

Slabikowska

Ris, volum og høydebegrep

«Hva i all verden har ris med volum å gjøre?», «Hva er egentlig høyden i en kjegle?», og «Hvorfor er volumet av en kjegle akkurat en tredjedel av volumet til en sylinder med samme grunnflate og høyde?» Slike spørsmål danner utgangspunktet for undervisningsopplegget som jeg undersøker i denne artikkelen.

Det matematiske fokuset i eksperimentet er å undersøke sammenhengen mellom volumformlene og i en praktisk kontekst. Arbeidsmåten bygger på utforskende matematikkundervisning (Artigue & Blomhøj, 2013), der elevene utvikler forståelse gjennom eksperimentering, refleksjon og begrunnelse.

I undervisningsopplegget ble elevene bedt om å 1) konstruere papirmodeller av en sylinder og en kjegle med likt grunnflateareal og samme høyde, 2) undersøke volumet ved hjelp av papirmodellene, ris og måleutstyr, sammenlikne hvor mye ris de rommer, og notere resultatene, og 3) bruke resultatene til å sammenlikne volumene og formulere en generell regel for alle sylindere og kjegler med likt grunnflateareal og samme høyde. Målet med opplegget var at elevene gjennom egne erfaringer, samarbeid og refleksjon skal utvikle en begrepsmessig forståelse av sam-

menhengen mellom volumet av en sylinder og en kjegle. Den formelle matematiske utledningen av volumformlene, basert på geometriske argumenter og grenseprosesser, presenteres i en annen artikkel: «Hvorfor en tredjedel? – Volum av kjegle ved hjelp av grenseverdier» av Kirfel mfl. (2026). I denne artikkelen rettes oppmerksomheten mot elevenes utforskning og utvikling av begrepsforståelse.



Figur 1: Gruppe 2.

Volumutforskningen ga i stor grad de resultatene jeg på forhånd hadde forventet: Gjennom eksperimentene erfarte elevene at tre kjegler med samme grunnflate og høyde som sylindere fylte sylindere, noe som ga et konkret grunnlag for å begrunne volumformelen for kjeglen. Det vil si at elevene erfarte at forholdet mellom volumene er 1:3. Samtidig avdekket konstruksjonsfasen en uventet utfordring. Flere elever strevde med å identifisere og begrunne hva som menes med høyden i en kjegle. Denne observasjonen førte til at høydebegrepet fikk en mer sentral plass enn

Hanna Zdziarska Slabikowska

Universitetet i Sørøst-Norge
hanna.slabikowska@usn.no

opprinnelig planlagt. I denne artikkelen undersøker jeg hvordan den praktiske volumutforskningen både kan bidra til å begrunne sammenhengen mellom volumformlene og synliggjøre elevenes utvikling av høydebegrepet.

I eksperimentet arbeidet elevene med flere ulike representasjoner av volum. De startet med å tegne og konstruere papirmodeller av en sylinder og en kjele med samme grunnflate og høyde. Deretter undersøkte de volumforholdet ved å fylle papirmodellene med ukokt ris og sammenliknet hvor mange kjeleer som trengs for å fylle én sylinder. Erfaringene fra de konkrete målingene dannet grunnlag for samtaler og refleksjoner om sammenhengen mellom figurene, før de ble knyttet til de symbolske volumformlene. På denne måten utviklet elevene forståelsen gradvis fra konkrete erfaringer via visuelle og fysiske representasjoner til algebraiske uttrykk, der volumformlene framstår som generaliseringer av erfarde sammenhenger snarere enn løsrevne prosedyrer.

Denne bevegelsen mellom representasjoner kan sees i lys av teori fra Duval (2006) om representasjoner. Duval beskriver matematisk forståelse som avhengig av at elever kan arbeide med og bevege seg mellom ulike representasjonsformer, der hver representasjon synliggjør ulike sider ved det matematiske innholdet. I dette eksperimentet blir samspillet mellom tegninger, fysiske modeller, målinger med ris og symbolske uttrykk sentralt for elevenes utvikling av begrepsforståelse. Gjennom utforsking, sammenlikning og samtale kan elevene utvikle et erfaringsgrunnlag som gjør det mulig å formulere og begrunne den generelle sammenhengen mellom volumet av en sylinder og en kjele. Dette illustreres i eksemplene som presenteres under.

