

Imenes

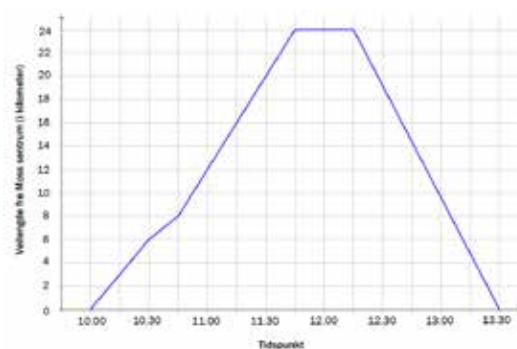
Å halde orden på tog

Som lærar vil du ofte ynskje å knyte undervisinga nærare problemstillingar som ein møter i arbeidslivet. Både fordi elevane blir meir motiverte av det, og fordi ein viktig del av matematikkutdanninga er å førebu elevane for korleis matematikken kan brukast i arbeidslivet. I tillegg trenar autentiske eksempel opp intuisjonen til elevane, fordi dei må ta stilling til om det er fornuftige og realistiske svar dei får på reknestykkja sine.

Funksjonar er eit av dei viktigaste temaa i matematikkundervisinga, og elevane skal kunne nytte ulike representasjonar, mellom anna formeluttrykk, tabell og graf. Eit døme på korleis grafar blir nytta i skolematematikken, finn ein i ei eksamensoppgåve for 10. trinn frå 2017 (Utdanningsdirektoratet, 2017). Ein sykkelstur frå Moss sentrum til Nordre Jeløy og tilbake blir framstilt grafisk, sjå Figur 1.

Spørsmåla som blir stilte, er kor langt det er frå Moss sentrum til Nordre Jeløy, kor lang pausa til syklistane var, og kva gjennomsnittsfarten var på turen tilbake frå Nordre Jeløy til Moss sentrum.

Men kven nyttar slike figurar? Syklistar? Dei som har ansvaret for at toga skal gå, brukar slike



Figur 1: Grafisk framstilling av sykkelstur.

grafar. Bane NOR gjev ut grafiske ruter, som blir nytta mellom anna av togleiarar og ruteplanleggjarar. Eit døme på ei slik grafisk rute er for Kongsvingerbanen i 2026 (Bane NOR, 2025), sjå Figur 2. Ruta dekkjer strekninga mellom Lillestrøm og Årnes mellom klokka 09:00 og 12:00. Kvart tog har ein graf. Det er teke vekk noko informasjon frå biletet.

Til slike grafiske ruter kan ein stille alle dei matematiske spørsmåla som ein vanlegvis stiller til tid-veg-grafar, og ha eit realistisk døme. I tillegg kan ein stille meir avanserte spørsmål og få innsyn i korleis profesjonelle nyttar tid-veg-grafar i arbeidet sitt. Slike grafar er òg eit godt døme på ei linearisering av meir kompliserte grafar. Det er klart at toga ikkje køyrer med konstant fart heile strekninga mellom to stasjonar, men det er ei god praktisk tilnærming. Ein diskusjon om korleis ein kan nytte grafiske ruter i under-

Olav Gravir Imenes

Oslomet – storbyuniversitetet
ogim@oslomet.no

visning, finst i Imenes (2025), og her brukar eg mykje frå den artikkelen.

Situasjonen med drift av jernbane er eit godt døme på at grafar og tabellar bae er viktige og blir nytta av ulike grupper. Dei reisande synst det er enklast med tabellar, medan togleiarar og ruteplanleggjarar nyttar grafar. Det er mykje informasjon som er vanskeleg å sjå om ein berre ser på tabellar, men samstundes kan grafane vera vanskelege å lesa for somme. Døme på noko som er lettare å sjå på ein rutegraf, er mellom anna kva som må gjerast når toget er forseinka, og korleis ein skal optimere rutene for å utnytte infrastrukturen best mogeleg.

