Vert det lysare tider snart?

Det har snart gått eit heilt år der born, unge og lærarar har teke sin del av støyten av Korona-tiltaka. Saker i media vitnar om ein krevjande situasjon. Mange argumenterer for å avlysa skriftlege eksamenar fordi undervisingsgrunnlaget har vore så varierande, og lærarorganisasjonar rapporterer at lærarar er redde for å verta smitta og slitne på grunn av ekstraarbeidet Korona-situasjonen medfører. Då er det kjekt at dette nummeret kan retta søkjeljoset mot noko positivt: Holmboeprisen som heidrar ein matematikklærar eller ei gruppe med matematikklærarar for særleg godt arbeid med undervising.

Anne Seland vart tildelt Holmboeprisen 2020. Ho er lærar ved Flekkefjord videregående skole og underviser matematikk både på yrkesfag og studieførebuande. Norsk Matematikkråd er ansvarlege for å dela ut Holmboeprisen, og leiaren Antonella Zanna har skrive ein fin omtale av Seland. Holmboekomitéen gav òg heiderleg omtale til Ellen Egeland Flø for hennar arbeid ved Mailand videregående skole. Flø har no starta på ei doktorgrad om programmering i matematikkundervising, og i dette nummeret skriv ho om mange konkrete forslag til korleis ein kan arbeida med programmering i tråd med kompetansemåla i læreplanen.

Me veit at mange lesarar set pris på tekstar som er skrivne av lærarar. I dette nummeret skriv Beate Hatle Amundsen frå Ulsteinvik barneskule og Annemieke Paulsen frå Stange skole om korleis ein kan arbeida med forståing av funksjonar med dei yngste elevane. Begge lyfter fram korleis arbeid med ulike representasjonar som talsymbol, tabellar, teikningar, munnlege forklaringar og samtale kan hjelpa elevar på 1. og 2. trinn til å identifisera mønster som begynnande algebra- og funksjonstenking.

Kari-Anne Bjørnø Rummelhoff har intervjua elevane sine i 10F ved Gressvik ungdomsskole om deira tankar om matematikkfaget. Teksten er ein del av ein intervju-stafett i Tangenten der born og elevar sine stemmer om matematikk og matematikkundervising skal høyrast. Det er fleire gode poeng å plukka med seg frå elevane. Dei er klokkeklare på at matematikk er viktig og dei ser positive sider med ulike undervisingsorganiseringar. Det er noko eige ved poeng som at undervisingsfilmar bør lagast av eigen lærar når dei vert språksette med elevar sine ord og vendingar. Når arbeidsdagen handlar om å organisera for undervising i tråd med koronavilkår kan det være godt å lena seg litt attende og lesa elevar sine tankar om matematikk og undervising.

Zanna

Holmboeprisen 2020

Holmboeprisen gis til en lærer eller en gruppe lærere i grunnskole eller videregående skole som har utmerket seg i arbeid med matematikkfaget. Prisen er oppkalt etter Bernt Michael Holmboe (1795–1850), som var Abels matematikklærer og nedla et stort arbeid for faget både som lærer, lærebokforfatter og fagmann.

Årets vinner, Anne Seland, er lærer ved Flekkefjord videregående skole. Prisvinneren er en svært dyktig, grundig og engasjert lærer, med en uvanlig stor arbeidskapasitet.

Anne Seland har en helt spesiell evne til å løfte og stimulere elevene sine. Dette gjelder både de som strever med faget, og elever som ønsker nye og større utfordringer. Dette oppnår hun gjennom å legge vekt på forståelse fremfor pugging av løsningsalgoritmer, og gjennom bruk av rike problemløsningsoppgaver. Anne Seland underviser både på yrkesfag og i programfag som R1 og R2, og elevene hennes opplever matematikkfaget som meningsfullt og spennende. Vinneren av årets Holmboepris er alltid på jakt etter nye undervisningsmåter som kan gi elevene en dypere forståelse av sammenhenger i matematikkfaget. Elevene lærer for eksempel mønstergjenkjenning og generalisering gjennom å utforske og finne fram til formler for antall flytt i Hanois tårn, og gjennom andre oppgaver som stimulerer algoritmisk tenking. Hun er opptatt av at elevene skal bli gode problemløsere, og lar dem gjerne jobbe i skiftende tilfeldige grupper, i tråd med teoriene til Peter Liljedahl. Dette er noe som bidrar til engasjement og et stort læringstrykk.

Anne Seland er fagkoordinator i matematikk på Flekkefjord videregående skole, og blir opplevd som en stor inspirasjonskilde og ressurs for kollegene sine. Hun har utviklet egne kartleggingsprøver i matematikk og har holdt kurs i blant annet Python-programmering for lærerne på egen skole. I mange år har hun arrangert sommerkurs med gode resultater for elever som trenger bestått i 1P-Y for å få fagbrev.

(fortsettes side 9)

Antonella Zanna
Norsk matematikkråd
antonella.zanna@uib.no

Flø

Programmering i LK20

Da stod vi her, midt i oppstart av nye læreplaner, i tillegg til en pandemi. Det har ikke vært den enkleste høsten å være lærer, men jeg håper jeg kan bidra positivt med denne artikkelen. Jeg vil dele konkrete eksempler på undervisningsopplegg, spesielt knyttet opp mot matematikk og programmering. Flere digitale ressurser vil også gjøres tilgjengelig gratis via et nytt nettsted.

Ifølge de nye læreplanene (LK20) skal elevene lære å programmere i matematikk, naturfag, musikk og kunst og håndverk, der matematikk har hovedansvar for programmeringsopplæringen. Programmering i matematikkfaget handler om at elevene skal lære å bruke algoritmisk tenkning som en problemløsningsstrategi og vurdere når det er formålstjenlig å bruke ulike digitale hjelpemidler, inkludert det å programmere. Gjennomsnittlig ligger det ett kompetansemål innen programmering i matematikk hvert skoleår i grunnskolen, og gjennom de nye planene uttrykkes det et ønske om at elevene skal få opplæring i programmering for å få faglig utbytte innen for eksempel matematikk.

Ellen Egeland Flø
Universitetet i Oslo
elleneg@student.uv.uio.no

Ellen Egeland Flø fikk hederlig omtale i forbindelse med Holmboeprisen i 2020.

Det er formulert beskrivelser i overordnet del, i kjerneelementene og i kompetansemålene, om at elevene skal utforske og oppleve skaperglede i matematikken. Samlet sett skal LK20 bidra til å øke elevenes dybdelæring. Det er ikke akkurat et enkelt oppdrag lærerne har fått! Hvordan kan man som lærer operasjonalisere disse kravene?

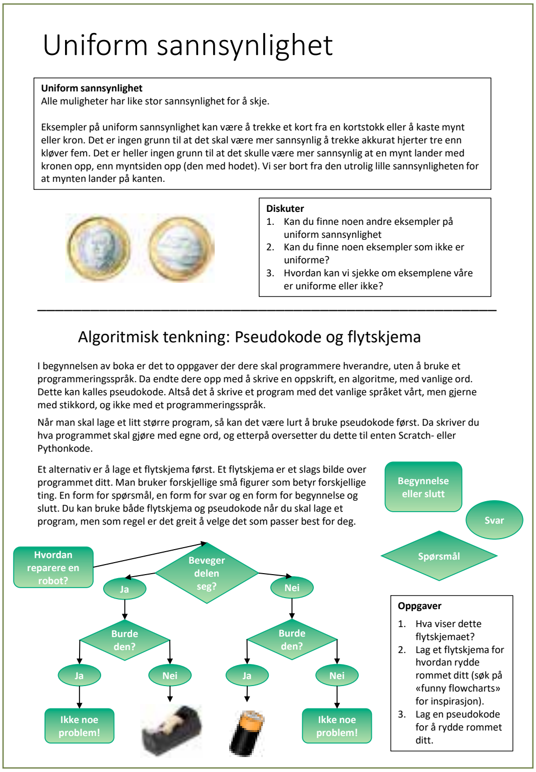
Jeg foreslår å bruke tverrfaglige undervisningsopplegg som knytter ulike matematiske områder opp mot programmeringsoppgaver og utforskende arbeidsmåter, der elevene utvikler og lager en fysisk gjenstand for å løse oppgaven. Elevene jobber i samsvar med en modell som er basert på en kombinasjon av naturvitenskapelige metoder og designtenking. Den består av at elevene arbeider seg gjennom syv faser:

1. Undersøke
2. Planlegge
3. Gjennomføre
4. Teste
5. Evaluere
6. Forbedre
7. Dokumentere

Disse fasene inngår i figur 1, som viser eksempel på et undervisningsopplegg basert på denne modellen. Hovedpoenget er ikke at elevene slavisk trenger å følge denne modellen, den skal heller ikke oppfattes kronologisk. Man hopper gjerne mellom de ulike fasene og er innom forskjellige faser mange ganger. Dette er sentralt, siden et viktig poeng med denne måten å jobbe på er å «lære av sine feil». For å legge til rette for dette bør elevene bli oppmuntret til å evaluere hvordan arbeidet går, og å korrigere/justere kursen videre. Fasene kan særlig være knagger for lærerne å ha når de utvikler slike undervisningsopplegg. Jeg leder for tiden forskningsprosjektet ProSkap-SL, som undersøker undervisning basert på denne modellen, se gjerne mer på prosjektets nettsted (https://www.uv.uio.no/iped/forskning/prosjekter/morch-prokraft/).

