Korden

Ulike tilnærminger til IKT i skolen presentes i dette temanummeret. Alle kan relateres til arbeid med digitale ferdigheter som er beskrevet i læreplanen. De er knyttet til verktøyprogram som brukes til simulering og presentasjoner, til apper brukt i spill og utforskning tilpasset ulike aldersgrupper, og til digitale læringsprogram. Anmeldelse av enkle videoer som er brukt i omvendt undervisning for selvstudier gir også eksempel på IKT knyttet til læring.

Monitor rapporterer om utvikling av elevers bruk av digitalt verktøy i skolen og fant at elever på 7. trinn sjeldnere bruker digitale verktøy i undervisningen i 2013 enn i 2011. Det er oppsiktsvekkende at matematikk er faget der digitale verktøy blir minst brukt. En tilsvarende rapport fra videregående skole (SMIL), rapporterer om stor variasjon mellom skoler og klasser. De fant mye bruk av IKT, men formidler et behov for større satsing på læreres *pedagogiske* og elevers *faglige* IKT-bruk. Det er nødvendig å satse på lærerkompetanse på alle nivå, også blant lærerutdannere. Lærere er «digitale» forbilder for elever og studenter. Det er viktig å skape trygge, kritiske og inspirerte brukere av digitale verktøy i matematikkundervisningen, og det er viktig å forske på og formidle kunnskap om læring og bruk av digitale verktøy. Forsking finnes, men mer innsikt i hva som virker, hva en kan lære og hvordan kunnskap endres når språk og medier endres, er nødvendig. Dynamisk geometri har for eksempel gitt innholdsmessig nye perspektiv til geometri som kunnskapsområde. Metoder og fag er i endring.

Dette nummeret har artikler basert på erfaring, utprøving og forskning. De gir innsikt i noe og reiser nye spørsmål. Ett eksempel er Klyve og Dolonens artikkel, som aktualiserer diskusjon om sammenhenger mellom engasjement og læring når de undersøker elevers læring gjennom bruk av Kikora og Dragonbox.

Å utvikle digitale ferdigheter er krevende. Elevene skal lære seg å bruke, anvende, produsere og bearbeide, kommunisere og utvikle digital og matematisk dømmekraft, i tråd med rammeverk for grunnleggende ferdigheter. Til dette trenger vi variert bruk og varierte digitale redskaper. I dette temanummeret savner vi stoff om elever som selv programmerer. Å få innsikt i arbeid som ligger bak programmering, planlegge prosesser og se resultat, kan bidra til at elever blir mer enn konsumenter av digitale produkt i matematikkundervisningen. Elevers digitale aktiviteter ligger ofte utenfor skolen. Vi trenger dokumentasjon på hvilken kompetanse elever utvikler i og utenfor matematikklasserommet. Gjør skolen bruk av digitale ferdigheter elever utvikler i fritiden? Vi hører gjerne fra dere som har arbeidet med elevers programmering.

Toril Eskeland Rangnes

Ivana Celik

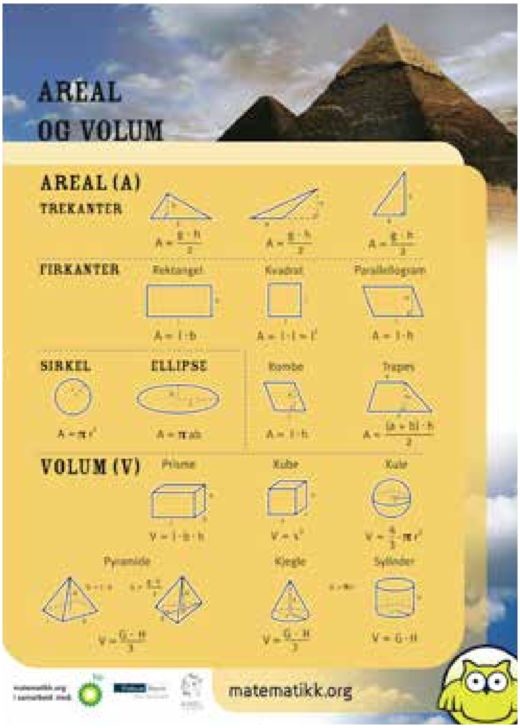
Ny utsending av flotte plakater for grunnskolen

I 2009 laget vi en serie på ni matematikkplakater der innholdet er tilpasset grunnskolen. Ett sett er laget for 1.–4. trinn, ett for 5.–7. trinn og ett for 8.–10. trinn:

- **1.–4. trinn**: Tall, Den lille gangetabellen, Geometriske figurer
- **5.–7. trinn**: Statistikk, Brøk, Areal og volum
- **8.–10. trinn**: Funksjoner, Tallet π, Pytagoras

Etter utsendingen høsten 2009 tok vi vare på restopplaget. Vi får stadig forespørsler om plakatene, og er derfor nå i gang med utsending av dette restopplaget. Alt er gratis, og «førstemann til mølla»-prinsippet gjelder! Plakatene bestilles på nettstedet www.matematikk.org, der de også er fritt tilgjengelige i form av høyoppløselige pdf-filer.

Du kan se flere av plakatene forskjellige steder i dette nummeret av Tangenten.



Ivana Celik
matematikk.org
plakater@matematikk.org

Filip Witzell, Gerd Åsta Bones

Nettbrett og applikasjoner i barnehagen

På veldig kort tid har barn i barnehager fått tilgang til applikasjoner og nettbrett de kan bruke til spill, lek og læring. Mange barnehager har begynt å benytte seg av de ulike applikasjonene som fins.

Det er noen styrker ved nettbrett kontra andre tilnærminger når det handler om matematikk i barnehagen, som vi deler tanker om i denne artikkelen.

Diskusjoner i media den senere tid viser at det er mange som har sterke motforestillinger til nettbrett i barnehagen. Det er mange avveininger og valg som må gjøres når vi tar i bruk ny teknologi. Hva er styrker og svakheter ved nettbrett og applikasjoner kontra andre tilnærminger og konkretiseringsmåter? Her handler det mer om hva som er meningsfylt, enn hva vi bruker for å fremme forståelse og for at noe skal gi mening. I denne sammenhengen kan digitale verktøy være like gode som annet konkretiseringsutstyr.

Med berøringsteknologi kan selv små barn benytte digitale verktøy. Touchmetoden ser ut til å falle svært naturlig for dem. De behersker ofte det tekniske nesten helt av seg selv og finner ut hva de skal gjøre ved å prøve, trykke og se hva som skjer. Et stort pluss med nettbrett er at det i seg selv er en populær aktivitet, barna er motivert for å bruke det, og de ønsker å følge med på det som skjer.

På Matematikksenterets hjemmesider finner dere en oversikt over noen applikasjoner vi har funnet og prøvd ut med barna. Etter hvert har vi skaffet oss en del erfaring og reflektert over hva vi kan oppnå, og hvordan aktiviteter med nettbrett kan fungere som en god tilnærming til matematikk. Vi håper vi kan spre informasjon og gi inspirasjon og lyst til å prøve noen av dem, og at det bidrar til at dere får lyst til å søke flere muligheter. Som støtte for å kunne velge riktig har vi utviklet et skjema som skal hjelpe med å velge og kvalitetssikre gode applikasjoner som fremmer matematikkglede og matematikklæring. Skjemaet og oversikt over apper finnes på Matematikksenterets hjemmesider (www.matematikksenteret.no/content/2061/Apper-i-barnehagen).

Filip Witzell
Regnbuen barnehage, Trondheim
filip@witzell.no

Gerd Åsta Bones
Matematikksenteret
Gerd.Bones@matematikksenteret.no

Finnes den perfekte appen?

Det finnes mange gode applikasjoner som dekker mål innenfor antall, rom og form i rammeplanen for barnehagen. Når vi vet hva vi vil oppnå og har en gjennomtenkt og bevisst hold-

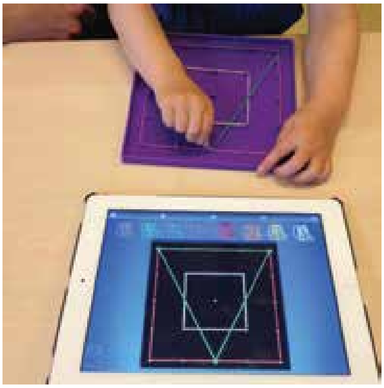
Kvalitetssikringsskjema for app'er

FAGLIG INNHOLD

ning til det vi gjør, sikrer vi god kvalitet og et godt læringsutbytte. De applikasjonene vi har valgt å prøve ut, mener vi kan bidra til at barna får erfaringer som engasjerer, er lystbetont og motivererer. Den voksnes tilstedeværelse og tilrettelegging er imidlertid en avgjørende faktor for suksess.

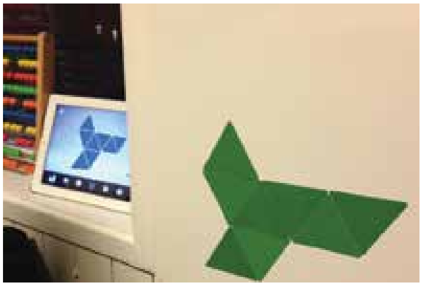
Styrken ved nettbrett kontra andre tilnærminger

Det fins applikasjoner hvor vi kan gjøre former fleksible, slik at barna kan trekke og dra og endre dem med et enkelt grep. Farger og størrelser kan enkelt endres og tilpasses, speiles, roteres og skifte retning, plassering og orientering.



Slik kan barna leke og utforske former og se at for eksempel trekanter kan se veldig forskjellige ut. De kan være lange, smale, tykke og rare. De kan ha bare ulik lengde på sidene eller de kan ha to eller tre like lange sider. De ser forskjellige ut når toppen peker mot venstre, høyre, opp eller ned. Barna kan lage mange forskjellige trekanter, og de får anledning til lå legge merke til og gjenkjenne egenskaper ved former heller enn å lære navnet på noen få former. Former i fast materiale (plast, tre og lignende) er ofte lagd for å vise regulære former, for eksempel likesidet trekant, kvadrat og sirkel, og kan ikke endres.

På Matematikksenterets nettsider er det lagt ut to digitale bøker med forslag til hvordan GeoBoard kan brukes med barna i barnehagen. Bøkene kan lastes ned som iBooks eller PDF.



Med applikasjonen GeoBoard er det lett å endre former, farger og størrelser.

Finmotorikk

Der barna har problemer med oppgaver grunnet manglende finmotorikk, kan enkelte applikasjoner med fordel brukes. Ikke slik å forstå at barna ikke skal utvikle finmotorikk, men noen ganger er det kanskje andre intensjoner med opplegget hvor finmotorikken kan være et hinder heller enn det motsatte. Ett eksempel er når barna skal lage et bilde eller et mønster med mosaikkfliser.

De vet hva de vil lage, og de har noen tanker og ideer om hvordan de skal få det til. På bordet med vanlige fliser er det noen ganger vanskelig for barna å få lagt flisene der de vil ha dem, fordi de mangler finmotorikk eller noen dulter borti bordet så bildet/mønsteret blir ødelagt. Med en applikasjon (Solids Elementary HD og Make A Mosaic) som har samme type fliser, kan barna enkelt velge en flis og trekke den på plass, fiksere den der de vil og lage et bilde eller et mønster uten at det står i fare for å bli ødelagt. Det er også mulig å lagre og/eller skrive ut mønsteret barna har lagd, og det kan henges opp og tas frem ved senere anledninger.

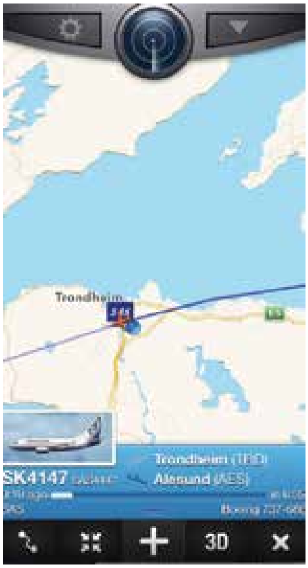
Barna kan bruke mønstrene om og om igjen, sammenligne dem, lete etter former, farger, størrelser, symmetri, speiling, hvilken form som er øverst, i midten og først og sist i mønsteret.

Glimt fra barnehagen

Flystatistikk

I Regnbuen barnehage er det mange av foreldrene som ofte er ute og flyr. Barna er opptatt av dette, og de snakker om at i dag skal mamma til Oslo og pappa til Bergen med fly.

De har derfor funnet en applikasjon (Flight Radar 24 PRO) som viser hvilke fly som flyr over barnehagen i løpet av dagen. Barna registrerer når et fly passerer på himmelen over barnehagen, og de har blitt enige om hva de skal registrere og samler data som vist på bildet. Statistikk er et område i matematikken som handler om å skaffe til veie god og sann informasjon, og skal gi grunnlag for vurderinger som vi kan bruke til å trekke slutninger. I tillegg er statistikk et utmerket utgangspunkt for å utvikle tallforståelse og tallbegrep.



Med denne enkle statistikken diskuterer og reflekterer barna over mange sammenhenger. Hvor mange fly har vi registrert i dag eller denne uka? Var det like mange som i går? Flere eller færre? Hvor mange flere i så fall? Hvilke selskaper er det vi registrerer oftest? Kan det være flyet som mamma er med i? Statistikken blir tatt med ut, og hver gang et fly passerer (og barna eller de voksne registrerer det), stables bruskasser til søylediagram.

Det er egentlig ingen begrensninger på hva som kan telles, men det må være noe som barna kan forholde seg til. Ett av poengene med statistikk er at det skal gi et visuelt bilde av en datamengde. For barn er dette ting som er en del av deres hverdag, for eksempel fly, tog, biler, sykler med forskjellige farger, hvor mange som drikker vann og hvor mange som drikker melk til maten.

Et populært innslag denne våren har vært Piip-show på nrk.no. Et fuglebrett ble filmet døgnet rundt i tre måneder. På dette fuglebrettet kom det mange forskjellige fugletyper, og disse satt vi og telte i korte økter for deretter å sette dem opp i et søylediagram for å se hvilke typer fugler det kom mest av i perioden 08.30–08.45 i løpet av en uke.

Vi bygger Tyholttårnet med applikasjonen Cubits.

Konstruksjonslek

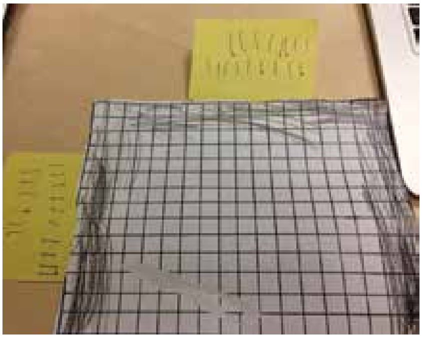
Med applikasjonen Cubits kan det søkes opp bygninger og lokale attraksjoner som barna velger og har lyst til å kopiere og bygge. Cubits finner modeller laget i programmet Google SketchUp, såkalte kmz-filer. Dette er modeller som kan være hva som helst som ligger i Google SketchUps database, fra verdensbygg til en modell av en stol. Hva med en modell av

Det er mulig å låse en iPad i en enkelt applikasjon for å unngå at barna går ut av applikasjonen (søk på google single app mode/ begrenset tilgang). Dermed kan en iPad stå fremme som et tilbud på avdelingen for de barna som ønsker det. De trenger ikke å få tilgang til alle applikasjonene, men kun den personalet har valgt.

en katamaran, hva er nå det? Alle modeller kan studeres fra ulike perspektiv mens de bygger. De kan sortere og lete etter former, farger og størrelser som de kan sette sammen fra del til hel. Dette er viktige, grunnleggende prinsipper for både antall, rom og form.

En aktivitet i Regnbuen barnehage er å lage bygg med de forskjellige konstruksjonslekene vi har. Treklosser, lego, duplo, jovo, strawbees. På fellesrommet har vi store treklosser som kan bli det aller meste. En av de tingene vi har laget, er en modell av Kiel-ferja, som Rebekkah hadde reist med. Alle barna ville hjelpe. Gruppa fikk en fin kombinasjon av en modell de kunne studere via lerretet i stort format og med alle sine detaljer. De fikk samtidig fysisk bygge en modell som endte opp ca. tre meter lang. Underveis skjer det planlegging med mange artige diskusjoner, som hvordan de skal få livbåtene mest mulig like dem som er på ordentlig, hvor mange etasjer det er, og hvor lang båten skal være. Båten bygges av treklosser. Livbåtene var noen gamle påskeegg som de fant ut lignet, og som ble malt og fikset på før de ble montert.

Et langvarig prosjekt i barnehagen begynte med et forslag fra et barn om vi kunne spille Minecraft i barnehagen. Vi begynte for 1 1/2 år siden. Barnet som kom med ideen, har sluttet i barnehagen, men andre barn har fortsatt med aktiviteten. Før vi begynte, ville jeg at vi skulle gjøre gode forberedelser. Vi fant frem en modell av barnehagen med applikasjonen Cubits (IOS). Med utgangspunkt i modellen laget vi en oversikt over hvor mange deler barnehagen består av. Det er fire avdelinger, ett fellesrom og én



kontordel. På bildet ser dere de fire avdelingene: Sola, Nordlys, Lynet og Regndråpen. På fellesrommet i midten er det klosser, derfor bilde av en kloss. For å få en pekepinn på hvor mange klosser vi skulle bruke i Minecraft når vi skulle bygge barnehagen, har barna talt hvor mange ruter det er på sidene til hver avdeling. Dette er post-it-lappene med tellestreker. Da vi hadde gjort ferdig forberedelsene, begynte vi å bygge i Minecraft. Vi har prøvd å være tro mot tegningene, men har tatt oss litt friheter da modellen og plantegningene våre ikke er helt like.

Barnehagebygget i Minecraft er fortsatt under bygging. Bygget har med alle rom innvendig, og uteområdet er under bygging. Barna klarer fint å forstå hvor de er i bygget når vi spiller og bygger sammen. Vi pleier å spille med maskinen koblet til en projektor så det er god plass for barna å se. Vi har også alltid med modellen på papir og 3D-modell i Cubits når vi spiller. Vår Minecraft-verden er også lastet opp på en server som det er tilgang til utenfor barnehagen. På denne serveren kan de som vil, bygge videre på barnehagen i Minecraft eller bygge eget hus utenfor gjerdene. Flere barn som nå har sluttet i barnehagen, har vært innom serveren for å hjelpe til å bygge ferdig. Foreldre har også vært innom for å se og bygge. Hvis du også vil se, må du koble deg på multiplayer, adressen er 50.7.229.10:26624

Vi vurderer å få en ny interiørarkitekt da en av dem som var innom, syntes det var en god ide å ha sjakkmønstrede oransje og blå gulvfliser i ull på alle gulv i barnehagen.

Flere apper

Sjekk gjerne ut appen Toca Store, en alternativ butikk for de minste barna, og Number Rack, som er en sterk visuell modell som kan brukes til å visualisere sammenhengene mellom tall og regneoperasjoner. På Matematikksenterets nettsider er det lagt ut to digitale bøker med forslag til hvordan Number Rack kan brukes med barna i barnehagen. Bøkene kan lastes ned som iBooks eller PDF.

Hvordan komme i gang?

Med nettbrett og applikasjoner er ofte oppgaver og aktiviteter lett tilgjengelige. I Regnbuen barnehage, hvor Filip arbeider, er det lagd et «bibliotek» med ressurser som alle kan benytte seg av. Vi har lagret kursbrev med oppgaver, forslag til applikasjoner og matematiske aktiviteter med barna på iPadene slik at de alltid er lett tilgjengelige.

Filip har i sin barnehage ansvar for å velge, prøve ut og spre info om bruk av applikasjoner. Alle kan komme med forslag og ønske seg apper. Gjennom tilbakemeldinger fra kolleger som prøver og erfarer, skaffer Filip seg erfaringer som han kan bruke når ideer skal utvikles og gjennomføres.

Det er til god støtte for alle når det er en ansvarlig som er engasjert, pusher og hjelper kollegene til å benytte seg av de mulighetene som fins, og som de blir gjort kjent med.

Barnas interesser blir tatt hensyn til. De kan komme med innspill og forslag, men valgene er den voksnes.

Det er stor forskjell på hvilke applikasjoner voksne og barn velger. Noen applikasjoner er slik at barna kan gjøre mye alene eller sammen med en voksen. Noen er helt avhengige av en voksen med kompetanse i matematikk for at de skal fungere etter hensikten.

Det at det finnes veldig mange applikasjoner, flere plattformer og flere ulike nettbrett, betyr at dere må gjøre noen valg før dere finner applikasjonene. De to dominerende plattformene er iOS (iPad) og Android (Samsung etc.). Microsoft Surface er i ferd med å etablere seg, men har liten markedsandel foreløpig. Vår erfaring er at det finnes gode applikasjoner på både Android og iOS, men iPad har den fordelen at den kom først, og vi har funnet flest applikasjoner til IOS.

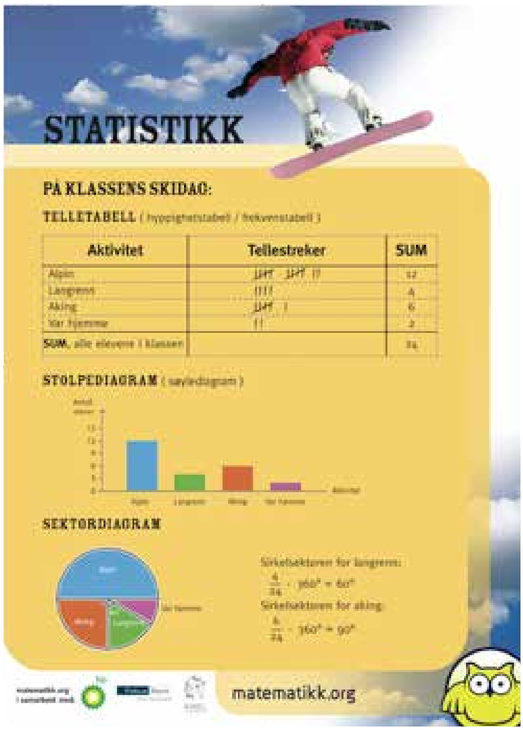
Hvor finner man gode applikasjoner?

For å finne gode applikasjoner til matematikklæring kan du søke på nøkkelord i f.eks. App Store. Engelsk ord gir flest treff, da det lages desidert flest applikasjoner på engelsk.

Ellers er det mange gode blogger hvor du finner applikasjoner. Eksempler på dette er skolappar.nu, mindleaptech.nu, catalog.mathlearningcenter.org/apps

Avsluttende kommentarer

Ved å åpne for nettbrett og applikasjoner og lete etter styrker og svakheter ved dem, har vi erfart at de har en verdi og er et nyttig verktøy når barna skal lære matematikk. Svakheten består ofte i at applikasjonene ikke er gode i seg selv uten at vi er svært bevisst på hvordan vi bruker dem. Vi må hele tiden reflektere over effekten og etterprøve om barna har forstått det vi vil at de skal få erfaring med og oppnå. Bruk av applikasjoner er en ny og forholdsvis ukjent innfallsvinkel, og det er nødvendig å bruke tid og tenke grundig gjennom hva, hvorfor og hvordan de fungerer, og hva de kan brukes til. Utbyttet er avhengig av kompetente voksne som har faglig og didaktisk oversikt, slik at barna lærer matematikk som bygger på forståelse, ferdigheter og anvendelse. Leken og undringen må ivaretas på lik linje med andre tilnærminger.



Ketil Bergesen

GeoGebra – en kroppslig tilnærming

GeoGebra er et ypperlig program for arbeid med både geometri og algebra i mange sammenhenger. Det er gratis og har blitt stadig forbedret gjennom årenes løp. Denne teksten er knyttet til geometridelen.

Skolematematikken oppfattes ofte som noe statisk. I geometrien kommer dette til utrykk for eksempel ved at en sirkel er en runding - en bestemt form, en vinkel på 180 grader er en rett linje med en liten strek på seg.

I lærerplanens kompetansemål etter 4. årstrinn står det i geometridelen blant annet:

> Mål for opplæringa er at eleven skal kunne […] kjenne att og beskrive trekk ved sirklar, mangekantar, kuler, sylindrar og enkle polyeder.

