (Hovtun & Dreyer, 2024) og innføring av algebra (Kongelf, 2015) i norske lærebøker blitt undersøkt. Av studier innenfor brøk undersøkte Berggren (2023) hvordan fire svenske lærebokserier for 1. til 3. klasse brukte begrepsmetaforer, og han fant ut at brøk som del av en hel var det mest synlige aspektet.

I Norge fikk vi ny læreplan i 2020 (LK20), og flere nye lærebøker har kommet på markedet. Det vil være interessant å finne ut hvordan lærebøkene legger til rette for bruk av representasjoner i brøk. Med utgangspunkt i dette søker jeg svar på: *Hvilke representasjoner og overganger mellom representasjoner vises, og kreves det bruk av, i multiplikasjon og divisjon av brøk i matematikklærebøker for 8. trinn?*

Representasjonenes rolle i matematikkfaget og brøk spesielt

Duval skriver at «en representasjon er noe som står for noe annet» (Duval, 2006, s. 103, min oversettelse). Han spesifiserer at forskjellen mellom matematikk og andre store vitenskaper

er at matematikk ikke har konkrete objekter å observere. Den eneste måten en kan drive med matematisk aktivitet på, er ved å bruke symboler og representasjoner. Dette er det han kaller semiotiske representasjoner, og han påpeker at disse representasjonene ikke bare brukes til å kommunisere matematikk, men også til å tenke. Et skille mellom semiotiske representasjoner og mentale representasjoner er derfor ikke relevant. Det vil ikke si at representasjonen er det matematiske objektet det jobbes med, men at en er avhengig av å bruke ulike representasjoner for å nå ut til det aktuelle matematiske objektet. Forskjellige representasjonsformer kan blant annet være naturlig språk, både muntlig og skriftlig, ulike tegn, symboler, tabeller og figurer som vi bruker til å kommunisere matematikken med (Mainali, 2021, s. 4). Tabell 1 viser fem ulike måter å representere brøken $\frac{3}{5}$ på.

Duval (2006) foreslår å dele representasjonene inn i fire systemer basert på representasjonenes egenskaper: naturlig språk, illustrasjoner, symbolspråk og grafer/diagrammer (Duval, 2006, s. 111). *Naturlig språk* inneholder både muntlig og skriftlig språk. Det kan blant annet være en skriftlig tekstoppgave eller muntlige uttrykksformer. I Tabell 1 (B) viser «tre av fem» brøken $\frac{3}{5}$ uttrykt i naturlig språk. Duval fremhever spesielt at naturlig språk har en sentral rolle i arbeid med representasjoner. Ikke bare er naturlig språk en representasjonsform i seg selv, men det brukes også i arbeid med andre representasjoner, tolkning av dem og når man beskriver overganger mellom forskjellige repre-

A	B	C	D	E
$\frac{3}{5}$	«Tre av fem»			

Tabell 1: Brøken $\frac{3}{5}$ vist med forskjellige representasjoner, hentet fra Kongnes og Wallace (2020).

sentasjoner. *Illustrasjoner* betegnes som visuelle figurer og innebærer alt fra enkle skisser til geometriske former med helt spesifikke egenskaper (Tabell 1, C og E). *Symbolspråk* er alle former for matematiske notasjoner, både aritmetiske og algebraiske (Tabell 1, A). *Grafer/diagrammer* er som oftest presentert i et koordinatsystem. Dette gjelder også koordinatsystemer med én dimensjon, slik som tallinjen i Tabell 1 (D). Hvert system gir helt spesifikke og egne muligheter. Dette kan for eksempel være innen matematiske beregninger, kommunikasjon, bearbeiding, bevisstgjøring og visualisering (Duval, 2006).

Noen representasjoner kan kun bli brukt til ett formål: for eksempel matematiske operasjoner. Andre representasjoner, derimot, kan brukes til en hel rekke forskjellige formål. Dette kan blant annet være kommunikasjon, informasjonsbehandling, opplysning og visualisering. Naturlig språk og illustrasjoner betegnes som multifunksjonelle, da disse kan brukes til mange forskjellige formål. Symbolspråk og grafer/diagrammer kaller Duval (2006) monofunksjonelle, da disse kun kan brukes til å representere matematiske sammenhenger og operasjoner, som oftest basert på regler. Det er viktig at elever får jobbe innen alle systemene. Ensidig bruk av representasjoner kan føre til en snever begrepsforståelse hos elevene, da de ikke vil erfare begrepene fra flere perspektiver (Mainali, 2021, s. 17).

Elevenes læring i matematikk er påvirket av hvordan de klarer å bruke representasjoner, men også av hvordan de lærer å se sammenhenger mellom dem. Duval (2006, s. 107) skriver at alle matematiske prosesser inneholder i noen grad å bytte ut representasjoner med nye. Han bruker begrepet *transformasjon* om å endre representasjonen uten å endre oppgavens innhold eller objekt (Duval, 2006, s. 111) og argumenterer for at evnen til å transformere mellom representasjonene er selve kjernen i all matematikk. Han skiller mellom to forskjellige måter å transformere mellom representasjoner på. Det første er *behandling*, som er å gjøre endringer innenfor

samme representasjonsform, for eksempel ved å regne et divisjonsstykke i brøk ved hjelp av symbolspråk. Hvis vi løser divisjonsstykket $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$, vil symbolene en starter med, bli byttet ut med andre symboler (2), men de vil være i samme representasjonsform, nemlig tallsymboler.

Den andre formen for transformasjon kaller Duval (2006) *overganger*, det handler om å transformere mellom to forskjellige representasjonsformer. Evnen til å transformere mellom ulike former for representasjoner vil føre til en dypere forståelse i matematikk. Dette kan for eksempel være å løse $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ ved hjelp av å tegne en arealmodell av $\frac{1}{2}$ og se hvor mange firedele som får plass i en halv. Da vil en starte med brøk skrevet i symboler og må oversette det til brøk tegnet som en arealmodell. Overganger er en mer kompleks måte å tolke en representasjon på, fordi byttet mellom representasjoner først krever at en gjenkjenner den samme matematikken i de forskjellige representasjonene (Duval, 2006, s. 112). Det er for eksempel mulig å løse et divisjonsstykke i brøk kun ved symboler uten forståelse. Det krever forståelse om en skal tegne en modell av operasjonen og koble den til symboler.

Brøk har tradisjonelt vært en av de mest problematiske matematiske temaene i barneskolen (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007, s. 293). En årsak kan være at brøk er et sammensatt begrep som omfatter flere aspekter. Behr og kollegaer (1983, s. 101) foreslo minst fem måter å tolke en brøk på: brøk som en del av en hel, brøk som måltall, brøk som forholdstall (både forhold mellom to størrelser og to sammensatte målenheter), brøk som deling og brøk som operator.

I tillegg til ulike representasjonsformer og ulike aspekter er det vanlig å dele inn i tre typer modeller av brøk: arealmodeller, lengdemodeller og mengdemodeller (Van de Walle et al., 2014). Knyttet til Tabell 1 representerer 1 (C) en are-

almodell som ofte er representert som en sirkel eller et rektangel delt inn i like store arealer. 1(D) er en lengdemodell som kjennetegnes ved en tallinje. 1(E) er en mengdemodell som er en modell bestående av mange elementer, der det totale antall elementer er det hele. Hvis modellene knyttes til Duvals inndeling av representasjoner, vil en arealmodell og en mengdemodell betegnes som en illustrasjon. Tallinjen kan derimot sees på som et koordinatsystem i én dimensjon og kan regnes som graf/diagram. I motsetning til de to andre modellene er tallinjen en ren matematisk representasjon, og betegnes som monofunksjonell, da den kun kan brukes til matematikk.

Forskjellige visuelle representasjoner ser ut til å støtte forståelsen av de forskjellige aspektene ved brøk i varierende grad (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Det vil si at én representasjon kan være god til å få frem noen aspekter ved et begrep, mens en annen må brukes til å få frem andre aspekter ved det samme begrepet. Bruken av passende representasjoner og type modeller vil kunne hjelpe elevene med å utvikle en bredere og dypere forståelse for hele brøkbegrepet. For eksempel vil en arealmodell i brøk (Tabell 1, C) tydelig vise tre femdeler som en del av en hel (Cramer & Wyberg, 2009), mens tallinjen forener brøken tre femdeler med dets tallverdi på lik linje med andre tall (Siegler et al., 2011). Fordi hver type modell har egne styrker og begrensninger, vil bruk av flere typer modeller ved innlæring av brøk være en effektiv strategi for å sikre elevene et sterkt og fleksibelt brøkbegrep. Bæk et al. (2017) legger vekt på at forståelse av brøkrekning utvikles når en får tegne egne visuelle representasjoner.

Sidney et al. (2019) undersøkte 5.- og 6.-trinnelevers bruk av modeller i divisjon av brøk. De fant ut at tallinjen (lengdemodell) støttet elevenes forståelse av divisjon med brøk bedre enn bruk av arealmodell eller ved ikke å bruke noen modell. I multiplikasjon av brøk kan derimot arealmodellen være sentral i å støtte

elevenes forståelse av regneoperasjonen. Fazio og Siegler (2011) skriver at arealmodellen kan være med på å hjelpe elever til å forstå hvordan multiplikasjon dreier seg om å finne en del av en del. Funnene i Izsáks (2006) undersøkelser tyder på at det er viktig å forstå de forskjellige nivåene av hva som er det hele, for å kunne bruke illustrasjoner riktig i resonnering rundt multiplikasjon av brøk.

Metode

I analysen så jeg på representasjonene til et utvalg oppgaver i tre lærebøker. Dette er det Charalambous et al. (2010, s. 123) kaller en vertikal analyse av en lærebok. Det innebærer at jeg har analysert innholdet i oppgavene, ikke lærebokas helhet. Det finnes tre analoge læreverk i matematikk for ungdomstrinnet som er skrevet til LK20. Dette er *Maximum 8* (Tofteberg et al., 2020), *Matemagisk 8* (Kongnes & Wallace, 2020) og *Matematikk 8* (Hjardar & Pedersen, 2020), og det er disse tre bøkene jeg har analysert. Alle bøkene ble publisert i 2020 som læreverk i matematikk tilpasset *Fagfornyelsen LK20*. Det finnes også rent digitale læreverk i matematikk, men disse er utelatt for å avgrense omfanget i denne studien. *Matemagisk 8* er en bok på 288 sider, der brøk har et omfang på 27 sider. I *Matematikk 8* har brøk fått en større plass, og fyller hele 49 av 332 sider. I *Maximum 8*, derimot, omhandler brøk kun 11 sider av 290, og disse er ikke plassert i et eget kapittel, men sammen med tallregning. I analysen så jeg på alle oppgaver, eksempler og informasjonsoppslag som inneholdt multiplikasjon og divisjon av brøk. Mengden var svært ulik i de tre læreverkene. Fra *Matematikk 8* ble 16 oppgaver, fem eksempler og tre informasjonsoppslag analysert, mens i *Matemagisk 8* ble 26 oppgaver, to eksempler og et informasjonsoppslag tatt med. Fra *Maximum 8* ble sju oppgaver og tre eksempler tatt med i analysen.