Som lærer i nesten ti år har jeg gjort meg noen personlige erfaringer med å jobbe på denne måten. Blant annet har jeg brukt et undervisningsopplegg der elevene bygger solfangere (se figur 5), da solfangeres virkemåte har vært pensum for Vg1 fram til høsten 2020. Mine foreløpige erfaringer tilsier at elevene har veldig ulike tilnærminger, noen veldig systematiske/matematiske, mens andre bare prøver seg fram, men alle har endt opp med noe bra til slutt. En elev som var faglig svak i matematikk og naturfag, nærmest strålte da hun fikk til å lage sitt første program for temperaturmåling. Og en diskusjon jeg hadde med en elevgruppe om gyldighetsområde for deres modell (en tredjegradsfunksjon) av temperaturen som funksjon av tid for solfangeren deres, kommer jeg ikke til å glemme. De fleste på gruppa hadde ikke vært borti regresjon (tre av fire elever), men alle snakket i munnen på hverandre da de prøvde å forklare hvorfor modellen ikke gjaldt for alle verdier av x. Mitt håp er at denne typen undervisningsopplegg kan bidra positivt til tilpasset opplæring og mestring for et større mangfold av elever.

Jeg har utformet denne typen undervisningopplegg på en slik måte at venstresiden er et sammendrag av tilhørende fagstoff, som elevene bør ha jobbet med før de skal i gang med det praktiske arbeidet. I figur 1 er sannsynlighet temaet, samt en kort introduksjon til pseudokoding og flytskjema, som er begreper hentet


Uniform sannsynlighet

Uniform sannsynlighet
Alle muligheter har like stor sannsynlighet for å skje.

Eksempler på uniform sannsynlighet kan være å trekke et kort fra en kortstokk eller å kaste mynt eller kron. Det er ingen grunn til at det skal være mer sannsynlig å trekke akkurat hjerter tre enn kløver fem. Det er heller ingen grunn til at det skulle være mer sannsynlig at en mynt lander med kronen opp, enn myntsiden opp (den med hodet). Vi ser bort fra den utrolig lille sannsynligheten for at mynten lander på kanten.

Diskuter
1. Kan du finne noen andre eksempler på uniform sannsynlighet
2. Kan du finne noen eksempler som ikke er uniforme?
3. Hvordan kan vi sjekke om eksemplene våre er uniforme eller ikke?

Algoritmisk tenkning: Pseudokode og flytskjema

I begynnelsen av boka er det to oppgaver der dere skal programmere hverandre, uten å bruke et programmeringsspråk. Da endte dere opp med å skrive en oppskrift, en algoritme, med vanlige ord. Dette kan kalles pseudokode. Altså det å skrive et program med det vanlige språket vårt, men gjerne med stikkord, og ikke med et programmeringsspråk.

Når man skal lage et litt større program, så kan det være lurt å bruke pseudokode først. Da skriver du hva programmet skal gjøre med egne ord, og etterpå oversetter du dette til enten Scratch- eller Pythonkode.

Et alternativ er å lage et flytskjema først. Et flytskjema er et slags bilde over programmet ditt. Man bruker forskjellige små figurer som betyr forskjellige ting. En form for spørsmål, en form for svar og en form for begynnelse og slutt. Du kan bruke både flytskjema og pseudokode når du skal lage et program, men som regel er det greit å velge det som passer best for deg.

Oppgaver
1. Hva viser dette flytskjemaet?
2. Lag et flytskjema for hvordan rydde rommet ditt (søk på «funny flowcharts» for inspirasjon).
3. Lag en pseudokode for å rydde rommet ditt.

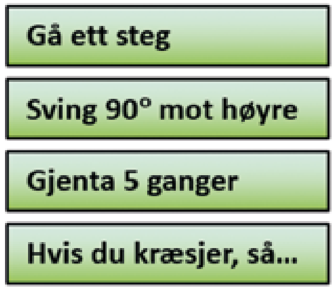
Figur 1: Undervisningsopplegg om sannsynlighet der elevene skal lage terning eller lykkehjul. Last ned PDF av alle undervisiningsoppleggene fra www.caspar.no/tangenten/2021/flo.pdf

fra programmeringsopplæring. Det jobbes med kompetansemålet på 9. trinn: «simulere utfall i tilfeldige forsøk og berekne sannsynet for at noko skal inntreffe, ved å bruke programmering». Høyresiden er delt opp i de syv fasene med veiledende tips og spørsmål til elevene som leder dem i prosessen med å gjennomføre oppgaven, men uten noen form for ferdig oppskrift eller fremgangsmåte. Elevene må støttes i å tenke ut selv. Lærerens rolle blir da mer som en rollemodell som demonstrerer hvordan elevene kan gå fram for å finne ut av det de lurer på, heller enn å komme med de «riktige» svarene.

I undervisningoppleggeti figur 1 skal elevene lage et program som simulerer et mulig utfall og beregner sannsynligheten for dette utfallet, slik det står i kompetansemålet som det er henvist til over. Angående programmeringsbegreper, slik som løkker, variabler, funksjoner, vilkår o.l., sier Grover et al. (2015) og Meerbaum-Salant et al. (2013) at det er krevende for elevene å lære disse, og at det er viktig at læreren tar opp disse begrepene eksplisitt i sin undervisning. De fremhever at elevene ikke lærer programmering og programmeringsbegrepene automatisk ved å lage egne programmer (Grover et al., 2015; Meerbaum-Salant et al., 2013). En populær tilnærming til begrepslæring innen programmering kalles analog programmering (unplugged programming), der man programmerer uten datamaskin, nettbrett eller annen digital teknologi.

Et eksempel på en analog programmeringsaktivitet kan være å dele elevgruppa inn i par, der hver gruppe får tildelt en egen destinasjon. Elevene skal lage en skriftlig oppskrift på hvordan den andre eleven i paret skal bevege seg for å nå denne destinasjonen. Denne aktiviteten fungerer også for uteskole i koronatider! I andre aktiviteter kan en elev i et elevpar lage en forklaring på hvordan en enkel tegning kan tegnes uten at den andre eleven ser på. Googler man «unplugged programming», finner man mange gode forslag til denne typen aktiviteter.

Ifølge Grover et al. (2015) vil det være viktig å bevisstgjøre elevene på sammenhengen mellom det konkrete innholdet i aktiviteten og de tilhørende programmeringsbegrepene. For destinasjonsaktiviteten kan det gjøres ved at elevene skal gjennomføre aktiviteten en gang til, men til en annen destinasjon som bare den ene eleven i elevparet vet om. Denne gangen kan elevene bare bruke ferdige lapper for å lage oppskriften sin. Lappene kan for eksempel se ut som de i figur 2 med ulike programmeringsbegreper på. Etter gjennomført aktivitet kan læreren ta opp hvilke programmeringsbegreper de nå har brukt, hva som var formålet med dem, og hensiktsmessige bruksområder, og drøfte dette med elevene. Ved senere programmeringsaktiviteter kan læreren hjelpe elevene med å vedlikeholde disse begrepene ved å repetere dem sammen med elevene, og gjerne koble dem mot bruk i andre sammenhenger. Dette vil kunne styrke elevenes forståelse av begrepene da det blir bevisstgjøring av begrepene samtidig som de abstrakte begrepene blir eksemplifisert i flere ulike sammenhenger. Slike analoge aktiviteter har jeg erfaring med at også fungerer på en fin måte for å få nye klasser til å bli kjent med hverandre. Det virker som en ganske ufarlig måte å samarbeide på, og det fungerer for elever fra skrivedyktig alder til voksne lærere.



Figur 2: Eksempler på ferdige lapper til destinasjonsaktiviteten.

Man kan vurdere om elevene i utgangspunktet skal bruke blokk- eller tekstbasert programmering. LK20 krever ikke tekstbasert programmering på ungdomstrinnet. Alle kompetansemålene kan nås ved hjelp av blokkbasert programmering. Men dette kan potensielt endres når man får tilgang til eksamensoppgaver for 10. trinn, og flertallet av forlagene har valgt å satse på det tekstbaserte programmeringsspråket Python. Meerbaum-Salant et al. (2013) viser til at blokkbaserte programmeringsspråk er fine å bruke for nybegynnere innen programmering, da man slipper å fokusere så mye på den detaljerte syntaksen, som semikolon, parenteser, innrykk og stor bokstav. Type programmeringsspråk kan inngå i lærerens differensieringsstrategi, da de fleste programmeringsoppgaver på ungdomstrinnet vil kunne gis for begge typer.