Hva betyr det å beskrive *trekk* ved geometriske figurer? Det er nærliggende å tenke dynamisk og strukturelt. En sirkel må forståes som noe mer enn en visuell form. Alle punktene på en sirkel deler en bestemt egenskap, de har samme avstand til sentrum. Vinkelbegrepet må også utfordres, for eksempel som et mål på dreining – en helomvending (ville halvomvending vært et bedre ord?).

Gjennom arbeid med GeoGebra tror jeg denne statiske forståelsen vil utfordres.

Når programmet introduseres for nye brukere, om det er voksne eller barn, rår det ofte en viss forvirring. De kan for eksempel tro at programmet har hengt seg opp om de prøver å dra i et punkt som nekter å lystre. En tangent til en sirkel som er trukket ved hjelp av et linjestykke bestemt av to frie punkter som akkurat berører en sirkel skaper forvirring fordi den ikke følger med når sirkelen endres

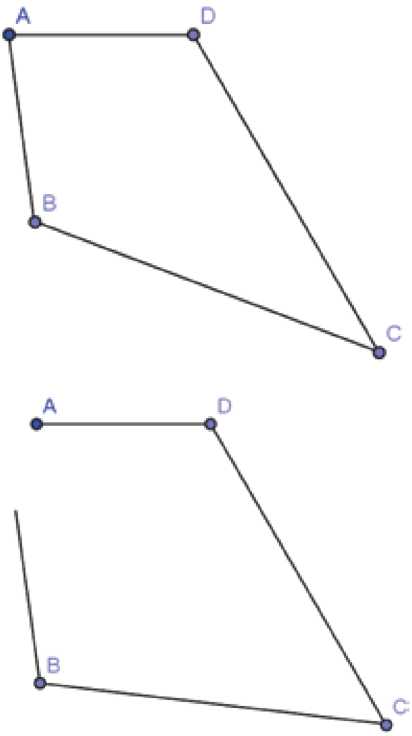
Arbeidene ender ofte opp som en «tegning» som ser ut til å ha de kvalitetene en konstruksjonsoppgave etterspør. Men om man går konstruksjonen etter i sømmene, klikker og drar i punktene oppfyller ofte ikke figuren krav som er satt til den. Et eksempel på dette er følgende oppgave:

> Konstruer en drake som har sidekanter 2 og 4.

Oppfordring til leseren: prøv å tenke ut hvordan du ville gått frem, før du leser videre)

Eksempel på en besvarelse av drakeoppgaven er gjengitt først i figur 1. Alt ser bra ut, men trekker en for eksempel i punkt B, henger ikke lenger figuren sammen. Egenskapene som kjennetegner en drage er med andre ord ikke ivaretatt. Det kan være den som har laget figu-

Ketil Bergesen
Høgskolen i Bergen
ketil.arne.bergesen@hib.no



Figur 1

ren er fornøyd med det visuelle resultatet, men ikke fullt ut forstår hva slags frihet hun har gitt- eller begrensninger hun har pålagt punkter eller linjer, altså hvilke regler elementene må følge. Den siste handlingen kan ha vært å bestille et linjestykke med bestemt lengde 2 fra B og så dratt litt i punktene B og D til enden på det siste linjestykke ligger oppå A. Å tegne i GeoGebra er vesensforskjellig fra å bruke papir og blyant, der elementene låses på arket, uten at egenskaper presiseres.

I forsøk på å få klarere frem begrensninger vi pålegger- eller frihet vi gir når vi bruker en funksjon I GeoGebra, har jeg brukt små «rollespill» som innledning, før vi i det hele tatt åpner programmet. (Jeg mener at aktivitetene også egner seg for elever i skolen.):

Noen studenter tas med på gangen og får merkelapper A, B og C klistret på seg. De skal simulere punkter. De får regler for hvordan de skal oppføre seg i forhold til hverandre. Vi går inn i klasserommet igjen og de får så i tur og orden anledning til å bevege seg i henhold til regler de er pålagt. (Dette skal simulere klikk og dra i et punkt). De som ikke har tur blir i ro så lenge regelen er overholdt. Medstudentene skal som tilskuere undersøke hva som foregår, de skal identifisere de underliggende reglene.

Eksempel 1

Deltagerne får tildelt roller:

A får fritt spillerom (Det får jo det første punktet man avsetter) B får også fritt spillerom (et fritt punkt) mens C får i oppgave å være midtpunktet mellom A og B

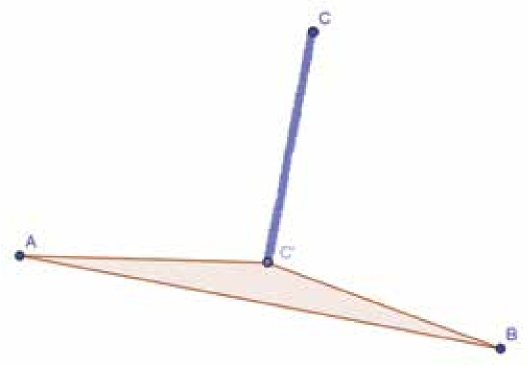
Så får A «klikke og dra» i seg selv. B forholder seg i ro, mens C må passe på å være midt i mellom de to. Når B har tur er A i ro og C gjør det samme. Men når det er C sin tur, kan hun ikke gjøre noe som helst. C er prisgitt A og B sine bevegelser. Tilskuerne gjetter nesten umiddelbart at C er midtpunktet.

Figur 2. A beveger seg fritt, C passer på å være midtpunkt:

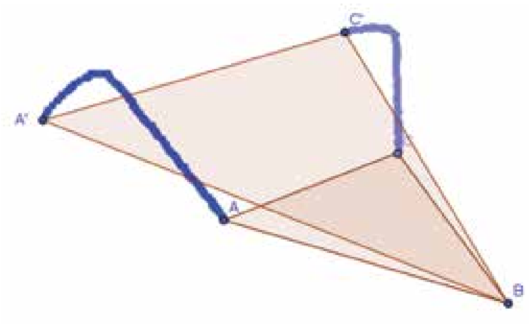
Eksempel 2

A og B får samme roller som i første eksempelet, men C får nå i oppgave å være like langt fra A som B, og samtidig bevare formen på trekanten ABC, med mindre hun har tur. Da kan C fritt bevege seg så lenge hun er like langt fra A som B (altså langs midtnormalen).

Når A har tur vil C bevege seg omtrent som vist i figur 3.



Figur 4



Figur 3

Når det er C sin tur kan hun bevege seg langs midtnormalen på AB (figur 4).

Der C stopper vil være førende for hvordan hun beveger seg når A og B har tur igjen. Hun vil igjen bevare formen på trekanten slik den var da hun stoppet. (Om C stoppet i C' vil hun når A eller B ha tur bevare formen på trekant ABC')

Slike øvelser kan gi ny og verdifull innsikt:

1. Basal kunnskap om egenskapene til forskjellige geometriske figurer. Hva er nødvendig og tilstrekkelig informasjon om hva som definerer for eksempel et rektangel. Finnes det fullgode alternative definisjoner?
2. Større klarhet i hva som styrer hva i GeoGebra, hvilken frihet de enkelte punkter/linjer/kurver har.
3. Arbeid med kroppslig konstruksjon fremmer kritiske spørsmål som: har punktene eller punktmengdene tilstrekkelig informasjon om seg selv til å oppføre seg skikkelig – eller kanskje har de for mye informasjon så de blir fratatt en frihet de burde ha? Finnes det flere løsninger? I det videre arbeidet med konstruksjon i GeoGebra kan deltagerne ta med seg tilsvarende spørsmål.
4. En økt forståelse for hva et geometrisk sted er – definert som samlingen av alle de stedene et punkt har lov til å gå basert på regler de skal følge. Regelen bestemmer stedet.

Går en tilbake til draken, kan det fort klart at her finnes det (uendelig) mange løsninger. For å ta vare på disse blir det viktig å reflektere som i punkt 3 over. Er alle løsninger ivaretatt? Kan det klikkes og dras i et hvilket som helst punkt og samtidig beholde de etterspurte egenskaper? To løsninger er tegnet i figur 5.

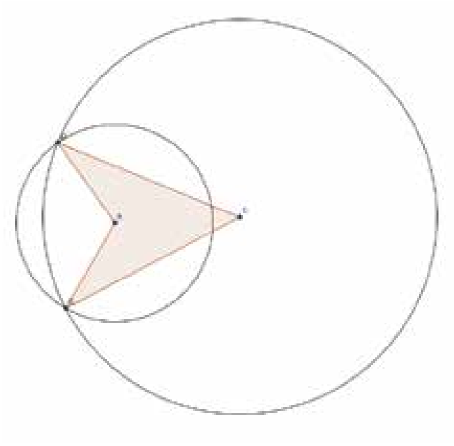
Med punkters frihet og krav til figuren i bakhodet, blir det nå en diskusjon om hvilke egenskaper figuren nødvendigvis må ha viktig. Gjør gjerne dette i par, der den ene spiller djevelens advokat.

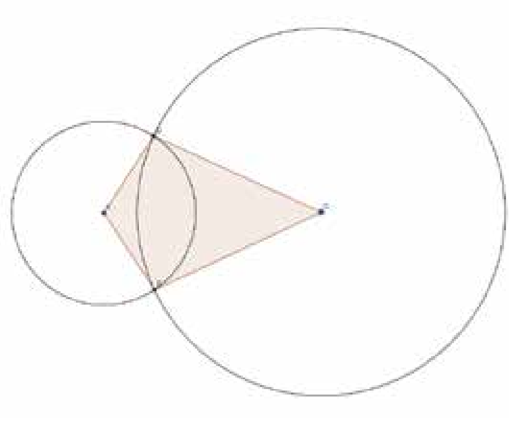
En del prøving, feiling og justering i noen runder må påregnes.

Forklaring til konstruksjonen gjennomført i eksempel :

1. Sett av to frie punkter A og C.
2. Konstruer en sirkel med sentrum i A og fast radius 2 (sirkel definert ved sentrum og radius)
3. Konstruer en sirkel med sentrum i C og fast radius 4 (sirkel definert ved sentrum og radius)
4. Kall skjæringspunktene mellom de to siste sirklene for B og D, slik at orienteringen av punktene blir A, B, C, D når man går mot klokka.

En kroppslig konstruksjon av denne dragen involverer to tau med 2 lengdeenheter og to med 4 lengdeenheter som lager omrisset av draken.





Figur 5

A og C får nesten full frihet (hvorfor ikke full frihet?), mens B og D må holde tauene stramme. En utfordring å prøve ut med elever?

Innflytelse på skolematematikken?

Hva vil dynamiske geometriprogrammer gjøre med innhold, regler og konvensjoner i geometriundervisningen? Vil forståelsen av de underliggende strukturer og sammenhenger endres – til det bedre – når vi flytter oss fra papir og blyant- til digitalisert undervisning? Betrakt følgende oppgave:

> Konstruer en rettvinklet trekant ABC, der AB = 6 cm og vinkel B er 90 grader.

Den umiddelbare reaksjonen vil være at det er ikke tilstrekkelig opplysninger i oppgaven. Det underforståtte er opplagt: For få opplysninger til å få en entydig figur. Slik oppgaven er formulert har den uendelig mange løsninger. Så lenge kravene er oppfylt er det en løsning. Jeg vil oppfordre til bruk av slike oppgaver, da de naturlig avstedkommer en diskusjon om lovlighet og frihetsgrader.

Historisk sett var lovlig konstruksjon basert på Platons idéverden om det eksakte - kun det som kunne gjøres med en umarkert linjal og passer. Linjestykker stod markert som avtegnete lengder som kunne kopieres.

I dagens konstruksjon er det helt akseptert å bruke passeren til sette av en lengde ved hjelp av en markert linjal (AB = 6 cm), men det er fy å «konstruere» en rett vinkel ved hjelp av en gradskive.

Jeg håper og tror at dynamiske program vil flytte fokuset fra det konstruksjonstekniske til de underliggende ideer om hva eksempelvis en vinkelhalveringslinje *er*. De geometriske stedenes vesen kan komme tydeligere fram. Opplysninger i konstruksjoner blir ikke bare en instruks, men egenskaper som punkter eller punktmengder blir pålagt - som begrenser deres frihet.

For all del, gradskiva vil ikke besvare spørsmålet om hva en vinkelhalveringslinje egentlig er, men kanskje kan den tas fram når ideen er på plass?

Inspirasjonshjørnet

Tangentens inspirasjonshjørne har som mål å inspirere til varierte matematikkaktiviteter i skolen, og å bidra til delingskultur. Hvert nummer vil ha et tema. Leserne inviteres til å sende inn bilder og tekst fra elevers aktiviteter og løsninger. Ta gjerne bilder der barn er med, men be da om tillatelse av foresatte før de sendes til Tangenten. Lærer (og gjerne elever) kan skrive et kort avsnitt om barns matematisering knyttet til aktiviteten. Det kan være matematisk aktivitet som har foregått, eller som læreren ser muligheter for. Blant bidrag som kommer inn, vil det bli trukket ut en heldig vinner som får en pengepremie (5000 kr) som kan brukes til utstyr knyttet til matematikklæring.

Tema for

utfordring nr 2:

Barn og ungdommers byggverk!

Byggverkene kan være fysiske som for eksempel hus, hytter eller skulpturer og/eller digitale modeller. Bruk gjerne dataprogram som Minecraft, Sketchup eller liknende.
Artikkelen „Matematikkens hus" på neste side vil kanskje inspirere?

Frist for å delta i trekningen: 15. oktober.
Send inn til tangenten@caspar.no

Pernille Peiter

„Matematikkens hus"

Torsdag d. 27. august. 9. klasse på Carl Nielsen Skolen i Nr. Lyndelse sidder spændte og venter. Der er gæster, ti 2. g-elever fra Midtfyns Gymnasium sammen med uddannelsesleder og matematiklærer Eva Katballe. Midt i klassen er et bord fyldt med alt fra tomme køkkenruller, pailletter, gamle fliser, æsker, karton, glitter, piberensere, limpistoler m.m.

„Matematikkens hus" – en anderledes udfordring

Sammen skulle Eva og jeg i løbet af de næste tre timer præsentere projektet for eleverne. Eleverne fra 9. klasse skulle i grupper bygge deres bud på „Matematikkens Hus" i samarbejde med 2. g'erne. Huset skulle rumme plads og inspirere til leg med matematik. Efter gennemgang af projektet og uddrag af et afsnit af Shanes verden som inspiration gik alle grupper i gang med at tegne, beregne, søge på nettet og skrive ned. Dette var opstarten på et matematikforløb, som skulle få „Coolnessheden" og lysten til faget matematik i vejret. Et forløb hvor der skulle være anderledes udfordringer inden for matematik for både de svageste, mellemgruppen og de stærkeste elever.

Det viste sig, at „Matematikkens hus" kan være alt fra en blomst dannet af regulære femkanter og et slot med fem hovedhuse, hvor springvandene i parken danner et udsnit af en parabelformet graf, til et klubhus med pyrami-

Pernille Peiter
Carl Nielsen Skolen, Nr. Lyndelse
pernille.peiter@skolekom.dk

Denne artikkelen har stått i Matematik 3/2014.
Artikkelen er trykket med tillatelse.

lærerne fra gymnasiet, og meningen med dem var, at 9. klasses eleverne skulle stå lidt på tæer for at kunne klare matematikken og gerne bede gymnasieeleverne om hjælp til diverse udregninger. Der var lagt op til, at samarbejdet skulle foregå virtuelt i dertil indrettede Google mapper. I nogle af grupperne udviklede samarbejdet sig dog til, at gymnasieeleverne deltog lige så meget uden for skoletid som 9. klasserne. Inden finaledagen skulle hver gruppe aflevere en rapport med de væsentligste beregninger for deres projekt.

deformet tag og ellipseformet pool i haven eller en skaterhal med parabelformede vinduer og skaterramper.

Elever fra 9. klasse og 2. g samarbejder

Forløbet var kommet i stand på baggrund af et samarbejde mellem Faaborg Midtfyn Kommune, Midtfyns Gymnasium og de fire folkeskoler i den nordlige del af kommunen: Nordagerskolen, Broskolen, Tingagerskolen og Carl Nielsen Skolen. Eleverne fra 9. klasserne blev delt i grupper på 5–6 elever, 34 grupper i alt. Til hver gruppe var der knyttet to eller tre gymnasieelever. Gruppen skulle udarbejde en model af deres hus, en tegning i passende målestoksforhold, et rum i huset skulle indrettes detaljeret, og der skulle laves en realistisk prisberegning af indretningen af dette rum. Derudover skulle huset indeholde to af i alt elleve matematiske krav som fx: sinusformet tag, parabelformede vinduer, grundplan som en regulær femkant osv. Disse krav var udformet af matematik-

Eleverne tager ansvar

Eleverne vidste fra start, at der var tale om en konkurrence med en tablet til hver i den vindende gruppe. Jeg er ikke i tvivl om, at præmien har været en væsentlig motivationsfaktor. Men ikke mere end at grupperne indbyrdes har hjulpet hinanden meget der, hvor der var brug for det. Det har været en fornøjelse at være lærer i en 9. klasse, hvor eleverne bare knoklede både i timerne og uden for skoletid. Klassen påtog sig som helhed et kæmpe ansvar for at nå at blive færdige og leve op til alle de krav, vi fra projektgruppen havde stillet, og endnu mere at leve op til deres egne krav og forventninger. Grupperne havde hurtigt fået lagt planer for, hvad de skulle gøre, og de gik alle i gang med at få bygget modellen af deres hus. Der blev snakket SÅ meget matematik, både fra den del af klassen, der har nemt ved matematik, men også fra de elever, der normalt ikke finder faget så spændende.

Det var fantastisk at høre en pige sige: „Når vi skal finde midtpunktet på vores grundareal, som er en regulær femkant, kan vi så ikke …", vel at mærke en pige, der som regel ikke bryder sig om matematik. Og det var svært som matematiklærer ikke at gå med armene over hovedet, når en gruppe efter skoletid kommer brasende ind på lærerværelset for at låne målebånd og klinometer. De ville ned for at bestemme, hvor højt Nr. Lyndelse Kirketårn var. Det skulle bruges som udgangspunkt for højden af deres hus. At se dem måle, skrive ned og komme og få hjælp til det der med tangensfunktionen var en fornøjelse.

Modellerne er inspireret af matematikkens verden

Flere grupper gik rundt i skolegården med kegler og kridt for at få et indtryk af størrelsen af deres hus i virkeligheden ud fra det målestoksforhold, de havde valgt. Andre grupper boede nærmest på skolen de sidste uger op til finaledagen. Mange aftner ringede de for at høre, om jeg ville guide dem ud og få sat alarm på. Der blev bygget, regnet og beregnet, malet, fundet på sjove løsninger, ringet for at forhøre sig om priser, lavet de fineste skakternede gulve og bygget de smukkeste lysekroner i et passende målestoksforhold. Der var balsale med spejlvægge, „Nøj, de ville være dyre i virkeligheden", sjove trapper, diverse skulpturer inspireret af matematikkens verden og meget mere. Flere gange i forløbet blev jeg spurgt om ting, jeg ikke anede, hvad jeg skulle svare på, men i fællesskab fandt vi frem til løsninger, der virkede efter hensigten. Forløbet strakte sig over to måneder, dog afbrudt af terminsprøver, praktikuge og efterårsferie. Der var enkelte knap så positive forældrehenvendelser, der gik på, om 11-timersreglen ikke gjaldt for elever. Dog blev de efterfulgt af undskyldninger om, at de nu havde fundet ud af, at det ikke var mig, der krævede, at deres barn skulle være på skolen om aftenen, men noget den pågældende gruppe selv havde bestemt. Det var den gruppe, der senere vandt hele konkurrencen.

Præsentation for eksterne dommere

Endelig oprandt finaledagen, som fandt sted på Midtfyns Gymnasium. Alle 34 grupper mødte spændte op til denne festdag. 9. klasser og gymnasieelever havde i fællesskab ansvar for at få stillet modellen af deres hus op inklusiv tegningerne i målestoksforhold og gjort klar til at præsentere de-res projekt for dommerne. I den indledende runde havde hver gruppe seks minutter til deres præsentation. Dommerne var i denne runde par dannet af en gymnasielærer og en folkeskolelærer. Der blev her lagt vægt på, om alle de matematiske krav var opfyldt, og om rapporten var fyldestgørende. Ni grupper gik videre i finalerunden, hvor dommerpanelet bestod af daværende borgmester for Fåborg Midtfyn, Hans Jørgensen, rektor fra gymnasiet, en bygningssagkyndig og en billedkunstlærer. Her blev de tre bedste projekter valgt ud efter mange og svære beslutninger og præmierne overrakt. Efter en fantastisk festdag med musik, tale og præmieuddeling tog vi hjem med nogle meget glade og trætte elever. Projektet har været en fantastisk oplevelse, som understøtter de spændende muligheder, der ligger i et samarbejde mellem de videregående ungdomsuddannelser og folkeskolen i fremtiden.

Anne Karin Wallace

Bruk av regneark – eleverfaringer

Våren 2011 ble det gjennomført en spørreundersøkelse blant elever i det studiespesialiserende løpet i siste året på videregående skole (Vg3) i Møre og Romsdal (Berg et al., 2012). Fokuset i undersøkelsen var hvordan eleven oppfattet digitale verktøy som en hjelper i læreprosessen, blant annet i realfagene. Resultater fra denne undersøkelsen førte til refleksjon rundt bruken av digitale verktøy i matematikk, spesielt bruken av regneark. Hvordan beskriver forskningslitteraturen at verktøyet kan brukes som støtte for læring? Er dette i overensstemmelse med hvordan elevene opplever nytte av regnearket?

Hvordan regneark kan brukes som støtte for å lære matematikk

Regneark har vært i bruk i større eller mindre grad i matematikkundervisningen i lang tid, og det er skrevet en del både om ulike måter å bruke regnearket på (Calder, 2010; Fuglestad, 2007), hva som motiverer elever til bruk av digitale verktøy generelt (Passey, Rogers, Machell, McHugh og Allaway, 2003), og om hvordan elevene bruker de digitale verktøyene (Goos, Calbrait, Renshaw og Geiger, 2003).

Når man beskriver hvordan digitale verktøy brukes i matematikk, blir bruken ofte klassifisert i to kategorier (Dörfler, 1993). Den ene kategorien er å bruke det digitale verktøyet til å gjøre beregninger raskere enn det vi kan med hoderegning eller med algoritmer og regneoppstillinger. I tillegg kan verktøyet presentere svaret på en ryddig måte. Denne måten å bruke verktøyet på betegnes ofte som «amplifier». I fortsettelsen vil jeg omtale dette som en type verktøybruk som gir en *effektiviseringsgevinst*. Bruken av verktøyet er ikke ment til å gi ny innsikt, og den gir ikke i utgangspunktet bedre forståelse for matematikken eller hjelper til med å finne metoder for å løse et problem. Vi oppnår imidlertid å kunne regne raskere og riktig samt å presentere svaret mer oversiktlig. Regnearket kan definitivt brukes på denne måten. Vi kan for eksempel sette opp budsjett og lønnsberegninger på en ryddig måte, vi kan tegne diverse diagram raskt, og vi kan regne ut gjennomsnitt og standardavvik for en mengde tall på et øyeblikk.

Den andre kategorien er å bruke verktøyet som et hjelpemiddel til å få bedre forståelse knyttet til matematiske problemstillinger. Verktøyet brukes til utforsking, visualisering og til å representere et fenomen på ulike måter, og det er dermed et verktøy som eleven kan bruke for å få ny innsikt. Eksempel på slik bruk av regnearket kan være å bruke det til å utforske algebraiske lover eller statistiske mål, å finne fram til

Anne Karin Wallace
Høgskolen i Molde
anne.k.wallace@himolde.no

mønster og sammenhenger, å se sammenhenger ved å studere ulike diagram og hvordan de endrer seg når tallgrunnlaget endres. Vi bruker regnearkets mulighet til å gjøre mange beregninger raskt og til å lage visuelle framstillinger på en måte som gjør et vi utvikler forståelse for matematiske begrep og sammenhenger. Verktøyet brukes til å utvikle elevens matematikkfaglige kompetanse. Umiddelbar tilbakemelding ved endring av inndata legger til rette for en mer utforskende undervisning med vekt på problemløsning. Eleven behøver ikke fokusere på beregninger, men kan bruke mer tid til å fokusere på matematisk tankegang og forståelse. Denne bruken av det digitale verktøyet går under betegnelsen «reorganizer» (Dörfler, 1993). Jeg vil videre betegne verktøyet som *støtte for læring* når det brukes på denne måten. Det digitale verktøyet brukes av eleven til å utvikle sine mentale modeller, til å omordne eller rekonstruere dem. Dermed kan elevens matematiske forståelse og evne til problemløsning øke. Regnekapasiteten åpner dessuten for muligheter til å jobbe med realistiske datamengder, og kan også på den måten bidra til å øke den faglige forståelsen hos elevene. Verktøyet blir en støtte for læring.