Jeg tok utgangspunkt i Duvals fire representasjonssystemer som er naturlig språk, illustra-

sjoner, symbolspråk og grafer/diagrammer. Med det som utgangspunkt laget jeg en oversikt over representasjonene i de tre læreverkene. Jeg brukte et regneark og gikk gjennom hver oppgave og så på hva slags representasjon hver enkelt oppgave viste og spurte etter. Jeg så ikke på hvilke muligheter til bruk av representasjoner hver enkelt oppgave hadde. Tallinjer regnet jeg som diagram, da de er et koordinatsystem i én dimensjon. Først så jeg på hva slags representasjoner bøkene viste. Deretter så jeg kun på oppgavene og hvilke representasjoner som var nødvendige å bruke for å løse dem. Siden informasjonsoppslag og eksempler naturlig nok ikke krever noen representasjoner, er kun oppgaver tatt med i opptellingen av krevde representasjoner.

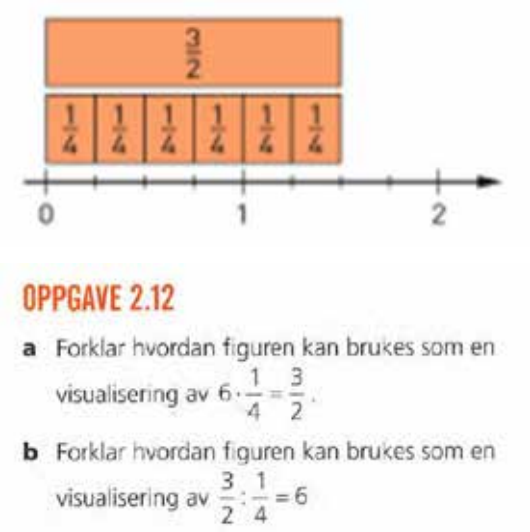
Oppgave	Språk	Illustrasjoner	Symboler	Diagram
2.5	1	1	1	1
2.6			1	
2.7			1	
2.8		1	1	
2.10	1		1	1
2.11			1	
SUM	2	2	6	2

Tabell 2

Tabell 2 eksemplifiserer hvordan jeg brukte et regneark til å registrere representasjonsformene. Som tabellen viser, kan én oppgave med flere representasjonsformer telles flere ganger. Deloppgaver ble ikke telt som egne oppgaver, da de fleste oppgavene hadde samme type representasjoner. For at noe skulle klassifiseres som naturlig språk, vurderte jeg om det språklige utsagnet kunne sees på som en representasjon av brøk. Dette kunne være oppgaver med en kontekst eller matematiske forklaringer som hadde med brøk å gjøre. Rene instruksjoner som «Regn ut» ble ikke telt med under naturlig språk, da de ikke representerer brøk i denne sammenhengen. For at jeg skulle kunne registrere representasjonene som symboler, måtte det

være symboler som representerer brøk. Heltall ble ikke regnet med. De er også representasjoner, men representerte ikke brøk her.

Figur 1 viser et eksempel på en oppgave som består av flere representasjonsformer. Figuren kan vise eleven at $\frac{3}{2}$ er like mye som $\frac{6}{4}$, ved hjelp av en arealmodell. Samtidig viser den en tallinje, som støtter en oppfatning av brøk som måltall (Siegler et al., 2011). En kan se at $\frac{3}{2}$ ligger mellom 1 og 2. Hvis en ser på kun arealmodellene på Figur 1, vil denne i seg selv også fungere som en lengdemodell, siden den ene siden er konstant. Tallinjen kombinerer oppfattelsen av hvor størrelsen $\frac{3}{2}$ er plassert på tallinjen, og lengden fra 0 til $\frac{3}{2}$. Altså vil denne figuren vise flere aspekter ved brøk. Jeg har valgt å plassere den både under kategoriene illustrasjon, symbol og diagram i opptellingen. Den er ikke telt under naturlig språk, da det språklige i denne oppgaven kun er rene instruksjoner. Instruksene har betydning for oppgaven, men vil i dette tilfellet ikke representere brøk og er derfor ikke telt med.



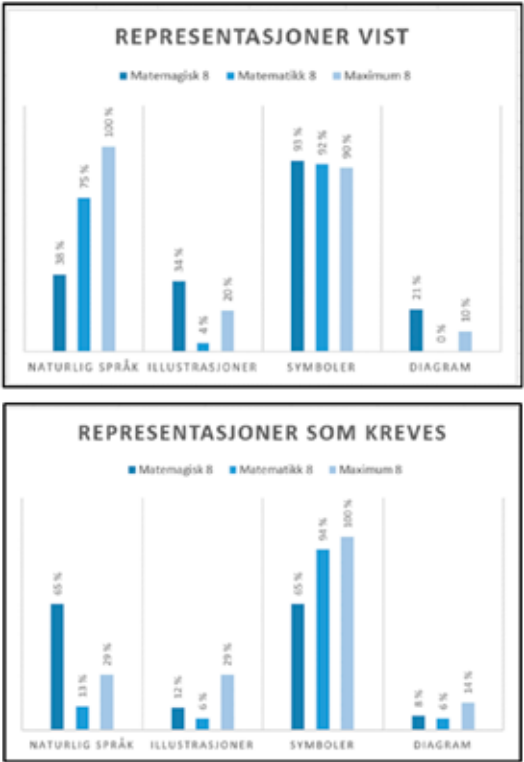
Figur 1: Hentet fra side 55 i Kongnes og Wallace (2020)

Fra/Til	Symboler	Illustrasjoner	Naturlig språk	Diagram
Symboler				
Illustrasjoner				
Naturlig språk				
Diagram				

Tabell 3

I den andre delen av analysen så jeg på hva slags overganger lærebøkene brukte. Jeg så både på hvilke overganger lærebøkene viste, og hvilke de krevde bruk av for å løse oppgavene. For å få en oversikt over overgangene så jeg først på hvilke overganger som kunne være aktuelle. Jeg tok utgangspunkt i de samme fire representasjonssystemene og så på mulige overganger mellom dem. Tabell 3 viser oversikt over mulighetene. En overgang er en transformasjon mellom to representasjonssystemer. Transformasjoner innenfor samme form for representasjon, som Duval (2006) kaller bearbeiding, regnes ikke som overgang og er derfor markert med grått i Tabell 3. Dette kan for eksempel være oppgaver som kun krever manipulasjon av tallsymboler.

Først så jeg på hvilke overganger bøkene viste. Jeg tok utgangspunkt i de samme oppgavene, eksemplene og informasjonsoppslagene som ble sett på under representasjonene. Der læreboka hadde vist en overgang mellom to representasjonssystemer, ble det registrert. På samme måte sjekket jeg hvilke overganger



Figur 2: Prosentvis fordeling av oppgaver som viser og krever bruk av representasjoner i de tre lærebøkene

	Symboler- Illustra- sjoner	Symboler- Naturlig språk	Symboler- Diagram	Illustra- sjoner- Symboler	Illustra- sjoner- Naturlig språk	Illustra- sjoner- Diagram	Naturlig språk- Symboler	Naturlig språk- Illustra- sjoner	Naturlig språk- Diagram	Diagram- Symboler	Diagram- Illustra- sjoner	Diagram- Naturlig språk
2.5	1	1	1		1							
2.6		1										
2.7		1										
2.8	1				1							

Tabell 4

		Naturlig Språk	Illustrasjoner	Symboler	Diagram
Matemagisk 8	Viser	11	10	27	6
	Krever	17	3	17	2
Matematikk 8	Viser	18	1	22	0
	Krever	2	1	15	1
Maximum 8	Viser	10	2	9	1
	Krever	2	2	7	1

Figur 3: Antall oppgaver som har blitt registrert i analysen

lærebøkene krevde for å løse oppgavene. Med utgangspunkt i oversikten over overgangene i Tabell 3 lagde jeg en kvantitativ oversikt over hvilke overganger læreverkene viste, og en oversikt over hvilke overganger læreboka krevde bruk av. Jeg telte kun med oppgaver som krevde bruk av en ny representasjonsform i løsningen, og har ikke sett på mulighetene i hver oppgave. Tabell 4 viser hvordan krav til overganger ble registrert i et regneark på fire av oppgavene.

Resultater og diskusjon

Det er stor forskjell på hvordan de tre bøkene bruker representasjoner knyttet til multiplikasjon og divisjon av brøk. Figur 2 viser en oversikt over fordeling av representasjoner som blir vist og krevd bruk av i de tre lærebøkene. For å kunne sammenligne tallene er resultatet fremvist i prosent. Til tross for forskjeller mellom bøkene viser diagrammene i Figur 2 at naturlig språk og symboler er de representasjonene som vises mest, og som det kreves mest bruk av. Figur 3 viser en oversikt over antall oppgaver

som har blitt registrert i analysen.

Naturlig språk

Resultatet viser store forskjeller i læreverkernes bruk av naturlig språk. Det er hovedsakelig to måter bøkene viser naturlig språk som representasjonsform på. Det er i matematiske forklaringer og kontekster/regnefortellinger. Alle bøkene viser til kontekster enten i oppgavene eller i eksempler. Der naturlig språk som representasjonsform er krevd brukt i bøkene, bes det om å forklare en form for matematisk sammenheng. En kan se at selv om *Matemagisk 8* har en betydelig mindre andel oppgaver som viser naturlig språk enn de to andre læreverkene, er læreverket det som krever mest bruk av naturlig språk for å løse oppgavene. Disse oppgavene krever at en skal forklare en illustrasjon eller en matematisk sammenheng. Eksempler på en slik oppgave er oppgave 2.12 (Figur 1) og 2.28 (Figur 4). Her brukes det kun naturlig språk til å gi instruksjoner til hva en skal gjøre i oppgaven. Svaret krever ikke et svar i symboler, men en språklig forklaring.



Figur 4: Oppgave 2.28, hentet fra s. 52 i Kongnes og Wallace (2020)

ring på den matematiske sammenhengen vist i illustrasjonene. Den vil derfor kreve at eleven bruker naturlig språk til å løse oppgaven.

Av 16 oppgaver i *Matematikk 8* krever kun to av oppgavene bruk av naturlig språk for å løse dem. En av disse oppgavene er oppgave 2.76 (Figur 5). Her blir elevene spurt om å forklare hva de vil gjøre for å lage suppe til syv personer. Oppgaven krever at en forstår flere aspekter ved brøkgregning. Tallene i oppskriften vil være et eksempel på brøk som måltall (Behr et al., 1983), der brøkene er konkrete størrelser med en målenhet. For at en skal kunne løse oppgaven, vil også aspektet brøk som operator være gjeldende. Oppgaven kan besvares ved hjelp av en muntlig eller skriftlig forklaring, men den kan også besvares ved at en viser utregninger med symboler. I to av de syv oppgavene i *Maximum 8* blir elevene bedt om å forklare hvordan de har tenkt. Elevene må ta i bruk naturlig språk for å kunne løse oppgaven slik boka krever.

Ifølge Duval (2006) er ikke naturlig språk bare en representasjon i seg selv, men han vektlegger språkets viktige rolle i å forstå overgangene mellom representasjonene og å lære nye representasjoner. Oppgaver som på figurene 1, 4 og 5 åpner for muligheter til å sette ord på sammenhenger og kunne se overganger mellom representasjonene. I oppgaven i Figur 4 skal elevene forklare en representasjon med naturlig språk, og i Figur 5 må elevene forklare utreg-

ninger.