Det å tilpasse opplæringen innen programmering kan også gjøres ved å ta i bruk ulike oppgavetyper som innebærer større eller mindre grad av stillasbygging rundt elevens forståelse. Harms et al. (2016) oppsummerer at forskningen på feltet gjerne tar utgangspunkt i å redusere elevenes opplevde vanskegrad gjennom at elevene får andre typer oppgaver enn å skrive egen kode fra bunnen. Noen eksempler på slike oppgavetyper:

- Et ferdig program som elevene skal forklare hva gjør
- Et ferdig program som elevene skal beskrive «output» til
- Begynnelsen av et program som de skal skrive ferdig
- Kode med feil som elevene skal rette opp
- Kode der elevene skal bytte ut en del (substituering)
- Puslespilloppgaver der elevene får koden hulter til bulter («Parsons problems»)
- Sammensatte oppgaver basert på PRIMM-modellen

Ericson et al. (2017) viser at å skrive kode fra bunn er krevende for elevene, mens det å endre, justere eller tilpasse ferdig kode oppleves som enklere. Det å hjelpe elever med å kategorisere kodesnutter virker positivt på deres læring i følge Ericson et al., og henger trolig sammen med at elevene på den måten får hjelp til å abstrahere begrepene og gjøre dem mer generelle. Da vil det kunne være enklere for elevene å bruke begrepene i nye situasjoner. To av oppgavetypene det er forsket mest på, er «Parsons problems» og PRIMM-modellen for programmeringsoppgaver. I figur 3 og figur 4 er det eksempler på begge oppgavetypene bygget inn i større undervisningsopplegg for matematikk (og naturfag).

«Parsons problems» kan gis med eller uten informasjon om innrykk (som er sentralt i Python da det definerer hva som hører til for eksempel en løkke) og med eller uten ekstra linjer med kode (eller kodeblokker) som ikke skal benyttes i det ferdige programmet. Dette kalles gjerne distraktorer, og alt etter hvordan de utformes, kan de brukes til målrettet trening

Lag en øy!
- og programmer populasjonsveksten

Oppgave
Lag en modell av en liten øy med en oversikt over de forskjellige biotiske og abiotiske faktorene. Tenk deg at det ble satt ut et kaninpar. Lag et program som beregner hvor mange kaniner det blir på øya hvert år etterpå, for de 10 første årene. Lag en figur på oversikten som viser populasjonsveksten for kaninene.

Fase 1: Hvilke materialer skal dere bruke for å lage øya? Hvilke abiotiske/biotiske faktorer skal dere illustrere?

Fase 2: Det er viktig at dere er åpne for alle slags ideer og ikke er kritiske, da kan morsomme forslag bli avfeid for tidlig.

1. Tenk selv først og tegn gjerne skisser.
2. Forklar ideen din for de andre på gruppa.
3. Hele gruppa diskuterer de ulike ideene, og lager en felles plan for øymodellen.

Fase 3: Lag en modell av øya deres med biotiske og abiotiske faktorer. Lag programmet som beregner populasjonsveksten. Spør læreren om ark med tips til programmeringen, om dere vil.

Puslespill-programmering

```
verdi = verdi*vekstfaktor        verdi = startverdi

startverdi = 0        print(verdi)        økning = 0

for i in range(0,10):        vekstfaktor = 1 + økning/100
```

Fase 4: Hvordan skal dere teste modellen av øya deres? Kanskje kan det være fornuftig å sammenligne resultatene med andre i klassen.

Fase 5: Er det noe dere vil endre?

Fase 6: Gå tilbake til de andre fasene for å gjøre planlagte forbedringer på modellen deres.

Fase 7: Dokumenter det dere har gjort med en liten film og begrunn valgene deres. Vis fram resultatet for resten av klassen med en liten utstilling.

Refleksjonsoppgaver
1. Hva ville skjedd med de forskjellige artene på øya om det flyttet mennesker dit?
2. Menneskene ville trenge å dyrke mat, hvilke konsekvenser ville dette få for det biologiske mangfoldet på øya?
3. Hva er viktigst av at mennesker kan benytte naturressursene og å bevare det biologiske mangfoldet?
4. Hva om menneskene ville drive gruver eller lage et kraftverk?

Diskuter
1. Hvilken type matematisk modell har vi brukt for populasjonen på øya?
2. Er denne realistisk?
3. Hvorfor/hvorfor ikke?
4. Klarer du å finne en modell som er mer realistisk?

Figur 3: Eksponentialfunksjoner kombinert med økologi. Et «Parsons problem» der elevene skal modellere populasjonsvekst. Oppgaven kan byttes ut med enklere eller mer krevende alternativ.

på forskjellige nivåer. For eksempel vil man kunne oppgi en kodelinje med to alternativer, der eneste forskjell mellom dem er en stor/liten bokstav i et variabelnavn. Da trener man elevene i syntaks, og man kan samtidig ta opp viktigheten av språklig presisjon innen programmering. Andre alternativer kan være å fokusere på det matematiske innholdet til et program, der man kan ha to alternativer til hvor stor vekstfaktoren blir ved 2,0 % årlig rente. Bruk av distraktorer gjør at slike oppgaver oppleves som vanskeligere for elevene enn om de får oppgaver uten distraktorer (Harms et al., 2016). Generelt gir det å jobbe med «Parsons problems» minst like stort læringsutbytte som å skrive egen kode, og det skjer også mer effektivt, altså på kortere tid (Ericson et al., 2017).

PRIMM-modellen beskriver en sammensatt oppgavetype (eller måte å strukturere timene innen programmeringsopplæring på), der det legges stor vekt på samarbeid og diskusjon av hva som skjer i programmene, og på å gi elevene nok stillaser for å støtte elevenes læring av programmeringsbegreper. PRIMM er forkortelse for predict, run, investigate, modify og make, og beskriver gangen i modellen. Først får elevene utdelt en kode / et program som de skal forutsi hva gjør, deretter skal elevene kjøre koden og se hva som faktisk skjer, før de videre undersøker koden gjennom å jobbe med spørsmål, feilsøking e.l. Deretter skal elevene modifisere eller endre koden, og til slutt kan de skrive en helt egen kode, og i dette arbeidet fremheves det å la elevene jobbe sammen, gjerne i par. Sentance et al. (2019) fant at PRIMM-modellen er en lovende tilnærming til programmeringsopplæring, også for elevene som strever faglig. Se gjerne nettsidene til PRIMM-prosjektet ved King's College London – https://blogs.kcl.ac.uk/cser/research-projects/primm-project/.

Det har i flere tiår vært debattert hvordan lærere bør strukturere timene innen programmeringsopplæring. Debatten dreier seg i stor grad om hvor stor frihet elevene skal få, versus hvor styrt undervisningen bør være. Grover et al. (2015) oppsummerer at undervisningsopplegg der elevene får utforske fritt, ser ut til å gi liten kompetanse med hensyn til tidsbruk. På den andre siden vil hefter/bøker/nettsteder med forklaringer og gjennomgåtte eksempler heller ikke være spesielt effektive for læring (Harms et al., 2016). Da disse markerer to ytterpunkter for styring/frihet, vil det ikke være utenkelig at noe midt imellom vil fungere best, gjerne en form for moderat styrt utforskende tilnærming.

Men hvordan er sammenhengen mellom programmering og det å designe og utforme fysiske gjenstander? Det kalles gjerne for programmering av fysiske objekter, og Marshall (2007) fant ut at dette gir en positiv effekt på samarbeidslæring og aktiv læring. Videre fant Austin et al. (2020) og Sentance et al. (2017) at elevenes interesse for IKT-fag (computer science) stimuleres, og at elevenes forståelse for og holdninger til IKT-fag bedres. Om det bidrar direkte til at elevene lærer mer, er foreløpig ikke undersøkt.