De to eksemplene som følger illustrerer de to måtene å bruke regnearket på.

Mange elever kan å bruke regneark til å regne ut standardavvik når en har oppgitt en del observasjonsverdier. De skriver inn observasjonsverdiene og formelen og har svaret umiddelbart. Da brukes regnearket for å gi en effektiviseringsgevinst. Det er raskt og effektivt å regne ut standardavvik slik, og det blir riktig. Om det å regne ut standardavvik skal ha noen mening, må eleven imidlertid vite at standardavviket forteller oss noe om spredningen i datamaterialet. For å illustrere dette kan eleven endre observasjonsverdiene og ved hjelp av eksperimentering med ulike datasett få erfare sammenhengen mellom spredning i dataene og spredningsmålet, standardavviket. Da bruker vi regnearket som støtte for læring.

En regnearkmodell kan brukes til å regne ut $2 \cdot n$ og 2^n for en del verdier av n. Da brukes den for å gi en effektiviseringsgevinst. Hvis vi lager punktdiagram som illustrerer svarene, vil eleven få et visuelt bilde av at 2^n vokser på en helt annen måte enn $2 \cdot n$. En ekstra måte å representere resultatet av beregningene på kan øke elevens forståelse. Regnearket brukes som støtte for læring.

Vi ser at i mange av de sammenhengene der vi bruker regnearket, er det teknisk sett lite som skal til for at regnearkbruken skal gå fra bare å gi en effektiviseringsgevinst til å være støtte for læring.

Motivasjon for å bruke regneark

En omfattende studie av elevers motivasjon for bruk av digitale verktøy (Passey et al., 2003) viser at det først og fremst er det digitale verktøyets støtte for læring som motiverer elevene til å ta det i bruk. Men effektiviseringsgevinstens rolle som motivasjon øker med elevenes alder. Dette kan ha sammenheng med at de da utsettes for mer testing og prøver der det er viktig å jobbe raskt og å presentere resultatene grundig.

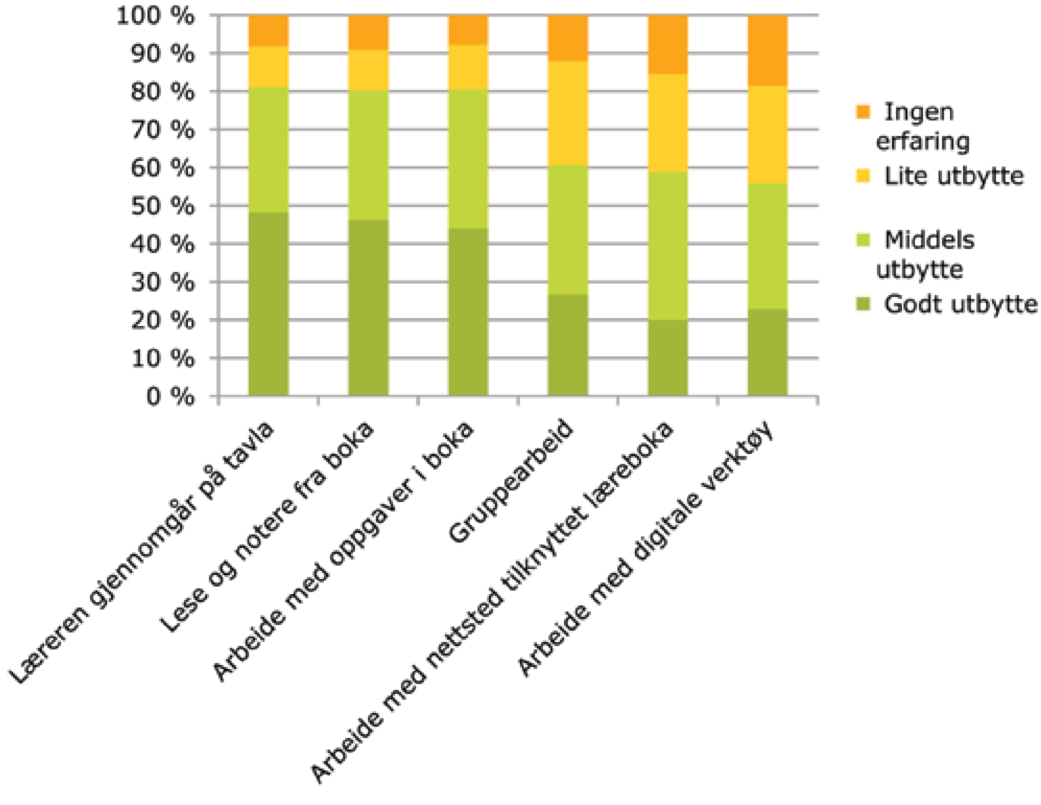
Verktøyets relevans i forhold til framtidig bruk i arbeid eller studier vil også være en faktor som kan motivere elevene til å ta det i bruk. I tilknytning til høyere utdanning rapporterer Osorio og Nieves (2012) at motivasjonen for å bruke digitale verktøy til oppgaveløsing er høyere når verktøykunnskapen er relevant utenfor studiesituasjonen. Ved siden av tekstbehandling og nettleser er regneark blant de typene av programvare som flest av oss stifter bekjentskap med i en eller annen form. I arbeidslivet er mange regnearkmodeller i bruk. Muligheter for å lage enkle og oversiktlige brukergrensesnitt, en stor mengde innebygde funksjoner og muligheter for programmering bidrar til at det kan lages regnearkapplikasjoner for mange ulike bruksområder. Å forstå hvordan en kan bruke en regnearkmodell, å ha forståelse for hvordan utdata i den dynamiske modellen endrer seg når inndata endres, å kunne tolke grafer tilhørende modellen og se sammenheng mellom disse og inndataene er eksempel på ferdigheter knyttet til matematikk som vil være relevante for bruk av regnearkmodeller i arbeidslivet. Vi kan dermed anta at elevene vil oppfatte bruk av regneark i matematikk som nyttig om de ser anvendelsesområder i tilknytning til framtidig arbeid eller høyere utdanning.

Elevperspektiv på bruk av digitale verktøy for læring i matematikk

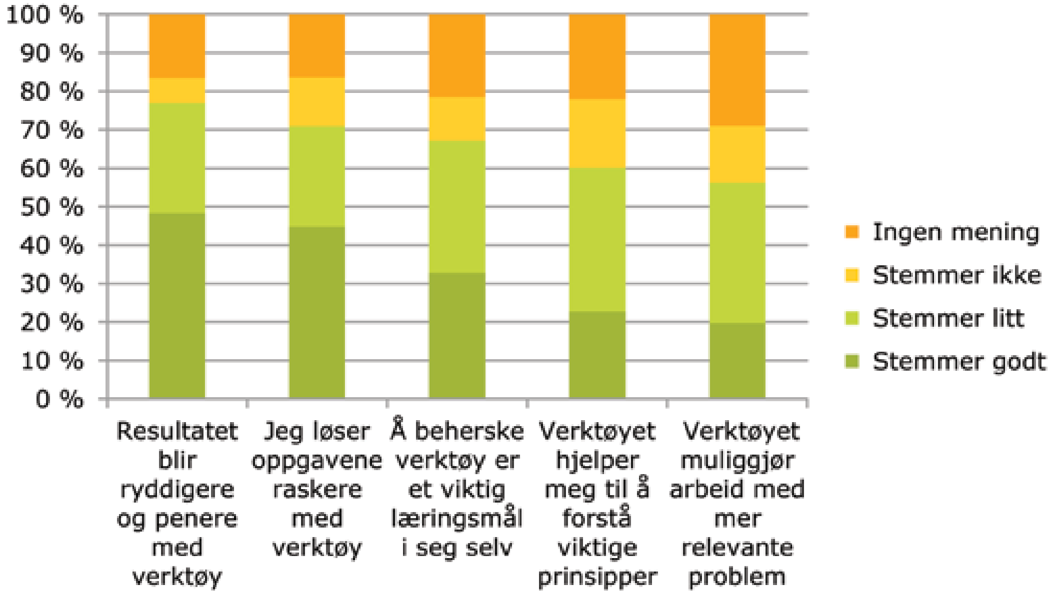
Hvilke vurderinger og erfaringer har elever i spørreundersøkelsen med hensyn til bruk av digitale verktøy når de skal lære matematikk? Det er først og fremst elever som ikke går på studieretning for realfag, som har brukt regneark i videregående skole. Vi ser derfor her på svarene fra godt og vel 300 slike elever. Av disse elevene oppgir 78 % at de har brukt regneark, og 60 % av respondentene sier at de har hatt middels eller godt utbytte av å bruke regneark i matematikk.

I spørreundersøkelsen ble elevene bedt om å ta stilling til utbyttet av ulike metoder de bruker når de lærer nytt stoff. Figur 1 viser at det er de tradisjonelle arbeidsmåtene som oppleves som viktigst: læreren, læreboka og oppgaveløsing. Men de digitale verktøyene er ikke uvesentlige. Arbeidet i en skoletime vil dessuten ofte være en kombinasjon av flere arbeidsmetoder.

Figur 2 viser hva elevene anser som nyttig knyttet til bruken av de digitale verktøyene. Det er utsagnene som dreier seg om presentasjon og om å jobbe raskt som får størst tilslutning. Mer enn 70 % av respondentene mener at påstandene om nytte knyttet til slik bruk stemmer godt eller stemmer litt. Det er altså effektiviseringsgevin-



Figur 1. Elevenes utbytte av ulike metoder for å lære nytt stoff i realfag, n = 331–333.



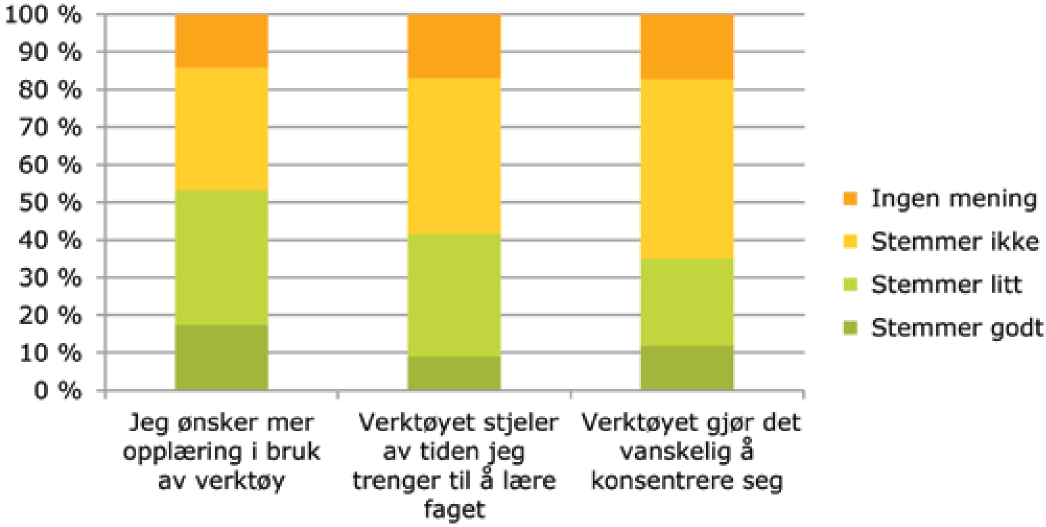
Figur 2. Elevene tar stilling til ulike utsagn om hvorfor digitale verktøy er viktig i realfag, *n* = 310-311.

sten verktøyet gir, som vektlegges som mest nyttig. For å ha noe å presentere må eleven ha kunnskaper og ferdigheter i matematikk. Elevene ser nytten av dataverktøyene når det gjelder å forstå matematikken, om ikke i så stor grad som når det gjelder å få effektiviseringsgevinst. Hele 60 % av elevene mener at påstanden om at verktøyet hjelper til å forstå viktige faglige prinsipper, stemmer godt eller stemmer litt. Andelen som mener at påstanden ikke stemmer, 18 %, er vesentlig mindre, men den er noe større enn for bruk som gir effektiviseringsgevinst. Når det gjelder påstanden om at verktøybruk gjør arbeid med mer relevante problemstillinger mulig, mener 56 % at den stemmer godt eller litt. Andelen av respondentene som ikke har nytte av verktøyet, eller som ikke har noen mening om utbyttet, er noe større for bruken av verktøyet som støtte for læring enn for bruk som gir effektiviseringsgevinst.

Men ser elevene noen ulemper ved de digitale verktøyene? For mange elever går ikke-skolerelaterte PC-aktiviteter i timen ut over skolearbeidet (Berg, Wallace og Aarseth, 2012; Krumsvik, Ludvigsen og Urke, 2011). Figur 3 viser dessuten at 40 % av respondentene mener at det stemmer godt eller litt at selve verktøybruken stjeler av den tiden de trenger til å lære faget. Andelen som er uenig i dette, er imidlertid omtrent like stor. Å bruke digitale verktøy påvirker også konsentrasjonen for noen av respondentene. Omtrent 35 % sier at det stemmer godt eller litt at bruk av digitale verktøy gjør det vanskelig å konsentrere seg, mens nesten 50 % av de spurte mener at verktøyet ikke har negativ påvirkning på konsentrasjonen. Elevsvarene har altså varierte erfaringer når det gjelder negative sider ved verktøybruken. Det samme ser vi når det gjelder verktøyopplæring. Vi ser av figur 3 at 50 % etterspør mer opplæring i bruk av digitale verktøy, mens 1/3 av respondentene ikke ønsker mer opplæring.

Elevsvarene sett i lys av annen forskning

I figur 2 ser vi hvordan elevene oppfatter at digitale verktøy er nyttige i matematikk. Vi kan plassere svarene i tre kategorier: effektiviseringsgevinst (jeg jobber raskere, resultatet blir penere), nytte av å lære verktøyet som sådan, og bruk av verktøyet som støtte for læring (forstå



Figur 3. Elevene tar stilling til utsagn om bruk av digitale verktøy i realfag, *n* = 310–311.

viktige prinsipp, jobbe med relevante problemstillinger). Elevene verdsetter effektiviseringsgevinsten høyest, deretter nytten knyttet til det å kunne selve verktøyet og som nummer tre bruken av verktøyet som støtte for læring. Passey et al. (2003) fant at å lære fagstoff blir ansett som den viktigste motivasjonen for å bruke digitale verktøy, mens «våre» elever verdsetter effektiviseringsgevinsten høyere. En mulig forklaring på disse forskjellene kan være at undervisningen i matematikk i videregående skole er fokusert mot skriftlig eksamen. I eksamenssituasjonen er det effektiviseringsgevinsten verktøyet gir, som benyttes både ved at beregningene går raskt og blir riktige og ved at dataverktøyet kan produsere ryddige framstillinger. Verktøyets rolle knyttet til læring av fagstoff ville muligens scoret høyere tidligere i utdanningsløpet. Passey et al. (2003) viste videre at effektiviseringsgevinsten er mer verdsatt hos de eldste elevene, men rangeringen ble likevel ikke endret med økende alder hos elevene i deres datamateriale.

At verktøyopplæringen i seg selv har nytteverdi, er naturlig når det gjelder regneark. Mange av elevene bruker regnearkmodeller i andre skolefag (markedsføring, sosiologi, økonomistyring), og de er klar over at dette er programvare som er utbredt i arbeidslivet. Dermed stemmer resultatet her overens med resultatene fra undersøkelser blant studenter i høyere utdanning gjort av Osorio og Nieves (2012). Studentene ser stor nytte av å bruke programvare som er vanlig brukt i næringslivet. Elevene i undersøkelsen er i sitt siste semester i videregående skole, og mange har allerede arbeidserfaring.

Elevene gir klart uttrykk for lærerens sentrale rolle når de skal lære nytt stoff. Vi kan anta at lærerens tilrettelegging har betydning for elevenes utbytte av dataverktøyet i læringsarbeidet. Andre undersøkelser viser at lærerens rolle synes å være viktig når det gjelder å bruke regneark på en måte som støtter læring (Calder, 2010). Det trengs veiledning og tilrettelegging fra lærerens side for at utforsking og visualisering skal føre til refleksjon og læring. Eleven må ha tilstrekkelige ferdigheter i bruk av regnearket for å kunne nyttiggjøre seg verktøyet, men utviklingen av ferdighetene bør knyttes til arbeid med matematiske problem og drives av elevens behov for verktøykunnskap i denne sammenheng.

Majoriteten av elevene er positive til de digitale verktøyenes rolle i læringsarbeidet, de er fornøyd med lærerens vektlegging av digitale verktøy, de er motivert for å bruke verktøyet i læringsarbeidet, og de ønsker mer verktøyopplæring. Utfordringen, både til lærere og elever, er å ha fokus på verktøyet som støtte for læring i en skolehverdag der eksamensprestasjonene i stor grad er styrende for valg av aktiviteter.

Referanser

Berg, C., Wallace, A. & Aarseth, T. (2012). *IKT som hjelper og tidstyv i videregående skole. Elevperspektiv på bruk av IKT i norsk og realfag.* Høgskolen i Molde / Møreforsking Arbeidsnotat 2012:2. Hentet fra brage.bibsys.no/xmlui/handle/11250/153711.

Calder, N. (2010). Affordances of Spreadsheets In Mathematical Investigation: Potentialities For Learning. *Spreadsheets in Education (eJSiE), 3*(3), Article 4. Hentet fra epublications.bond.edu.au/ejsie/vol3/iss3/4.

Dörfler, W. (1993). Computer use and the views of the mind. I C. Keitel & K. Ruthven (Red.), *Learning from computers: mathematics education and technology / NATO Advanced Research Workshop on Mathematics Education and Technology* (1993: *Villard-de-Lans, France*) (s. 159–186). Berlin: Springer.

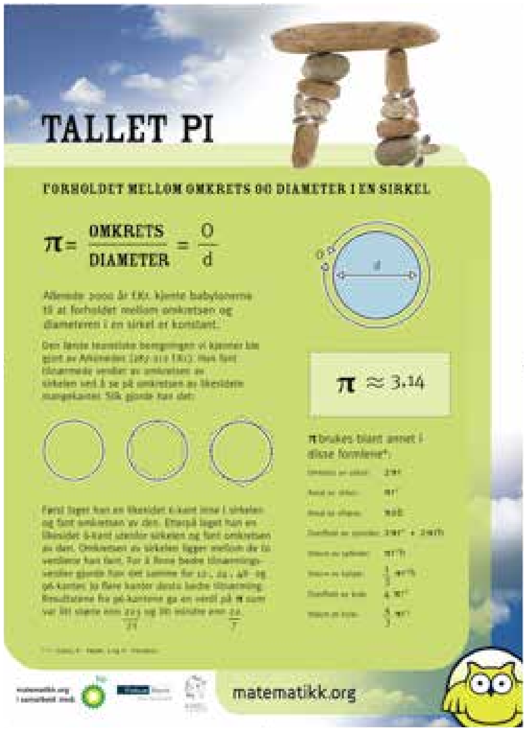
Passey, D., Rogers, C. Machell, J., McHugh, G. & Allaway, D. (2003). *The Motivational Effect of ICT on Pupils.* Hentet fra www.canterbury.ac.uk/education/protected/spss/docs/motivational-effect-ict-brief.pdf.

Fuglestad, A. (2007). Teaching and teacher's competence with ICT in mathematics in a community of inquiry. I J. Woo, H. Lew, K. Park & D. Seo. (Red.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (2. utg., s. 249–256). Seoul: PME

Goos, M., Calbrait, P., Renshaw, P. & Geiger, V. (2003). Perspectives on technology mediated learning in secondary school mathematics classrooms. *Journal of Mathematical Behaviour, 22*(2003), 73–89.

Krumsvik, R., Ludvigsen, K. & Urke, H. (2011). *Klasseleiing og IKT i vidaregåande opplæring. Ei evaluering av LanSchool og klasseleiing i teknologitette klasserom* (DLC-rapport 1/2011). Hentet fra folk.uib.no/pprrk/Forskingsrapport_klasseleiing_og_IKT.pdf

Osorio, J. & Nieves, J. (2012). *Managing the challenge: involving future professionals into their own (life-long) learning strategy*. Presentert på IFIP Working Conference, Addressing educational challenges: the role of ICT. Manchester, UK



Anders Kluge, Jan Arild Dolonen

Algebra som spill

Det er stor optimisme når det gjelder bruk av digitale spill i læring. Vi undersøker hvordan et populært læringsspill om algebra klarer seg sammenliknet med en digital læringsressurs som bruker en mer standardisert oppgaveløsning. Hva slags resultater oppnår elevene med de forskjellige læringsressursene? Hvordan bygger elevene kunnskap i møte med læringsressursene og i samhandling med læreren? Denne artikkelen tar utgangspunkt i av en rapport som er åpent tilgjengelig. Lenken til rapporten finnes i slutten av artikkelen.

Anders Kluge
Universitetet i Oslo
anders.kluge@iped.uio.no

Jan Arild Dolonen
Universitetet i Oslo
j.a.dolonen@uv.uio.no

Kluge og Dolonen sin artikkel, *Algebra som spill*, er fagfellevurdert og akseptert som nivå 1 publikasjon. Artikkelen er den første på nivå 1 som Tangenten trykker. Artikler som blir akseptert som nivå 1, skal presentere ny innsikt, være i en form som gjør resultatene anvendelige i ny forskning og den skal være vurdert av granskere utenfor redaksjonen. Tangenten ønsker å være et sted der læreres og forskeres perspektiv på matematikkopplæring kan møtes og har derfor åpnet opp for praksisrelaterte forskningsartikler. Les mer i retningslinjene: www.caspar.no/tangenten/fagfelle.pdf

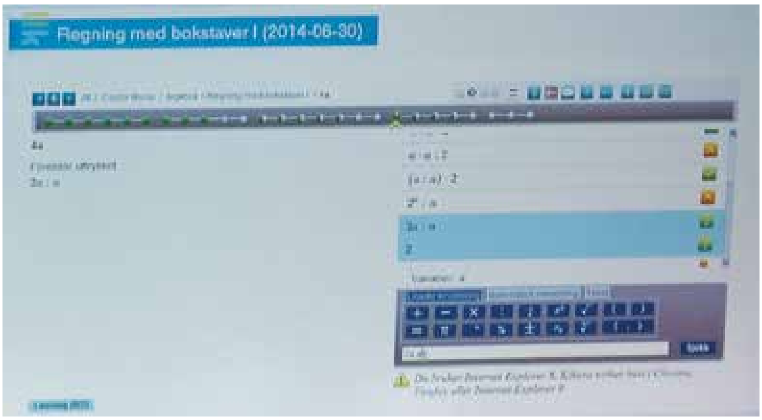
Spill og læring

Sterk interesse for spill blant unge har også stimulert en forskningsinteresse for design og bruk av spill som læringsmateriale. Ifølge medietilsynet bruker barn og unge i aldersgruppen 9–16 år gjennomsnittlig 123 minutter per dag på spill.[1] I en undersøkelse om gutters spilling går det fram at 44 % av gutter 12–17 år spiller mer enn 4 timer på en fridag, og på hverdager spiller 47 % av gutter i denne aldersgruppen mer enn 2 timer.[2] Når disse tallene sammenstilles med det engasjementet som observeres hos unge, blir det relevant å se på muligheter for å utnytte interesse og engasjement også til læringsprosesser.

På vegne av Utdanningsdirektoratet blir det i forskningsprosjektet ARK&APP (2013–2015) gjennomført kvalitative casestudier der vi blant annet studerer hvordan læringsressurser benyttes i matematikk på ungdomsskolen. I casen fra 8. klasse som det rapporteres om her, stiller vi (forfatterne) oss to spørsmål: 1) Hva slags resultater gir læring av matematikk med et digitalt spill i forhold til læring med andre digitale læringsressurser? 2) Hvilke aktiviteter og samtaler som er relevante for læring av algebra, kan vi observere når elevene bruker et spill, og når de bruker en mer tradisjonelt oppbygd digital læringsressurs? For å få et utgangspunkt for å studere spill og læring av algebra har vi gjennomgått av noen av de viktigste forskningsresultatene internasjonalt som vi gir en kortversjon av nedenfor.