Forklaring til grafiske ruter

Figur 2 på neste side er eit tid-veg-koordinat-system. Tida er langs x -aksen, og dei tre grå vertikale linene markerer tidspunkta 09:00, 10:00, 11:00 og 12:00. På y -aksen, heilt til venstre, er avstanden frå gamle Oslo Ø målt i kilometer langs den gamle hovudbanen. Ved sida av står stasjonsnamna eller blokkpostnamna. Dei tjukke vertikale linene rett til høgre for stasjonsnamna markerer om det er enkeltspor (ei tjukk line) eller dobbeltspor (to tjukke liner). Strekninga er stort sett enkeltspora, det er berre mellom Lillestrøm og Lillestrøm Ø det er dobbeltspor. Dei stasjonane som har kryssingspor, er markerte med ei horisontal line, og sidan banen har enkeltspor, er dette dei einaste stadene der tog som går i ulike retningar, kan krysse kvarandre. Kvart tog er representert med ein graf, og dei små tosfra horisontale tala der grafane kryssar dei horisontale linene, er passeringstida i minuttal over heil time. Ein parentes etter dette talet tyder at toget ikkje stoppar for avstiging eller påstiging på denne stasjonen. Dei nummera som er skrivne på skrå langs grafane, er tognummera, og eit nummer i parentes etter eit tognummer refererer til ein fotnote, som til dømes forklarar kva dagar toget går. Tognummer i 1000-serien er lokaltog, medan til dømes tog i 40 000-serien er godstog. Tog i 600-serien er ekspressstog til eller frå Sverige. Ytst til

høgre står avstanden mellom stasjonane, talet på stasjonsspor, og lengda på kryssingsspora, og forkortinga for stasjonsnamnet. Sjå Bane NOR (2026) for komplette grafar for alle jernbanestrekningane i Noreg.

Ein ser at Lillestrøm er 20,95 km frå Oslo, og at Årnes er 58,46 km frå Oslo. Sjå på tog nummer 1009 frå Lillestrøm til Årnes. Dette toget går frå Lillestrøm 09:15 og kjem fram til Årnes 09:51. Her kan ein mellom anna rekne ut gjennomsnittsfarten, i dette tilfellet inkludert pausen i Sørumsand,

$$\begin{aligned} v &= \frac{58,46 \text{ km} - 20,95 \text{ km}}{9 \text{ t } 51 \text{ min} - 9 \text{ t } 15 \text{ min}} = \frac{37,51 \text{ km}}{36 \text{ min}} \\ &= \frac{37,51 \text{ km}}{36 \text{ min}} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ t}} \approx 62,5 \frac{\text{km}}{\text{t}} \end{aligned}$$

Dette er det gjennomsnittlege stigningstalet til grafen til toget. Om ein hadde sett på eit tog i motsett retning, ville ein ha fått eit negativt forteikn framfor farten, og ein måtte då ha teke absoluttverdien.