Gruppe 1: Elevene tegnet tre like sirkler med passer, målte radius, klippet dem ut og beregnet omkretsen. Med utgangspunkt i omkretsen konstruerte de et rektangel som ble teipet sammen med en sirkel til en sylinder uten toppflate. Etter flere mislykkede forsøk på å forme en kjele ved

å vri et rektangulært papir konstruerte de den uavhengig av sylinderen. Høyden til kjelelen ble målt med to linjaler plassert vinkelrett på hverandre. Denne høyden ble brukt som bredde i et nytt rektangel med lengde lik sirkelens omkrets og rullet sammen til en sylinder som dermed burde ha samme høyde som kjelelen. Da figurene ble sammenliknet, var høydene ulike. Dette ble forklart med målenøyaktighet og justert ved å klippe sylinderen til samme høyde.



Figur 2: Gruppe 1.

Gruppe 2: Elevene tegnet og klippet ut en sirkel, klippet langs radiusen og brettet den til en kjele uten grunnflate. Kjelelen ble brukt som mal for å lage to nye sirkler, som fungerte som grunnflate for kjelelen og som topp- og grunnflate for sylinderen. Høyden på kjelelen ble målt med to linjaler plassert vinkelrett på hverandre og brukt som side i et rektangel, der den andre siden ble anslått slik at det kunne rulles rundt sirkelene. Etter justering og avkorting konstruerte de en sylinder uten toppflate. Da figurene ble sammenliknet, hadde de samme høyde.

Gruppe 3: Elevene rullet ett papirstykke til en sylinder og ett til en kjele, og justerte formene gjennom prøving og feiling for å få like store grunnflater. Selv om grunnflatene ble like, fikk figurene ulik høyde. De forsøkte derfor å sammenlikne den skrå sidekanten på kjelelen med sylinderens høyde, men oppdaget at disse ikke samsvarte, og erkjente at sidekanten ikke er det samme som høyden i en kjele. Til slutt konstruerte de kjelelen på nytt ved å klippe bort overskytende papir slik at figurene fikk samme høyde og grunnflate.



Figur 3: Gruppe 3.

Gruppe 4: Elevene rullet først et rektangulært papirstykke til en kjegle og målte sidekanten før overskytende papir ble klippet bort. De målte også grunnflaten, tegnet to tilsvarende sirkler med passer og klippet dem ut. Deretter konstruerte de et rektangel med bredde lik sidekanten og tilpasset lengden til sirklene, før det som ikke passet, ble klippet bort. Underveis oppdaget de at begge sidene av rektangelet måtte justeres: Sidekanten var lengre enn den felles høyden, og den andre siden måtte svare til sirkelens omkrets. Etter prøving og feiling konstruerte de til slutt en kjegle og en sylinder med samme høyde og grunnflate.



Figur 4: Gruppe 4.

Observasjonene fra trinn 1 viser at elevene var aktive i modellbyggingen. Samtidig viste det seg at noen elever hadde utfordringer med å identifisere og forstå høyden i kjeglen. Flere grupper måtte justere modellene før de oppnådde

samme høyde, og det praktiske arbeidet bidro til å konkretisere hva høyde innebærer i romfigurer. Samtidig ga elevenes ulike tilnærminger læreren økt innsikt i hvordan de forsto og resonnerte om høydebegrepet. Elevenes eksisterende forestillinger ble utfordret gjennom erfaringer som ikke stemmer med det de forventer. Det ble en kognitiv konflikt (Susilawati mfl., 2017) der elevene gjennom prøving og feiling kunne utvikle en gradvis mer presis forståelse. Dette bidro videre til å justere undervisningen senere der læreren tok utgangspunkt i elevenes forestillinger om høydebegrepet.

I trinn 2 virket arbeidet med papirmodeller, ris og måleutstyr å være motiverende for elevene. Dette kom til uttrykk gjennom et høyt aktivitetsnivå, engasjement i oppgaven og ved at gruppene i stor grad holdt oppmerksomheten rettet mot utforskningen. Elevene samarbeidet om å fylle papirmodellene, diskuterte måleresultatene og gjorde justeringer når de oppdaget unøyaktigheter, uten at læreren i særlig grad måtte styre arbeidsprosessen. De fleste gruppene fulgte instruksjonene, registrerte resultatene systematisk og deltok aktivt i samtaler om hva målingene kunne fortelle om sammenhengen mellom volumene. Observasjonene tyder dermed på at de praktiske aktivitetene bidro til både engasjement og faglige diskusjoner. Dette samsvarer med målet satt for undervisningsopplegget, som var at elevene gjennom egne erfaringer, samarbeid og refleksjon skulle utvikle en begrepsmessig forståelse av sammenhengen mellom volumet av en sylinder og en kjegle. Samtidig kan gjennomføringen av opplegget også sees som utforskende matematikkundervisning slik den beskrives av Artigue og Blomhøj (2013), der elever kan utvikle matematisk forståelse gjennom utforskning, samarbeid og refleksjon.