Stealth learning (Ke, 2008) betegner en måte å fremme læring med spill på. Her blir det viktig å skjule det at det faktisk er læringsprosesser man ønsker, og å legge vekt på å fremme engasjement hos elevene. Stealt learning betegner prosesser der spillerens mål og læring ligger i spillaktiviteten, der læringsprosesser «henger på» aktiviteten, men ikke oppleves som definerte læringsprosesser eksempelvis rettet mot algebra. Habgood og Ainsworth (2011) rapporterer for eksempel om gode resultater med stealth learning i et spill om brøk, et såkalt kampspill eller *first person shooter*.

Flere problematiske sider trekkes fram når det gjelder spill og læring. Det kan være vanskelig å innpasse spill-logikken i skolen (Connolly et al., 2012), noen spill kan stimulere en prøve-og-feile-aktivitet som ikke nødvendigvis fremmer læring i tråd med mål i skolematematikken (Ke 2008). Spill kan også fremme læringsprosesser som er spill-interne (Young et al., 2012). Sistnevnte poeng kan f.eks. gjøre det vanskelig å skape overføring fra spillet til den kunnskapen skolen og læreplanen krever.



Figur 1

Granic et al (2014) fremholder at det i forskningsstudier viser seg vanskelig å komme fram til en omforent definisjon av hva et spill er. Flere understreker som sentralt ved en spillopplevelse at den må være frivillig (se bl.a. Klopfer et al., 2009), noe som vil ekskludere systematisk bruk av spill i skolen. Det har ledet til termen *serious games*, men som igjen introduserer nye problemer (for en diskusjon av dette begrepet, se Susi et al., 2007). Spillbasert læring som begrep (*Game-Based Learning*) retter fokus over på de læringsrelevante aktivitetene som er det sentrale i denne artikkelen der læring knyttes til skolens undervisningstradisjon.

I denne artikkelen undersøker vi hvordan aktiviteter og språk fremmer bygging av kunnskap i samhandling mellom elever, med læreren og med digitale læringsressurser. Et sosiokulturelt læringsperspektiv legges til grunn, læring forstås som grunnleggende sosialt, og fortolket gjennom kulturhistoriske redskaper (Vygotsky, 1978; Säljö, 2001). Læring sees som knyttet til situasjonen den foregår i, og med de institusjonelle rammene og uformelle og formelle regler og normer som eksisterer for aktiviteten. I dette sosiokulturelle perspektivet studeres de konstruktive aspektene ved læringsprosessen, dvs. elevenes aktivitet og hvordan ytringer blir et uttrykk for kunnskapsbygging.

Artikkelen bygger på en studie som er rettet mot bruken av to forskjellige digitale læringsressurser, Kikora og DragonBox. Læreren ønsket å benytte disse for å variere undervisningen. Det ga oss muligheten til å studere og sammenlikne de to læringsressursene og hvordan de bidro til engasjement og læring. Vi skal gi en kort beskrivelse av Kikora og DragonBox med vekt på det som er mest relevant for vår undersøkelse.

Kikora

Kikora er et digitalt læremiddel som har lagt seg veldig tett opp til dagens praksis i skolen for oppgaveløsning i algebra. Kikora følger for en stor del standard lærebokforløp, med presentasjon av oppgaver og en struktur for løsningen av dem. Elevene får fram én oppgave om gangen. For å besvare oppgavene får de tilgjengelig et spesialisert kontrollpanel på skjermen. Panelet kan likne på knappene på en kalkulator; kvadratrot, eksponent, parenteser, de fire regneartene med mer (figur 1).

Ved å legge inn forslag får elevene umiddelbar tilbakemelding. Det gjelder også mellomregningen, slik at elevene får en respons på trinnene i utregningen etter hvert som de legger inn svarene. De får kreditert riktig svar selv om de hopper rett til det ved for eksempel å gjette uten å gå veien om mellomtrinnene i utregningen. Riktige svar gir en grønn hake, galt gir et rødt kryss, og ved avslutningen av et delkapittel gis det en gratulasjon.

Elevene kan også spørre etter et forslag til neste trinn i utregningen ved å trykke på en knapp. Det kan fungere som et hint om hvordan de skal fortsette fram mot et eventuelt riktig resultat. I enkelte tilfeller gir også et galt svar et hint til veien videre. Det skjer på syntaktisk nivå, for eksempel: «Vis hva du regner ved å skrive enten A = eller X = foran utregningen.» Det gis også meldinger hvis det går for lenge uten aktivitet: («Du må skrive noe …»)

Presentasjonen av oppgavene likner den elevene finner i læreboka, og den de får fra læreren. De kan også finne trinn for løsning i læreboka tilsvarende det de finner i verktøyet, men med Kikora kan de gradvis få se ett og ett trinn framover og selv velge når de ønsker å presentere sin egen mellomregning, og/eller om de vil se hva verktøyet har å tilby som forslag. Trinnene i Kikora representerer gjerne den minst mulige endringen fram mot en løsning, noe som gir både en detaljering av løsningsforslag og en potensiell strukturering for elevene.

Figur 2

DragonBox

DragonBox er et algebraspill og faller inn under beskrivelser av *serious games*. I spillet kan elevene manipulere elementer i en likning etter bestemte regler. Reglene endrer seg noe under spillets gang ved at mulighetene for hva elevene kan gjøre, utvider seg etter hvert som likningene blir mer avanserte. Reglene introduseres som «nye evner» og animeres. Symbolene utvikler seg også fra figurative til mer matematiske. Det som for eksempel i begynnelsen av kapittel 1 er to felt med figurer som ser ut som fisker, insekter eller terninger (figur 2), på slutten likninger av x, konstanter som bokstaver, tall og matematiske tegn.

Spillet består av to felt som tilsvarer de to sidene i en likning, og et «lager» plassert under de to feltene består av objekter som kan trekkes ut på de to feltene. Spillet er organisert i kapitler med stigende vanskegrad. Elevene må følge sekvensen i kapitler og brett, men kan spille om igjen eller gå tilbake til tidligere brett. Det gis en oversikt over hvor mange trekk brukeren har brukt på hvert brett, og hvor mange som anses som det riktige på dette brettet. Innenfor hvert kapittel er det 20 brett.

Et brett avsluttes når x-en/boksen står alene i et felt. To andre evalueringskriterier er om det er brukt så mange trekk som er satt som riktig antall, og om det er overskytende kort som kunne vært eliminert (resulterer i en «æsj»-

	Førtest: Gjennomsnittlig resultat (standardavvik)	Ettertest: Gjennomsnittlig resultat (standardavvik)	Gjennomsnittlig forbedring
Elevene som brukte Kikora	5,17 (2,01)	9,91 (2,43)	4,74
Elevene som brukte DragonBox	5,21 (3,36)	7,76 (3,66)	2,55

Tabell 1: Resultater på før- og ettertest

melding på de objektene som skulle vært eliminert, motsatsen til «nam» hvis alt er i orden). Spilleren får beskjed om hvilke av kriteriene som er oppfylt, og får deretter én til tre stjerner. Stjernene vil også finnes på oversikten over alle brettene i et kapittel.

Et objekt kan flyttes inn i en likning i samsvar med de fire regneartene. Det kan

1) legges til eller trekkes fra avhengig av hvordan brukeren har satt fortegnet i lageret, da må det plasseres på en åpen del av feltet
2) fungere som en multiplikator ved at det settes inntil et annet objekt
3) brukes som en divisor ved at det settes under et objekt og dermed skaper en brøkstrek eller en multiplikasjon av en eksisterende nevner

Når et objekt trekkes inn i et felt, aktiviseres algoritmiske regler. Når brukeren legger til eller trekker fra et objekt på et felt (en side av likningen), åpner det seg en nedsenkning på det andre feltet (den andre siden av likningen) som viser at et tilsvarende objekt skal plasseres der. Det samme gjelder for multiplikasjon og divisjon, men da får alle leddene et nedsenket felt som må fylles med tilsvarende objekt (slik det er ifølge algoritmiske regler, se figur 2). Det er ikke mulig å gjøre noe annet i spillet før operasjonen med å fylle en slik nedsenkning er gjort.

DragonBox tilbyr en annen vei inn til algebra sammenliknet med læreboka og Kikora. Spillelementet er tydelig, elevene får reglene presentert, men i et spill-orientert språk av ikke-matematiske symboler. Gradvis går spillet over til mer standardiserte matematiske symboler. Etter først å ha håndtert premissene i spillet må elevene også være med på denne «oversettelsen» og se regler og symboler som uttrykk for algebra.

Om undersøkelsen

Vurdert som læremidler for skolen representerer Kikora og DragonBox to ytterpunkter på en skala. Kikora legger seg tett opptil standardisert algebra med løsning av oppgaver trinn for trinn. DragonBox er et spill med poengsystem og direkte manipulering av symboler, og det er delvis et eksempel på *stealth learning* (Ke, 2008) der noen av de kjente vanskelighetene ved algebra er mer skjult, f.eks. de abstrakte symbolene, mens andre deler er mer eksplisitte, som det å passe på å gjøre de samme operasjonene på hver side likningen (ved addisjon/subtraksjon) og på hvert ledd (ved multiplikasjon/divisjon).

Vi observerte en klasse på 75 elever på 8. trinn som arbeidet med algebra gjennom en fireukers periode (totalt 8 klokketimer). Klassen på 75 elever ble delt i to; den ene halvparten brukte DragonBox i sitt gruppearbeid, den andre brukte Kikora. En førtest og en likeverdig[3] ettertest dokumenterte elevenes resultatforbedring i algebra. Det ble foretatt videoobservasjon av fire elevpar (to par i hver halvpart) som ble fulgt gjennom hele prosessen og video av plenumsundervisningen (totalt 25 timer). Omtrent halvparten av tiden gikk med til plenumsundervisning, og omtrent halvparten til gruppearbeid med de digitale læringsressursene. Plenumsundervisningen var tilnærmet likt utført av samme lærer og med samme opplegg. Læreren presenterte oppgaver på tavla, gjerne med delvise løsninger, og stilte spørsmål til elevene, for det meste åpent ut i klassen, men i noen tilfeller også direkte til elevene. Det identiske opplegget mellom de to halvdelene av klassen ga muligheter for å undersøke forskjellene som oppstod som et resultat av bruken av de to læringsressursene, Kikora og DragonBox.

Undersøkelsen resulterte i omkring 25 timers videomateriale, der ca. 12 timer knytter seg til felles undervisning og ca. 10 timer viser elever som jobber i par enten med Kikora eller DragonBox. Vi gjorde også intervjuer med åtte elever og med læreren, noe som resulterte i ca. tre timers videomateriale. Gjennom observasjoner på stedet, feltnotater og gjennomgang av videomaterialet (Derry et al. 2010) søkte vi forklaringer på de forskjellene som framkom i testene. For samarbeidet i par identifiserte vi noen eksempler på samtaler og aktiviteter som vi fant typiske, og de er transkribert nedenfor. Kombinasjonen av kvantitative mål gjennom tester og kvalitative observasjoner gjør at vi kan identifisere forskjeller i elevenes læringsutbytte slik det måles i testene, og kombinere det med detaljstudier av aktiviteter og samtaler.

Før- og ettertest

For å finne et mål på hva elevene lærte i løpet av prosessen, ble det gjennomført en test før elevene begynte med algebraperioden, og en likeverdig test etterpå. Testene var utviklet sammen med læreren og var basert på læreboka og TIMSS-tester[4]. Førtesten viste knapt målbare forskjeller mellom de to halvdelene av klassen. Hvert av de åtte spørsmålene ga 0–2 poeng slik at maksimum for oppnåelige poeng var 16.

Som tabell 1 viser, var det relativt stor forskjell i resultatforbedringen mellom elevene som brukte Kikora i gruppearbeidet, og elevene som brukte DragonBox.[5] Resultat er gyldig med strenge statistiske mål for signifikans ($p < 0{,}01$). Vurderingen av poenggiving er gjort av læreren og en forsker med en overenstemmelse (såkalt *inter-rater reliability*) på 95,4 %.

For eksempel var spørsmål 2 i testene av typen «Skriv følgende uttrykk så enkelt som mulig» med henholdsvis $3x + 2x + 6x$ og $2x + 3x + 8x$ som oppgaver på førtest og ettertest. Her hadde DragonBox en poengforbedring på gjennomsnittlig 18 prosentpoeng (fra 12 % til 30 % av maksverdi), mens Kikora-elevene hadde en gjennomsnittlig forbedring på 51 prosentpoeng (fra 20 % til 71 % av maksverdi).

Vi var overrasket over at resultatet viste så tydelig forskjell. I plenum hadde de to delene av klassen halvparten av de åtte timene med samme lærer og et identisk opplegg. En tilleggsdimensjon var at vi observere at elevene som brukte DragonBox, ga uttrykk for langt mer entusiasme underveis ved engasjerte diskusjoner med hverandre og intensitet i bruksmønsteret. De brukte også mer tid i læringsressursen ved at de langt sjeldnere ble distrahert eller gikk lei og begynte med andre ting slik Kikora-elevene gjorde. Teknologien var også på DragonBox-elevenes side tidsmessig fordi de jobbet på iPad. Det gjorde at DragonBox-elevene til sammen fikk nesten en time (58 minutter) mer tid i den digitale læringsressursen enn de som brukte det PC-baserte Kikora, der mye tid gikk med til å koble opp maskiner, starte dem og få dem koblet på nett. Totalt sett gjorde dette at Kikora-elevene brukte 43 % av tiden totalt til gruppearbeid med læringsverktøyet, mens DragonBox-elevene brukte 55 % av tiden til gruppearbeid med spillet. Dette gjorde oss nysgjerrige på å studere hva som skjedde i prosessen mellom de to testene. For å finne ut av det konsentrerte vi oss om elevenes arbeid i par og analyse av disse situasjonene.

Hvordan foregikk bruk av Kikora og DragonBox?

Med observasjoner og videomateriale fra plenumssesjonene og gruppearbeidet generelt og med video av utvalgte elevpar kunne vi analysere prosessene elevene gikk gjennom i algebra-prosjektet. Generelt kunne vi observere at arbeidet i par virket produktivt, og vi dokumenterte ved transkripsjon av videomateriale at elevene diskuterte med hverandre og hadde samtaler rettet mot temaet de arbeidet med, både om oppgaveløsning og teknologibruk.[5] Det var likevel tydelige forskjeller i samtalene hos elevene som brukte henholdsvis Kikora og DragonBox, både elevene imellom og mellom elevene og læreren når han gikk rundt og veiledet.

DragonBox var åpenbart mer engasjerende enn Kikora. Elevene tok seg nesten ikke pauser mens de spilte DagonBox, mens Kikora-elevene søkte mer kontakt med andre i klassen eller tok seg pauser på andre måter. Nedenfor refererer vi korte utdrag av samtaler der ett elevpar brukte Kikora og et annet par brukte DragonBox. De er plukket ut som typiske eksempler på samtaler mellom elevene og lærerne om begreper ved bruk av læringsressursene.

I samtalen nedenfor skal Ida og Anne forenkle uttrykket 2a/a i Kikora. Læreren går en runde til elevparene for å veilede:

1. Ida: Uhm... Hvis vi tar ... 2
2. Anne: Opphøyd i ...
3. Ida: Annen...
4. Anne: Er det ikke ... a?
5. Ida: Nei, det var feil.
   (Her får de svaret «2» fra Kikora etter å ha klikket på svar-knappen.)

…

6. Ida: Bare 2?
7. Lærer: Mmm (bekreftende).
8. Anne: Ja, men hvordan kan det blir riktig?
9. Lærer: Dere kan få ... Hvis dere setter opp ... Det er lurt å ha kladdeboka ved siden av.
10. Anne: Det har vi.
11. Lærer: Hvis dere setter opp en brøkstrek, så kan dere skrive det som 2a og så brøkstrek og så a under. Enig?
12. Anne: Ja.
13. Lærer: Mmm (bekreftende). Hvis dere har en kladdebok nå.
14. Anne: Ja det er, det er riktig, men... (åpner kladdeboka).
15. Ida (ved PC-en, henvendt til lærer): Ok, nå har jeg skrevet ...
16. Lærer (henvendt til Anne og kladdeboka): Og så går det an å forkorte litt når du har med brøk å gjøre.

I begynnelsen av denne episoden bringer elevene inn eksponent, som ikke er relevant. Etter å ha bedt om svar fra Kikora er de raske til å konkludere med at eksponent ikke er riktig her (ytring 5). De blir utfordret av at svaret er uventet (ytring 6 og 8), og læreren anbefaler dem å ta i bruk de hjelpemidlene de kjenner – papir og blyant – og regne stykket gjennom i kladdeboka (9 og 13). Han veileder dem gjennom arbeidet med å sette opp stykket på standardform, viser til forkorting som metode (og begrep) (16), og siden de allerede har løsningen som Kikora har gitt dem, finner de ut av forkortingen som gjør at de kommer dit.

Ved å stille opp stykket tradisjonelt med brøkstrek og nevne forkorting av uttrykk, gir læreren her elevene verktøy som ligger tett opptil et repertoar for problemløsning som de allerede kjenner. Læreren bygger bro over problemet med de ressursene han har tilgjengelig i situasjonen. Dette er verktøy og oppsett som er nær eller like det elevene kjenner fra før, og som befinner seg i det som kalles elevenes nærmeste utviklingssone i sosiokulturell læringsteori (Vygotsky 1978). Episoden over tyder på at totalsituasjonen de får, med veiledning fra en lærer som bruker standard algebrabegreper som brøkstrek og forkorting, sammen med systemet som gir dem svaret, samt kjente hjelpemidler, ser ut til å være det som bringer dem fra et galt utgangspunkt med eksponent til en forståelse av hva slags fremgangsmåte som gir det riktige svaret. Dette så vi gjenta seg hos de andre gruppene som brukte Kikora.

Nedenfor viser vi en samtalesekvens der elevene bruker DragonBox. Den er illustrerende for hvordan vi så bruken av dette spillet i klasserommet. Elevene skal eliminere en ettpunkts terning fra én av sidene i en simulert likning i spillet (sirkelen det henvises til, er en virvel som representerer 0):

1. Lærer: Og så må dere huske på hva var det var dere gjorde når dere på en måte ville flytte og bytte (peker på symbolene i uttrykket i høyre felt) for å få opp ting på andre steder.
2. Eli: Men ikke sant ... når vi gjør det, da blir det til en sånn sirkel eller sånn prikk.
3. Liv: Terning.
4. Eli: Terning ja, med én prikk på.
5. Lærer: Mmm (bekreftende).
6. Eli: Og så kommer det en til. (Det er funksjonen som viser at det må legges til en lik terning på den andre siden for å balansere «likningen».)
7. Lærer: Ja.
8. Eli: Og så vil den ikke vekk.
9. Lærer: Nei.
10. Eli: Nei (begge jentene ler). Uhm.
11. Liv: Skal vi bare prøve noe sånt, da? (Jentene prøver å flytte noen symboler fra lageret til begge feltene, men virker rådløse.)

Her bruker verken elevene eller læreren de standardiserte begrepene i matematikken som brøkstrek eller tall slik vi så det ved bruk av Kikora. Det er ikke snakk om «sider av en likning» som må bli gjenstand for de samme operasjonene, noe som kunne vært relevant her. DragonBox har et symbolspråk og problemløsningsmetoder som representerer en ny matematikkverden for elever og lærere. Denne matematikkverdenen transformeres etter hvert til mer formelle symboler og metoder slik vi kjenner dem fra lærebøker. Variasjonen i symboler og metoder for hver oppgave og hvert brett gjør det imidlertid vanskelig for både elever og lærer å være presis i språkbruken når de snakker matematikk. Læreren nevner «ting» (ytring 1), elevene «prikker» (ytring 2), «sånn sirkel» (0-symbolet i spillet) (ytring 2) og «terning» (ytring 3). Observasjonene vi gjorde, tyder også på at en del av elevene, men ikke alle, går over til en spill-liknende modus preget av ureflektert prøving og feiling. Elever og lærer benytter seg ikke av etablerte praksiser i matematikk når de bruker DragonBox, og samtalen over, som var representativ for en veiledersamtale læreren hadde med elevene, tyder på at denne programverdenen ikke enkelt lar seg overføre til for eksempel kladdebok eller tavle. (En fortelling fra en lærer som fikk til en vellykket overføring, er å finne på www.caspar.no/tangenten/2013/spurkland0213.pdf.)

Læring og engasjement med forskjellige hjelpemidler

Det var klare forskjeller i elevenes engasjement og i resultatene de oppnådde ved bruk av Kikora og DragonBox. I vår undersøkelse gikk engasjement og læringsutbytte vist i tester i hver sin retning. I bruk av læringsspillet DragonBox var engasjementet høyt og nærmest kontinuerlig. Det er sjelden i matematikktimer å oppleve at alle elever er fokusert, at de er det gjennom hele timen, og til og med i enkelte tilfeller vil holde på lenger. Bruken av Kikora, derimot, skilte seg ikke så mye i struktur fra vanlig oppgaveløsning med papir og blyant, og skapte ikke mer engasjement enn det vi kan si er sammenlignbart med standard oppgaveløsning i en klasse på ungdomsskolen. Engasjement lar seg imidlertid ikke omsette til skolerelevante læringsprosesser uten videre. Forskjellen i læringsutbytte slik det ble målt i testene, gikk sterkt og signifikant i Kikoras favør. Resultatene på testen etter algebraperioden var tydelig bedre for Kikora-elevene, og forbedringen var gjennomsnittlig nesten dobbelt så høy hos DragonBox-elevene (4,74 mot 2,55 i poeng).

Noe av det mest interessante i undersøkelsen dreier seg etter vårt syn om hvordan Kikora og DragonBox muliggjorde, men også begrenset, interaksjonen mellom lærer, elev og teknologi. DragonBox' symboler og metoder for problemløsning gjorde at elever og lærer ikke fikk støtte av det formalspråket som eksisterer for algebra, og som er det de blir testet på i skolen. Verken lærer eller elever tok i bruk matematikkspråket ved bruk av DragonBox, slik at det ikke ble et godt samspill mellom elevenes eksisterende kunnskap og begreper, og uttrykksformene og interaksjonen i DragonBox. I Kikora hadde derimot læreren et velkjent matematisk språk og et repertoar for å hjelpe elevene når de sto fast, men læringsressursen tilførte lite nytt sammenliknet med vanlig oppgaveløsning. Det er også viktig å merke seg hvordan DragonBox for en stor del beveger seg langs andre uttrykksformer enn det elevene blir testet på ved prøver, og det de formelle læringsmålene uttrykker.

Long & Aleven (2014) finner liknende resultater som i vår studie. De sammenlikner også DragonBox med en annen læringsressurs, og de finner at selv om elevene gjennomsnittlig løser fire ganger så mange likninger med DragonBox, er det skolerelevante læringsutbyttet dårligere enn med læringsressursen som de sammenlikner med. Ressursen har likhetstrekk med Kikora og standard algebra. Forfatterne konkluderer med at den læringen som utvilsomt skjer i spillet, i denne studien ikke lar seg overføre til standard likningsløsning. Dette aktualiserer diskusjonen om mulighetene for spill i skolen. Hvordan designe spill som ikke bare gjør elevene flinkere til å spille spill, men også fremmer skolerelevant læring? Det reiser også grunnleggende spørsmål ved hvordan (data)spill kan inngå i en skolesammenheng. Er frivillighetselementet i spillopplevelsen så grunnleggende at selv spill som potensielt kan gi læringseffekt, vanskelig kan brukes i skolen? Elevene i vår studie ga uttrykk for at de syntes det var «rart» å spille spill på skolen, og utfordringen med å innpasse relevante spill i et læringsforløp og gjøre dem relevante for læringsplanene er like stor som utfordringen med å designe gode og relevante spill.

DragonBox tilnærming til algebralæring kan kategoriseres som *stealth learning* (Ke 2008). Denne tilnærming til Læring med IKT er ikke styrket i denne studien. Dragon box gir engasjement, men resultatene tyder på at engasjementet ikke videreforedles til gode læringsprosesser. Er det mer produktivt å designe engasjerende elementer inn i læringsressurser som vi vet er relevante for skolen? Slik tilnærming i design av læringsressurser kalles ofte *gamification* eller «spillifisering» og vokser nå som område for forskning, utvikling og utprøving i skoler i mange deler av verden. Da er det selvfølgelig viktig å huske at læringsressursene, uansett hvor relevante, gode og engasjerende de er, bare er en del av forutsetningene for gode læringsprosesser i skolen.