Kombinasjonen av ønskene om å programmere fysiske objekter med det å jobbe skapende og utforskende (som kreves i LK20) for å lære matematikk (og gjerne andre fag) har munnet ut i undervisningsopplegg basert på en skaperverkstedmetode, med de syv fasene nevnt tidligere. Her er skaperverksted ikke et fysisk rom med mye spennende teknologi (som trolig er mindre gjennomførbart på alle skoler med presset økonomi). Det er heller en måte å jobbe på, der hovedfokuset er på det faglige innholdet, heller enn på digitale verktøy. Samtidig kan man gjerne bruke digitale verktøy som er tilgjengelig,

Python-oppgave populasjoner

```
1  økning = 20
2  startverdi = 500
3
4  vekstfaktor = 1 + økning/100
5  verdi = startverdi
6
7  for i in range(0,10):
8      verdi = verdi*vekstfaktor
9      print(verdi)
```

1. Gjett hva programmet ved siden av gjør. Skriv en kort forklaring på baksiden av arket.
2. Gå inn på nettadressen: https://tjenester.lokus.no/open/programmering/python.html og skriv av koden. Trykk på play-knappen for å kjøre koden. Hva skjer?
3. Forklar koden:

Kodelinje	Forklaring
økning = 20	
startverdi = 500	
vekstfaktor = 1 + økning/100	
verdi = startverdi	
for i in range(0,10):	
verdi = verdi*vekstfaktor	
print(verdi)	

4. Endre koden
   a) Bytt rekkefølgen på linje 8 og 9. Hva tror du vil endre seg når du kjører programmet?
   b) Finn ut hvor mange dyr det er etter 10 år hvis økningen er 4,0 % årlig.
   c) Hva må du endre i programmet ditt dersom populasjonen **minker** med 20 % årlig?
   d) Kan du fjerne en linje i programmet og fortsatt få samme resultat som i oppgave b? Må du endre noe mer i tillegg?
5. Utfordring:
   a) Finn ut hvor lang tid det tar før en pingvinpopulasjon på 10 000 pingviner dobles dersom økningen er på 2,0 %.
   b) Endre koden slik at du lager en graf over antall pingviner for 5000 år.
   c) Hvilken type matematisk modell har vi for pingvinpopulasjonen? Er denne realistisk?

Figur 4: Oppgave basert på PRIMM-modellen. Kan også brukes i Figur 3 som alternativ til elever som trenger mer støtte.

men det blir et verktøy for å nå kompetansemål, og er ikke et mål i seg selv. Gjennom det landsdekkende super:bit-prosjektet får alle barneskoler tildelt programmeringsutstyr basert på micro:bit (https://www.superbit.no/). Denne typen utstyr kan bidra til større muligheter for å koble sammen faginnhold med programmeringen. For å holde fokus på matematikken bør man primært ta utgangspunkt i fagets kjerneelementer og kompetansemål, og deretter se på teknologi som fremmer forståelse.

Elevene samarbeider her i små grupper, der de jobber både praktisk med å lage en fysisk gjenstand og teoretisk med ulike matematiske begreper og beregninger. De jobber med problemløsning, og får teste problemløsningsstrategier, mens de jobber og selv merker behov for denne typen strategier. Her kommer også algoritmisk tenkning inn som en mulig problemløsningsstrategi ved at elevene veiledes i å jobbe systematisk og bryte komplekse problemer opp i mindre og enklere oppgaver. Se gjerne UDIRs nettsider om algoritmisk tenkning for mer detaljer (UDIR, 2019).

Den fysiske gjenstanden som elevgruppene samarbeider om å lage, fungerer som en prototype. Det vil si at det er meningen at det alltid vil være mulig å forbedre den, og gjerne i flere omganger, slik at neste versjon virker litt bedre. Da vil det forhåpentligvis føles som mindre farlig å gjøre feil, siden det blir en naturlig del av prosessen. Den fysiske gjenstanden, og utstyret elevene bruker for å lage denne, kan da fungere som konkretiseringsmateriell for abstrakte begreper og sammenhenger. Dette skal jeg se nærmere på i mitt doktorgradsarbeid.

For å bidra konkret til innføringen av LK20 har jeg sammen med det som tidligere var Snöball Film fått støtte fra Udir til å utvikle en digital gratisressurs for denne typen undervisningsopplegg i hovedsak for ungdomstrinnet. Den vil stå ferdig omtrent til høsten 2021 på www.kunnskapsfilm.no.

Store deler av denne ressursen kan være av interesse for videregående skole, spesielt de

Solenergi

- Hvordan kan vi varme vann ved hjelp av solenergi?

Energiproduksjon fra sollys

Energien fra sollyset er fornybar energi, siden vi ikke kan bruke den opp. Sollyset som treffer jordkloden kan gi energi som er 15 000 ganger høyere enn energiforbruket til alle menneskene på jordkloden. Dersom vi hadde klart å utnytte alle energien fra sola, så hadde vi ikke trengt annen energiproduksjon.

En samling av solcellepaneler

Det er to måter å produsere energi fra sollys. Vi kan bruke solceller eller solfangere. I en solcelle dannes det elektrisitet siden sollyset kan slå løs elektroner. Disse elektronene beveger seg i en krets på grunn av måten solcellene er bygget opp, og vi får dannet elektrisitet.

Det finnes to typer solfangere. Begge virker slik at de varmer opp vann eller en annen væske. Forskjellen på de to typene er hvor høy temperatur de varmer væsken opp til, og hva de gjør med væsken etter den er oppvarmet.

1. Solfanger til elektrisitetsproduksjon – denne typen består av mange speil som reflekterer sollyset slik at det treffer en liten beholder med væske. Da vil temperaturen til denne væska øke kraftig og væska fordamper. Det vil si at den blir til gass. Da kan gassen drive en turbin som omformer bevegelsesenergien til gassen til elektrisitet. Dette er typisk større energikraftverk som produserer elektrisitet nok til mange tusen husstander.
2. Solfanger til oppvarming av vann – denne typen er langt enklere enn den andre, og noe privatpersoner kan ha hjemme. De bruker energi fra sollyset til å varme opp vann til opp mot kokepunktet. Mange bruker slike solfangere på hytta eller campingtur for å varme opp dusjvann. De består av en svart pose med vann oppi, siden svart farge absorberer mest mulig av strålingen fra sollyset, og en plastslange med et lite dusjhode. Her får vannet som regel ikke veldig høy temperatur, men det kan være lurt å sjekke litt forsiktig med en lillefinger før man dusjer hele seg.

   Lignende solfangere kan også brukes av mennesker som bor steder uten tilgang til elektrisitet for å koke vannet sitt, slik at bakterier og parasitter dør. Da er det mindre fare for å bli syke. I tillegg kan de få laget varm mat, selv om de ikke har tilgang på ved. Disse solfangerne består gjerne av papp eller tre, noe reflekterende, noe absorberende, noe som isolerer, og en beholder til vannet.

Testing av en solfanger.

Materialene som en solfanger består av har alle en funksjon.

Papp - byggemateriale

Plastfolie – isolerer

Aluminiumsfolie – reflekterer sollys

Svart maling – absorberer sollys

Snakk om

All energi på jordkloden stammer til sist fra solenergi, både fornybare energikilder og ikke-fornybare energikilder. For eksempel vindkraft, vannkraft, olje, gass og kull, til og med energien i maten vi spiser!

1. Hvordan kan det stemme? Forklar hvordan det kan være slik.
2. Kan du komme på noen unntak? Er det noen energikilder som ikke har sitt opphav i solenergi?

Figur 5: Opplegg om modellering og solenergi det elevene bygger solfanger og måler temperaturøkningen med en micro:bit. Rettet mot ungdomstrinn, kan brukes på mellomtrinn med enklere fagstoff[1].

første årene etter innføringen av LK20. Ressurser spesielt for videregående utvikles også av dyktige lærere som deltar i forskningsprosjektet ProSkap-SL, og vil publiseres etter hvert. I prosjektet ønsker vi også å se på vanskegrad for ulike oppgavetyper innen programmering, og hvordan de kan bidra til tilpasset opplæring. Derfor har vi laget flere versjoner av en Pythonbasert programmeringstest ut fra kompetansemålene i programmering i grunnskolen, som vi ønsker at flest mulig gjennomfører. Både lærere, forskere og elever som har noe programmeringskunnskap, inviteres til å delta og til å være med i trekningen av et klassesett micro:bit (10 stykker) til sin skole. Testen er anonym, og finnes her: https://nettskjema.no/a/prog.

Lykke til med programmeringsundervisning i matematikken, folkens!

Note

1 Opplegget er rettet mot ungdomstrinnet, kan legges til rette for mellomtrinnet og kan også tilpasses oppover ved å inkludere kalibrering og mer avansert fagstoff. Det er også mulig å måle temperaturen med en micro:bit og sende data til en annen micro:bit, som igjen kan logge data på en datamaskin, eller temperaturdata kan skrives til en fil på micro:biten som igjen kan behandles videre ved hjelp av Python. Alle disse forskjellige tilpasningene vil ligge tilgjengelig på den nye gratisressursen Kobling B på www.kunnskapsfilm.no.

Referanser

Austin, J., Baker, H., Ball, T., Devine, J., Finney, J., De Halleux, P., Hodges, S., Moskal, M. & Stockdale, G. (2020). The BBC micro:bit: From the UK to the world. *Communications of the ACM, 63*(3), 62–69.