I trinn 3 videreførte flere grupper refleksjonene fra trinn 2 ved å bygge videre på erfaringene fra målingene. De brukte kjeglen som måleenhet og fylte sylindere gjentatte ganger med ris fra kjeglen. Gjennom denne systematiske utprøvingen observerte alle gruppene at det var nødven-



Figur 5: Trinn 2 og trinn 3.

dig med tre fulle kjepler for å fylle én sylinder med samme grunnflate og høyde. Resultatet ble kontrollert ved at en gjentok målingene og sammenliknet observasjonene innad i gruppene. På bakgrunn av disse erfaringene formulerte elevene en generell regel om at volumet av en kjeple er en tredjedel av volumet til en sylinder med samme grunnflate og høyde. Overgangen fra konkrete målinger til en generell regel viser hvordan elevene kan utvikle en matematisk generalisering med utgangspunkt i egne observasjoner og begrunnelser, framfor å ta volumformelen som et gitt utgangspunkt.

I den avsluttende plenumsoppsummeringen tok læreren utgangspunkt i elevenes egne observasjoner og samlet erfaringene fra gruppene i en felles diskusjon. Resultatene fra målingene ble sammenliknet, og elevene begrunnet at en sylinder rommer nøyaktig tre kjepler når figurene har samme grunnflate og høyde. Med utgangspunkt i disse erfaringene introduserte læreren volumformlene for sylinder og kjeple og viste hvordan den observerte sammenhengen kunne uttrykkes algebraisk. Dermed ble volumformlene presentert som en generalisering av elevenes egne undersøkelser, snarere enn som regler som skulle læres utenat. Plenumsoppsummeringen bidro til å knytte de konkrete erfaringene fra eksperimentet til et mer generelt matematisk språk og ga elevene et grunnlag for å kunne se sammenhengen mellom praktiske undersøkelser, geometriske resonnementer og symbolske uttrykk.

Undervisningsopplegget gir et svar på spørsmålene som innledet artikkelen. Risen fungerte

som et konkret redskap som gjorde det mulig for elevene å utforske og begrunne volumforholdet mellom sylinder og kjeple. Samtidig illustrerer eksperimentet hvordan enkle, praktiske aktiviteter kan gjøre matematiske sammenhenger synlige og gi et grunnlag for å utvikle algebraiske generaliseringer. Imidlertid viste det seg at det mest sentrale didaktiske funnet ikke var selve volumutforskningen, men elevenes arbeid med høydebegrepet. Selv om volumforholdet ble etablert gjennom de praktiske undersøkelsene, avdekket konstruksjonen av papirmodellene at forståelsen av høyden i en kjeple krevde mer utforsking, refleksjon og faglig støtte. At elevene konstruerte modellene selv, i stedet for å bruke ferdige modeller som målebegre, gjorde deres tenkning og forståelse synlig. For læreren gir slike aktiviteter verdifull innsikt i elevenes tenkning og forståelse, noe som kan danne grunnlag for å tilpasse den videre undervisningen og rette oppmerksomheten mot begreper som trenger ytterligere bearbeiding. Eksperimentet illustrerer dermed hvordan utforskende undervisning både kan støtte elevenes begrepsutvikling og gi læreren et grunnlag for å videreutvikle undervisningen.

Referanser

- Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, 45(6), 797–810. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6>
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1), 103–131. <https://www.jstor.org/stable/25472062>
- Susilawati, W., Suryadi, D. & Dahlan, J. A. (2017). The improvement of mathematical spatial visualization ability of student through cognitive conflict. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 12(2), 155–166. <https://digilib.uinsgd.ac.id/id/eprint/49328>
- Kirfel, C. & Aslaksen, H. (2026). Hvorfor en tredjedel? *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 37(3), 21–23, 37.