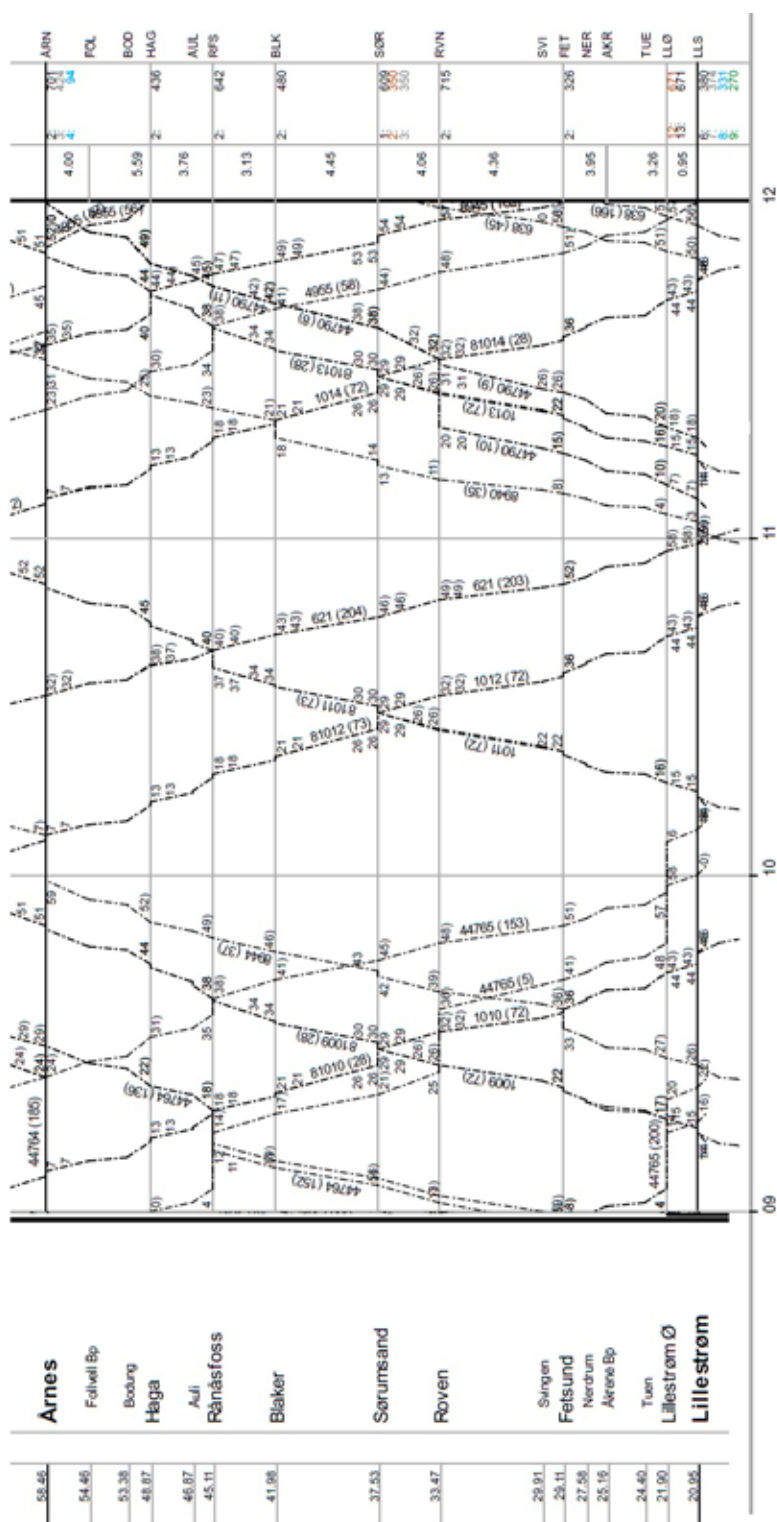
Når ein skal laga ein rutegraf, til dømes når nye tog skal introduserast, så er det mange variablar ein må ta omsyn til, mellom anna trekkraft, akselerasjon og største tillatne fart for toget, største tillatne fart for dei ulike delane av strekninga, kurver, stigningar og fall (Mjelva, 1981). Ein funksjon av så mange variablar blir komplisert, og ein brukar datamaskiner for å rekne ut ei teoretisk reisetid frå desse variablane. Slike funksjonsuttrykk blir altfor kompliserte for oss, men me kan nytte grafen for å finne eit veldig enkelt funksjonsuttrykk for til dømes tog 621 mellom Blaker og Sørumsand. Ein finn at $10 \text{ t } 43 \text{ min} \approx 10,72 \text{ t}$ og $10 \text{ t } 46 \text{ min} \approx 10,77 \text{ t}$, og ein kan nytte formelen

$$s = vt + s_0$$

for å sette opp dei to likningane

$$41,98 \text{ km} = v \cdot 10,72 \text{ t} + s_0$$

$$37,53 \text{ km} = v \cdot 10,77 \text{ t} + s_0$$



Figur 2: Grafisk rute (Bane NOR, 2025).

Ved å løyse likningane med omsyn på s og avrunda mellomrekningane til to gjeldande siffer får ein uttrykket:

$$s = -89 \frac{\text{km}}{\text{t}} \cdot t + 996 \text{ km}$$

Eit slikt funksjonsuttrykk kunne ha blitt brukt til å teikne denne delen av grafen. Minus-teiknet framfor farten tyder at toget køyrer mot Oslo, og konstantleddet kan tolkast som avstanden frå Oslo som toget ville hatt ved midnatt om det hadde køyrt med same farten sidan midnatt.

Bruken av grafiske ruter av togleiarar og ruteplanleggjarar

Ein kan òg finne ut kva som skjer om eit tog blir forseinka. Då blir grafen til toget parallelltransportert tilsvarende forseinkinga. Problemet ein då får, er at grafen vil krysse dei andre toggrafane utanfor stasjonane. Det går ikkje så lenge banen er enkeltspora. Difor må forseinka tog vente i kryssingsspor til det er klart fram til neste stasjon, elles vil det forseinke andre tog. På Figur 3 viser eg kva som skjer om tog 1011 blir forseinka med 10 minuttar frå Lillestrøm og togleiar ikkje vil forseinke andre tog på strek-