Ericson, B. J., Margulieux, L. E. & Rick, J. (2017). Solving parsons problems versus fixing and writing code. I C. S. Montero & M. Joy (red.), *Proceedings of the 17th Koli Calling International Conference on Computing Education Research* (s. 20–29). ACM.

Grover, S., Pea, R. & Cooper, S. (2015). Designing for deeper learning in a blended computer science course for middle school students. *Computer Science Education, 25*(2), 199–237.

Harms, K. J., Chen, J. & Kelleher, C. L. (2016). Distractors in parsons problems decrease learning efficiency for young novice programmers. I J. Sheard, J. Tenenberg, D. Chinn & B. Dorn (red.), *Proceedings of the 2016 ACM Conference on International Computing Education Research* (s. 241–250). ACM.

Marshall, P. (2007). Do tangible interfaces enhance learning? I B. Ullmer & A. Schmidt (red.), *Proceedings of the 1st International Conference on Tangible and Embedded Interaction* (s. 163–170). ACM.

Meerbaum-Salant, O., Armoni, M. & Ben-Ari, M. M. (2013). Learning computer science concepts with scratch. *Computer Science Education, 23*(3), 239–264.

Sentance, S., Waite, J., Hodges, S., MacLeod, E. & Yeomans, L. (2017). «Creating cool stuff»: Pupils' experience of the BBC micro:bit. I M. E. Caspersen & S. H. Edwards (red.), *Proceedings of the 2017 ACM SIGCSE Technical Symposium on Computer Science Education* (s. 531–536). ACM.

Sentance, S., Waite, J. & Kallia, M. (2019). Teaching computer programming with PRIMM: a sociocultural perspective. *Computer Science Education, 29*(2), 136–176.

Utdanningsdirektoratet (UDIR) (2019). *Algoritmisk tenkning*. www.udir.no/kvalitet-og-kompetanse/profesjonsfaglig-digital-kompetanse/algoritmisk-tenkning/

(fortsettelse fra side 2)

Anne Seland er også en svært aktiv og respektert bidragsyter utenfor egne klasser og egen skole. Hun er leder av eksamensnemnden i Utdanningsdirektoratet for fellesfagene i matematikk og er med på å lede sensorskoleringen i disse fagene. Hun har holdt en rekke kurs i blant annet problemløsning og Python-programmering rundt om i landet, og har også holdt foredrag om den norske eksamensordningen på konferanser i utlandet. Prisvinneren underviser i tillegg lærere som tar etterutdanning ved Universitetet i Bergen, og får der svært gode tilbakemeldinger fra studentene.

Anne Seland blir omtalt som en meget dyktig matematikklærer med et eget blikk for hva hver enkelt elev trenger.

Amundsen

Funksjonstenking på 1. trinn

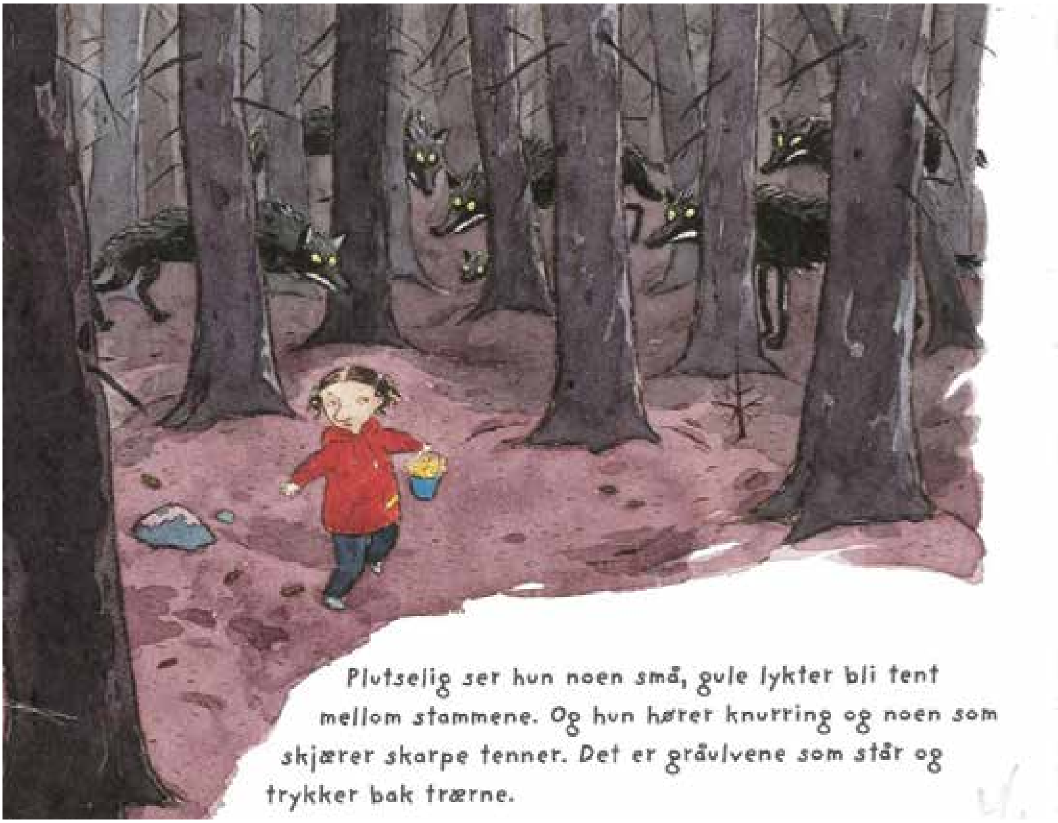
Figur 1

I denne artikkelen presenterer eg eit undervisingsopplegg som blei levert som del av ein eksamen i lærarspesialist i begynnaropplæring ved OsloMet. Målsetjinga var å sjå på tidleg funksjonstenking hos elevar i 1. klasse. Eg ville prøve ut ein proporsjonal funksjon der elevane aktivt skulle gå på jakt etter mønster for å kunne generalisere funksjonelt og uttrykkje samanhengar mellom storleikane. Med hjelp frå læraren skulle dei systematisere talpara i tabellar og oppdage at samanhengen mellom variablane hadde multiplikativ funksjon, dobling. Eg ville også sjå på korleis læraren i klassesamtalen kunne identfisere kunnskap hos elevane som ein kan byggje vidare på og slik utvikle den algebraiske undringa og symbolspråket til elevane.

I planleggingsfasen av undervisningsøkta valde eg Kazemi og Hintz sin planleggingsmal *Hvorfor? La oss begrunne* (2019) som støtte for å strukturere og leie den matematiske diskusjonen. Slik hadde eg gjort meg opp ei meining om kva elevane først ville finne ut i oppgåva; å telje ulvane og deretter augo som dei såg på biletet. Ved å la elevane teikne si forståing ville eg leie samtalen i retning mot å oppdage proporsjonal samanheng mellom tal på ulvar og augo. Var det mogleg å oppdage dobling? Eg var også ute etter elevane sin bruk av symbolspråk, og korleis dei på ein effektiv måte kunne bruke teikning som representasjon for tanken. Vidare ønskte eg å introdusere ein enkel tabell for å systematisere det som kom fram i samtalen. Dersom vi kom så langt som ein tabell, ville eg prøve å få elevane til å sjå på tvers i tabellen, å sjå korleis variablane korresponderte med kvarandre; kovariasjon (Blanton 2008), og slik prøve å oppdage eit mønster saman med elevane. Ved å leie samtalen gjennom bruk av samtaletrekk (Kazemi & Hinz 2019) ønskte eg å ta vare på og vidareutvikle evna til elevane til å tenkje sjølvstendig, gi dei sjølvrespekt og sjølvtillit i den matematiske samtalen samtidig som eg ville gjere den pedagogiske kontrakten min (Ulleberg & Solem 2015) tydeleg for elevgruppa.

Beate Hatlø Amundsen
Ulsteinvik barneskule
beate.amundsen@ulstein.kommune.no

Funksjonstenking på 1. trinn



Oppgåve: Vi har lese boka Gitte og gråulvene i klassen.
I boka er ulvane inne i ein skog, og Gitte kan sjå augo som lyser i mørket. Kor mange ulvar gøymer seg i skogen?
Kor mange augo såg vi i skogen når det var 6 ulvar der? 20 ulvar? 100 ulvar? Uendeleg?
Vis med teikning korleis du tenkjer.
Del tankane dine i læringsgruppa.

Eg gjennomførte forsøket med tre tilfeldig valde elevar i 1. klasse og valde å byrje med noko kjent då eg skulle introdusere oppgåva. Vi hadde lese om Gitte tidlegare i veka, og det var slik enkelt å setje elevane inn i den matematiske problemstillinga.