Figur 5: Oppgave 2.76, hentet fra Hjørdar og Pedersen (2020), s. 151.

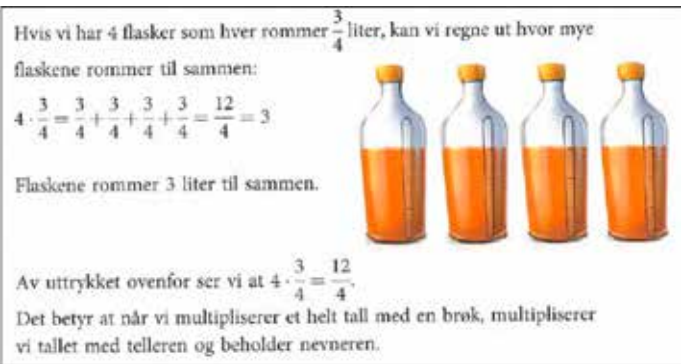
Illustrasjoner

Alle representasjoner som har blitt telt under illustrasjoner, er eksempler på arealmodeller. Det finnes ingen mengdemodeller i læreverkene. Som Figur 2 viser, gjør alle læreverkene stor bruk av naturlig språk, med få illustrasjoner. Læreverket *Matemagisk 8* er det læreverket med flest illustrasjoner. Hvis vi går tilbake til Figur 4, er dette et eksempel på at boka viser en illustrasjon som representasjon av multiplikasjon av brøk. For å kunne løse oppgaven må elevene forstå at ikke alle brøkene refererer til samme helhet i de tre stegene oppgaven illustrerer. Figuren kan være en støtte til å forstå multiplikasjon av brøk som del av en del av en hel (Izsák, 2006). Her vil en først måtte identifisere

$\frac{2}{5}$ av den hele figuren, for så å ta $\frac{3}{5}$ av $\frac{2}{5}$ av hele. Svaret skal leses som en brøk av hele rektangelet.

En slik figur kan ifølge Fazio og Siegler (2011) være med på å hjelpe eleven til å forstå multiplikasjonen som del av en annen del.

Læreverket *Matematikk 8* viser kun én illustrasjon. Dette er informasjonsoppslaget som er vist i Figur 6. Dette er en form for arealmodell av brøk, til tross for at



Figur 6: Informasjonsoppslag hentet fra s. 146 i Hjørdar og Pedersen (2020).

flaskene i utgangspunktet representerer volum. Volumet vises som et areal i den todimensjonale figuren, og dette er den eneste illustrasjonen innenfor multiplikasjon og divisjon av brøk. Den viser multiplikasjon av brøk som gjentatt addisjon. Kun én oppgave i *Matematikk 8* (Figur 7) kan vurderes som at den krever en illustrasjon eller et diagram som representasjonsform, men jeg var i tvil om hvordan den skulle klassifiseres. Oppgaven skal løses enten ved hjelp av tegning eller regning. Det er mulig å løse oppgaven ved å tegne en arealmodell eller bruke en tallinje. En annen mulighet er kun å bruke symboler. Den eneste illustrasjonen som er vist i multiplikasjon og divisjon av brøk i *Matematikk 8* (Figur 6), vil ikke være overførbar til multiplikasjon mellom to brøker. Figur 6 viser aspektet brøk som måltall, ikke aspektet brøk som operator, som er viktig å forstå for å utvikle en forståelse for brøk som en del av en del (Izsák, 2006), og figuren vil derfor ikke være til nytte for å løse oppgaven i Figur 7. Læreboka overlater til læreren og elevene selv å lage passende illustrasjoner til å representere brøken. Det kreves ellers ingen bruk av illustrasjoner. Boka åpner mulighet for det i denne oppgaven, men det er mulig å velge det bort. Det står i motstrid til funnene i Baek et al. (2017), som viste at å tegne egne figurer er viktig for å kunne utvikle en dypere forståelse for brøkrekning.

2.73 Løs ved hjelp av tegning eller regning.

a) Hvor mye er halvparten av halvparten?
b) Hvor mye er halvparten av en firedel?

a) Hvor mye er halvparten av en firedel?
b) Hvor mye er en firedel av en firedel?

a) Hvor mye er halvparten av halvparten av halvparten?
b) Hvor mye er halvparten av en firedel av en åttedel?

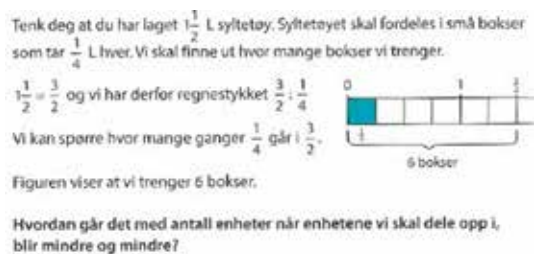
Figur 7: hentet fra s. 150 i Hjardar og Pedersen (2020).

Symboler

Alle læreverkene viser bruk av symboler i minst 90 % av oppgavene, men det er forskjell på hvor mange av oppgavene som krever bruk av symboler i svaret. *Matemagisk 8* krever bruk av symboler kun i omtrent to tredeler av oppgavene. I oppgavene som ikke krever bruk av symboler, blir elevene bedt om å forklare en illustrasjon, en matematisk sammenheng eller en fremgangsmåte, som Figur 4. Oppgavene krever altså bruk av naturlig språk som representasjon, ikke nødvendigvis symboler. Siden symboler er en monofunksjonell representasjonsform, er det et viktig og nyttig verktøy i matematiske beregninger. Men for å kunne utvikle en dypere forståelse i matematikk bør elevene få trening i å bruke flere former for representasjoner.

Diagram

Diagram er den representasjonsformen som er minst vist og minst krevd bruk av i lærebøkene. *Matemagisk 8* bruker flere diagram som tilsvarende Figur 1, med en tallinje der «brøkblokker» ligger oppå for å vise brøkdelene tydelig. *Maximum 8* viser hvordan divisjonen $\frac{3}{2} : \frac{3}{4}$ kan løses ved hjelp av en tallinje (Figur 8). På denne figuren er aspektet brøk som måltall sentralt i både forklaring og illustrasjon. Imidlertid spør ingen av oppgavene i divisjon etter noen form for tegning, hverken illustrasjon eller diagram. *Matematikk 8* viser ingen diagram under temaet. Den eneste oppgaven som kan tolkes som at den krever bruk av diagram, er oppgave 2.73 (Figur 7), som er omtalt under illustrasjoner. Altså krever ingen av oppgavene i noen av bøkene at elevene selv skal tegne et diagram innen divisjon av brøk. Dette samsvarer ikke med at lengdemodell er viktig for å forstå aspektet brøk som måltall, og viser seg som et godt hjelpemiddel til å forstå divisjon av brøk (Sidney et al., 2019).



Figur 8: Informasjonsoppslag om divisjon av brøk fra Tofteberg et al. (2020) s. 47.

Overganger

Figurene 9 og 10 viser en oversikt over antall overganger som vises og kreves i de tre læreverkene. Siden det ikke er like mange oppgaver fra hver bok, er ikke dette helt sammenlignbart, men tabellene gir en oversikt over hvilke overganger som finnes i temaet i de tre bøkene. *Matemagisk 8* inneholder variert bruk av overganger. Her er det en variasjon i hva slags overganger som vises i oppgavene, men også i rekkefølgen de er brukt i. Mange oppgaver krever bruk av flere enn én type overgang. Spesielt er det mange oppgaver som krever en overgang fra symboler til naturlig språk eller illustrasjon til symboler. Av oppgavene som går fra symbol til naturlig språk, spør de fleste om å forklare en matematisk sammenheng som er

vist med tallsymboler. Det er tydelig at *Matemagisk 8* både viser og krever flere overganger enn de to andre bøkene. En lærer som bruker denne boka, vil få flere innspill til å under vise og jobbe med representasjonsoverganger sammen med elevene enn ved de andre bøkene. Samtidig er det flere overganger *Naturlig språk-Symbol* i de to andre bøkene, så det kan være nødvendig å hente inspirasjon her når en jobber med kontekster. Til tross for mange og varierte overganger er det fortsatt noen overganger som ikke vises i denne boka. Det gjelder *Symboler-Diagram*, *Illustrasjoner-Naturlig språk*, *Illustrasjoner-Diagram*, *Naturlig språk-Diagram* og *Diagram-Naturlig språk*. Den krever alle typer overganger med unntak av *Naturlig språk-Diagram* og *Diagram-Illustrasjoner*.

Maximum 8 viser fire forskjellige typer overganger som er *Symboler-Illustrasjoner*, *Symboler-Naturlig språk*, *Illustrasjoner-Naturlig språk* og *Naturlig språk-Symboler*. Boka krever kun de to overgangene *Naturlig språk-Symboler* og *Naturlig språk-Illustrasjoner*. Det er generelt lite utvalg av oppgaver i temaet, noe som gjør at en lærer bør hente inspirasjon andre steder i arbeid med divisjon og multiplikasjon av brøk. Det kan også være verdt å merke seg at *Matematikk 8*, som har et større utvalg opp-

Fra/Til	Symboler			Illustrasjoner			Naturlig språk			Diagram		
Symboler				4		1	2	2	2			
Illustrasjoner	2								1			
Naturlig språk	1	3	3	2								
Diagram	2			1								

Figur 9: Oppgaver som brukes. Blå: *Matemagisk 8*, Hvit: *Matematikk 8*. Grønn: *Maximum 8*.

Fra/Til	Symboler			Illustrasjoner			Naturlig språk			Diagram		
Symboler				5			10			3		
Illustrasjoner	3						4			3		
Naturlig språk	4	9	7	1	1	2					1	
Diagram	2						3					

Figur 10: Oppgaver som kreves. Blå: *Matemagisk 8*, Hvit: *Matematikk 8*. Grønn: *Maximum 8*.

gaver enn *Maximum 8*, viser kun to typer overganger (*Symboler–Naturlig språk* og *Naturlig språk–Symboler*) og krever kun tre (*Naturlig språk–Symboler*, *Naturlig språk–Illustrasjoner* og *Naturlig språk–Diagram*). Som Figur 10 viser, har læreboka veldig mange oppgaver der overgangen går fra naturlig språk til symboler. Dette er typisk tradisjonelle tekstopp-gaver som krever en løsning ved hjelp av tallregning. Elevene må lese oppgaven og tolke hverdagssituasjonen, slik at de kan løse oppgaven ved hjelp av brøkrekning. De må gjenkjenne det matematiske objektet i teksten og kunne se at det er det samme matematiske objektet når det skrives med symboler. Den ene oppgaven i *Matematikk 8* som er registrert med overgangene *Naturlig språk–Illustrasjoner* og *Naturlig språk–Diagram*, er oppgave 2.73 (Figur 7), som er beskrevet tidligere. I denne oppgaven vil det være mulig å velge bort overgangen fra naturlig språk til illustrasjon eller naturlig språk til diagram, og *Matematikk 8* vil i så tilfelle kreve kun én type overgang. Det at en elev kan gjøre alle 16 opp-gavene i multiplikasjon og divisjon av brøk uten å bli utfordret med mer enn én type overgang, samsvarer ikke med at elever utvikler forståelsen for matematiske begreper nettopp gjennom overgangen mellom forskjellige representasjonsformer (Duval, 2006). Lærebøker kan påvirke matematikkundervisning på mange måter (Bolstad, 2019; Mullis et al., 2012; Reys et al., 2004), noe som kan bety at elever som bruker *Matematikk 8* eller *Maximum 8*, blir utfordret med få overganger mellom representasjonsformer i multiplikasjon og divisjon av brøk.