Fullstendig versjon av rapporten finnes her: www.uv.uio.no/iped/forskning/prosjekter/ark-app/publikasjoner/algebra.html

Mer om prosjektet og tilgang til resten av rapportene her: www.uv.uio.no/iped/forskning/prosjekter/ark-app/

Noter

1 www.medietilsynet.no/Documents/Barn%20og%20mediers%C3%B8kelsene/Rapport_Barnogmedier_2014.pdf

2 www.medietilsynet.no/Dataspill/500-gutter-om-dataspill/

3 For at elevene ikke skulle huske svarene og bruke førtesten som en trening til ettertesten endret vi spørsmålene noe, men marginalt. Begge testene finnes i sin helhet i rapportens vedlegg.

4 Se www.timss.no/

5 Se detaljer i rapporten: www.uv.uio.no/iped/forskning/prosjekter/ark-app/publikasjoner/algebra.html

Referanser

Connolly T. M., Boyle E. A., MacArthur E., Hainey T., & Boyle J. M. (2012). A systematic literature review of empirical evidence on computer games and serious games. *Computers & Education, 59*(2), 661–686. dx.doi.org/10.1016/j.compedu.2012.03.004.

(fortsettes side 44)

Salman Khan, fornyar eller bakstrevar?

Dag Torvanger

Dei korte videoane frå Khan-akademiet har blitt stadig meir populære dei seinare åra. Dei kan finnast på YouTube eller andre nettstadar ved eit enkelt søk. Videoane er altså svært lett tilgjengelege.

Formatet på kvar video er enkelt. Det kjem opp eit svart felt, som ei tavle, og instruktøren, Salman Khan sjølv, forklarer, teiknar og reknar. Men alt vi ser, er tavla og det som blir skrive på henne. Instruktøren sjølv opplever vi berre gjennom stemma som forklarer. Khan skriv med si eiga ufullkomne handskrift og teiknar sine eigne ufullkomne figurar. Dette er low-tech.

Pytagoras' setning kan vere eit godt eksempel på korleis Khan framstiller stoffet (søk på «The Pythagorean theorem» på YouTube for å finne videoen). Han begynner med å definere ulike omgrep som katet og hypotenus, før han viser bruken av Pytagoras' setning i eit par enkle tilfelle.

Dag Torvanger
Universitetet i Stavanger
dag.torvanger@uis.no

Noko av det første eg legg merke til når videoen startar, er korleis tekst og bilde går hand i hand heile vegen i Khan sine forklaringar. Omgrep som hypotenus og rett vinkel blir teikna og forklarte parallelt med at han snakkar om dei. Lyttaren får ingen sjanse til å gløyme kva dette eigentleg handlar om.

Når han så kjem til den symbolske matematikken, altså likninga i Pytagoras' setning, blir også dette forklart parallelt med at han skriv symbola. Han bruker munnlege uttrykk som «kvadratet av 6», «kvadratet av B» og så vidare parallelt med at han skriv likninga. Det matematiske symbolspråket blir tolka og omsett til munnleg språk samtidig som det blir brukt.

I tillegg bruker han fargekodar. Dei ulike ledda blir kopla til figuren ved at han bruker same fargen på dei. Dersom den eine kateten er blå, blir det tilsvarande leddet i likninga også blått.

Khan seier eksplisitt ein del ting som gjerne blir rekna som underforstått. For eksempel minner han oss stadig om kva hypotenusen er. Den er den sida som er motståande til den rette vinkelen. For meg som har lært denne matematikken for mange år sidan, kan dette verke sjølvsagt, og eg gløymer å snakke om det i undervisninga. Men ein god formidlar, som Khan er, veit at ingenting er sjølvsagt!

Addisjon og subtraksjon av brøk er eit anna eksempel som viser stilen på desse videoane (søk på «Adding and subtracting fractions» på YouTube). Også her er det tett samanheng mellom den munnlege og den skriftlege matematikken. Khan begynner med reknestykket ein firedel pluss ein firedel. Orda blir uttalte samtidig som han skriv brøksymbola. Her skal ingen få tid til å gløyme kva det matematiske symbolet betyr! I tillegg har han figurar som illustrerer figurane. Det er ingenting originalt ved desse. Det er dei same sirkelfigurane som opptrer i alle lærebøker. Khan kallar dei stykke av ein pai.

Fargekodar blir brukte i behandlinga av brøk, slik dei også vart brukte i geometrien. No er det dei ulike ledda i reknestykket som får ulik farge, og dei same fargane kjem igjen på paien. Han koplar saman dei ulike representasjonsformene heile vegen – orda «ein firedel», det matematiske brøksymbolet, og teikninga. Kanskje er desse tette koplingane hans største styrke som formidlar.

Progresjonen i framstillinga av brøk er logisk og den same som eg ofte har sett i lærebøkene på barnetrinnet. Det begynner med brøkar som har same nemnar, og held fram med ulik nemnar, i stigande vanskegrad.

Det finst i dag ei stor mengde videoar frå Khan-akademiet, på ulike nivå frå barneskule til universitet. Starten på det heile var meir beskjeden. Salman Khan fortel sjølv om det i eit foredrag (søk på «Salman Khan talk at TED 2011» for å finne det). Han arbeidde i finansbransjen, med noko matematikkbakgrunn, og ville hjelpe sine yngre søskenbarn med matematikken. Søskenbarna budde på ein annan kant av USA. Han laga dei første videoane og la dei ut på nettet, for det var praktisk vanskeleg å treffe søskenbarna ansikt til ansikt. Men så viste det seg at søskenbarna likte videoen betre enn den levande personen! Han hadde funne ei form som ser ut til å passe godt for ein elev som sit åleine på rommet sitt og strevar med leksene.

Når du lyttar til ein person som forklarer noko for deg, er det fort gjort å miste nokre bitar på vegen. Spesielt i matematikk kan dette bli problematisk, for matematikk er eit fag med streng logisk oppbygging. Ein video gir deg sjansen til å gå tilbake og få med deg dei små tinga som du mista første gong. Det er ingen som heng over skuldra di og kanskje synest du er dum når du spør om igjen for tredje gong.

Salman Khan har knytt videoane sine til ein ny type pedagogikk. Han kallar det «flipped classroom». Ideen er at elevane kan ta i mot instruksjon ved hjelp av video heime, i staden for å sitje passivt og ta imot instruksjon i klasserommet. Tida i klasserommet kan då brukast til rekning og aktivitetar med rettleiing av lærar. Dette er ein mogleg måte å utnytte den nye teknologien på, men slike videoar kan fungere på mange ulike måtar. Dei kan vel òg vere eit tillegg til formidlinga frå læraren, ikkje nødvendigvis ei erstatning. Slik har lærebøker fungert i alle år, utan at klasserommet er blitt snudd opp ned av den grunn.

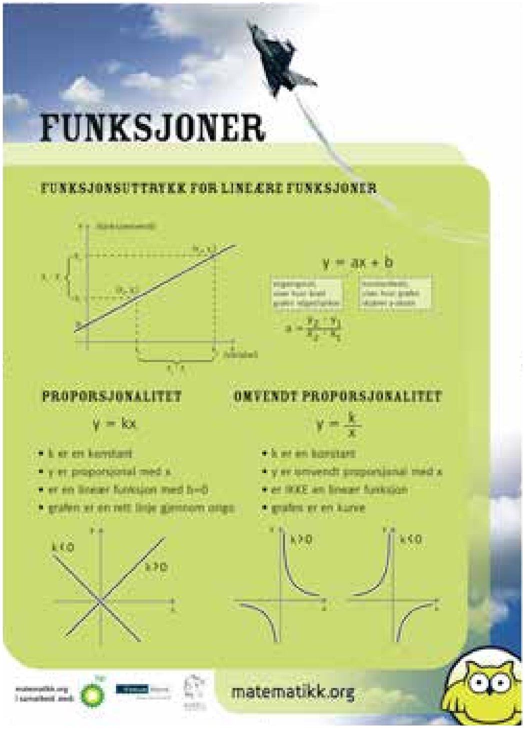
Videoane frå Khan-akademiet har fått ein del kritikk på ulike bloggar og diskusjonsforum. Det viktigaste ankepunktet ser ut til å vere at dei er for instrumentelle. Salman Khan fortel deg berre korleis du skal gjere det, og ikkje kvifor, ifølgje kritikarane. Det finst svært mange videoar etter kvart, og det kan sjølvsagt tenkjast at nokre av dei er reint instrumentelle. Men brøkvideoen som eg såg på ovanfor, er eit eksempel der han bruker figurar og tekst for å forklare tankegangen. I denne videoen er det tydeleg at han går inn for å forklare omgrepa, og eg meiner at forklaringa går djupare enn berre det som skal til for å komme raskast mogleg til svaret.

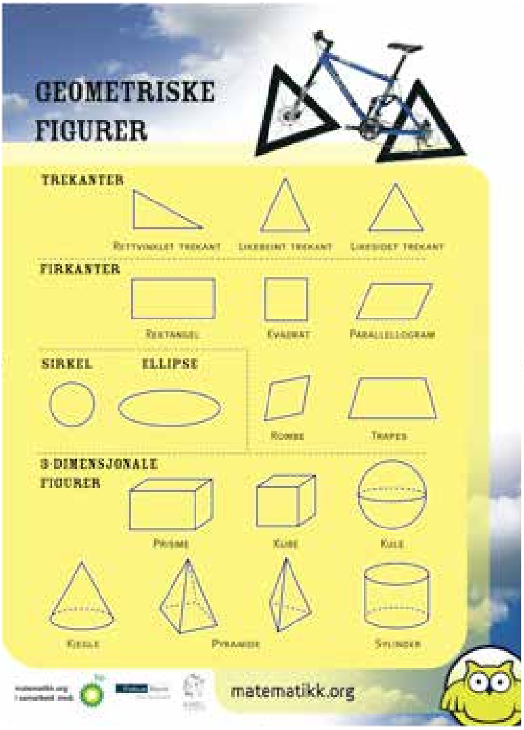
Det ikkje vanskeleg å finne ting å pirke på i desse videoane. Dei er ikkje alltid like godt detaljplanlagde. Av og til får eg kjensla av at Khan berre improviserer og finn på eksempla etter kvart. Det tette forholdet mellom munnleg og skriftleg matetikk kan òg få uheldige utslag. Reknestykka og likningane han skriv på tavla, må i ein del tilfelle forståast i samanheng med den munnlege forklaringa han gir samtidig.

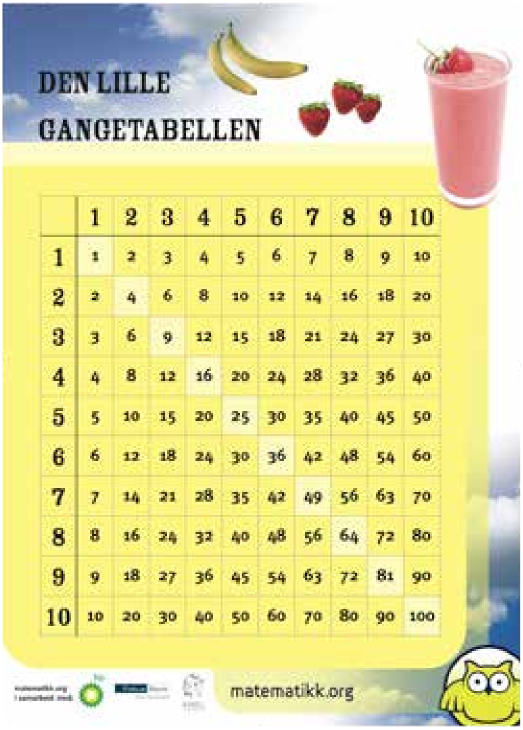
Folk som er opptatt av korrekt føring kan nok finne ting å irritere seg over.

Men alt dette meiner eg blir småpirk nå vi veg det opp mot det faktum at videoane er gratis tilgjengelege for alle, og at dei heilt tydeleg er til stor hjelp for folk. Kommentarane på YouTube er til tider svært så begeistra. Det er fleire som skriv at dei har lært meir av desse korte snuttane enn av årevis med undervisning. Ei gruppe som har spesiell nytte av dei, ser ut til å vere vaksne som skal ta opp igjen skulematematikken. Men også barn i vanleg skulealder bruker dei.

Suksessen til Khan-akademiet tyder i seg sjølv på at dei gjer noko rett. Vi som er i skulematematikk-bransjen, burde vere mest opptekne av å finne ut kvifor desse videoane fungerer. Sjølvsagt kan dei kritiserast, men dei kan også inspirere. Dei kan få oss til å tenkje gjennom korleis vi forklarer munnleg og bruker figurar og matematiske symbol i vår eiga matematikkundervisning.







	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Trygve Breiteig

Om trekanter med 120-graders vinkel

Når vi jobber med Pytagoras' setning i skolen, støter vi raskt på noen *spesielle rettvinklede trekanter*. En slik er trekanten med sider 3, 4 og 5. En annen er den med sider 5, 12 og 13. En tredje har sider 20, 21 og 29. Det fins faktisk uendelig mange primitive *pytagoreiske tripler*, uendelig mange sett av tre hele tall, x, y og z, uten felles faktor, som oppfyller likningen

$$z^2 = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

Vi kan finne alle de heltallige løsningene av (1) ved å velge to hele tall u og v og uttrykke x, y og z ved hjelp av dem. Da kan vi sette

$$x = 2uv \qquad y = u^2 - v^2 \qquad z = u^2 + v^2 \qquad (2)$$

og disse vil passe inn i (1). Om u og v er valgt innbyrdes primiske, det vil si uten felles faktor, ett av dem par og ett odde, og $u > v$, gir uttrykkene i (2) oss samtlige primitive løsninger av likningen (1). En *primitiv løsning* er én der x, y og z ikke har felles faktor.

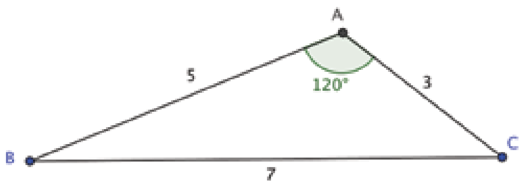
Alt dette gjelder trekanter med en 90-graders vinkel. Hva om trekanten hadde en annen bestemt vinkel? Kan den da ha heltallige sider?

Trygve Breiteig
Universitetet i Agder
trygve.breiteig@uia.no

Kan jeg finne andre trekanter med en «pen vinkel» og heltallige sider? Det viser seg at om sidene skal være hele tall, så er de mulige vinklene kun 60, 90 og 120 grader. Dette følger av den utvidede pytagoreiske setningen. Hva med en trekant med en 60-graders vinkel? Kan den ha heltallige sider – slik som den rettvinklede? Eller en med 120-graders vinkel? Jeg velger å se på sistnevnte.

Problemet

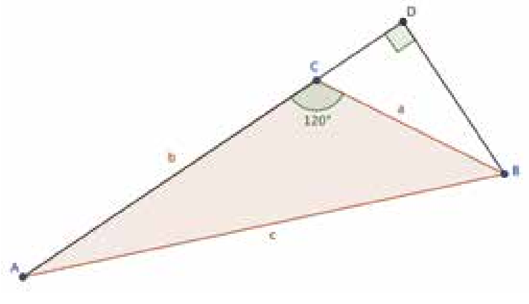
Jeg ser nøye på trekanten i figur 1. Sidelengdene er hele tall, nemlig 3, 5 og 7 lengdeenheter. Og den har en vinkel på 120 grader.



Figur 1

Fins det flere slike 120-graders trekanter med heltallige sidelengder som ikke er formlike med denne? Svaret er ja. Jeg vil nedenfor vise at det fins uendelig mange.

Problemet kan presiseres først. Jeg antar nå at en trekant ABC har en vinkel på 120 grader og sider med lengder a, b og c lengdeenheter, der c er størst. Trekanten er ABC på figur 2.



Figur 2

De tre tallene a, b og c må oppfylle likningen

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab \qquad (3)$$

Dette kan jeg se ved å betrakte figur 2. Jeg har felt en normal fra B ned til D på forlengelsen av den motstående siden CA. Da får trekanten BDC vinkler på 30, 60 og 90 grader. DC blir halvparten av CB. Jeg bruker først Pytagoras på BDC og får

$$BD^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Så bruker jeg Pytagoras igjen på trekanten ABD og får $AB^2 = BD^2 + DA^2$. Det betyr

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 \\ &= a^2 - \frac{a^2}{4} + b^2 + ab + \frac{a^2}{4} \\ &= a^2 + b^2 + ab \end{aligned}$$

Utregnet gir dette altså (3), noe som også følger av den utvidede pytagoreiske setningen, som er omtalt i mange geometribøker.

Spørsmålet ovenfor kan dermed formuleres slik:

Fins det uendelig mange primitive tripler av hele tall (a, b, c) som oppfyller likningen $c^2 = a^2 + b^2 + ab$*?*

Likningene (1) og (3) kalles *diofantiske likninger*, oppkalt etter Diofantos fra Alexandria fra det tredje århundret e.Kr. For meg er det et eksempel på hvor holdbar matematikken er over tid. Diofantos er fremdeles nevnt og aktuell!

En induktiv tilnærming med regneark

Jeg leter etter eksempler. Det hjelper meg å forstå problemet. Jeg bruker regneark, velger gjentatte ganger to tall, a og b, ser på den høyre siden i likningen (3) og sjekker om det blir noe kvadrattall. Jeg lar regnearket finne kvadratrot av tallet på høyre side og ser om det er desimaler.

For eksempel: Kan én av de korte sidene være 7? Jeg prøver dette tallet og setter $a = 7$. Regnearket mitt er da vist i figur 3.

Når alle cellene kopieres nedover, ser arbeidsboka ut som i figur 4. Excel sjekker om det er et kvadrattall i C-kolonnen. Det viser at de heltallige løsningene ikke er så lette å finne. Nei, de er ganske sjeldne! Vi ser den veldige regnekraften til et regneark demonstrert på et øyeblikk. Excel leter og har funnet to løsninger her: 7, 8 og 13 er én, 7, 33 og 37 er en annen.

Hele tiden er jeg på utkikk etter mønster. Løsningene jeg finner, ordner jeg i noen klasser slik at de antyder et mønster. Etter en del fundering og prøving stiller jeg opp et eksempel på en klasse av løsninger, satt opp i tabell 1, der a-kolonnen øker med 4 hver gang.

	A	B	C	D	E	F
1						
2	**a**	**b**	**høyre side**	**kvadratrot**	**rundet av**	**c**
3	7	1	=A3^2+B3^2+A3*B3	=ROT(C3)	=HELTALL(D3)	=HVIS(D3=E3;E3;)
4	=A3	=B3+1				

Figur 3

	A	B	C	D	E	F
2	**a**	**b**	**høyre side**	**kvadratrot**	**rundet av**	**c**
3	7	1	57	7,54983444	7	0
4	7	2	67	8,18535277	8	0
5	7	3	79	8,88819442	8	0
6	7	4	93	9,64365076	9	0
7	7	5	109	10,4403065	10	0
8	7	6	127	11,2694277	11	0
9	7	7	147	12,1243557	12	0
10	7	8	169	13	13	13
11	7	9	193	13,892444	13	0
12	7	10	219	14,7986486	14	0
13	7	11	247	15,7162336	15	0
14	7	12	277	16,643317	16	0
15	7	13	309	17,5783958	17	0
16	7	14	343	18,5202592	18	0
17	7	15	379	19,4679223	19	0
18	7	16	417	20,4205779	20	0
19	7	17	457	21,3775583	21	0
20	7	18	499	22,3383079	22	0
21	7	19	543	23,3023604	23	0
22	7	20	589	24,2693222	24	0
23	7	21	637	25,2388589	25	0
24	7	22	687	26,2106848	26	0
25	7	23	739	27,1845544	27	0
26	7	24	793	28,1602557	28	0
27	7	25	849	29,1376046	29	0
28	7	26	907	30,1164407	30	0
29	7	27	967	31,0966236	31	0
30	7	28	1029	32,0780299	32	0
31	7	29	1093	33,0605505	33	0
32	7	30	1159	34,0440891	34	0
33	7	31	1227	35,0285598	35	0
34	7	32	1297	36,0138862	36	0
35	7	33	1369	37	37	37
36	7	34	1443	37,9868398	37	0

Figur 4

a	b	c
3	5	7
7	33	37
11	85	91
15	161	169

Tabell 1

Differensene $c - b$ er 2, 4, 6, 8 … Og b kan jeg finne ved å gange a med henholdsvis 2, 5, 8, 11 og så trekke fra henholdsvis 1, 2, 3, 4. Her er det mønster. Hvordan kan nå dette formuleres algebraisk?

La k være et naturlig tall, $k = 1, 2, 3, 4$ osv. Da er $a = 4k - 1$. For å finne b: Faktorene vi ganger a med, 2, 5, 8, 11, blir da $3k - 1$, og det tallet vi må trekke fra, er 1, 2, 3, 4, altså lik k, som gir regnestykket

$$(4k - 1)(3k - 1) - k = 12k^2 - 8k + 1.$$

Ved hjelp av $c - b = 2k$ finnes c. Altså har jeg mønsteret:

$$\begin{aligned} a &= 4k - 1 \\ b &= 12k^2 - 8k + 1 \\ c &= 12k^2 - 6k + 1 \end{aligned} \tag{4}$$

der $k = 1, 2, 3, \ldots$ Når det er formulert algebraisk, er det presist nok. Da kan jeg bevise det: Disse uttrykkene (4) gir løsninger som jeg søker. Det kan jeg se ved å sette inn i likningen (3), regne ut og sjekke at det stemmer. Jeg legger merke til at i formlene over er alle tre tallene, a, b og c oddetall.

Jeg har jobbet *induktivt*: Fra enkelttilfeller til det generelle, fra spesielle tall til en regel. En slik metode kan vi bruke bevisst i skolen.

Det er også andre «pakker» av talltripler som passer inn i likningen (3). Tabellene 2, 3 og 4 viser tre slike. Jeg har også stilt disse opp etter prøvinger og funderinger.

a	b	c
13	35	43
17	63	73
21	99	111
25	143	157

Tabell 2

a	b	c
7	8	13
11	24	31
15	48	57
19	80	91

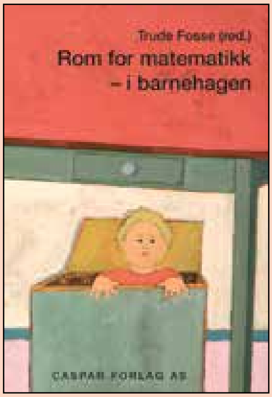
Tabell 3

Jeg merker meg at det også er partall i tabell 3 og 4, hvor disse er plassert i tabellene, og at de

(fortsettes side 42)

Trude Fosse (red.)

Rom for matematikk – i barnehagen



Rom for matematikk – i barnehagen er en nødvendig bok for arbeid med matematikk i barnehagelærerutdanningen. Forfatterne viser ulike matematikkdidaktiske innfallsvinkler til fagområdet matematikk og barn. Fagstoffet blir presentert med nærhet til praksisfeltet samtidig som det blir satt inn i faglige og historiske sammenhenger. Boka utfordrer og bevisstgjør leserne til å se muligheter i barns matematiske verden.

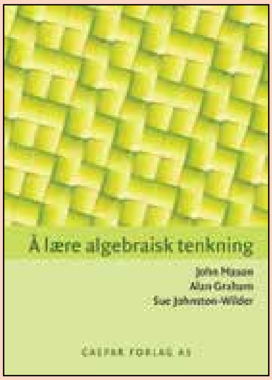
Bidragsytere:
Magni Hope Lossius, Gert Monstad Hana, Leif Bjørn Skorpen,
Line I. Rønning Føsker, Vigdis Flottorp, Torgunn Wøien, Elena Bøhler

137 sider · 365,–
ISBN 978-8290898-56-7
www.caspar.no · bestill direkte fra forlaget på ordre@fagbokforlaget.no

John Mason, Alan Graham, Sue Johnston-Wilder

«Å lære algebraisk tenkning»

Oversatt av Johan Lie



Algebra har alltid representert et vannskille for elever som lærer matematikk. Denne boka vil gjøre deg i stand til å tenke på deg selv som en som lærer algebra på en ny måte. Du vil bli bedre på å undervise algebra, overvinne vanskeligheter, og bygge på ferdigheter som alle elever har.