Vis med teikning korleis du tenkjer. Del tankane dine i læringsgruppa

Elevane får i oppgåve å finne ut kor mange ulvar det var i skogen. Elevane går raskt i gang med å telje ulvane på biletet. Vi blir einige om at det er seks ulvar. Vi legg bort boka, og eg stiller neste spørsmål: Kor mange augo har dei seks ulvane til saman? Elevane må her sjå for seg

Figur 3: Alfred: «Skal eg teikne ein ulv?

Figur 4: Maren: «Eg skal teikne trea.»

Figur 5: Elise: «Eg skal berre teikne ulvane.»

ulvane som bilete i hovudet som ein abstrakt representasjon, og elevane kjem raskt fram til at det er tolv augo. Ifølgje Blanton (2008) bruker barn teikning til hjelp for å resonnere om data, modellere situasjonar eller halde viktig infor-

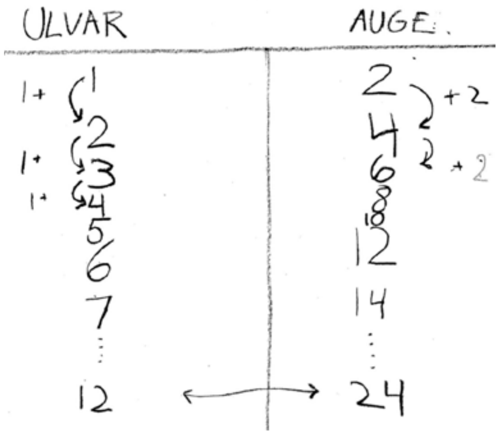
Figur 6: Alfred: «Eg har teikna seks ulvar.»

masjon. Elevane får derfor ikkje samtykke frå meg om at svaret er riktig, men eg ber dei om å teikne korleis dei tenkjer.

Det er mange detaljar i teikningane til Alfred og Maren. Det er berre Elise som forenklar teikninga slik at berre det matematiske innhaldet er synleg (figur 5). Ved å leie elevane gjennom samtale til å forenkle teikningane kan ein hjelpe dei til å fokusere på dei matematiske ideane. Elise teiknar ulvane som sirklar, og fortel at ho veit at ho må telje kvar sirkel to gonger fordi: Kvar ulv har to augo, men med eitt auga på kvar ulv er der seks, og seks pluss seks er tolv. Alfred viser eit forsøk på ei likning i teikninga si og forklarer: 12! Fordi det er seks ulvar og tolv augo. Fordi kvar ulv har to augo (figur 3). Han viser at han ser, ved å bruke kvardagsspråket i samanhengen mellom ulvar og tal på augo. I det andre forsøket på å teikne tankane sine vel Alfred å forenkle teikninga si ved å teikne ulvane som sirklar (figur 6).

Organisere data i funksjonstabellar og å sjå etter samanheng mellom variablane

Det er viktig at elevane blir kjende med ulike representasjonsformer og måtar å organisere data på for å utvikle tidleg funksjonstenking. Dei kan teikne bilete, dei kan lære å skildre enkle samanhengar mellom to mengder ved å bruke kvardagsspråket, dei kan få hjelp til å organisere data i funksjonstabellar og til å sjå på tvers i tabellar etter samanheng mellom variablane (Blanton 2008). Eg valde å lage T-tabell

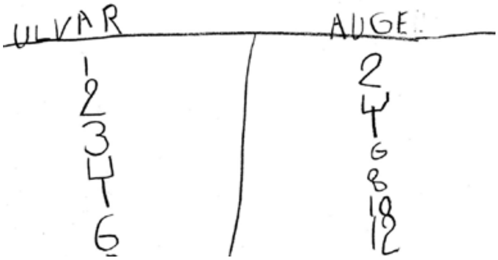


Figur 7: Vi utarbeider ein tabell i fellesskap.

(figur 7) for å leie elevane mot å prøve å finne mønster i talmaterialet. Slik ville eg at elevane skulle gå frå rekursiv tenking (sjå nedover) til kovariasjonell tenking (sjå bortover).

Lærar	Ok, no har de funne ut at seks ulvar har tolv augo. Sjå her, no lagar eg ein strek på midten og ein strek oppe. Kva liknar det på?
Maren	Ein T!
Lærar	Vi har funne ut at seks ulvar har tolv augo. Kor mange augo har éin ulv?
Alle	Han har to!
Lærar	To ulvar, då?
Maren og Elise	Fire!
Lærar	Tre, då?
Elise	Seks!
Lærar	Du er så rask, Elise. Korleis tenkjer du?
Elise	Eg berre veit det. Seks pluss seks er tolv. Hundre pluss hundre er to hundre. Million pluss million er … ein million.

Elevane såg raskt den rekursive samanhengen: Der plussar ein med einarar, og der plussar ein med toarar. Når ein leier elevane mot å sjå på tvers i tabellen, kan elevane tidleg byrje å



Figur 8: Maren er rask til å kopiere T-tabellen til sitt eige ark.

skildre funksjonelle samanhengar (Blanton 2008). Elise: Fordi ulvar, kattar og hundar og slikt har to augo. Det er på ein måte at ein tek det same ein gong til. Dobbelt.

Figur 9: Maren kopierer Alfreds teikning.

Figur 10: Maren nyttar seg av teljestrekar for å finne ut av løysinga.

Be om fleire løysingsforslag og synleggjere den didaktiske kontrakten

Maren lagar ei detaljert teikning, med tre, ulvar og menneske, og bruker lang tid på dette (figur 4). Ho legg likevel merke til arbeidet til dei andre elevane og utvidar raskt si eiga teikning ved å kopiere og lære av dei representasjonsformene ho ser rundt seg (figur 9). Ho tek òg i bruk teljestrekar i forsøket sitt på å finne tal på augo. Slik avdekkjer teikning strategien hennar (figur 10):

Lærar	Kva har du teikna på papiret, Maren? Eg ser at du teikna nokre strekar då du tenkte.

Maren	Det er enklare å telje då.
Lærar	Kva er dei strekane?
Maren	Eg talde slik, ein, to tre … ti.
Lærar	Kva tyder dei?
Maren	At det er lettare å telje.

Ulleberg og Solem (2015) viser til at ved å be om fleire løysingsforslag utfordrar ein elevane til å matematisere og kommunisere ei forståing av matematikkfaget som eit fag der ein leiter og tenkjer, og at dette skjer i eit fellesskap der ein deler strategiar og lærer av kvarandre. Dette er samtaletrekk eg nytta for å tydeleggjere den pedagogiske kontrakten min med elevgruppa. Eg ønskjer at kvar elev skal delta i læringa til dei andre. Vis med teikning først korleis de tenkjer, og så skal vi snakke om det etterpå. Då har de alle tre komme fram til eit svar. No skal de fortelje kvarandre kva de har komme fram til. Vi kan begynne med deg, Alfred. Kan du fortelje Maren og Elise korleis du tenkte? Kan du fortelje Maren og Elise kva du gjer? Kanskje dei kan lære noko av det? Du er så rask, Elise. Korleis tenkjer du? Kva har du teikna på papiret, Maren? Eg ser at du teikna nokre strekar då du tenkte.

Konklusjon

Undervisningsopplegget for funksjonstenking fungerte bra i ei lita gruppe med elevar. Elevane gjekk som forventa frå aritmetisk tenking, frå å telje ulvane og augo, til etter kvart å sjå mønsteret i talmaterialet, algebraisk tenking. Elevane klarte å bruke symbolspråk og forenkle teikningane sine slik at det matematiske blei synleg. Mykje av utrekningane gjekk føre seg i hovudet, men då elevane fekk i oppgåve å teikne korleis dei tenkte, såg eg at dei brukte ulike strategiar. Elevane lærte mykje av kvarandre, og ved å låne kvarandre sine tankar og ved at læraren orienterte elevane mot kvarandre, kom vi langt i retning mot algebraisk tenking; den matematiske ideen (Kazemi & Hinz 2019). Dette viser også kor viktig samtale er for å fremje læring.

Referansar

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom*. Heinemann.

Kazemi, E. & Hintz, A. (2019). *Målrettet samtale – Hvordan strukturere og lede gode, matematiske diskusjoner*. Cappelen Damm Akademisk.

Lindenbaum, P. (2001). *Gitte og gråulvene*. Damm.

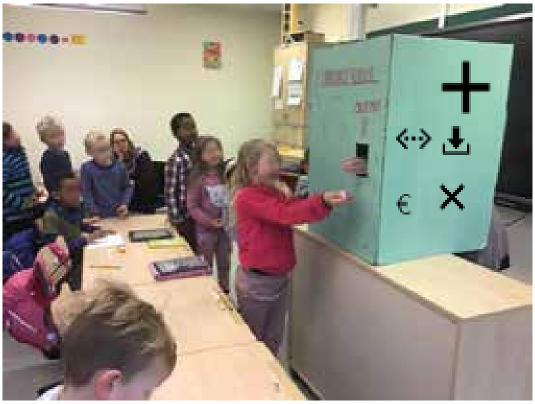
Ulleberg, I. & Solem, I. H. (2015). Hvordan kan lærere bidra til deltakelse og matematisering i klassesamtalen i matematikk? I H. Christensen & R. Stokke (red.), *Samtalens didaktiske muligheter* (s. 104–122). Gyldendal Akademisk.