Konklusjon og implikasjoner

Hensikten med denne studien var å se på representasjoner i multiplikasjon og divisjon av brøk på 8. trinn. Jeg har brukt Duvals (2006) kategorisering av representasjoner som rammeverk til å se hva slags representasjoner og overganger tre lærebøker viser og krever bruk av i multiplikasjon og divisjon av brøk. Resultatene viser at det er stor forskjell på hvordan læreverkene bruker

representasjoner. Forskjellen er spesielt stor når en ser på hvilke overganger de forskjellige bøkene viser og krever bruk av. Her skiller *Matemagisk 8* seg klart ut ved å vise og kreve mange og varierte overganger. Alle typer overganger er imidlertid ikke inkludert her heller, og alle bøkene inneholder få illustrasjoner eller diagram i forhold til naturlig språk og symboler. Summen av funnene viser at det er et forbedringspotensial knyttet til bruken av representasjoner i emnet multiplikasjon og divisjon av brøk i de tre læreverkene.

Studien gir ny kunnskap om hvor stor forskjellen er på lærebøker. Samtidig ser denne studien kun på et lite utvalg oppgaver i kun tre læreverk på 8. trinn. Den sier ikke noe om hvilke representasjoner ressurser tilhørende læreverkene inneholder. Det kan hende slike ressurser har andre representasjoner enn selve læreboka. Når det gjelder videre forskning, hadde det vært interessant å se på bruken av representasjoner i brøk på flere trinn og i flere emner. Finnes det en helhet i hvordan læreverkene bruker representasjoner? Det ville også være interessant å se på en større del av lærebøkene på det aktuelle trinnet.

Funnene tyder på at det er opp til lærere å være bevisste i valg av oppgaver og bruk av representasjoner i undervisningen. Dette er noe som signaliseres i Norge blant annet ved at vi ikke har en sentral godkjenning av læreverk og lærebøker (Ot.prp. nr. 44., 2000), og lærebøker sees som én blant flere kilder til læring. Det ville derfor være interessant å finne ut mer om hvordan lærere bruker representasjoner i undervisning av brøk, og hvordan lærerutdanningen kan forberede fremtidige lærere på å undervise i dette. Uansett valg av lærebok har lærerens tolkning av oppgaven og holdning til matematikkfaget aller mest å si for ivaretagelsen av kjerneelementet og kvaliteten på undervisningen. Bruk av representasjoner er også mulig når oppgaven ikke krever det, og det naturlige språket er ofte en sentral representasjon som brukes spontant. Denne studien bekrefter hvor viktig lærerens

rolle er. Det er opp til læreren å ha en bevissthet rundt de mulighetene de forskjellige representasjonene gir. Hvilken representasjon en velger å bruke, avhenger av formålet med oppgaven, og det er gjennom overgang mellom ulike representasjoner at en kan utvikle en dypere forståelse for matematikken.

Referanser

- Baek, J. M., Wickstrom, M. H., Tobias, J. M., Miller, A. L., Safak, E., Wessman-Enzinger, N. & Kirwan, J. V. (2017). Preservice teachers' pictorial strategies for a multistep multiplicative fraction problem. *The Journal of Mathematical Behavior*, 45, 1–14.
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 91, 91–126.
- Berggren, J. (2023). Some conceptual metaphors for rational numbers as fractions in Swedish mathematics textbooks for elementary education. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 67(6), 914–927.
- Bjørnset, M., Gunnes, T., Kindt, M. T., Kirkebøen, L. J., Lindenskov, L., Rogstad, J. & Rønning, M. (2020). *Måltrettet og tilrettelagt matematikkundervisning for elever som presterer svakt i matematikk. Resultater fra et randomisert kontrollert forsøk på 8. trinn og videregående skole i Oslo* (SSB-rapport nr.7). https://www.ssb.no/utdanning/artikler-og-publikasjoner/_attachment/411961?_ts=1702f2cb118
- Bolstad, O. H. (2019). Teaching for mathematical literacy: School leaders' and teachers' rationales. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 7(3), 93–108.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y. & Mesa, V. (2010). The addition and subtraction of fractions in the textbooks of three countries: A comparative analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117–151.
- Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational studies in mathematics*, 64(3), 293–316.
- Cramer, K. & Wyberg, T. (2009). Efficacy of different concrete models for teaching the part-whole construct for fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 226–257.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1–2), 103–131.
- Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM–Mathematics Education*, 45(5), 633–646.
- Fazio, L. & Siegler, R. S. (2011). *Teaching fractions* (Bd. 22). International Academy of Education.
- Hjardar, E. & Pedersen, J. E. (2020). *Matematikk 8. Grunnbok*. Cappelen Damm AS.
- Hovtun, G. & Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 35(1), 34–47.
- Izsák, A. (2006). Aspects of mathematical knowledge for teaching fraction multiplication. I S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Red.), *Proceedings of the Twenty Eight Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Universidad Pedagogica Nacional.
- Kongelf, T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3–4), 83–109.
- Kongnes, A. L. & Wallace, A. K. (2020). *Matemagisk 8. Lærebok*. Aschehoug Undervisning.
- Kunnskapsdepartementet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Kunnskapsdepartementet. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05>
- Mainali, B. (2021). Representation in Teaching and Learning Mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology*, 9(1), 1–21.
- Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P. & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. TIMSS & PIRLS International Study Center. <https://doi.org/https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED544554.pdf>
- Ot.prp. nr. 44. (2000). *Endringer i opplæringsloven: Voksne får rett til grunnskole og videregående opplæring og godkjenningsordningen for lærebøker blir*

- opphevet. Kirke,- utdannings- og forskningsdepartementet. <https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/otprp-nr-44-1999-2000-/id586147/>
- Rau, M. A., Aleven, V. & Rummel, N. (2015). Successful learning with multiple graphical representations and self-explanation prompts. *Journal of Educational Psychology*, 107(1), 30.
- Reys, B. J., Reys, R. E. & Chavez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership*, 61(5), 61–66.
- Rezat, S. & Sträßer, R. (2015). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3–4), 247–266.
- Sidney, P. G., Thompson, C. A. & Rivera, F. D. (2019). Number lines, but not area models, support children's accuracy and conceptual models of fraction division. *Contemporary Educational Psychology*, 58, 288–298.
- Siegler, R. S. & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 909–918.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A. & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive psychology*, 62(4), 273–296.
- Son, J.-W. & Lee, J.-E. (2016). Pre-service Teachers' Understanding of Fraction Multiplication, Representational Knowledge, and Computational Skills. *Mathematics Teacher Education and Development*, 18(2), 5–28.
- Tofteberg, G. N., Tangen, J., Bråthe, L. T., Stedøy, I. & Alseth, B. (2020). *Maximum 8, 2. utgave. Grunnbok*. Gyldendal.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2014). *Elementary and middle school mathematics*. Pearson Education Inc.
- Van Den Ham, A.-K. & Heinze, A. (2018). Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics. *Studies in Educational Evaluation*, 59, 133–140. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2018.07.005>

Fra arkivet



I artikkelen «Brøk med brikker» i Tangenten 3/2012 diskuterer Nina Pettersen og Annette Hessen Bjerke hvordan man kan arbeide med brøker der helheten består av flere elementer. Elevene arbeider med konkrete og samtidig auditivt – på bildet har de fått beskjed om å ta halvparten av seks brikker.

Les denne artikkelen og andre godbiter fra Tangentenarkivet på tangenten.no

Fagfelleleverderte artikler

Tangenten er registrert som et nivå 1-tidsskrift. Det betyr at visse artikler er underlagt fagfellevurdering og gir publikasjonspoeng. Publikasjonspoeng og nivåfastsettelse er knyttet til høyskole og universitet og har økonomisk betydning innenfor disse institusjonene. For forfattere betyr det at artikkelen som blir akseptert, anses for å ha forskningsmessige kvaliteter. nivå 1-artikler i Tangenten regnes også som open access-artikler, siden vi alltid publiserer nivå 1-artikler på nett. Ønsker du å sende inn en slik artikkel til Tangenten? På tangenten.no finner du retningslinjer for nivå 1-artikler.

Her er en liste over de fagfelleleverderte artiklene som Tangenten har publisert:

- Kluge, A. & Dolonen, J. A. (2014). Algebra som spill. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 25(3), 23–30.
- Björklund, C. (2014). Klassifisering och mönster. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 25(4), 35–43.
- Singh, O., Engelsen, K. S., Espeland, M. (2016). Improvisasjon i lærerutdanning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 27(4), 40–48.
- Vethe, T. I., Hagen, A. A., Sørngård, M. A., Bringeland, T. A., Sumstad, M. S. & Hauge, K. H. (2017). Kritisk refleksjon om global temperaturutvikling. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 28(2), 38–48.
- Hovtun, G. (2019). Oppvarmingsoppgaver. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 30(1), 38–48.
- Rø, K., Valenta, A., Langfeldt, M. B. & Ødegaard, R. P. (2019). Felles faglig planlegging. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 30(4), 40–52.
- Fojcik, M. K. (2020). Utforskande og elevsentrert geometriundervisning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 31(2), 34–44.
- Opsal, H. (2020). Tekstoppgåve som fleirvalsoppgåve. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 31(3), 44–53.
- Amdal, A. & Morud, E. (2021). Skriveoppgaver i matematikk. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 32(2), 38–48.
- Berg, T. K. (2021). Analog programmering. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 32(3), 42–52.
- Hovtun, G. & Dreyer, T. (2024). Definisjoner på firkanter i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 35(1), 34–47.
- Krohg Østby, M. (2024). Representasjoner av brøk i lærebøker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 35(3), 31–43.

Temanummer: Leik

Tangenten nr. 2/2025 blir eit temanummer om leik. Leik er aktuelt på alle årstrinn, i alle faglege tema, det kan vere frileik, rolleleik, rammeleik, analoge og digitale spel og mykje anna. Redaksjonen i Tangenten inviterer til eit temanummer som inspirerer til meir leik i matematikkundervisninga, til meningsfull leikande læring.

Temaet er aktuelt fordi det framleis er for lite leik for fem- og seks-åringane i skolen, og det er nok også lite leik vidare i grunnskole, vidaregåande skole og lærarutdanning. Kva plass kan leiken ha, og kva kan leikande matematikkføring vere?

Vi inviterer lærarar og andre med greie på barnehage og skole til å sende inn artiklar,

gjærne baserte i praksis der barn og ungdom sine stemmer vert tydelege.

Vi vil gjerne ha manus på e-post til redaksjonen (tangenten@caspar.no). Maksimal lengde er seks sider, som er om lag 3300 ord med berre tekst. Frist for artiklane er 15. januar 2025. Les meir om retningslinjer for forfattarar her: <http://tangenten.no/for-bidragssyttere/retningslinjer-for-forfattere/>

Vi er også interesserte i vitskapelege artiklar om temaet (altså artiklar som skal bli vurderte av fagfellar), men dette er ein lengre prosess, så slike artiklar vil neppe vere klare til nr. 2/2025.