Boka er basert på prinsipper for undervisning som har blitt utviklet av teamet ved «The Open University's Centre for Mathematics Education» som har 20 års erfaring med innovative fremgangsmåter for undervisning og læring av algebra. Boka er skrevet for lærere som arbeider med elever i alderen 7–16 år, og inneholder mengder av oppgaver som kan omarbeides til bruk i din egen undervisning.

375 sider · 455,–
ISBN 978-8290898-56-9
www.caspar.no · bestill direkte fra forlaget på ordre@fagbokforlaget.no

Christoph Kirfel

Eksperimenter med funksjoner

I boka «Habits of Mind» argumenterer forfatterne Cuoco, Goldenberg og Mark for en måte å organisere matematikkundervisning på der de prøver å få frem bestemte kvaliteter ved elevers tankeprosesser som de mener er viktige for deres matematiske utvikling. De har satt opp følgende ønskeliste over egenskaper matematikkelevene skal utvikle:

- Students Should Be Pattern Sniffers
- Students Should Be Experimenters
- Students Should Be Describers
- Students Should Be Tinkerers
- Students Should Be Inventors
- Students Should be Visualisers
- Students Should Be Conjecturers

Noen av disse egenskapene står også sentralt i den foreliggende artikkelen. Jeg vil se på eksperimenter man kan gjøre med funksjoner. Alle de nevnte egenskapene vil komme godt med når en gir seg i kast med de beskrevne eksperimentene.

Eksperimentene forutsetter at du har tilgang på dynamisk geometriprogramvare og CAS-verktøy. Et egnet verktøy som ivaretar begge disse perspektivene er GeoGebra. For å få størst mulig utbytte av artikkelen kan det være lurt å eksperimentere underveis. Mange av aspektene i teksten refererer til observasjoner under egen eksperimentering. Kanskje andre oppdager noe mer enn det jeg fant ut.

Eksperimentene egner seg i kursene R1 og R2 og da gjerne i forbindelse med kurvedrøfting. Slike eksperimentoppgaver er godt egnet som forberedelsesoppgaver til den delen av dagens eksamen der alle hjelpemidler er tillatt. Det siste eksperimentet involverer integraler, så det egner seg best i R2.

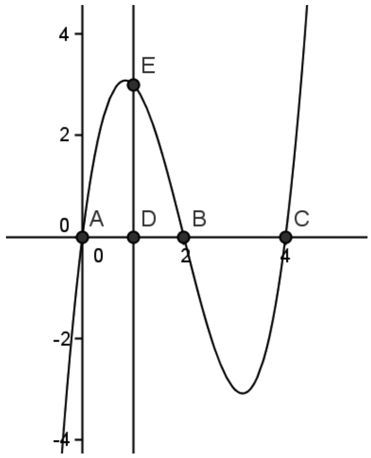
Det første eksperimentet kan beskrives som dynamisk geometrieksperiment, men også med en algebraisk løsning. I det andre eksperimentet kan det geometriske arbeidet være overkommelig for elever i målgruppen, mens «algebrabiten» sannsynligvis er i vanskeligste laget. Jeg har laget et forslag til algebraisk bevis som en finner i nettutgaven av artikkelen. CAS-verktøyet i GeoGebra kan være et hjelpemiddel til å gjennomføre argumentene, og utfordringen blir å organisere bevisgangen. Det tredje eksperimentet er en oppgave der det ikke blir gitt tips.

Christoph Kirfel
Universitetet i Bergen
christoph.kirfel@math.uib.no

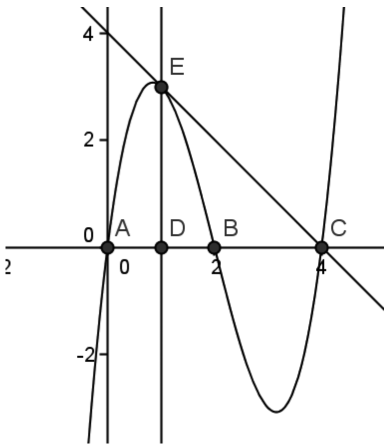
Eksperiment 1

Et tredjegradspolynom f har tre nullpunkter a, b og c. Finn midtpunktet $D = (d, 0)$ mellom $A = (a, 0)$ og $B = (b, 0)$. Finn så det tilhørende punktet $E = (d, f(d))$ på kurven «over» dette midtpunktet. Hva kan du si om tangenten til kurven i dette punktet E?

Det er nok lurt å studere situasjonen ved å se på et konkret eksempel. Vi setter $a = 0$, $b = 2$ og $c = 4$ og tegner kurven i GeoGebra. Da får vi situasjonen i figur 1.



Figur 1



Figur 2

Nå krever oppgaven at vi skal undersøke tangenten i E (figur 2). Det ser ut til at tangenten går gjennom det tredje nullpunktet. Ved å variere nullpunktene a, b og c (vi kan lett endre på dem ved å benytte glidere) ser det ut til at tangenten hele tiden vil krysse x-aksen i det tredje nullpunktet, og vi er tilbøyelige til å akseptere dette som en sannhet. Dette resultatet er faktisk en kjent setning. Den heter Lorenz Bie-setningen.

I boka «GeoGebra 4.0 for videregående skole – Med eget kapittel om CAS» av Tor Espen Kristensen er eksempelet gjennomført med andre verdier for nullpunktene.

Det er mulig å vise denne sammenhengen rent algebraisk ved å studere funksjonen $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$. Midtpunktet mellom de to første nullpunktene er $x_1 = (a + b)/2$, og det tilhørende kurvepunktet er $E = (x_1, f(x_1))$. Tangenten i dette punktet vil ha likningen:

$$\frac{y - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1)$$

Jeg trenger altså verdiene $f(x_1)$ og $f'(x_1)$. Nå er

$$f(x_1) = \left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)\left(\frac{a+b}{2} - c\right)$$

$$= \frac{-(b-a)^2(a+b-2c)}{8}$$

Den deriverte til f er:

$$f'(x) = (x - b)(x - c) + (x - a)(x - c) + (x - a)(x - b)$$

Dette gir

$$f'(x_1) = \left(\frac{a+b}{2} - b\right)(x-c) + \left(\frac{a+b}{2} - a\right)(x-c) + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)\left(\frac{a+b}{2} - a\right) = \frac{-(b-a)^2}{4}$$

Tangentens y-verdi for $x = c$ er derfor:

$$y = f'(x_1)(c - x_1) + f(x_1)$$

$$= \frac{-(b-a)^2}{4}\left(\frac{2c-(a+b)}{2}\right) + \frac{-(b-a)^2(a+b-2c)}{8}$$

$$= 0$$

Det betyr at tangenten krysser x-aksen nøyaktig i kurvens tredje nullpunkt, og vi har vist setningen.

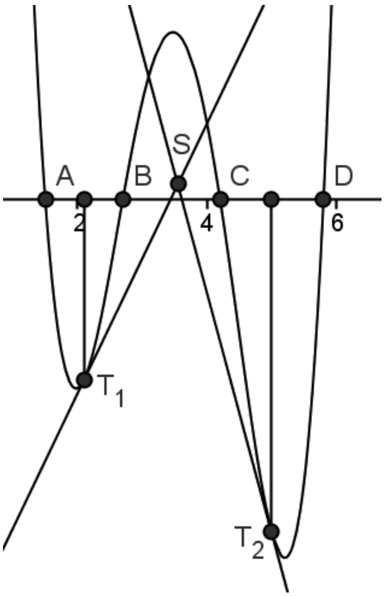
Utfordring 1: På tegningen er A og B «nabonullpunkter». Fungerer setningen også hvis de to «ytterste» nullpunktene er utgangspunkt?

Utfordring 2: Kan påstanden generaliseres? Hvis en rett linje har tre skjæringspunkter med en tredjegrads kurve. Hva skjer da med tangenten i midtpunktet mellom to av skjæringspunktene og det «tilhørende» kurvepunktet?

Eksperiment 2

Gitt et fjerdegradspolynom f med fire nullpunkt, a, b, c og d. Finn midtpunktet mellom $A = (a, 0)$ og $B = (b, 0)$. Finn så det tilhørende kurvepunktet T_1 «over» dette midtpunktet. Finn på samme måte midtpunktet mellom $C = (c, 0)$ og $D = (d, 0)$ og det tilhørende kurvepunktet T_2. Tangentene i T_1 og T_2 skjærer hverandre i punktet S. Beskriv posisjonen til S i forhold til posisjonen til midtpunktet M mellom vendepunktene til kurven.

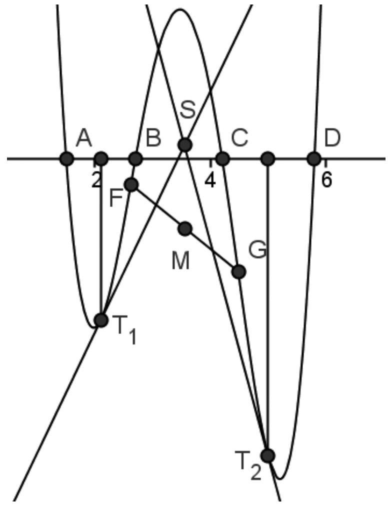
Også her vil det være naturlig å se på et eksempel på GeoGebra som kan illustrere situasjonen (figur 3).



Figur 3

Figur 4 viser de to tangentene med deres skjæringspunkt S.

Eksperimentet sier også noe om vendepunktene F og G og deres midtpunkt M. Det ser ut som om S «svever» rett over M, dvs. at de muligens har samme x-koordinat. Noen raske eksperimenter der vi varierer nullpunktene ved hjelp av glidere, bekrefter mistanken at S og M har samme x-koordinat.



Figur 4

Et formelt bevis for resultatet finnes i nettutgaven av artikkelen (www.caspar.no/tangenten/2014/funksjoner.pdf).

Gjennomgangen av et slikt bevis vil nok være krevende for elever både i R1 og R2 og ligger muligens utenfor deres rekkevidde. Hvis en derimot benytter seg av et CAS-verktøy, f.eks. det som ligger i GeoGebra, forholder saken seg noe annerledes. Den krevende regningen med variabler og parametrer kan nemlig overlates til maskinen, og utfordringen ligger nå i å organisere bevisets gang. Vi prøver her å antyde en mulig vei gjennom denne jungelen.

Vi åpner et CAS-vindu i GeoGebra og definerer funksjonen $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ ved å skrive f(x):=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) i linje 1 (se liste over GeoGebra-kommandoer i figur 5).

Husk: Her må vi bruke symbolet :=. Da vil vi senere kunne bruke bokstaven f for hele funksjonen. Neste steg er definisjonen av den deriverte. I linje 2 finner vi den deriverte ved å skrive g(x) := Derivert[f(x), x], og den andrederiverte kommer da helt naturlig i linje 3.

For å finne vendepunktene til kurven må vi løse likningen $h(x) = 0$. Dette gjør vi ved å skrive Løs[h(x) = 0, x] i linje 4. De to løsningene

1	f(x):=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) $\rightarrow\ \mathbf{f(x) := x^4 - a\,x^3 - b\,x^3 - c\,x^3 - d\,x^3 + a\,b\,x^2 + a\,c\,x^2 + a\,d\,x^2 + b\,c\,x^2 + b\,d\,x^2 + c\,d\,x^2 + a\,b\,c\,d}$
2	g(x):=Derivert[f(x),x] $\rightarrow\ \mathbf{g(x) := 4\,x^3 - 3\,a\,x^2 - 3\,b\,x^2 - 3\,c\,x^2 - 3\,d\,x^2 - a\,b\,c - a\,b\,d + 2\,a\,b\,x - a\,c\,d + 2\,a\,c\,x + 2\,a\,d}$
3	h(x):=Derivert[g(x),x] $\rightarrow\ \mathbf{h(x) := 12\,x^2 + 2\,a\,b + 2\,a\,c + 2\,a\,d - 6\,a\,x + 2\,b\,c + 2\,b\,d - 6\,b\,x + 2\,c\,d - 6\,c\,x - 6\,d\,x}$
4	Løs[h(x)=0,x] $\rightarrow\ \left\{x = \dfrac{\sqrt{3}\,a + \sqrt{3}\,b + \sqrt{3}\,c + \sqrt{3}\,d - \sqrt{3\,a^2 - 2\,a\,b - 2\,a\,c - 2\,a\,d + 3\,b^2 - 2\,b\,c - 2\,b\,d + 3\,c^2}}{4\,\sqrt{3}}\right.$
5	HøyreSide[$4] $\rightarrow\ \left\{\dfrac{\sqrt{3}\,a + \sqrt{3}\,b + \sqrt{3}\,c + \sqrt{3}\,d - \sqrt{3\,a^2 - 2\,a\,b - 2\,a\,c - 2\,a\,d + 3\,b^2 - 2\,b\,c - 2\,b\,d + 3\,c^2 - 2}}{4\,\sqrt{3}}\right.$
6	x0:=Gjennomsnitt[$5] $\rightarrow\ \mathbf{x0 :=} \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}a+\sqrt{3}b+\sqrt{3}c+\sqrt{3}d-\sqrt{3a^2-2ab-2ac-2ad+3b^2-2bc-2bd+3c^2-2cd+3d^2}}{4\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}a+\sqrt{3}b+\sqrt{3}c+\sqrt{3}d+\sqrt{3a^2-2ab-2ac}}{4\sqrt{3}}}{2}$
7	x0 $\rightarrow\ \dfrac{1}{4}\,(a + b + c + d)$
8	x1:=(a+b)/2 $\rightarrow\ \mathbf{x1 :=} \dfrac{1}{2}\,a + \dfrac{1}{2}\,b$
9	x2:=(c+d)/2 $\rightarrow\ \mathbf{x2 :=} \dfrac{1}{2}\,c + \dfrac{1}{2}\,d$
10	y1:=g(x1)(x0-x1)+f(x1) $\rightarrow\ \mathbf{y1 :=} \dfrac{1}{16}\left(a^2\,c^2 + a^2\,d^2 + b^2\,c^2 + b^2\,d^2 - 2\,a\,b\,c^2 - 2\,a\,b\,d^2 - 2\,a^2\,c\,d - 2\,b^2\,c\,d + 4\,a\,b\,c\,d\right)$
11	y2:=g(x2)(x0-x2)+f(x2) $\rightarrow\ \mathbf{y2 :=} \dfrac{1}{16}\left(a^2\,c^2 + a^2\,d^2 + b^2\,c^2 + b^2\,d^2 - 2\,a\,b\,c^2 - 2\,a\,b\,d^2 - 2\,a^2\,c\,d - 2\,b^2\,c\,d + 4\,a\,b\,c\,d\right)$
12	y1-y2 $\rightarrow\ \mathbf{0}$

Figur 5

kommer som en liste av likninger. Vi er for så vidt bare interessert i høyresidene av disse, og henter dem ved å skrive HøyreSide[$4] i linje 5.

For å finne x-koordinaten til midtpunktet mellom vendepunktene skriver vi i linje 6 x0 := Gjennomsnitt[$5].

Vi definerer nå x_1 og x_2 som gjennomsnittsverdier for to og to nullpunkter i linje 7 og 8. Så beregner vi i linje 10 og 11 y-verdien y_1 for den første tangenten for denne x-verdien (x_0) og den tilsvarende y-verdien y_2 for den andre tangenten, (men for den samme x-verdien x_0).

Til slutt finner vi i linje 12 ut om y-verdiene stemmer overens, f.eks. ved å trekke dem fra hverandre: y1 - y2.

Resultatet blir 0, og dermed er setningen vist, men denne gangen uten elegante og kunstferdige algebraøvelser (som i nettversjonen av artikkelen), kun med rå «motorkraft». En kan diskutere hvorvidt sjarmen ved bevisførsel som matematisk øvelse forsvinner i en slik digital maktdemonstrasjon, men resultatet ble nå i alle fall bevist.

Utfordring 3: I vårt eksperiment var A, B og C, D to par av nullpunkter som ligger ved siden av hverandre. Trenger det å være slik?

Til slutt noen ideer til enda et eksperiment.

Eksperiment 3

Gitt et fjerdegradspolynom med to vendepunkter. Mellom forbindelseslinjen mellom vendepunktene og kurven oppstår tre «kuppel-» eller «bølgearealer». Hva kan du finne ut om disse?

Tilleggsspørsmål: Anta at vi skriver fjerdegradspolynomet som

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Hvilken innflytelse har parametrene d og e på de nevnte «kuppel-» eller «bølgearealene i eksperimentet?

Jeg vil takke Arnt Frode Stave (Danielsen VGS) og Anne Bjørnestad (Tanks VGS) for gode og konstruktive kommentarer.

(fortsatt fra side 36)

a	b	c
5	16	19
9	56	61
13	120	127
17	208	217

Tabell 4

er delelige med 8. Videre merker jeg meg a-kolonnen og hvordan tallene der ligger i forhold til 4-gangen. Videre kan interesserte lesere av *Tangenten* lete etter mønsteret i hver av tabellene 2, 3 og 4, uttrykke dette presist, og bevise at dette nettopp er løsninger av (3).

Dermed er løsningen på problemet som var utgangspunktet, funnet:

> *Det fins uendelig mange løsninger av den diofantiske likningen (3). Vi kan finne pakker av slike løsninger. (4) er et eksempel på en løsningspakke.*

Det fins uendelig mange trekanter av ulik form med heltallige sider og en vinkel på 120 grader. Vi kan finne uttrykk for slike trekanter. (4) er et eksempel på uttrykk for de tre sidelengdene.

Men fanger tabellene 1–4 opp samtlige løsninger? Har vi funnet alle slike trekanter? Dette er besvart på *Tangentens* hjemmeside, www.caspar.no/tangenten/2014/trekanter.pdf

Arvid Siqveland

Holmboeprisvinner 2014: Tor Arne Mjølund

Hvert år tildeles Holmboeprisen til en lærer i grunnskolen eller i videregående skole. Den tildeles en lærer som i særlig grad har utmerket seg gjennom faglig innsikt og evne til å kommunisere matematikk til elever. Norsk matematikkråd utlyser prisen, og nominerte kandidater blir vurdert av Holmboekomiteen, som består av fem medlemmer fra forskjellige skoleslag, universitet og lærerutdanningsinstitusjoner. I år gikk prisen til Tor Arne Mjølund, som ble den tiende utnevnte holmboeprisvinner.

Mjølund har vært aktiv lærer siden 1970, og fra 1983 har han undervist ved Kristiansand Katedralskole Gimle.

Mjølund tildeles prisen for sitt engasjement i å utvikle en matematikkundervisning som fremmer matematikkforståelse og motivasjon hos elevene. Han bruker utradisjonelle tilnærminger i undervisningen basert på problemløsing og caseoppgaver. Oppleggene er utviklet med tanke på hele bredden av undervisningsprogrammer, og på en enestående måte evner han å få undervisningsopplegg til å virke i klasserommet. Arbeidet er preget av høy faglig presisjon i formidlingen og analytisk evne til å tolke elevenes læringsprosesser.

Arvid Siqveland
Høgskolen i Buskerud og Vestfold
arvid.siqveland@hbv.no

Foto: Morten Morell

Mjølund er enestående i møte med elevene. Han har en egen evne til å kommunisere faglig og sosialt. Han utvikler en kultur i klasserommet der matematiske resonnement og kommunikasjon er vesentlige ingredienser.

Mjølund har vært en pådriver for nytenkning omkring matematikkundervisning på skolen. Han er en tilgjengelig diskusjonspartner for både nye og erfarne kolleger og deler velvillig av sine erfaringer. Skolen har i år et eget opplegg for undervisningsgruppene i 1T basert på et kompendium som Mjølund har vært sentral i å utvikle. Han underviser også en klasse i matematikk ved IB-linjen.

Mjølund har vært sentral i utarbeidelsen av en casebasert undervisning i matematikk for vg1 Helse og oppvekst. Opplegget har begeistret kolleger og ført til høymotiverte elever.

Mjølund har ved flere anledninger vært kursholder for Matematikksenteret.

Blant elevers beskrivelse av Mjølunds undervisning finner man uttalelser som:

«Han klarer å møte og se hver elev og oppmuntrer til kreativitet og egne løsninger. Han gir meg et inntrykk av matte som noe fundamentalt og vakkert som bør forstås framfor å pugges.»

«Tor Arne lærer oss å tenke selv og motiverer oss til å sette høye oss mål.»

Etter prisutdelingen avholdes Holmboesymposiet, der årets prisvinner holder en forelesning om sitt virke. Mjølund viste i sin forelesning «John Donne, fotball og matematikklæring» at han har et godt grep om sine tilhørere, og at han har en inkluderende og solid undervisning.

I 2014 var det tiende gang Holmboeprisen ble tildelt. I forbindelse med jubileet vil Norsk Matematikkråd i samarbeid med Tangenten gi ut et spesialnummer som i sin helhet har fokus på Holmboeprisen og dens vinnere. Det vil bli presentasjon og artikler av alle ti Holmboeprisvinnerne sammen med en artikkel om Holmboe som var Abels lærer og inspirator. Spesialnummeret vil sendes ut til abonnentene med Tangenten 4/2014.

(fortsatt fra side 30)

Derry, S. J., Pea, R. D., Barron, B., Engle, R. A., Erickson, F., Goldman, R., Hall, R., Koschmann, T., Lemke, J. L., Sherin, M. G., & Sherin, B. L. (2010). Conducting Video Research in the Learning Sciences: Guidance on Selection, Analysis, Technology, and Ethics. *Journal of the Learning Sciences, 19*(1), 3–53.

Granic, I., Lobel, A., & Engels, R. (2014). The Benefits of Playing Video Games. *American Psychologist, 69*(1), 66–78 DOI: 10.1037/a0034857

Habgood, M. P. J. & Ainsworth S. E. (2011). Motivating Children to Learn Effectively: Exploring the Value of Intrinsic Integration in Educational Games. *Journal of the Learning Sciences, 20*(2). dx.doi.org/10.1080/10508406.2010.508029

Ke, F. (2008). A case study of computer gaming for math: Engaged learning from gameplay? *Computers & Education, 51*(4), 1609–1620. dx.doi.org/10.1016/j.compedu.2008.03.003.

Klopfer, E., Osterweil, S., & Salen, K. (2009). *Moving learning games forward.* Cambridge, MA: Education Arcade.

Long Y. & Aleven V. (2014). Gamification of Joint Student/System Control over Problem Selection in a Linear Equation Tutor. *Lecture Notes in Computer Science, 8474,* 378–387. dx.doi.org/10.1007/978-3-319-07221-0_47

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis.* Oslo: J.W. Cappelens Forlag A/S.

Susi, T., Johannesson M., & Backlund P., (2007). *Serious Games – An Overview. Technical Report HS- IKI -TR-07-001.* School of Humanities and Informatics. University of Skövde, Sweden

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Young, M. F., Slota, S., Cutter, A. B., Jalette, G., Mullin, G., Lai, B., . . . Yukhymenko, M. (2012). Our princess is in another castle: A review of trends in serious gaming for education. *Review of Educational Research, 82*, 61–89. doi:10.3102/0034654312436980 10.3102/0034654312436980

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Realfagbygget *A*4, NTNU
7491 Trondheim
Telefon: +47 73 55 11 42
Faks: +47 73 55 11 40
merete.lysberg@matematikksenteret.no

Revidert eksamensordning i matematikk

Susanne Stengrundet, Anders Sanne og Lene Grøterud Leer

Våren 2015 innfører Utdanningsdirektoratet krav til bruk av digitale verktøy for alle eksamenskoder i matematikk i grunnskolen og i videregående skole. På eksamen i grunnskolen, 1P, 2P og 2P-Y blir det krav til bruk av regneark og graftegner, mens i 1T, 2T, 2T-Y, R1, R2, S1 og S2 blir det krav om CAS (Computer Algebra System) og graftegner. Eksamen på Vg1 yrkesfag er lokalt gitt, og derfor blir det ingen endringer der med mindre det blir bestemt lokalt. På direktoratets nettsider (udir.no) ligger viktig informasjon om endringene til lærere og elever.