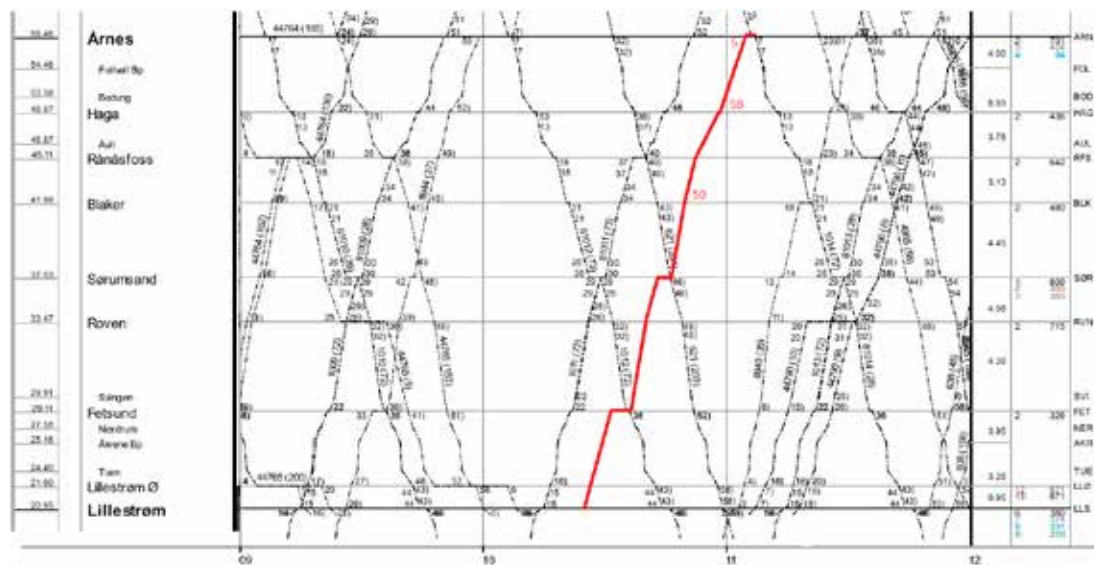
ninga. Den nye ruta er markert med raudt på figuren.

Når toget har kome til Fetsund, må det vente fire minuttar på kryssande tog, og forseinkinga aukar. På Sørumsand må det vente tre minuttar på kryssande tog. Men når toget kjem til Rånåsfoss, slepp det å vente slik det vanlegvis skulle gjort, og tek inn att tre minuttar. Det kjem til Årnes 11:05, totalt 13 minuttar forseinka, men denne forseinkinga aukar til 15 minuttar innan det får gå vidare frå Årnes.

Frå grafane kan ein òg finne korleis ruteplanleggjarane har prioritert. Lokaltoga med tognummer i 1000-serien går på faste minuttal, og er prioritert for å få til dette. Ekspresstoget frå Stockholm, tog 621, slepp å vente på andre tog. Godstoga, til dømes tog 44790, må vente lenger på kryssningar og er nedprioriterte.

Det er nokre matematiske problem med den grafiske presentasjonen. For å gjera han tydelegare, så blir y -aksen nokre gonger strekt, og då er han ikkje lineær lenger. Det gjer det vanskeleg å samanlikne farten på ulike delar av strekninga.

Det er ikkje mange jernbaneselskap som publiserer rutene sine på denne måten på



Figur 3: Ny graf er teikna inn i ruta til Bane NOR frå Figur 2.

internett. Noreg (Bane NOR, 2026) er her i ei særstilling saman med Sverige (Trafikverket, 2026), Sveits (Systemaufgaben Kundeninformation (SBB Infrastruktur), 2026) og Frankrike (Tâches systémiques d'information à la clientèle (SBB Infrastruktur), 2026) og nokre få land til.

Spørsmål som kan stillast til rutegrafane

Læreboka Abakus 7A (Pedersen mfl., 2005) har ein del spørsmål til ein bilgraf. Dei kan enkelt tilpassast tog, og kan då omformulerast som dette:

1. Thomas er lokomotivfører i toget som passerer Lillestrøm 09:26 og kjem til Årnes 09:59. Toget tek to pausar undervegs (første pause er eit stasjonsopphald der det ventar på kryssing med eit anna tog, og neste pause er eit stasjonsopphald på eitt minutt). Kor lenge køyrer det før første pause? Kor lenge køyrer det mellom pausane?
2. Kor langt har det køyrt før første pause?
3. Kva er farten før første pause?
4. Kor lenge varte første pause?
5. Kor langt er det då att til Årnes?
6. Kva er (gjennomsnitt)farten etter første pause?
7. Diskuter kva gjennomsnittsfarten på heile turen er.

Ein kan òg stille meir avanserte spørsmål, og spørsmåla under er henta frå Imenes (2025), men tilpassa ruteplanen for 2026.