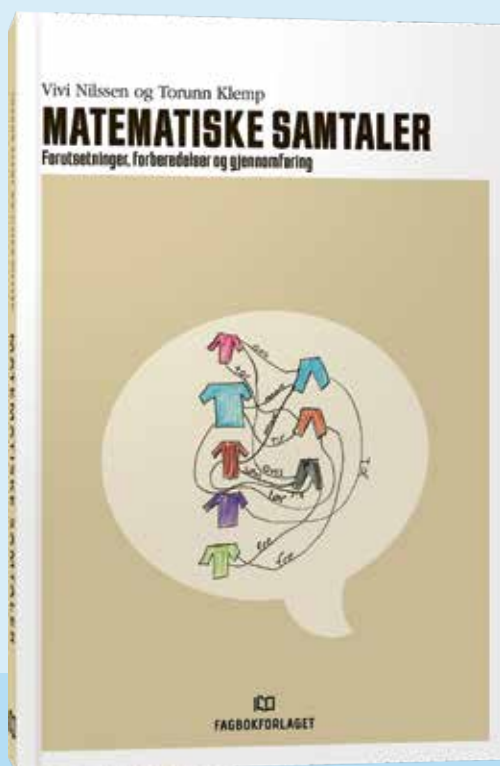
Fra arkivet



I 2008 hadde Tangenten et eget Barnehagehefte. Der beskrev Vivian Olsen og Janita Sandvik Sjøvold arbeid med å lage en taubane i barnehagen.

Les denne artikkelen og andre godbiter fra Tangentenarkivet på tangenten.no





Matematiske samtaler

Av Torunn Klemp og Vivi Nilssen

ISBN: 9788245049169

Sider: 134

Pris: 329,-

Forutsetninger, forberedelser og gjennomføring

Mange elever og lærere syns at det er utfordrende å jobbe med matematiske samtaler. Boka viser at det ligger mye faglig og didaktisk arbeid i forkant av samtalene for at de skal lykkes og tar opp følgende spørsmål:

- Hva det vil si å jobbe som matematikere i skolen?
- Hvilke oppgaver egner seg særlig for diskusjon og utforskning?
- Hva det vil si å støtte elevenes egen tankeutvikling?
- Hvordan kan elevenes eget arbeid brukes i inkluderende helklassesamtaler?

Bestill her
→





MATEMATIKKSENTERET

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen



NYTT FRA MATEMATIKKSENTERET

Matematikksenteret er en partner i lokalt utviklingsarbeid, vi forsker på matematikkundervisning og tilbyr forskningsbasert etter- og videreutdanning.

I dette nummeret skriver vi om:

- Store kjønnsforskjeller i resultatene fra nasjonale prøver i regning for 5. trinn.

Vi har spisskompetanse på matematikdidaktikk og jobber tett på lærere og elever. Vi er et bindeledd mellom praksis, forskning og utvikling. Vårt mål er at alle barn og unge skal erfare at matematikk er engasjerende, utfordrende og meningsfullt.

Besøk våre nettsider:

Matematikksenteret.no
Fagstoff og læringsressurser

MatteLIST.no
Oppgaver og aktiviteter for utforskning og problemløsning

Matematikk.org
Spill, oppgaver og fakta om matematikk

Alleteller.no
Vurderingsverktøy for talloppfatning og tallforståelse

Realfagsloyper.no
Kompetanseutvikling i realfagene



MATEMATIKKSENTERET

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Store kjønnsforskjeller i resultatene fra nasjonale prøver i regning for 5. trinn

Ole Harald Johansen, Matematikksenteret

Nasjonale prøver i regning (NPREG) er en indikator på elevenes grunnleggende ferdigheter i regning. Prøvene gir en objektiv målestokk for å vurdere elevenes kompetanse i å kunne regne i ulike fag. Matematikksenteret har hatt ansvar for å utvikle den nasjonale prøven i regning i 20 år, og over tid har vi lagt merke til noen klare forskjeller når det kommer til gutter og jenters resultater.

Det er i underkant av 60 000 elever som deltar på nasjonale prøver i regning for 5. trinn hvert år. Kjønnfordelingen er så og si lik. Figur 1 (Svorkmo et al., 2023, s. 30), viser forskjell i løsningsprosent for jenter og gutter ved nasjonale prøver i regning for 5. trinn i 2023. Oppgaver der jenter skårer bedre enn gutter, er markert med røde søyler, og oppgaver der gutter skårer bedre enn jenter, er markert med blå søyler.

Figuren viser at guttene presterer bedre enn jentene i et stort flertall av oppgavene, og den samme tendensen ser vi også i 2022 i Figur 2 (Svorkmo et al. 2022, s. 27).

Vi har sett trender i kjønnsforskjeller over tid, og vil her løfte fram noen oppgaver som vi ser har gitt ulike resultater for kjønnene. Vi vil også belyse mulige årsaker til kjønnsforskjellene som er observert.

Omfanget av kjønnsforskjeller

Gutter har over tid vist bedre resultater på nasjonale prøver i regning enn jenter (UDIR, 2023, 9. november). De siste årene har denne forskjellen vært på tre skalapoeng. I gjennomsnittlig løsningsprosent tilsvarer dette en forskjell på fem-seks prosentpoeng (Svorkmo et al., 2023 s. 32; Svorkmo et al. 2022 s. 30). Rapport-



Figur 1: Forskjell i løsningsprosent mellom jenter og gutter fra NPREG 5. trinn 2023.



Figur 2: Forskjell i løsningsprosent mellom jenter og gutter fra NPREG 5.trinn 2022.

I likhet med tidligere år, ser vi i 2023 en klar tendens til at guttene i gjennomsnitt presterer bedre enn jentene i oppgaver som krever omgjøring mellom de mest kjente enheter i masse, lengde og volum. Dette gjelder både rene omgjørings-oppgaver og oppgaver der illustrasjoner kan være en støtte til å vurdere størrelse eller mengde. Resultatene viser også at oppgaver som inneholder desimaltall uten at det nødvendigvis er omgjøring mellom enheter, har en tendens til å gå i guttefavør (Svorkmo et al. 2023, s. 30).

Milla bruker omtrent 5 minutter på å gå hjemmefra til nærmeste bussholdeplass.

Omtrent hvor langt kan det være?

☐ 400 mm

☐ 400 cm

☐ 400 m

☐ 400 km



Figur 3: Oppgave 32–2023.

Svaralternativer	Prosent alle elever	Prosent gutter	Prosent jenter
400 mm	6	5	6
400 cm	8	7	10
400 m	74	80	67
400 km	6	3	8
Ubesvart	6	5	9

Tabell 1: Svarfordeling oppgave 32 NPREG 5. trinn 2023.

tene viser også at det er de samme oppgavetyperne som hvert år viser kjønnsforskjeller, og at forskjellene er ganske stabile. Dette kan være av betydning for utviklingen av undervisningen og tiltak for å utjevne kjønnsforskjellene.

Oppgaver med lengdemål

Se på Oppgave 32–2023 (Figur 3). I denne oppgaven skal elevene vurdere hvor langt det er å gå i omtrent 5 minutter. Det er 13 prosentpoeng flere gutter enn jenter som velger riktig svaralternativ (400 m). Svarfordelingen på oppgaven er vist i Tabell 1.

Hvis vi ser på feilsvarene er det noe større prosentandel forskjell mellom jenter enn gutter som velger 400 km. Til opplysning er det 462 km fra Oslo til Bergen. Når vi samler frekvensene for feilsvar og ubesvart, har omtrent en tredel av jentene og en femdel av guttene utfordringer med å tolke og reflektere over måltallene

sammen med prefiksene m (milli), c (centi) og k (kilo) i måleenhetene, ut fra en gåtur på 5 min.

Se så på Oppgave 18–2022 (Figur 4, neste side). I denne oppgaven skal elevene vurdere hvor langt det er å løpe frem og tilbake på en håndballbane 5 ganger. Vil det tilsvare avstanden Oslo–Bergen (400 km), 400 m eller 400 cm (4 m)?

Det var hele 85 prosent av elevene som løste denne oppgaven riktig i 2022. En mulig forklaring på den høye løsningsprosenten kan være at konteksten med både trening og håndballbane i stor grad er gjenkjennbar for elevene. Svarfordelingen på oppgaven er vist i Tabell 2.

Tabell 2 viser at det i 2022-prøven var 7 prosentpoeng flere jenter enn gutter som svarer at det å løpe 5 ganger frem og tilbake på en håndballbane tilsvarer 400 km. Hvis vi samler frekvensene for feilsvar og ubesvart, viser tallene at hver femte jente og hver tiende gutt har

Susanne løp fem ganger fram og tilbake over banen mot slutten av en håndballtrening.

Hvor langt løp hun til sammen?

☐ 400 km

☐ 400 m

☐ 400 cm



Figur 4: Oppgave 18–2022.

Svaralternativer	Prosent alle elever	Prosent gutter	Prosent jenter
400 km	9	5	12
400 m	85	89	80
400 cm	5	5	6
Ubesvart	1	1	2

Tabell 2: Svarfordeling oppgave 18 NPREG 5. trinn 2022.

utfordringer med å tolke prefiksene k (kilo) og c (centi).

Oppgaver med vekt (masse)

Se på Oppgave 13–2023 (Figur 5). Riktig svar på denne oppgaven er 10 sitroner. Oppgaven ble løst av 80 prosent av elevene, fordelt på 86 prosent gutter og 73 prosent jenter, det vil si 13 prosentpoeng flere gutter enn jenter.

Det var avgitt over 290 forskjellige feilsvar i oppgaven. Det er blant annet en del elever som svarer 900 sitroner. En mulig forklaring på dette svaret kan være at elevene subtraherer måttallene i oppgaven med riktige omgjøring av pre-

fikset k ($1000 - 100 = 900$). Andre elever svarer 99 sitroner og kan gjøre en enkel subtraksjon med oppgitte måltall ($100 - 1 = 99$).

Det er interessant at nesten alle tallene fra 0 til og med 200 ble brukt som svar. Dette kan tyde på usikkerhet i regning med måleenheter. Det å reflektere over mulige svar før utregning, kan kanskje være til hjelp for mange.

Svarfordelingen på oppgave 28–2022 (Figur 5, neste side) er vist i Tabell 3. Riktig svar er katt (4 kg), piggsvin (1600 g), mink (1,5 kg) og mus (20 g), og 35 prosent av elevene løste oppgaven riktig. Tabell 3 viser at løsningsprosenten for

En sitron veier omtrent 100 g.
 Vilma legger sitroner i en pose.
 Hun ser at posen med sitroner veier 1 kg.

Hvor mange sitroner har Vilma i posen?

Svar:



Figur 5: Oppgave 13–2023.

Listen nedenfor viser vekten til noen dyr.

Ranger dyrene fra høyest til lavest vekt. Dyret med høyest vekt skal stå øverst.

Mus 20 g

Katt 4 kg

Mink 1,5 kg

Piggsvin 1600 g

1.

2.

3.

4.

Figur 5: Oppgave 28–2022.