Det er rundt 20 år siden den grafiske kalkulatoren ble obligatorisk på eksamen i videregående skole. De nye kravene som blir gjeldende fra 2015 medfører at elevene må ha tilgang til datamaskin, påkrevd programvare og utskriftsmuligheter under hele del 2 av eksamen. Dersom eksamenskandidatene ikke bruker digitalt verktøy på en oppgave som ber om det, vil en alternativ oppgaveløsning gi lavere uttelling.

Mange skoler og lærere har i løpet av det siste året henvendt seg til Matematikksenteret for å få råd om hvordan de best mulig kan forberede elevene sine på den nye eksamensordningen. Høsten 2014 vil vi derfor publisere veiledningsmateriell til lærere på våre nettsider. Ved å jobbe målrettet med digitale verktøy gjennom hele skoleåret, kan vi øke elevenes matematikkforståelse, og på nettsidene våre vil vi gi konkrete eksempler på hvordan det kan gjøres, med didaktiske begrunnelser. Eksemplene er hentet fra eksamensoppgaver gitt på ungdomstrinnet og på videregående skole. Vi har valgt ut oppgaver som er hensiktsmessig å løse med graftegner, regneark og CAS, samt noen oppgaver som er fornuftig å løse med et dynamisk geometriprogram. Vi presenterer også ulike metoder for å lage gode, digitale besvarelser.

Eksempel med graftegner

Oppgavetekst (eksamen 1P høsten 2013)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 3x^3 - 48x^2 + 162x + 300$$

og viser kor mange tonn fisk *f(x)* det var i en fiskebestand x år etter år 2000.

a) Teikn grafen til *f* for $0 \le x \le 10$.

b) Når var fiskebestanden minst?
Kor mange tonn fisk var det i fiskebestanden da?

c) Bestem skjæringspunktet mellom grafen *f* og linja med likning $y = 200$.
Kva fortel koordinatane til dette punktet om fiskebestanden?

d) Kor stor var den gjennomsnittlege endringa i fiskebestanden per år i perioden 1. januar 2003 – 1. januar 2007?

Løsningsforslag

a) Jeg skriver inn *f*(*x*) og begrenser grafen til $0 \le x \le 10$. *Resultatet vises som den blå grafen.*

b) Jeg bruker kommandoen ekstremalpunkt polynom og får både topp- og bunnpunktet til grafen. Jeg markerer bunnpunktet $B = (8.57, 51.25)$. *Fiskebestanden var minst i år 2008. Bestanden var da på 8,57 tonn.*

c) Jeg skriver $y = 200$. Koordinatene til skjæringspunktet med grafen er $D = (5.91, 200)$. *Fiskebestanden ved utgangen av året 2005 er på 200 tonn.*

d) Jeg skriver $x = 3$, og finner skjæringspunktet med grafen $F = (3, 435)$. Så skriver jeg $x = 7$ og finner skjæringspunktet med grafen $G = (7, 111)$. Jeg finner at endringen i bestanden i løpet av disse fire årene er $111 - 435 = -324$. Endringen per år er $-324/4 = -81$. *Det betyr at fiskebestanden fra 1. januar 2013 til 1. januar 2007 synker med 81 tonn per år i gjennomsnitt.*

På Matematikksenterets nettsider (matematikksenteret.no) finner du flere løsningsforslag og mer detaljerte beskrivelser med didaktiske begrunnelser.

	Gjennomføring med GeoGebra	Didaktisk begrunnelse
a)	Funksjon $f(x) = 3x^3 - 48x^2 + 162x + 300$ $f_1(x) = 3x^3 - 48x^2 + 162x + 300$	Elevene bør starte med å skrive inn funksjonen f(x) slik som den står i oppgaven. I neste skritt bruker de kommandoen Funksjon[Funksjon>,< Start>,Slutt] for å begrense definisjonsområdet. Vi tror det kan være uheldig for elevenes utvikling av et godt funksjonsbegrep, om de kun skiver funksjonsuttrykket direkte inn i kommandoen, men det er selvsagt ikke galt å gjøre det.
b)	ekstremalpunkt	Elevene må kjenne til begrepet ekstremalpunkt og klare å skille mellom maksimum og minimum. Tolking av svaret krever et tekstsvar.
c)		Har elevene en god forståelse for bruken av uttrykkene x= og y=, og klarer å tolke dem, har de en god forutsetning for å løse de fleste oppgaver med funksjoner.
d)		Vi regner med at de fleste elever vil løse oppgaven omtrent som dette. Alternativt kan man bruke GeoGebra til å tegne en rett linje gjennom de to punktene og lese av stigningstallet direkte.

Nysgjerrigper-konkurransen 2014 – spesialprisen i matematikk

May Renate Settemsdal

Vinnerne av spesialprisen i matematikk i Nysgjerrigperkonkurransen 2014 ble 2. klasse ved Neverdal skole. Tittelen på prosjektet deres var: «Hvem vet hva partall og oddetall er?»

Prosjektet og rapporten viser at dette er elever med mye nysgjerrighet og engasjement. De har undret seg over hvem andre som vet hva partall og oddetall er.

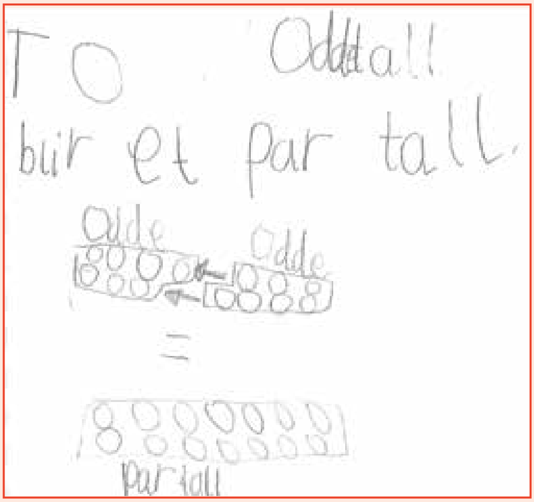
– Vi lurer på hvem som vet forskjellen på oddetall og partall.
– Vi kan forskjellen, men er usikre på hvem andre som kan den.

Før de satte i gang med selve undersøkelsen, diskuterte de dette nærmere og kom fram til følgende:

– Vi tror ikke alle voksne vet hva partall og oddetall er. Det er fordi voksne lærte andre ting på skolen og ikke lærte det samme som oss.
– Vi tror ikke ungdommer vet forskjellen, eller kanskje vet flere ungdommer det enn voksne.
– Vi tror det er flest andreklassinger på Neverdal skole som vet hva partall og oddetall er.
– Noen tror at ungene i barnehagen vet hva som er partall og oddetall.
– Det er to som tror at de voksne i barnehagen kan forskjellen, og det er seks som er usikre.
– Det er fire som tror at de voksne på skolen kan forskjellen, og det er fire som er usikre. Noen tror ikke Kåre kan det, fordi han har oss i engelsk.
– Det tror det er flere ungdommer enn voksne som vet forskjellen på partall og oddetall.

For å få svar på alt de lurte på, gjennomførte andreklassingene en spørreundersøkelse. De eldste ungene i barnehagen, de andre elevene på skolen, voksne på skolen og i barnehagen og foreldre og storesøsken ble spurt.

I tillegg jobbet klassen med partall og oddetall på ulike måter. De fant forklaringer og «bevis» som de presenterte for de andre i klassen.



Bildet viser en illustrasjon som forklarer hvorfor summen av to oddetall blir et partall.

Prosjektrapporten inneholder i tillegg både sanger, dikt og illustrasjoner om partall og oddetall.

Funnene fra spørreundersøkelsen har elevene framstilt eksemplarisk i tabeller og diagrammer med tilhørende forklaringer. Konklusjonen til elevene er:

- Det var flere voksne enn de trodde, som visste forskjell på partall og oddetall.
- Ungdommene kunne forskjellen, og det var flere ungdommer enn voksne som kunne den.
- På Neverdal skole var det flest andreklassinger som visste forskjellen på partall og oddetall.
- Ungene i barnehagen visste ikke hva som var partall, og hva som var oddetall.
- Engelsklæreren Kåre hadde alt riktig!

Elevene fikk utdelt de velfortjente premiene sine under en seremoni på Neverdal skole den 11. juni. Seks av sju klasser ved skolen hadde deltatt på årets Nysgjerrigperkonkurranse og presenterte prosjektene sine under tilstelninga. Neverdal skole kan med rette kalle seg en Nysgjerrigper-skole!

Kengurukonkurransen på 9. trinn – noen kommentarer fra elever

Anne-Gunn Svorkmo

En dag i mars deltok en gruppe på 14 elever fra 9. trinn i årets Kengurukonkurranse. Jeg satt sammen med elevene, og de hadde 75 minutter på å løse de 24 oppgavene i oppgavesettet Cadet, som er for 9. og 10. trinn i Norge. Hvis det var noe de ikke forsto, kunne de spørre meg. Jeg var interessert i å vite hva de lurte på. Jeg kunne kun hjelpe elevene med spørsmål til oppgaveteksten, ikke med spørsmål om hvordan de kunne løse selve oppgaven. På denne måten fikk jeg et lite innblikk i formuleringer og begreper som kunne være vanskelige å forstå for elevene. Eksempel på slike spørsmål var:

- Produkt er svaret i et gangestykke, ikke sant? (oppgave 5)
- Hva var grunntallet i en eksponent igjen? (oppgave 13)
- Hva betyr kongruent? (oppgave 14)
- Hva menes med naboruter? (oppgave 17)

I forkant av konkurransen ba jeg elevene, enten underveis eller når de var ferdige, om å markere den oppgaven de likte best, og den oppgaven de syntes var vanskeligst. For oss som lager og velger ut oppgaver til Kengurukonkurransen, er det interessant å se at selv innenfor ei forholdsvis lita elevgruppe, er det et spekter av favorittoppgaver. Både talloppgaver, geometrioppgaver, logiske oppgaver og små problemløsingsoppgaver var blant de oppgavene som elevene likte best. To oppgaver fikk derimot flere positive markeringer enn de andre.

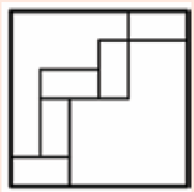
10) Halskjedet på figuren har hvite og grå perler.

Marit skal plukke en og en perle ut av halskjedet. Hun skal stoppe med en gang når hun har tatt fem grå perler.

Hva er det største antall hvite perler Marit kan ta?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

14) Fem kongruente rektangler er plassert inne i et kvadrat med sidelengde 24 cm. Se figuren. Lengden til rektanglet er dobbelt så lang som bredden.



Hvor stort areal har hvert rektangel?

A) 32 cm² B) 24 cm² C) 18 cm²
D) 16 cm² E) 12 cm²

Hvilke oppgaver syntes elevene var vanskelige? Var det en sammenheng mellom disse oppgavene og de som ble dårligst besvart? Jo, det stemmer i forhold til oppgave 24. Faktisk var den oppgaven vi mente var den mest utfordrende, og som vi plasserte sist i settet, en av de vanskeligste oppgavene for disse elevene:

24) På torget samles 25 personer fra tre byer, Sanneby, Lyveberg og Bollestad. De fra Sanneby snakker alltid sant, og de fra Lyveberg lyver alltid. De som er fra Bollestad snakker sant annenhver gang og lyver annenhver gang.

Når alle på torget får spørsmålet «Er du fra Sanneby?» svarer 17 «Ja». Når alle deretter blir spurt «Er du fra Bollestad», svarer 12 «Ja». Når alle til slutt får spørsmålet «Er du fra Lyveberg», svarer 8 «Ja».

Hvor mange på torget er fra Sanneby?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 13 E) 17

Ingen av elevene mente at oppgave 3 var vanskelig, men denne var en av de oppgavene som ble dårligst besvart i denne gruppen! Vi som laget oppgavesettet for 9. og 10. trinn, mente at den skulle være enkel, og plasserte den derfor blant 3-poengsoppgavene. Kanskje tok vi feil?

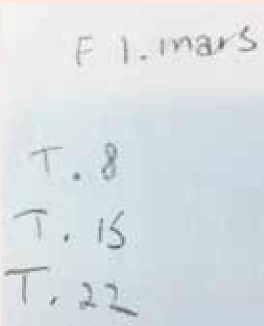
3) Hvert år starter Kengurukonkurransen den teedje torsdagen i mars.

Hva er den seneste datoen Kengurukonkurransen kan starte?

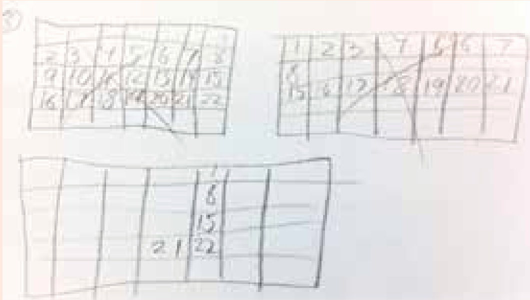
A) 14. mars B) 15. mars C) 20. mars
D) 21. mars E) 22. mars

Hva er vanskelig her? Er det datoer, antall dager i en måned, er det en uvant problemstilling, eller er det det at oppgaven må løses i to steg, som gjør den utfordrende? Jeg tror det siste. Først må man finne ut hvilken ukedag 1. mars må falle på før man kan finne ut hvilken dato som kan være den seineste konkurransen kan starte.

Elevene hadde kladdeark tilgjengelig under konkurransen, men veldig få hadde skrevet noe i forbindelse med oppgave 3. Av dem som brukte kladdearket, kan jeg se spor etter hvordan de kan ha tenkt. Noen av elevene i gruppa markerte 22. mars som det riktige svaralternativet. Illustrasjonen under viser kladden til en elev.



Hun hadde resonnert seg fram til at 1. mars måtte falle på en fredag, men da vil første torsdag være 7. mars og ikke 8. mars slik hun har skrevet. Det er påfølgende fredag som er 8. mars, fredagen etter er 15. og den neste igjen 22. mars. Men det er tredje torsdag i mars det spørres etter, og det blir dagen før den 22.



Bildet over viser kladden til en annen elev. Her er det laget et slags kalenderoppsett, og det ser ut til at vedkommende har prøvd seg litt fram før han fant ut at 1. mars må falle på en fredag. Da skriver han bare inn de aktuelle dagene i kolonnen han har laget for fredager, og finner datoen for den tredje torsdagen.

Årets Kengurukonkurranse hadde nesten 13 000 deltakere, og det er rekord! Oppgavesettene for 2014 med fasit og løsningsforslag ligger tilgjengelig på Matematikksenterets nettsider. Oppgavene er fine å bruke i undervisningen. Noen land som deltar i den internasjonale Kengurukonkurransen, tilbyr også et oppgavesett for elever på 1.–3. trinn. Norge vurderer om det skal bli et tilbud i framtida. Vi har derfor fått lov til å oversette de svenske oppgavene for 2014. På nettsidene ligger oppgavene med fasit og tips til videre arbeid med oppgavene. Her er det mange ideer, og det kan være verdt å ta en titt!

Norge vant prosjektprisen!

Astrid Bondø

For første gang i historien vant Norge prosjektprisen i *Nordic Math Class Competition* (NMCC). Niende trinn ved Tolga skole i Hedmark representerte Norge i den nordiske matematikkonkurransen, som i år ble arrangert i Korsholm, Vasa, i Finland. Matematikkonkurransen er delt i to, en prosjektkonkurranse og en problemløsingskonkurranse. Tolga skole kvalifiserte seg for den nordiske finalen gjennom å delta i UngeAbel, en nasjonal matematikkonkurranse for niende trinn. De gikk til topps i finalen i UngeAbel og vant også der prosjektprisen.

Det norske laget. Fra venstre Meine Baas, Johannes Grann Vingelen, Ingrid Ragna Trøeng og Magdalena Mitrovic.

Prosjekt

Klassene som kvalifiserer seg til semifinalen i den nasjonale konkurransen, UngeAbel, må utarbeide et prosjekt. Det deles ut en egen prosjektpris basert på en prosesslogg, en faglig rapport, en utstilling og en muntlig framføring av prosjektet. Poengene fra prosjektet legges sammen med poengene fra oppgavedelen i semifinalen, og de tre lagene med flest poeng møtes i en finale. Vinnerlaget kvalifiserer seg til finalen i NMCC.

Den nordiske finalen er todelt og består av en prosjektkonkurranse og en problemløsingskonkurranse. På samme måte som i den nasjonale konkurransen legges både prosesslogg, faglig rapport, utstilling og muntlig framføring til grunn for vurderingen av prosjektet. Det er første gang et norsk lag har vunnet prosjektprisen i den nordiske finalen.

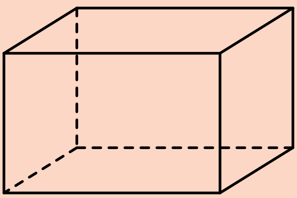
Årets tema for prosjektarbeid er *Matematikk og befolkningen i Norden*. Problemstillingene klassene hadde utformet, var veldig variert og spennende. De norske elevene studerte befolkningsutviklingen i hjembygda si. De så på hvordan demografien har endret seg gjennom årene, og i hvilke ulike retninger de ser for seg at populasjonen vil utvikle seg i framtida.

Gjennom utstillingene og framføringene av prosjektene får elevene utfoldet seg kreativt. Svenskene hadde en flott muntlig presentasjon som inneholdt mange ulike elementer og høstet stor applaus. Men denne gangen var det Norge som – for første gang – stakk av med prosjektprisen.

Problemløsing

Oppgavene til kvalifiseringsrunder, semifinaler og finaler utvikles i samarbeid mellom de nordiske landene, hvor Matematikksenteret representerer Norge. Oppgavetypene er variert, og i finalen er det alltid noen oppgaver der elevene skal finne flere forskjellige løsninger. Alle elevene bør sitte med en god følelse i starten – og etter konkurransen – så oppgavene er laget slik at alle skal få til noe. Oppgave 2 og 4 ga full uttelling for alle lagene.

Oppgave 4. Mauren på prismet
En maur kryper rundt langs sidekantene til en av sideflatene på et rett firkantet prisme. Strekningen mauren krøp var 34 cm. Hadde mauren valgt en av de andre sideflatene, ville strekningen blitt 26 cm eller 40 cm.
Hvor stort var volumet til prismet?



Norge var det eneste laget som fikk full pott på den siste oppgaven, der elevene skulle legge åtte rektangler på et rutebrett slik at de ikke overlappet hverandre. Utfordringen er å legge brikkene slik at arealet til firkanten – som utgjør

Det svenske laget i full konsentrasjon.

rammen rundt brikkene – blir minst mulig.

Finland og Danmark hadde samme poengsum etter endt finale, så da måtte ekstraoppgaven fram: Lage to tall med sifrene 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Hvert siffer kan brukes kun én gang. Tallene skal multipliseres, og målet er å få størst mulig produkt.

Etter at begge lagene hadde avgitt svar, var det Finland som hadde størst produkt og dermed ble vinner av problemløsingsdelen i NMCC 2014.

Sosialt

I år var finnene vertskap for de 20 ungdommene, de fem lærerne og arrangementsgruppen. Vi hadde to flotte dager i Korsholm, som ligger i Vasa. Etter at utstillingene var klargjort, var hele delegasjonen på busstur til Världsnaturarvet i Björköby, hvor det ble tid til å bli kjent, bade og gå tur. Det sosiale fortsatte under middagen på hotellet, og dagen ble avsluttet med en nordisk femkamp, der alle fikk fysiske og faglige utfordringer. Elevene imponerer med sin evne til å kommunisere på engelsk og til å knytte kontakter på tvers av landegrenser. Takk til Lars, Markus og Jenny for et flott arrangement.

Novemberkonferansen 2014 retter seg mot grunnskole, videregående skole og lærerutdanning. Med årets tema ønsker Matematikksenteret å sette fokus på:

- At matematikk er noe mer enn huskeregler og algoritmer
- Hvilke redskap læreren har for å fremme elevenes ulike måter å tenke på
- Undervisningskompetanse i matematikk
- Utforskende/rike oppgaver og undersøkende undervisning

- Ove Gunnar Drageset
- Rose Griffiths
- Mike Naylor
- Tim Rowland
- Jo Røislien
- Kjersti Wæge
- 26 verksteder
- 12 presentasjoner

Årets Novemberkonferanse blir den største noensinne. Les mer om konferansen, og meld deg på:

www.matematikksenteret.no

Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
v/Randi Håpnes
NTNU, Realfagbygget
7491 Trondheim

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det overordnede målet for Landslaget for matematikk i skolen er å heve kvaliteten på matematikkundervisningen i grunnskolen, den videregående skole og på universitet/høyskole.

Landslaget skal stimulere til kontakt og samarbeid mellom lærere på ulike utdanningsnivåer og mellom lærere og andre som er opptatt av matematikk.

Styret for LAMIS

Leder
Tone Skori, Akershus
Barnehage/førskole
Hege Fjærvoll, Nordland
Barnetrinnet
Åge Rygsether, Nedre-Eiker
Ungdomstrinnet
Gerd Nilsen, Hedmark
Videregående skole
Per Gunnar Østerlie, Sør-Trøndelag
Høgskole/universitet
Marianne Maugesten, Østfold
Varamedlemmer
1. Renate Jensen, Hordaland
2. Kurt M. Klungland, Rogaland

Medlemskontingent 2014

400 kr for enkeltmedlem m/Tangenten
200 kr for husstands-medlemmer
200 kr for studenter m/Tangenten
800 kr for skoler/institusjoner m/Tangenten

Organisasjonssekretær

Gro Berg
gro@lamis.no
41562324

LAMIS sommerkurs 2015 arrangeres i Fredrikstad 7.–9. august. Følg med på www.lamis.no for oppdatert informasjon.

LAMIS søker ny kontormedarbeider. Vi trenger en ny medarbeider som kan føre regnskap, sende ut og registrere fakturaer osv. Ta gjerne kontakt med leder Tone Skori (tonskori@online.no) eller organisasjonssekretær Gro Berg (gro@lamis.no) om dette er av interesse for deg og om du ønsker mer informasjon.

Lederen har ordet

Tone Skori

Velkommen til nytt skoleår!

LAMIS sommerkurs i Fredrikstad markerte starten på skoleåret 2014/2015 for mange engasjerte matematikklærere. Det var lokallaget Østfold som var arrangør for sommerkurset, så takk til Kari-Anne Bjørnø Karlsen, Lena Hågensen og Hilde Eik Svendsen for et meget vellykket sommerkurs. Kunnskapsminister Torbjørn Rød Isaksen åpnet konferansen. Han pekte på at vi har et realfagsproblem i Norge, og kom med tre områder det er viktig å satse på framover. De tre områdene han nevnte var: etter- og videreutdanning av lærere, godt samarbeid lærer–skole–skoleeier og nedsetting av en ekspertgruppe for å vite mer om årsaker/løsninger.

LAMIS sommerkurs er og har blitt omtalt som den viktigste møteplassen for matematikklærere i Norge, og er en god arena for nettverksbygging. Gode faglige innspill fra foredragsholdere og engasjerte deltakere bidro til en inspirerende konferanse. På årets sommerkurs var det mange som var der for første gang, og det synes vi i LAMIS er spesielt hyggelig. Neste års sommerkurs vil også bli arrangert i Fredrikstad, så jeg ser frem til å se mange nye og gamle matematikkvenner der. Datoen for neste års sommerkurs er 7.–9. august.

Dette skoleåret er det noen endringer som berører matematikkfaget. Det er nå et krav til å ha relevant kompetanse blant annet i matematikk. Relevant kompetanse for å undervise i matematikk på barnetrinnet er minimum 30 studiepoeng, på ungdomstrinnet 60 studiepoeng og på videregående skole.

Det som også er nytt i år er eksamensordningen i matematikk, både for grunnskolen og videregående skole. Bruk av digitale verktøy blir innført i alle eksamenskodene, det vil si at elevene må kunne bruke regneark, graftegner og på videregående skole også verktøyet CAS (Computer Algebra Systems). Dere kan lese mer om dette på udir.no

LAMIS ønsker seg enda flere medlemmer, så jeg håper alle dere der ute kan hjelpe til med å rekruttere flere medlemmer. Kanskje har du en eller flere gode kollegaer som vil være med? Nye medlemmer kan gå inn på www.lamis.no på lenken Medlem og melde seg inn.

LAMIS sommekurs 2014

Målfrid Tang, LAMIS Bergen

Det er fredag ettermiddag, og jeg sitter på toget med en syvtimers reise foran meg. Det er god tid til å la tankene vandre tilbake til de siste dagenes opplevelser. Jeg har vært på LAMIS sommerkurs i Fredrikstad, og de som har vært på sommerkurs, vet at det betyr tettpakket program, mange inntrykk og mye inspirasjon.