Paulsen

Funksjonsfabrikk på 2. trinn

I forbindelse med lærerspesialistutdanningen i begynneropplæring ved OsloMet gjennomførte jeg en oppgave i matematikk i temaet funksjoner og tallmønstre. Jeg ønsket å finne ut om elever på 2. trinn klarte å se strukturer i tallmønstre ved hjelp av en funksjonsfabrikk, som er beskrevet av Moss & McNab (2011). Målet med økta var å få innsikt i hvordan elevene, med sitt språk, ville forklare hva som skjedde med tallene som kom inn i fabrikken. Jeg var nysgjerrig på hvilke representasjoner de ville bruke. Noen tenker kanskje at man ikke kan jobbe med funksjoner eller algebra i småskolen, men i både den nye læreplanen LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2020) og kunnskapsløftet LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2006) er det flere punkter som kan linkes opp mot funksjoner og algebraisk tenkning. Elevene skal for eksempel kunne doble og halvere, og kjenne att, samtale om og vidareføre strukturar i enkle talmønster etter 2. årstrinn ifølge LK06. I LK20 beskrives fagets kjerneelementer i matematikk, og følgende nevnes: Utforsking i matematikk handler om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse. Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene.

Annemieke Paulsen
Stange skole
annemieke.paulsen@edu.stange.kommune.no

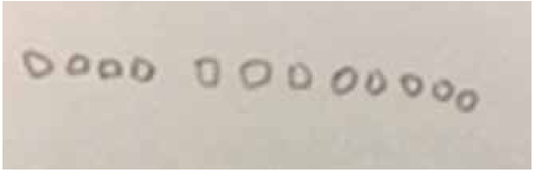


Figur 1: Elevene står i rekke for å putte inn klosser i funksjonsfabrikken.

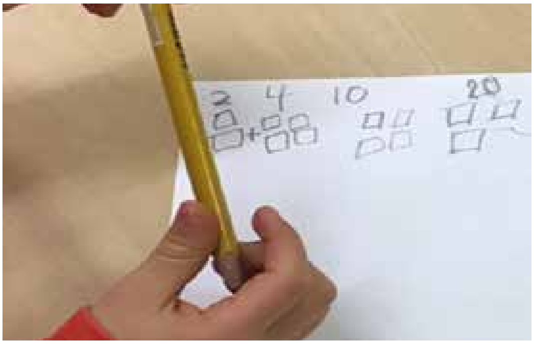
Jeg valgte å arbeide med funksjonsfabrikken fordi det ga mulighet til å knytte arbeidet til bevegelse og endring av arbeidsstilling. Dette er i tråd med det Vingdal (2018) kaller «lærende kropp i endring». Hun understreker at det er viktig for elever å kunne bevege seg mens de lærer. Det er viktig både fordi det kribler i kroppen, og fordi de ulike funksjonsområdene som fysisk, motorisk, emosjonelt, kognitivt og sosialt samhandler og dermed gir økt læringsutbytte.

Funksjonsfabrikken utvidet «leken» til «gjett min hemmelighet», der elevene skulle oppdage ulike mønstre. Det startet med et mysterium.

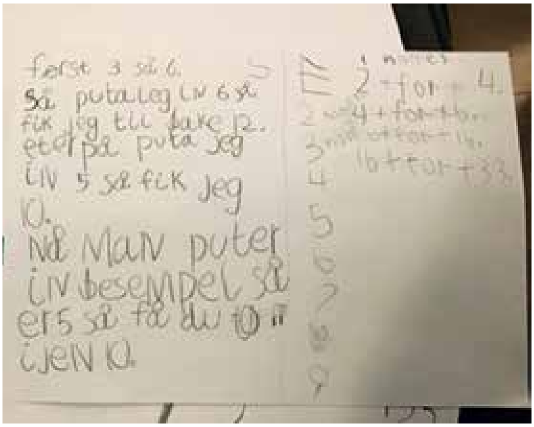
Elevene fikk vite at fabrikken hadde fått en hemmelig oppgave, og at de sammen skulle finne ut hva oppgaven til fabrikken var. Elevene skulle være «detektiver», og jeg håpet at dette ville vekke nysgjerrighet og undring. De fikk høre at maskinen ønsket å få klosser inn på siden (den uavhengige variabelen), og at fabrikken forvandlet den mengden til noe annet og ga det ut igjen på framsiden av fabrikken (den avhengige variabelen). Hemmeligheten jeg ønsket at de skulle oppdage, var funksjonsregelen i maskinen, nemlig at den alltid doblet antall klosser som kom inn på siden. De jobbet sammen to og to med centikuber. Elevene fikk selv velge hvor mange centikuber de ville putte inn, men jeg anbefalte dem å begynne med mengder under fem. I tillegg fikk de utdelt et ark der de skulle skrive for å holde styr på mengdene de puttet inn, og mengdene som kom ut.



Figur 2: En elevgruppe tegnet antall klosser som ble puttet inn og som kom ut.



Figur 3: En elevggruppe tegnet antall klosser og skrev tallsymboler over.

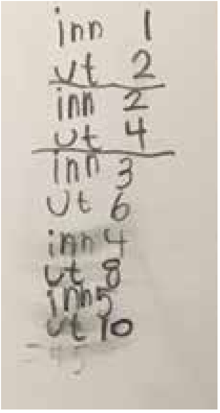


Figur 4: En elevgruppe brukte tekst som representasjonsform.

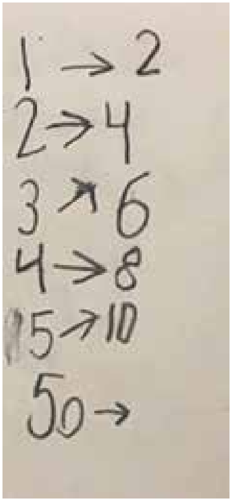
Elevers representasjonsformer

Ifølge Blanton (2008) velger elever strukturer og representasjoner som er meningsbærende for dem, og de bruker dem både i prosessen fram mot en løsning og for å representere resultatet av argumentasjonen. Jeg var derfor interessert i å finne ut hvilke representasjoner elevene valgte å bruke for å illustrere mengdene som kom inn og ut av fabrikken, og hvordan de valgte å strukturere dem. Jeg ønsket å ta del i barnas undring og gå i samtale med dem og ikke gi dem enkle konkrete svar. Elevene skulle sammen finne ulike sammenhenger og prøve dem ut. Gjennom eksperimenterende læring skulle de lete og prøve seg fram (Solem & Reikerås, 2017). Representasjonene elevene brukte, ble tilfeldige og uorganiserte. Dette var første gangen de jobbet med slike funksjonsoppgaver.

Flere representasjonsformer kom fram i arbeid med funksjonsfabrikken. Noen elevgrupper tegnet alle centikubene som de puttet inn, og som de fikk ut, slik det er vist i figur 2 og figur 3. Begge disse elevgruppene valgte å tegne klossene på arket, men i figur 3 valgte elevene å skrive tallsymboler i tillegg til tegningen. Det kan være at elevene var uenige om representasjonsform, og at de dermed valgte å bruke både tall og tegning. En annen elevgruppe valgte en skriftlig representasjon (figur 4). De skrev med ord og setninger, i struktur, hva fabrikken gjorde med mengdene de puttet inn; «Først inn 3 så 6». Her viste elevene at de puttet 3 klosser



Figur 5: En elevgruppe brukte vertikalt oppsett og skrev tallsymboler under hverandre.