Svaralternativer	Prosent alle elever	Prosent gutter	Prosent jenter
Riktig svar	35	47	23
Feil svar	65	53	77

Tabell 3: Svarfordeling mellom kjønn fra oppgave 28 NPREG 5. trinn 2022.

gutter er 47 prosent og 23 prosent for jenter. Dette tilsvarer en forskjell i løsningsprosent på 24 prosentpoeng i guttefavør. Dette betyr at det er omtrent 23 000 jenter og 16 000 gutter som ikke sorterer disse størrelsene for vekt (masse) riktig i oppgaven.

Et typisk feil svar er katt, mink, piggsvin og mus. En mulig årsak til dette kan være at elevene sorterer kilogram og gram hver for seg uten å se sammenhengen mellom måltall og måleenhetene. Det er 25 prosent av elevene som svarte dette, derav 21 prosent av guttene (6300 gutter) og 30 prosent av jentene (9000).

Det er også en stor gruppe elever som kun ser på måltallet og ikke forholder seg til prefiksene. Dette gir denne rangeringen: Piggsvin (1600 g), mus (20 g), katt (4 kg) og mink (1,5 kg). Dette kan skyldes at elevene ikke gjenkjenner at måltallene har ulike prefikser, eller at de ikke har kompetanse i å kunne sammenligne måltall med ulike prefikser. Generelt er det omtrent 19 prosent elever som plasserer det største mål-

tallet, piggsvin (1600 g), øverst. Disse elevene er fordelt på omtrent 16 prosent gutter (4500 gutter) og 22 prosent jenter (6600 jenter).

Mulige årsaker til kjønnsforskjellene

Oppgavene ovenfor er valgt for å illustrere resultater Matematikksenteret har observert over tid. En tydelig tendens er at guttene generelt presterer bedre på nasjonale prøver i regning enn jentene. En annen tendens er at guttene gjør det spesielt bedre i oppgaver der de må sortere eller gjøre om størrelser med ulike prefikser, eller relatere prefikser til praktiske situasjoner. Det virker spesielt som om jenter i større grad enn gutter er usikre på hvor mange meter det er i 1 km og hvor mange gram det er i 1 kg.

Matematikksenteret anbefaler at lærere lar elever få erfare og reflektere over størrelser i alle fag der regning som grunnleggende ferdighet inngår. Dette kan for eksempel gjøres gjennom praktiske målinger. På den måten får elevene praktiske erfaringer med lengde og vekt, og de

får dermed et bedre grunnlag for å reflektere over størrelser som elevene enten beregner selv eller blir presentert for. Hvor langt er egentlig vingespenntet til havørn? Ville den kunne flydd ut av døra på klasserommet? Å gjøre erfaringer med ulike måleenheter og at elevene får fysiske erfaringer med måleenhetene, gjør at elevene kan reflektere over om en måling er fornuftig i fag og i situasjoner utenfor skolehverdagen.

Det er mange faktorer som kan påvirke resultatene til jenter og gutter, og en mulig forklaring på kjønnsforskjellene kan være at de har ulik tilnærming til faget. Det er viktig å merke seg at det finnes kulturelle og sosiale faktorer som kan påvirke prestasjonene. Dersom gutter blir oppmuntret og forventes å prestere bedre i regning, kan dette forsterke deres motivasjon og engasjement. På den andre siden kan jenter oppleve press knyttet til forventninger om at de skal være flinkere. Slike sosiale faktorer kan bidra til forsterking eller svekkelse av de eksisterende kjønnsforskjellen (Konieczna, 2012).

Det har ofte vist seg at jenter er mer tålmodige, grundige og nøye når de løser oppgaver, mens gutter kan være mer villige til å ta risiko og være mindre konsistente i sin tilnærming. Dette kan påvirke resultatene i oppgavene som krever metodevalg og problemløsning. Det er viktig å legge til rette for like muligheter og støtte for begge kjønn i utdanningssystemet, slik at alle elever kan oppnå sitt fulle potensial.

Referanser

- Konieczna, E. K. (2012). *Hvordan forklarer begynnerstudenter i realfag at få unge generelt, og få kvinner spesielt, velger utdanning innen realfag?* UiO 2012.
- Svorkmo, M., Tokle, O. D. & Rehaug, M. (2022). *Teknisk Rapport Nasjonal Prøve i regning 5. trinn 2022*. Matematikkssenteret, NTNU 2022.
- Svorkmo, M., Tokle, O. D. & Rehaug, M. (2023). *Teknisk Rapport Nasjonal Prøve i regning 5. trinn 2023*. Matematikkssenteret, NTNU 2023.
- UDIR (2023, 9. november): <https://www.udir.no/tall-og-forskning/statistikk/statistikk-grunnskole/analyser/2023/analyse-av-nasjonale-prover-5-trinn-2023>



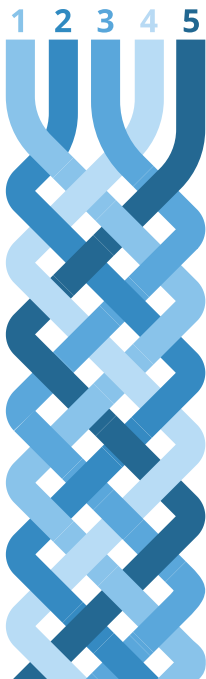
MENINGSFULL MATEMATIKK FOR ALLE

– et samspill mellom praksis, forskning og utvikling

Matematikksenteret skal bidra til at matematikkopplæringen tar utgangspunkt i barn og unges tenkning og bygger på deres interesser, bakgrunn, erfaringer og kunnskap.

Vi ønsker at barn og unge skal arbeide med kognitivt krevende aktiviteter som fremmer resonnering og forståelse, mye samarbeid og høy elevaktivitet. Feil anses som en naturlig del av læringsprosessen. På den måten kan barn og unge erfare at matematikk er engasjerende, utfordrende og meningsfullt.

Målet er at barn og unge skal utvikle en matematisk kompetanse som består av fem komponenter («Trådmodellen»):



Kilder: Trådmodellen, Kilpatrick, Swafford og Findell (2001)

1 Begrepsmessig forståelse

Bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom matematiske begreper og ideer.

2 Beregning

Utføre prosedyrer effektivt, nøyaktig og fleksibelt.

3 Anvendelse

Kunne gjenkjenne og formulere matematiske problemstillinger og utvikle strategier for å løse problemene.

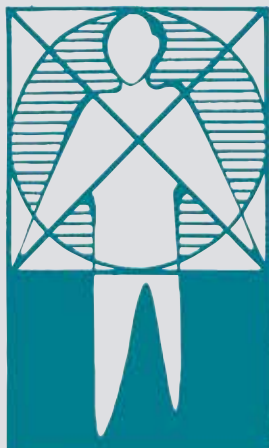
4 Resonnering

Forklare og begrunne løsningsstrategiene du har brukt for å løse problemet.

5 Engasjement

Se på matematikk som nyttig og verdifullt, som noe du kan gjøre – dersom du arbeider med det – og er villig til å gjøre arbeidet.





LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
c/o Elin Unstad
Postboks 181
1371 Asker

post@lamis.no • www.lamis.no

Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Organisasjonssekretær: Elin Unstad, org.sek@lamis.no

Styret for LAMIS

<i>Leder</i>	Inger-Lise Risøy, Buskerud	Barnetrinn
<i>Ledergruppe</i>	Hilde Svendsen, Akershus	Barnetrinn
	Renate Jensen, Vestland	Barnetrinn/ungdomstrinn
<i>Sentralstyret</i>	Anne Nakken, Møre og Romsdal	Barnehage
	Hege Lisbeth Johansen, Troms og Finnmark	Barnetrinn
	Kari-Anne Bjørnø Rummelhoff, Østfold	Ungdomstrinn
	Morten Munthe, Oslo	Videregående skole
	Lisa Steffensen, Vestland	Høgskole/Universitet
<i>Vararepresentanter</i>	Mona Røsseland, Vestland	Høgskole/Universitet
	Henrik Kirkegaard, Møre og Romsdal	Barnetrinn

Fra formålsparagrafen

Det er en demokratisk rett å få en matematikkundervisning som setter en i stand til å delta aktivt som borger i et demokrati. Derfor vil Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) sette fokus på matematikk for alle.

Medlemskontingent

450 kr for enkeltmedlem, 300 kr for studenter/pensjonister, 975 kr for skoler/institusjoner

UngeAbel 2024-2025

Matematikkonkurranse for 9. trinn



DATOER:
Runde 1: 5. november – 5. desember 2024
Runde 2: 6. januar – 29. januar 2025
Semifinale/finale: 8.-9. april 2025

PÅMELDING: ungeabel.lamis.no • post@lamis.no • lamis.no
Konkurransen er for basisgrupper/klasser på 9. trinn

**MATEMATIKKSENTERET**
Nasjonalt senter for skolematikk i opplæringen

Ledergruppen har ordet

Kjære LAMIS-medlemmer!

Når dette bladet kommer i postkassen, er vi allerede godt i gang med nytt og spennende skoleår! Vi møter et skoleår med ny opplæringslov og nye muligheter.

Helgen før skolestart møttes sentralstyret, lokallagsrepresentanter, medlemmene og utstillere på LAMIS sommerkonferanse i Ålesund, hvor vi fikk inspirasjon og fikk «tent en gnist» for nytt skoleår. Dyktige og gnistrerende plenumsforedrag gav virkelig inspirasjon! LAMIS gratulerer Pål Harald Hansen, som i sitt plenumsforedrag fortalte om sin og elevenes utvikling og seier i UngeAbel i 2023. Selv vant han også årets Holmboepris. Norsk matematikkråd beskriver Pål Harald som en person som «har et stort engasjement for matematikk og er glødende opptatt av utvikling i faget ... Han har en helt spesiell evne til å løfte og stimulere elevene sine. Dette gjelder både de som strever med faget, og elever som ønsker nye og større utfordringer.» <https://holmboeprisen.no/>

LAMIS er glad for at vi har mange dyktige og engasjerte matematikklærere med på laget!

LAMIS sommerkonferanse 2024 hadde også mange spennende verksteder hvor deltakerne kunne

få inspirasjon, og dele erfaringer med andre lærere som brenner for faget. Neste år vil konferansen foregå i Drammen med temaet «Mattemagi – magiske øyeblikk». Sett av datoene 8.–10. august 2025, og vi håper at vi sees!

En fast post på programmet på sommerkonferansen er årsmøte der LAMIS sentralstyre blant annet presenterer arbeidsprogrammet for kommende skoleår. Vi gleder oss til å gjøre ressursene som er produsert enda mer kjent, samt at vi kommer med problemløsningsoppgaver sett i sammenheng med det utforskende verktøyet. Vi er også i gang med et hefte om ute-skolematermatikk. Det blir viktig for oss at dere medlemmer tar i bruk alle ressursene, og i tillegg gjør kollegaer kjent med disse. Dette vil vi blant annet gjøre gjennom aktiv støtte til våre lokallag. Neste nyhetsbrev vil inneholde de siste bærekraftsmålene, og dere har da tilgang til 17 mål med undervisningsopplegg til bruk med elever og studenter. FN-dagen er en super dag til å prøve ut et eller flere av bærekraftsmålene. På side 58 kan dere lese tips om hvordan du får oversikt over alt som er sendt ut.

Vi har gjort en opprydding i lokallag, og gleder oss over at flere

nye lokallag er på trappene til å starte opp og at lokallag som har hatt lite aktivitet ønsker å bli aktive igjen. LAMIS ønsker å være en fagorganisasjon som gir inspirasjon til både erfarne lærere, nyutdannede og studenter, og lokallagene er viktige for oss i dette arbeidet.