Årets sommerkurs var lagt til Quality Hotel Fredrikstad, der alt kunne foregå under samme tak. Lettvint og greit for oss som deltakere.

Kunnskapsminister Torbjørn Røe Isaksen hadde tatt seg tid til å komme for å åpne kurset. Han snakket bl.a. om utfordringene vi har som samfunn når det gjelder å rekruttere unge med interesse for realfag. En ekspertgruppe er i arbeid med å finne forklaringer på hvorfor mange strever med matematikk og naturfag, og hvilke løsninger som kan endre dette. Også regjeringens program for videreutdanning ble løftet fram. Det bør være en selvfølge for lærere å få faglig påfyll i løpet av arbeidstiden sin slik det er for mange andre arbeidstakere.

Tre plemumsforedrag var det blitt plass til. Først ut var Gitte Drage fra Vitensenteret i Arendal. Hun fortalte om tilbudet deres til de minste barna, «Pythagoras i tareskogen». Et aktivitetsrom er innredet med særlig tanke på å gi romlige opplevelser. Her kan barn gjøre seg kroppslige erfaringer som de tar med seg i videre utvikling og læring. Den voksnes rolle blir å samhandle med barna og sette ord på det de erfarer for slik å gi barna et språk å uttrykke seg med. Teater og fortelling er også virkemidler i undervisningsopplegget.

Nest ut var Sille Solberg fra Ungt Entreprenørskap, en landsdekkende, ideell organisasjon som samarbeider med fylker, kommuner og næringsliv. Gjennom prosjekter av ulike slag ønsker UE å utvikle barn og unges kreativitet, skaperglede og tro på seg selv, og forberede dem på livet. Solberg fortalte om jenta som knapt torde å ta en telefon ved oppstarten av en elevbedrift, men som etter noen måneder stod fram og snakket med TV2 som den største selvfølge. Og om guttene som ikke gjorde det så godt faglig, men gjorde lykke med bakerbedriften sin og brødet som var halvparten kneipp og halvparten loff! Hun oppfordret oss til å se fagene i sammenheng og være bevisst målet om å forberede elevene våre på livet, ikke bare eksamen! Alexander Lind Hagen fra Greåker VGS' sciencelinje avsluttet med å gi oss et innblikk i deres scienceuke og hvordan de drev med oppsøkende virksomhet mot grunnskoler for å øke interessen for realfag.

Sist, men ikke minst fikk vi et fantastisk møte med Sten Rydh, som driver Mattesmedjan i Bengtsfors i Sverige. Der holder han kurs for lærere, foreldre, barn og andre interesserte. Sten har utdanning innenfor flere fag. Blant annet har han lang erfaring med musikkundervisning via Suzukimetoden, og han bruker ideer derfra også i matematikk. Han tryllet fram det ene eksempelet etter det andre på hvordan konkretisering og lek kan gi selv små barn forståelse for matematikk som vi vanligvis forbeholder langt større elever. Han uttrykte det vel omtrent slik: Når de er små, forstår de det så lett som ingenting, men vi venter til de er blitt så store at de ikke forstår noen ting! Jeg tror ingen som overvar foredraget vil glemme at Pytagoras er en kanin, eller definisjonen på omkretsen av en sirkel: tre og litt til!

På programmet stod også mange fristende parallellsesjoner med ulikt innhold, noe som passet for alle skoleslag. Det var digitale verktøy og algebra, metoder for å aktivisere elever – og foreldre, hjelp for elever med unødvendige matematikkvansker og forskning på bleier! Kurt M. Klunglands verksted med spill og aktiviteter som hjelper elevene til å utvikle tallbilder og forstå posisjonssystemet, gikk rett inn i min småskolehverdag. Her var det mye jeg kunne ta med og prøve ut med én gang.

Innimellom foredrag og verksteder var det anledning til å mingle, kikke på utstillingene til forlag og bedrifter, treffe gamle kjente og gjøre nye bekjentskaper.

Den første ettermiddagen ble mange med på en interessant og morsom vandring i Fredrikstads gamleby. Vi ble loset rundt av en skuespiller som tidvis var saklig informerende og tidvis gikk inn i rollen som gammel straffange, fortalte om episoder fra byens historie – ispedd noen gamle skrøner – og deklamerte dikt. Fantastisk moro!

Foto: Monica Nordbakke

Årets sommerkurskomité. Fra venstre: Kari-Anne Bjørnø Karlsen, Lena Hågensen og Hilde Eik Svendsen

Foto: Monica Nordbakke

Sten Rydh. Omkretsen av sirkelen er 3 og litt til!

Mye god mat fikk vi underveis, men festmiddagen er jo ekstra stilfull. I tillegg til laksesahimi og helstekt oksefilet fikk vi vakker sang av Maria Mohn, som har en allsidig musikerkarriere, men kanskje er mest kjent som deltaker i «Idol». Hun hadde også laget en musikalsk quiz som kursdeltakerne kastet seg over med stor iver. Konkurransementaliteten er sterk, også hos mange som ellers holder fram viktigheten av å la alle komme til orde og se etter flere løsninger!

Torsdag ettermiddag avholdt LAMIS sitt årsmøte. Der var neste års sommerkurs oppe til diskusjon. Ingen lokallag hadde tatt på seg oppgaven med å arrangere. Skulle det sløyfes? Slås sammen med lokallagssamling i løpet av skoleåret? Ved kursavslutning fredag middag kom gladmeldingen: Årets komité tar utfordringen og gjentar suksessen. Det blir sommerkurs i Fredrikstad også i 2015!

Så mens toget snirkler seg videre og min hjemreise nærmer seg slutten er det bare å takke for et flott gjennomført arrangement. Vi vet at neste års sommerkurs er i trygge hender – verdt å få med seg!

UngeAbel – et matematisk løft

Toril Sivertsen Bakken

Etter en hektisk vår der niende trinn ved Tolga skole deltok i UngeAbel-konkurransen, vant den norske finalen og reiste til Finland for å representere Norge i den nordiske finalen, er det én ting vi er helt sikre på: Dette ble et skikkelig matematisk løft! Ikke bare for de fire elevene som representerte klassen i konkurransen, men for hele klassen, hele skolen og hele kommunen. Vi har sett effekten før. Skolen vår har deltatt i KappAbel-konkurransen tidligere og vært med i semifinaler/finaler. De yngre elevene har fått det med seg, og allerede på mellomtrinnet er dette noe som elevene prater om og gleder seg til: Når vi kommer i niende trinn skal vi delta i konkurransen. Matematikk er morsomt, og på skolen er det «lov» å være god i matematikk. Etter årets prestasjon er det ingen grunn til å tro at motivasjonen for matematikkfaget har blitt mindre.

Konkurransen startet med to innledende runder hvor klassen var sammen om å løse et sett oppgaver. De ble delt inn i grupper som startet med hver sin oppgave. Når én oppgave var løst, skrev én av gruppemedlemmene ned svaret på tavla, og gruppa kunne gå videre til neste oppgave. Hvis noen grupper fikk et annet svar enn det som allerede stod på tavla, ble dette svaret også skrevet ned og sjekket. Sånn jobbet vi til alle oppgavene var løst, og svarene ble sendt inn for retting. Etter to omganger ble det klart at Tolga hadde best resultat i Hedmark, og at de skulle reise til Eidsvoll for å representere fylket i semifinale og eventuelt finale der.

For å delta videre måtte klassen jobbe med et prosjekt med temaet «Befolkningen i Norden» og utarbeide en prosjektrapport og ei utstilling som de kunne ta med seg. Ut fra samtaler med flere av de andre lærerne som var med lag til den norske finalen på Eidsvoll, er det nettopp prosjektet som gjør at mange kvier seg for å melde på klassen til UngeAbel. Hvis dette stemmer, er det kjempesynd! Dersom man får i oppdrag å lage en prosjektoppgave er det faktisk fordi man har fylkets beste (deltakende) klasse i matematikk! Det koster litt krefter, innsats og tankevirksomhet når man skal lose elevene gjennom et prosjekt som de skal ha mest mulig styring over og eierforhold til – men konklusjonen fra både elever og lærere etterpå er at det definitivt var verdt bryet!

Lærerne som hjalp til med utarbeidelsen av Tolga sitt prosjekt i år hadde to hovedmål: hjelpe elevene til å finne en problemstilling som traff oppgaven, og at alle elevene skulle delta på en eller annen måte i prosjektet. Det viste seg å være en god strategi – Tolga skole vant både den norske og den nordiske prosjektprisen for sitt prosjekt om befolkningsutviklingen i Tolga kommune før, nå og i framtida!

I semifinalen på Eidsvoll jobbet alle fylkeslagene med oppgaver i et lukket rom. Lærerne ble «sendt på gangen». Det var åtte oppgaver som skulle løses i rekkefølge og leveres inn, og når du hadde levert svar på en oppgave, var det ikke mulig å få den tilbake. Laget måtte levere en oppgave for å få lov til å starte på den neste. Oppgavene var såpass finurlige at matematikklærerne på gangen heller ikke alltid var helt enige om alle svar. På bakgrunn av resultater i semifinalen kombinert med poeng for prosjektet, ble det plukket ut tre lag til finalen neste dag. Det ble lagene fra Aust-Agder, Vest-Agder og Hedmark. Her løste

Lagene fra Aust-Agder, Hedmark og Vest-Agder med premiene fra den norske finalen.

Magdalena Mitrovic og Ingrid Ragna Trøeng får en forklaring på hvordan et seismikkskip fungerer til oljeleting hos PGS på Lysaker.

elevene oppgaver med publikum i salen og fikk fra 0 til 5 poeng per oppgave alt etter hvor godt de hadde løst den. Tolga-laget vant finalen med 22,5 poeng av 25 mulige.

Etter å ha vunnet den norske finalen ble det mye publisitet både til skolen og klassen, og både aviser, radio og TV viste stor interesse. I hjemkommunen ble alle elever fra begge skolene invitert på kakefest for å feire seieren.

Med seieren i den norske finalen vant vi også litt jobb. Prosjekt og framføring måtte oversettes til engelsk og utstillingen forbedres med en modell. Det bød på noen utfordringer, ettersom 9. trinn hadde to uker praktisk yrkesorientering mellom den norske og den nordiske finalen. Det endte med at seks elever fra klassen ble valgt ut til å oversette hver sin del, mens lærerne leste korrektur i etterkant. Også muntlig framføring måtte oversettes og øves inn av de fire representantene på nytt.

De fire representantene fra klassen reiste til Oslo for å framføre prosjektet på engelsk under Holmboepris-utdelingen og fikk møte utdanningsministeren. De var på to kjempeinteressante bedriftsbesøk hos Aker Solutions og Petroleum GeoServices på Lysaker, og de fikk overvære utdelingen av Abelprisen i Universitetets aula. På de to bedriftsbesøkene fikk vi et innblikk i hva de bruker matematikken til, særlig innenfor oljeleting. Her ble både derivasjon, integrasjon og regning med vei, fart og tid brukt hyppig (for å nevne noe) – og læreren fikk med seg flere gode argumenter til bruk når matematikkleie elever lurer på «hvorfor skal vi lære dette??»

I juni gikk turen til Vasa i Finland, der den nordiske finalen

På vei til Finland! Fra venstre: Ingrid Ragna Trøeng, Magdalena Mitrovic, Meine Baas og Johannes Grann Vingelen gikk av stabelen. Også her var det en egen prosjektpris med vurdering av muntlig framføring, skriftlig prosjektrapport og utstilling, samt en konkurranse med oppgaveløsning som hadde ganske lik gjennomføringsform som den norske finalen. Norge vant prosjektprisen og kom på fjerdeplass i oppgaveløsningsdelen. I tillegg til den faglige delen var det også litt sosialt program, og elevene på det norske laget knyttet noen nye bekjentskaper på turen. Vi fikk en kjempefin sightseeing i området rundt Vasa, og det norske laget var veldig fornøyde med at de var de eneste som badet i sjøen. Når man er vant til å bade i relativt kaldt fjellvann var det nemlig god badetemperatur i Vasa etter Nord-Østerdals-standard!

Konklusjonen til elevene i etterkant av konkurransen var at dette var gøy, sjøl om vi også var enige om at det skulle bli ekstra godt med sommerferie i år! Hele klassen syns det var en morsom måte å jobbe med oppgaver på i de innledende rundene. Prosjektarbeidet tok det litt lengre tid før elevene ble gira på, men ettersom vi fant ut mer og mer og fikk litt input fra ulike kilder, ble også dette noe som klassen syntes var interessant – og i tillegg fikk vi inn noen læreplanmål i både matematikk, norsk og samfunnsfag på en god måte.

For de fire elevene som representerte klassen på Eidsvoll og i Vasa, ble det selvsagt en enda større opplevelse. Turen til Oslo med bedriftsbesøk og prisutdelinger var veldig inspirerende, og når man har holdt foredrag for blant andre Abelpris-vinneren og utdanningsministeren på engelsk, var elevene enige om at det definitivt ville bli mindre «skummelt» å snakke engelsk i klasserommet. Engelskbiten og til dels også framføringsbiten var nok et stykke utenfor komfortsonen til flere av elevene som representerte klassen, så der imponerte de stort! Oppgaveformen i semifinale/finale og måten å løse oppgaver på, var også noe elevene likte godt – og de syntes det var morsomt å greie noe som de ved første øyekast syntes så kjempevanskelig ut. Vi kommer til å jobbe videre med oppgaver på denne måten i klassen, for det var veldig lærerikt!

Selv er vi ganske stolte over at lille Tolga, med sine 24 niendeklassinger i hele kommunen, har gjort det så bra i konkurranse med langt større skoler/kommuner – og i den nordiske finalen også flere privatskoler. Det viser at man ikke nødvendigvis må være størst for å bli best!

UngeAbel 2014 ble et kjempestort matematisk løft for oss på Tolga. Når invitasjon til konkurransen kommer neste år, kommer vi derfor etter all sannsynlighet til å ta sats og melde på neste års niendetrinn. Går vi ikke videre, har vi fått noen matematikktimer med morsom oppgaveløsning. Hvis vi går videre til finalerunden, bretter vi opp ermene og går på med krum hals i fordypningsoppgaven – for det er definitivt verdt innsatsen!

Det norske laget jubler for seieren.

Matematikkens dag 2014 på Jåttå vgs

Sidsel Ødegård

Foto: Karen Berg

Endelig var dagen her, andre torsdag etter vinterferien, og Jåttå vgs. var klar for årets matematikkdag. Skolen er syv år gammel, og det var syvende gang vi arrangerte matematikkens dag. I år sammenfalt dagen også med Lamis' matematikkdagsuke. For oss har dette alltid vært den beste uken, da kommer vi ikke i konflikt med verken terminslutt eller vurderingssituasjoner før vinterferien. Vi har prøvd ut ulike varianter av matematikkdagen både når det gjelder omfang og innhold, men føler vi har kommet fram til noe som fungerer godt hos oss. Lærerne var klare, og de hadde gjennom den siste tiden motivert skolens 3-400 elever på vg1 til å delta aktivt denne dagen.

Som vanlig startet vi dagen i skolens store amfi, der musikk ble spilt og bilder vist som oppstart. I år viste vi Mike Naylors bilder av «nakengeometri», inspirert av et lokallagsmøte kort tid i forveien. Videre ønsket en skikkelig «kickoff». Denne gangen fikk vi besøk av Njål Foldnes, foreleser i statistikk ved BI, som skulle være med og få opp stemningen. Tidligere år har vi hatt besøk av Science Circus, NITO og ikke minst Per Inge Torkelsen.

Da dette innslaget var over, skulle elevene aktiviseres. Matematikklærerne på skolen hadde alle valgt seg ut en oppgave. Noen oppgaver er gjengangere, andre skifter vi ut. Matematikkdagsheftet er derfor til stor inspirasjon. I år ble cuisinairestav-gåter forsøkt med stort hell. I tillegg hadde vi oppgaver som matematiske gåter, funfacts, fra sirkel til boks (papirbretting), papirflykas-

Foto: Karen Berg

ting, et veldig langt tog, pytagoraspuslespill, Hanois tårn, en kahoot med tallregning, areal med tau, sudoku, «hvem skal ut?» og ikke minst: strikkhopp med Barbie. Målet er at det skal skape kreativitet og engasjement hos eleven samtidig som det skal gi matematisk øving.

Hver lærer var ansvarlig for alt som hadde med hans eller hennes oppgave å gjøre, det være seg å finne fram utstyr, kopiere opp svarark eller flytte på bord slik at alt var klart når eleven kom. Var det behov for mer hjelp, ble elever spurt, for eksempel de som nå går på vg2. Hver lærer hadde på forhånd delt sine elever inn i grupper og delt ut ark med oversikt over alle postene. Elevene kunne velge poster i vilkårlig rekkefølge, men måtte svare på ni av tolv poster for å få godkjent sin tilstedeværelse den dagen. Hver lærer hadde et stempel som elevene fikk på sitt ark når de var ferdige på en stasjon. På hver stasjon hadde læreren satt fram en pappeske som fungerte som postkasse.

Foto: Karen Berg

Elevene kom da til stasjonen, løste oppgaven, skrev ned løsningen på et ark og puttet det i postkassen. Når det var gjort, fikk de sitt stempel og kunne gå videre til neste post. Etter to timer samlet vi på nytt elevene i store amfi, og da var det skolens egne lærere som avsluttet det hele med en «pangforelesning» med ulike kjemiforsøk. De med høyest lyd eller farge var helt klart de mest populære, og det ble mye moro med flytende nitrogen.

Mens dette foregikk, hadde hver lærer trukket en vinnergruppe fra sin «postkasse». Disse ble offentliggjort i plenum til stor applaus fra de andre elevene. Premien var som den pleier: gavekort til skolens kantine.

Matematikkdagen er altså en dugnad der alle matematikklærerne deltar. Dagen legges inn i skolens årshjul allerede i oppstarten av skoleåret slik at den kan inngå i planene på de ulike avdelingene. De lærerne som normalt har elevene denne dagen, blir bedt om å være til stede. Dette er viktig for å holde ro og orden, men også for at dagen skal være en begivenhet for hele skolen. Stemningen er god, det er en fornøyelse å møte elevene i en slik sammenheng. Om noen ønsker å besøke oss på neste års matematikkdag, så er dere hjertelig velkomne.

Foto: Karen Berg

Matematikkuke på Vitenfabrikken

Marta Vassbø

Et samarbeid mellom LAMIS Rogaland og Jærmuseet.

Uke 11 var matematikkuke for oss i LAMIS. Vi i LAMIS Rogaland hadde også i år et nært og godt samarbeid med Vitenfabrikken på Sandnes. Sammen fikk vi til ei uke med mye gøy, utfordrende og spennende matematikk.

Det hele startet med to dagers matematikkmoro for femteklasser i Sandnes, Klepp og Gjesdal kommune der elevene fikk et variert totimers program på Vitenfabrikken med show og aktiviteter.

I løpet av disse to dagene fikk nærmere 600 elever møte mye spennende og kjekk matematikk. Vi var så heldige at vi hadde fått med oss kunstner og matematikkprofessor Mike Naylor fra Matematikksenteret i Trondheim disse dagene. Han hadde først et halvtimes sjongleringsshow der han viste oss matematiske mønster i sjonglering. Applausen stod høyt i taket når Mike imponerte med sin sjongleringskunst. Forundringen var også stor når elevene oppdaget matematikken og de vakre mønstrene i den samme kunsten. Etter denne innledningen gikk de ulike gruppene til tre forskjellige matematiske stasjoner. Her ble det forsket i Nonstop, bygd med erter og tannpirkere, laget mønster og symmetri med kroppen og funnet størst mulig sum og minst mulig differanse. Det ble også arbeidet med mange ulike matematiske spill og puslerier og forsket på løsninger til tall i T og tall i trekant. Vi var heldige og hadde hjelp av elever fra Gand videregående skole på de ulike stasjonene.

Tirsdag kveld var det tid for faglig påfyll for lærerne. Da møtte 40 entusiastiske lærere opp for å høre og se Mike Naylors to foredrag, først Abacaba – utrolige mønster, utrolige forbindelser. Med utgangspunkt i en rik matematisk oppgave så vi hvordan et mønster kan koble ideer fra geometri, spill, algebra, musikk, poesi, fraktaler, litteratur, høyere dimensjoner, tallsystemer med mer. Etter en kort pause med gode samtaler med matematikkvenner fortsatte Mike nå med Naken geometri: matematikk, kunst og menneskelige former. Mike viste oss kunstverk som illustrerer matematiske prinsipper ved bruk av menneskelige figurer. Han hjalp oss å få innsikt i hvordan kunstnere kan bruke matematikk til inspirasjon og faglig utvikling. Her fikk vi et foredrag som var en lyst for øyet og en matematisk tankevekker. Her var noe å hente for alle trinn i skoleverket.

Onsdag kveld kunne en få mer faglig påfyll. Da holdt Johan Nygaard, tidligere lektor på Sandnes videregående skole og nå hjelper og støttespiller på Vitenfabrikken, foredraget Pytagoreernes matematikk og musikk. Her var det mye spennende å lære om våre gamle mestere av en gammel mester.

Uka ble avsluttet med matematisk aktivitetsdag søndag 16. mars i Vitenfabrikkens flotte lokaler. Da vi åpnet kl. 12 søndag, stod køen langt ut på gata. Det var tydelig at vi hadde nådd fram til et stort publikum.

LAMIS var representert med tre personer fra styret som var fullt opptatt hele dagen med ulike kjekke oppgaver. I tillegg kunne de minste være med på forestillingen Abeline og telletrappa, og de litt større fikk boltre seg på Abelloftet med ulike matematiske eksperimenter, spill og puslerier.

Da status for dagen ble gjort opp kl. 17, hadde vi hatt nesten 800 personer inne på vår matematiske aktivitetsdag. Vi smilte fra øre til øre og konstaterte at uka hadde vært svært vellykket.

Abelprisens barne- og ungdomsutvalg

For å stimulere interessen for matematikk blant barn og unge har Abelstyret oppnevnt et eget utvalg. Utvalget, som ledes av Anne Borg, har et hovedansvar for tiltak rettet mot skole, barn og unge. Utvalget er bredt sammensatt med medlemmer som har erfaring og kunnskap om matematikk, skole og formidling av faget til barn og unge. De skal stimulere og støtte relevante miljøer og pågående aktiviteter, som Niels Henrik Abels matematikkkonkurranse. Men utvalget kan også selv planlegge og initiere tiltak.

Utlysning av midler

Abelstyret bevilger hvert år omkring 1,5 millioner kroner til tiltak som skal øke interessen for matematikk blant barn og unge. Årlig søknadsfrist er 1. oktober. Det er utarbeidet et eget søknadsskjema som skal benyttes. Skjema kan lastes ned fra www.abelprisen.no.

Abelprisens barne- og ungdomsutvalg har over flere år bygd opp en tiltakskjede der de ulike elementene bygger på og utfyller hverandre. Av faste arrangementer støttes konkurransene UngeAbel for niendeklasser og Niels Henrik Abels matematikkkonkurranse for elever i videregående skole.

Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) og Foreningen norske vitensentre har vært viktige samarbeidspartnere gjennom mange år. Støtten til LAMIS har vært kanalisert gjennom to hovedtiltak, matematikkdagene på skolene i februar og det årlige sommerkurset for matematikklærere. Når det gjelder vitensentrene, kom de først på banen gjennom støtte til enkelttiltak. De har nå gått sammen om en felles matematikksatsing som får støtte gjennom dette programmet. Abelstyret gir også støtte til enkeltprosjekter.

Det er barne- og ungdomsutvalget som prioriterer søknadene før de behandles i Abelstyret. Støtten til barne- og ungdomstiltak er direkte forankret i Abelprisens statutter: «Hovedformålet med Abelprisen er å anerkjenne banebrytende vitenskapelige prestasjoner i matematikk. Prisen skal også bidra til å heve matematikkfagets status i samfunnet og stimulere barn og unge til å bli interessert i matematikk.»

Søknader sendes til Abelstyret v/Anne Borg, Det Norske Videnskaps-Akademi, Drammensveien 78, 0271 Oslo, eller på e-post til abelprisen@dnva.no

Se mer informasjon på www.abelprisen.no