8. Kan du fortelje om reisa til tog nr. 44790? Til dømes kvar og når det stoppar, og kor lenge det stoppar. Kva type tog trur du det er?
9. Kan du fortelje om reisa til tog nr. 1009? Kva type tog trur du det er?
10. Kva tog i rutegrafen trur du at du kan kjenne att frå rutetabellane?
11. Kan du gjeta på kva tog som er ekspress-tog, lokaltog og godstog? Kva ser du etter når du skal gjeta?

12. Kva er høgste gjennomsnittsfart mellom to stasjonar?
13. Kva er lågaste gjennomsnittsfart mellom to stasjonar?
14. Gå ut frå at tog 1009 går 10 minuttar etter rutetida frå Lillestrøm og togleiaren ikkje vil forseinke andre tog på strekninga. Korleis skal han legge ny rute? Kor mykje for seint endar toget på Årnes?
15. Om togleiaren i staden lèt motgåande tog vente på det forseinka toget slik at det ikkje skal bli endå meir forseinka, kor mykje ville desse toga bli forseinka?
16. Finn funksjonsuttrykket til eit av toga mellom to stasjonar du vel. Vel eit anna tog i motsett retning og finn funksjonsuttrykket til dette toget. Samanlikn uttrykka. Kva ser du?

Sidan Bane NOR (2026) publiserer grafar for alle jernbanestrekningar i Noreg, er det mogeleg å finne ei banestrekning i nærleiken for dei som vil la seg inspirere. Men merk at Bane NOR ikkje alltid byter kilometrering når dei forkortar banane. Dermed vil avstanden markert langs y -aksen enkelte stader vera langs dei gamle linene. Dette blir kalla kjedebrot etter den gamle norske måleininga kjede, som var 50 norske fot eller 15,687 meter (Bjerke mfl., 2013).

Avslutting

Å nytte grafiske ruter i undervisning gjev høve til å lage oppgåver med låg terskel og stor takhøgde. Det er stor skilnad i vanskegraden mellom til dømes spørsmåla 1–5 og spørsmåla 14–16. Ved å få eit realistisk døme kan elevane bli inspirerte til å finne ut meir om grafane enn dei elles ville gjort. Men hugs at det er meir informasjon som må sortrast i ei grafisk rute enn i ei eksamensoppgåve som til dømes grafen på Figur 1. Samstundes ser det ut til at dei som lagar eksamenane, tenkjer meir og meir på at elevane skal bli flinke til å ta ut rett informasjon frå matematiske arbeidsverktøy.

(fortsettes side 30)

3/2026 tangenten

(fortsett fra side 16)

Referanser

- Bane NOR (2026). *Grafiske togruter*. Tilgjengeleg frå <https://www.banenor.no/for-deg-i-bransjen/togsel-skap/kapasitetsfordeling/grafiske-togruter/>
- Bane NOR (2025). *Blad nr. 1H, Lillestrøm-Charlottenberg, Ruteplanperiode R26*.
- Bjerke, T., Haugen, T., Holom, F. & Tovås, O. (2013). *Banedata 2013 Data om infrastrukturen til jernbanene i Norge*. Jernbaneverket og Norsk Jernbaneklubb.
- Imenes, O. G. (2025). Graphical timetables as a real-life example of different representations of functions. *Journal of Humanistic Mathematics*, 15(2), 69–97. <https://doi.org/10.5642/jhummath.ZOBM8277>
- Mjelva, O. (1981). Et besøk på NSB's rutekontor. *På Sporet*, 13(30), 12–17.
- Pedersen, B. B., Pedersen, P. I., Skoogh, L., Johanson, H. & Ahlström, R. (2005). *Abakus Grunnbok 7A*. H. Aschehoug.
- Systemaufgaben Kundeninformation (SBB Infrastruktur) (2026). *Grafische Fahrpläne*. Tilgjengeleg frå <https://www.ov-info.ch/de/fahrplan-aktuell/grafische-fahrplaene>
- Tâches systémiques d'information à la clientèle (SBB Infrastruktur) (2026). *Horaires graphiques*. Tilgjengeleg frå <https://www.tp-info.ch/fr/horaire-actuel/horaires-graphiques>
- Trafikverket (2026). *Kompletterad fastställd Tågplan*. Tilgjengeleg frå <https://bransch.trafikverket.se/for-dig-i-branschen/jarnvag/tagplan-att-skapa-tidtabeller-for-tag/tagplan-2025/kompletterad-faststalld-tagplan-2025/>
- Utdanningsdirektoratet (2017). *Eksamen 16.05.2017 MAT0010 Matematikk Del 2*.