Vi ønsker fortsatt at dere gir tilbakemeldinger på hvordan dere har brukt ressursene i undervisningen, eventuelt om dere har drøftet det med lærerkollegaer eller andre. Deling av erfaringer er alltid interessant.

På årsmøtet var det også valg til sentralstyret, og vi ønsker to nye medlemmer velkommen. På de to neste sidene presenterer de seg, og forteller hva de brenner for i sin matematikkundervisning. Vi ønsker også Hilde Svendsen velkommen i ledergruppen. Hun overtar plassen til Mona Røsseland. Vi takker også Elisabeth Hast Rønnestad og Odd Bjørn Lunde for den innsatsen som er gjort for LAMIS i mange år.

Vi anbefaler dere å følge LAMIS på Facebook – der blir det lagt ut informasjon jevnlig. Vi minner igjen om viktigheten av oppdatert kontaklinformasjon, slik at nyhetsbrevene som blir sendt ut når dere.

Hilsen ledergruppa!

Nye medlemmer i sentralstyret

Anne Hjørnevåg Nakken



Heia! Jeg heter Anne, er 44 år, og jobber med barnehagematematikk ved Dronning Mauds Minne Høgskole (DMMH) og Matematikksenteret. I 2006 var jeg ferdig utdannet sivilingeniør med tilleggsutdanning som lektor i matematikk og engelsk. Jeg visste ikke helt hva jeg skulle bruke utdannelsen til, men var heldig å få stilling som høskolelektor i matematikk i barnehagelærerutdanningen. På dette tidspunktet kunne jeg svært lite om de yngste barna sin matematiske utvikling og matematikkens rolle i barnehagen, men var opptatt av gode oppvekstvilkår for barn og nysgjerrig på hvordan matematikk kunne se ut før skolealder. Og jammen ble jeg raskt hekta! Barnehagematematikk er det morsomste og livligste som fins, og jeg har derfor arbeidet med dette i alle år siden. Det er

fascinerende hvordan allerede de yngste barna i lek og hverdag viser interesse for sammenhenger, størrelser, rekkefølge, tall, form og rom. De bruker kropp og sanser til å utforske omgivelsene, og de viser at de kan tenke kreativt når de løser problemer.

Jeg har fått være med på en lærerik og spennende utvikling av matematikk i barnehagen sammen med gode kolleger, studenter og et utvidet matematikkfellesskap. Jeg har fått mulighet til å samarbeide med andre som brenner for kreativ, meningsfull og morsom matematikk i barnehagen, og det gleder meg å se hvordan barnehager møter fagområdet som en naturlig del av sin lekende, allsidige og helhetlige hverdag. I møtet med studenter og ansatte i barnehagen er jeg opptatt av å ufarliggjøre matematikk, samt skape et læringsmiljø preget av trygghet, humor og glede. Jeg er opptatt av å inspirere studenter og ansatte i barnehagene til å bevege seg fra en noe snever forståelse for matematikk til å se alle mulighetene både spontant og planlagt i barnehagebarns verden. Måten de ansatte tar følge med barna inn i et matematisk samspill har stor betydning for hvordan barn opplever og erfarer matematikk, og jeg ønsker at ansatte beriker situasjonene og engasjerer seg i samtaler som løfter frem barnas

ulike tenkemåter og varierte språk.

Jeg har vært heldig å få undervise i mange forskjellige emner og delta i en lang rekke ulike forsknings- og kompetanseutviklingsprosjekter i inn- og utland. I en periode på to år jobbet jeg 40% som pedagogisk leder i barnehage for å virkelig kunne oppleve bredden i barnehagelærrollen og føle på barnehagelivet. Jeg lærte så mye av å være sammen med barnehagebarna, og jeg brenner for at de skal beholde og videreutvikle sin matematikkglede i hele utdanningsløpet.

Lisa Steffensen



Jeg er 52 år og kommer fra Askøy utenfor Bergen. Jeg arbeider på Høgskulen på Vestlandet, hvor jeg underviser blant annet på etter- og videreutdanningskurs for lærere, ordinær grunnskoleutdanning, masterkurs (mas-

terstudenter), og phd-kurs. Jeg har tidligere arbeidet som lærer i ungdomsskolen, hvor jeg underviste i fagene matematikk, naturfag og arbeidslivfag.

Jeg brenner for en undervisning hvor samfunnsaktuelle problemstillinger flettes inn som en naturlig del av undervisningen i fagene, og gjerne som tverrfaglige prosjekter. Jeg har forsket sammen med lærere i ungdomsskolen, rundt spørsmål om klimaendringer, bærekraftig utvikling, demokrati og medborgerskap, og

hvordan slike tema kan arbeides med i en tverrfaglig tilnærming – med fokus på matematikk. Elevene må her gjerne forholde seg til uklare problemstillinger der det kan være utfordrende å komme med entydige svar, og ulike etiske dilemmaer oppstår. I de siste par årene har jeg hatt et spesielt fokus på matematisk modellering.

Jeg har utdanningsbakgrunn fra miljøteknologi og lærerutdanning. I masteroppgaven i IKT og læring, så jeg nærmere på hvordan elever på mellom-

trinnet aktivt arbeidet med ulike digitale verktøy i forbindelse med et prosjekt om vindturbiner i nærmiljøet. I phd-avhandlingen undersøkte jeg hvordan lærere på ungdomsskolen arbeidet med spørsmål om klimaendringer i matematikkundervisningen. Jeg ønsker at elevene skal oppleve at det er sammenheng mellom matematikkfaget og andre fag, at matematikkfaget er relevant i deres hverdag.

LAMIS Nyhetsbrev til medlemmer

LAMIS har mange ressurser som ligger på vår hjemmeside og som er tilgjengelig for alle. Eksempler på dette er oppgavebanker til UngeAbel, presentasjoner fra sommerkonferansen og filmer til skolestart.

Medlemmene våre får i tillegg bladet Tangenten i postkassen og nyhetsbrev med ressurser sendt på epost. De to siste skoleårene har LAMIS sendt ut syv nyhetsbrev med ressurser til medlemmene.

Det har vært aktiviteter med lærerveiledning til FN sine bærekraftsmål, plakat og Google Site for læreren om elev- og lærerollen i utforskende arbeid og et spillhefte.

Vi vet at mange har tatt disse ressursene i bruk, men vi ønsker at disse flotte ressursene blir enda bedre kjent. Vi har derfor lagt til rette for at disse er lettere

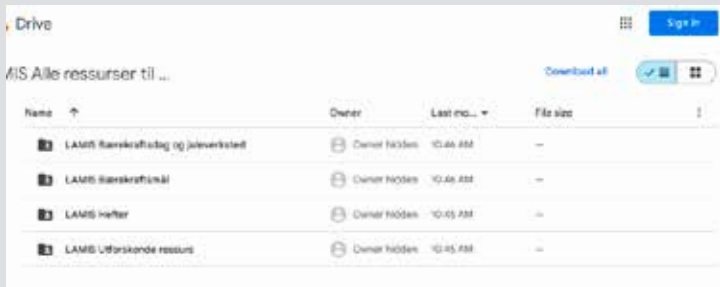


tilgjengelig ved å organisere alt som har vært sendt ut i mapper som gir bedre oversikt.

Når du mottar neste nyhetsbrev i september anbefaler vi deg derfor å åpne lenken i nyhetsbrevet og lagre denne som favoritt. Ved å bruke lenken vil du få tilgang til den siste ressursen og

alle de tidligere ressursene som er sendt ut.

Vi vil gjerne høre fra deg og dine elever om erfaringer dere har gjort med disse ressursene. Lykke til med oppstart av nytt skoleår og skriv gjerne til oss om du har ideer til flere ressurser du ønsker vi i LAMIS skal utvikle.



Å tenne en gnist – sommerkonferansen 2024

v/ Karina Velten og Marianne Eskeland, LAMIS
Oslo/Akershus

Skolestarten blir ikke helt den samme uten LAMIS sommerkonferanse, tre dager i Ålesund har bidratt til at gnistene har utviklet seg til fyr og flamme.

Helgen før skolestart fra fredag til søndag, samlet en dedikert og engasjert gjeng matematikklærere seg i den vakre byen Ålesund for den årlige konferansen med tittelen "Å tenne en gnist." Til tross for at været ikke helt var på lag, med regn som ustanselig trommet mot vinduene, ble dette en helg fylt med matematisk solskinn, utforskning, inspirasjon, kunnskapsdeling og faglig påfyll.

Konferansen har som mål å skape en møteplass for idealistiske matematikklærere i alle skoleslag fra hele Norge. I år var målet å tenne en gnist hos lærerne slik at de er klare til å starte skoleåret med å tenne en gnist hos sine elever.

Aktivitet og utforskning som skaper engasjement

Programmet for helgen hadde en god balanse mellom plenumsforedrag, verksteder, faglige diskusjoner, men også sosiale aktiviteter.

Anne Gunn Svorkmo startet showet med å gi oss gode tips

til hvordan vi kan beholde gløden etter at gnisten er tent. Hun snakket om elevenes og lærerens motivasjon, engasjement og hvilke verktøy læreren kan bruke. Anne Gunn engasjerte ved hjelp av sine mange praktiske eksempler. Hun ble etterfulgt av Mona Nicolaysen som fikk oss til å reflektere over hvordan vi skulle bli eller rettere sagt *være* et lærende menneske. Mona både engasjerte og rørte oss med "teppeprosjektet" og historiene fra barnas perspektiv. Vi kommer ikke til å glemme historien med den lille jenta som tok med en snegle på regnjakka på bytur. Budskapet om at "de største fra barnehagen" forblir "de store", også i skolen, må vi ikke glemme.

Det var mange spennende verksteder å melde seg på, vi skulle gjerne vært på alle. Variasjonen på verkstedene var enorm! Noen eksempler vi vil trekke frem er "Aktiv matematikk ute" for de aller yngste med Hege-Lisbeth Johansen og Henrik Kirkegaard, "Dramatikk i matematikk" med Helene Lohne, Jade Elisabeth Støve og Mona Røsseland, "First Lego League" med Kristine Rogne og Rebecca Terøy og "Samarbeidsprøve som

vurderingsmetode" med Roy Adrian Eide. Et spennende verksted var å eksperimentere i ekte "naturfaglig stil" med ekte data på verkstedet "Eksperiment i matematikk" med Svend Eidsten.



Vi deltok også på verkstedet "Å skape gnist som blir til flamme" med Lone Næss og Gunnhild Husebø Svendsen. Vi fikk lære om "See - Think - Wonder"-metoden som kan være et godt utgangspunkt for lærere på forskjellige trinn. Med utgangspunkt i et bilde skal elevene stille undrende spørsmål, ideene deles i grupper og til slutt oppsummeres alle ideene i klassen. På denne måten legges det til rette for undring, utforskning og elevmedvirkning.

Noen av titlene på verkstedene, "Utforskende matematikkundervisning i flerspråklige klasserom",

“Utforskning i et tenkende klasserom”, “Barns utforskerkompetanse – på vei fra barnehage til skole” og “utforskende aktiviteter i naturfag med bruk av matematikk” sier mye om det didaktiske fokuset for konferansen. Utforskning som innfallsvinkel i matematikk kan være måten å skape en gnist i hos elevene.



Kjærlighet til yrket, til elevene og til faget

Etter en god og hyggelig (og litt traumatisk) festmiddag fikk vi faglig påfyll til siste slutt. Med en engasjerende debatt om KI, godt ledet av Morten Munthe, fikk vi noen perspektiver å ta med til våre kollegaer. Hvordan kan KI bidra positivt til elevenes læring, og hvordan kommer skolen og samfunnet forøvrig til å endre seg på grunn av KI?

Kanskje elevene til Andreas Holmström kan svare på det. Han holdt et plenum med den passende tittelen “Love and Math i digitale flater?” som viste oss at vi



kan elske matematikk, selv om vi ikke alltid forstår det som læreren forklarer. Alt kan læres.

Helt til slutt fikk vi høre lærer Pål Harald Hansens foredrag hvor han fortalte om sin lange vei fra gnist til glør til flamme til

full brann. Det var engasjerende og fascinerende å høre om reisen til hans elever fra å være en krevende gjeng til å ende opp som vinnere av UngeAbel 2023. Ikke minst var det rørende å høre om Pål Haralds engasjement og urokkelige tro på sine elevers muligheter.

Det er ikke lett å tenne en gnist, lage et bål eller starte en brann i regnvær, men jammen klarte komiteen nettopp dette. Tusen takk for god organisering, deilig mat og et interessant program som traff hele spennet fra barnehage til videregående utdanning.

Vi reiste hjem lykkelige, men i uvisshet om hvem som *egentlig* vant rebusløpet på lørdagen. Kanskje det var oss?



UngeAbel-konkurransen 2023–2024

LAMIS er stolte av å arrangere UngeAbel-konkurransen for elever på 9. trinn. Konkurransen er for hele klasser eller basisgrupper. Oppgavene gir elevene muligheten til å løse problemer, snakke matematikk, bruke mange representasjoner og utforske sammenhenger.



Konkurransen for skoleåret 2023–2024 startet med runde 1 i november 2023 og runde 2 ble gjennomført i januar 2024. Det var med over 3700 elever fra skoler i hele landet, og vi har fått mange gode tilbakemeldinger fra lærere underveis.

En av tilbakemeldingene etter runde 1 var: «Morsomme oppgaver som klarte å engasjere – alle fikk til noe og alle bidro.» Og en av tilbakemeldingene etter runde 2 var: «Kjempefine oppgaver! Elevene jobber utrolig godt, koser seg og viser at de faktisk kan samarbeide. Skulle ønske det var en slik konkurranse igjen i 10. klasse.»

Etter de innledende rundene ble det kåret en fylkesvinner per fylke. Disse jobbet videre med en fordypningsoppgave, og sendte



Laget fra Trøndelag holder presentasjonen sin.



Laget fra Oslo underveis i semifinalen.

et lag på fire elever til semifinale- og finale-arrangementet på Gardermoen i april 2024. Etter både rapport, film av utstilling, presentasjon og semifinaleoppgaver, gikk tre lag videre til finalen.

Selve finalen besto av opp-

gaver som gjennomføres med publikum. Denne ble arrangert på Flysamlingen, som ligger like over veien for hotellet. Kristian Ranestad, professor fra UiO, ledet oppgaveløsningen. Representanter fra Matematikksenteret og



Laget fra Agder underveis i finalen.

Abelprisen var tilstede, og talte til elevene og lærerne. Kunnskapsminister Kari Nessa Nordtun holdt en flott tale og bidro med å dele ut premiene.

Tromsø International School ble vinner av konkurransen. Lensvik skole fra Trøndelag kom på andreplass, mens Samfundets skole fra Agder tok tredjeplassen, og i tillegg vant de fordypningsprisen.

LAMIS ønsker at enda flere elever skal få muligheten til å arbeide med de flotte oppgavene i UngeAbel-konkurranse! Hjelp oss gjerne å spre ordet om konkurransen til alle lærere som underviser på 9. trinn.

UngeAbel 2024/2025 åpner for påmelding i september. Runde 1 gjennomføres i november 2024 og runde 2 i januar 2025 med finale i april 2025.

For mer informasjon om UngeAbel, besøk LAMIS' nettside – www.lamis.no.



Alle finalelagene med lærer og kunnskapsminister.



Vinnerlaget med lærer og kunnskapsminister.



Neste års konkurranse.

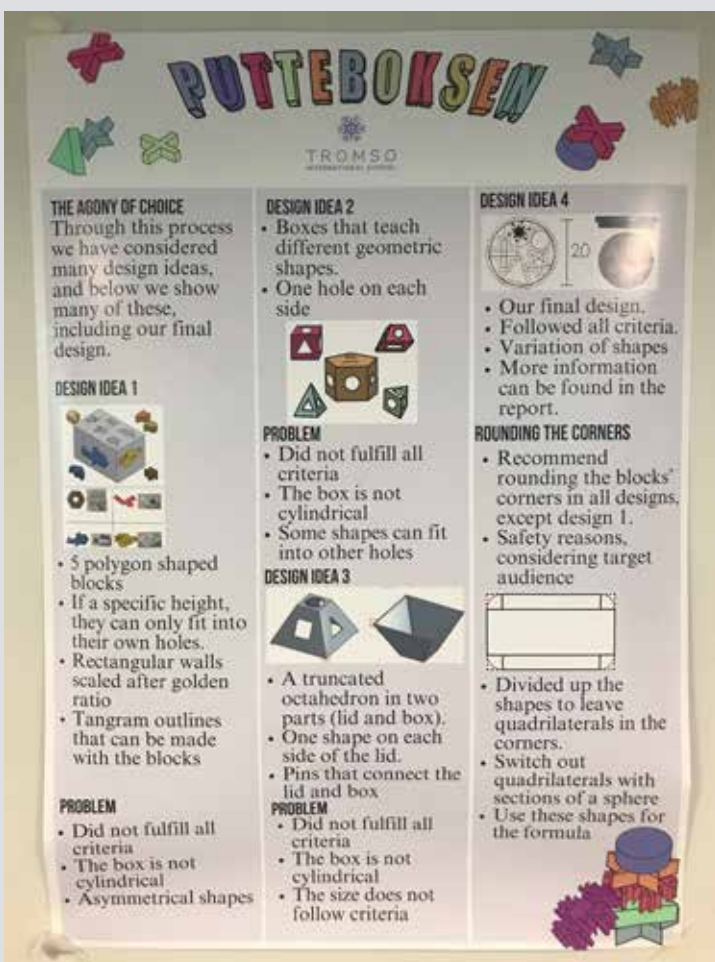
Nordisk finale i Trondheim

Dette skoleåret er første gang LAMIS har hovedansvaret for den nordiske finalen i UngeAbel og samarbeidet med de andre nordiske landene. Gjennom hele skoleåret har Matematikksenteret og LAMIS bidratt med oppgaver til både nasjonale og nordiske deler av konkurransen.

Årets nordiske finale ble arrangert i Trondheim den 28. og 29. mai. Vinnerne av de nasjonale finalene fra Norge, Sverige, Danmark og Finland fikk to dager med spennende konkurranse og ikke minst muligheten til å bli kjent med elever fra andre nordiske land.

Selve konkurransen ble holdt i Matematikksenteret sine lokaler. Det var elevene fra Sverige som vant oppgaveløsningen i finalen og de norske elevene fra Tromsø International School ble nummer to. De norske elevene vant Fordypningsprisen for beste rapport, utstilling og presentasjon.

LAMIS takker representanter fra Matematikksenteret og jury for fantastisk innsats.



Løsning på UngeAbel-oppgaven i Tangenten 2/2024

v/Marianne Maugesten, leder av jury

Tallene 1–9 (finale 2022)

Observer at alle tallene 1–9 har to nabolatt, unntatt 1 og 9. Dermed er det kun 1 eller 9 som kan stå i den merkede (grå) ruta, siden den ruta kun har én «ikke-nabo» i oppgavens forstand. (Plasserer vi for eksempel tallet 4 der, blir det umulig å finne en korrekt plassering for både 5 og 6 samtidig.) Siden to løsninger ikke får lov å ha noen sifre plassert likt, kan det dermed maksimalt bli to løsninger, nemlig ved å plassere henholdsvis 1 og 9 i den grå ruta. Og det viser seg å gå, innenfor alle kravene, og dermed vet vi at det er eksakt to løsninger.

7	5		5	3	
9	1	3	7	9	6
4	6	8	1	4	2
		7			8

Merk: Ved å bytte om litt på sifrene er det mulig å finne flere *løsningspar*, som også oppfyller alle kravene, men det må uansett bli eksakt to løsninger per gang. Et eksempel på et annet slikt par:

4	6		5	3	
9	1	3	7	9	6
7	5	8	2	4	1
		2			8

UngeAbel-oppgave

v/Marianne Maugesten, leder av jury

Summen er 385 (Oppgaven er hentet fra finalen 2023)

Adder påfølgende positive heltall slik at summen blir 385. Finn så mange ulike løsninger som mulig.



Alltid, aldri eller noen ganger?

Praksisnær og forsknings-basert tilnærming til hvordan matematisk argumentasjon kan integreres i undervisningen på barne- og ungdomstrinn.

ISBN: 9788293598145 | Kr. 199,-



Matematisk tenking

Utforsker situasjoner som stimulerer matematisk tenking og kvalitetsrike samtaler. Viser gjennom konkrete eksempler hvordan elevsamtaler beriker forståelsen, og vektlegger bevissthet rundt elev- og lærerrollene.

ISBN: 9788293598152 | Kr. 199,-



Tegning som strategi

Boken viser hvordan tegning, spesielt modelltegning, bevisst kan støtte elevers matematikk-læring ved å utforske egen tenkning, løse tekst- og problemløsnings-oppgaver og gir praktiske eksempler.

ISBN: 9788293598121 | Kr. 199,-



Modellering

Utforsker betydningen av matematiske modeller i skolen, gir konkrete eksempler og tilbyr lærere ressurser og oppgaver for å lære elever på barne- og ungdomstrinnet om modellering.

ISBN: 9788293598138 | Kr. 199,-

Bestill her



Returadresse: Caspar Forlag AS, Postboks 3 Slettebakken, 5821 Bergen

Smestad Leik og eksamen	1
Glomstad, Swift Tenning på resonnering	2
Moen Mønsterintroduksjon	6
Meier Å lage kakao	11
Vøllestad Palindrome hentekoder	17
Brugård, Ottem Abelegøyer, podkast om matematikk	20
Smestad, Bolstad, Fossum Kven er representert?	26
Krohg Østby Representasjoner av brøk i lærebøker	31
Fagfellevurderte artikler	44
Temanummer: Leik	45

Matematikksenteret

Johansen Store kjønnsforskjeller i resultatene fra nasjonale prøver i regning for 5. trinn	48
---	----

LAMIS

Ledergruppen har ordet	55
Nye medlemmer i sentralstyret	56
LAMIS Nyhetsbrev til medlemmer	58
Velten, Eskeland Å tenne en gnist – sommerkonferansen 2024	59
UngeAbel-konkurransen 2023–2024	61
Nordisk finale i Trondheim	63
Maugesten Løsningsforslag til UngeAbeloppgaven i Tangenten 2/24	64
Maugesten Oppgave fra UngeAbel	64