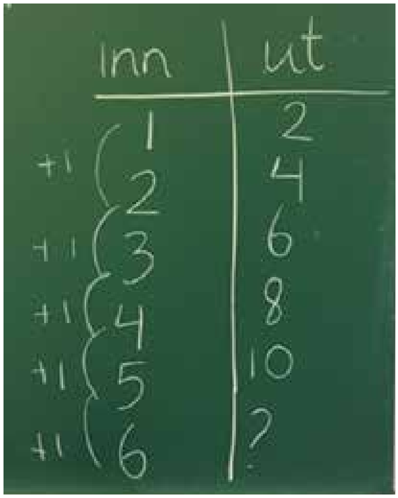
Figur 6: En elevgruppe brukte horisontalt oppsett.

inn og fikk igjen 6. Deretter skrev de «Så puta jeg in 6 så fik jeg til bake 12 ...». Flere elevgrupper valgte abstrakte representasjoner til å illustrere inn- og ut-verdiene. På figur 5 og figur 6 ser man to ulike måter det er gjort på. Elevgruppen til figur 5 valgte å skrive tallstørrelsene under hverandre, en vertikal tallrepresentasjon der inn-verdien står øverst og ut-verdien nederst. Figur 6 viser en horisontal tallrepresentasjon. Her har elevene skrevet inn-verdien først og tegnet en pil videre til ut-verdien. I tillegg har de en tydelig struktur i valg av tallstørrelser. De startet med å putte inn en kloss, og deretter økte de antallet med én hver gang. Disse elevene forstod raskt hemmeligheten til funksjonsfabrikken, de hvisket til meg hva de trodde hemmeligheten var, altså funksjonsregelen. Jeg grep muligheten og lot elevene teste hypotesen sin ved å utfordre dem til å bruke høyere tall, men da uten å bruke centikuber. De måtte også, på forhånd, gjette hvilket tall de fikk ut igjen etter transformeringen. Dessverre ble bildet tatt rett før de skrev ned hypotesen og endelig svar, men denne elevgruppen fikk testet både 50, 100 og en valgfri tallstørrelse som inn-verdier.

Fra kaos til struktur

Det ble tydelig underveis at flere elever trengte hjelp til å strukturere resultatene sine. Noen gjorde ikke forskjell på hva de puttet inn, og hva de fikk ut. Andre skrev opp det de fikk ut først, før de skrev opp hva de egentlig hadde puttet inn. Noen glemte også å telle hvor mange klosser som ble puttet inn, og mistet oversikten over alt arbeidet. Dette bidro til at presentasjonen av datamaterialet deres ble rotete og uoversiktlig, og elevene slet med å oppdage sammenhenger og mønstre i tallmengdene sine.

Etter en stund avbrøt jeg arbeidet med fabrikken for å starte en diskusjon med elevene om valg av representasjonsformer og hvordan man kan skape struktur. Blanton (2008) sier at når man diskuterer og sammenligner representasjonsformer, gir det elevene en rikere og mer fleksibel måte å tenke algebraisk på. Tenkningen blir rikere fordi elevene selv er med på å diskutere sine representasjonsformer, og oppdager selv, med meg som veileder, hvilke representasjonsformer som kan være mer effektive enn andre. Under diskusjonen forstod elevene at det kunne være svært arbeidsomt å tegne klosser dersom man hadde lyst til å velge større mengder som skulle puttes inn i funksjonsfabrikken, for eksempel 100. De så selv at elever som valgte å tegne klossene, brukte atskillig lengre tid enn de som skrev tallsymboler for å representere mengdene, de rakk ikke å være så mange ganger innom maskinen før tiden var ute. En elev kommenterte at «vi har jo lært tallene opp til hundre», så vi trenger ikke å tegne». En annen elev merket seg at en medelev ikke hadde skrevet tallene over tegningen sin, og sa at «da må du telle hver gang for å huske». Elevene erfarte at det er viktig med struktur i arbeidet også. Flere kom med forslag om at det alltid er lurt å starte med et lavt tall som inn-verdi og øke litt og litt og ikke jobbe «hulter te bulter». Dette illustrerte jeg da jeg viste representasjonsformen på bilde 4 og bilde 5. Selv om elevene rakk å komme innom maskinen mange ganger og jobbet effektivt med skriftlig representasjon, var det ikke lett å oppdage hemmeligheten til funksjonsmaskinen.



Figur 7: Utfylt T-tabell

Oppdage mønstre og sammenhenger

Videre i samtalen ledet jeg elevene til å se på mønstrene i hvordan de to variablene varierte. Jeg så muligheten til å introdusere T-tabellen som Blanton (2008) anbefaler å starte med så tidlig som mulig. Den gir elever muligheter til å telle mengder som relateres til hverandre fordi strukturer blir synlige. Jeg viste elevene at mengden de puttet inn i funksjonsfabrikken, skulle skrives i venstre kolonne, mens mengden de fikk ut, skulle skrives i høyre kolonne. Dataene elevene hadde samlet inn, ble overført til en slik T-tabell på tavla hvor den uavhengige variabelen varierte fra 1 opp til 5. Se figur 7.

En elev forklarte: «Det blir mer, jeg ser jo at det blir mer.» Plutselig sier en annen elev: «Jeg legger merke til at det blir én mer på den siden!» «Den siden» refererte til den uavhengige variabelen i venstre kolonne. Videre fortsatte han: «For 1 + 1 = 2 og 2 + 1 = 3 osv. Jeg tegnet mens han forklarte (bilde 7). «Bra!» sa jeg, «det er et mønster.» Her følger eleven endringen i den uavhengige variabelen uten å forholde seg til informasjonen i andre kolonne. Denne strategien kalles univariasjon og er typisk for yngre elever når de jobber med funksjoner i tidlig skolealder (Moss og McNab, 2011, s. 278).

I fortsettelsen spurte jeg: «Men hva med mønsteret på høyre side? Kan noen dele sine tanker?» Dette var et utforskende åpent spørsmål som ifølge Blanton (2008) fremmer algebraisk tenkning fordi elevene må analysere informasjonen, bruke matematiske begreper og forklare sin tenkning. Flere rakte opp hånda og så ut til å oppdage mønsteret: «Det blir to mer for hver gang!» Elevene så at verdien til den avhengige variabelen økte med 2 hver gang, så dermed «MÅ det stå 12 ved 6 tallet». Her beskrives endringer i begge variablene hver for seg, 5 øker til 6 og 10 til 12, uten at man ser på tvers av kolonnene i tabellen. Dette er en strategi som kalles kovariasjon. Når elever leter etter mønstre nedover i tabellen på denne måten, er det rekursiv tenkning, og ifølge Moss & McNab (2011) er det vanlig at elever tar i bruk additive strategier som her for å regne seg fram til neste verdi.

Flere elever hadde løst hemmeligheten allerede mens de jobbet med vekslingen i funksjonsfabrikken. De var ivrige fra starten av, men jeg valgte å styre samtalen slik at jeg kunne få med samtlige elever i tankegangen. Da hele samtalen gikk mot slutten, fikk disse elevene ordet, og funksjonsfabrikkens hemmelighet ble avslørt. De så på korrespondansen mellom kolonnene, og de greide å uttrykke funksjons-

(fortsettes side 24)

Rummelhoff

Matematikk gjennom ungdomstrinnselevers øyne

Seint høsten 2020 ble jeg spurt om jeg kunne gjennomføre et elevintervju som skulle publiseres i Tangenten, hvor ungdomstrinnselevenes stemmer skulle høres. Etter måneder med hjemmeskole, nedstenging og usikkerhet var det spennende å høre hva elevene tenkte om matematikkfaget. Hverdagen har vært annerledes, og undervisningen har på ingen måte vært optimal gjennom perioder med usikkerhet og tidvis nedstenging og arbeid på rødt nivå. Det var derfor med sommerfugler i magen og et snev av bekymring jeg gikk i gang med dette prosjektet. Klarer elevene å se matematikkfaget i et metaperspektiv, eller er det vanskelig å se noe annet enn pandemiboblen vi lever i? Og klarer de å se på arbeidsmetoder og fagets relevans utover ukas arbeidsplan og samarbeid på Teams?

For å plukke ut kandidater til dette intervjuet ble elever fra 10F ved Gressvik ungdomsskole i Fredrikstad kommune spurt om noen ønsket å være med og bidra med sine tanker. Fire gutter og fire jenter meldte seg, og jeg opplevde det som svært spennende å høre hvordan akkurat disse elevene tenkte, siden de åtte representerer bredden i en ordinær klasse.

Kari-Anne Bjørnø Rummelhoff
Gressvik ungdomsskole
kaak@fredrikstad.kommune.no

Intervjuene ble gjennomført som ustrukturerte intervju i grupper hvor jentene og guttene ble intervjuet hver for seg for å ivareta smittevernet. Etter at jeg stilte åpne spørsmål, ble intervjuet en dialog mellom meg og elevene hvor jeg noterte underveis. Jeg har gjengitt elevene så nøyaktig som mulig, og alle elevene har godkjent både bilder og min tekst før jeg leverte den fra meg.

Hva er matematikk?

Jeg er nysgjerrig på hva elevene forbinder med matematikkfaget, og ønsker å vite hva de tenker på når de hører ordet matematikk. Et annet interessant spørsmål er om elevene anser faget som nyttig og viktig videre i livet, og om de benytter matematikk også utenfor skolen. Jeg stiller spørsmålene «Hva tenker du når jeg sier matematikk?», «Er matematikk viktig, og trenger du det videre i livet?» og «Bruker du matematikk utenfor skolen?».

«Jeg synes egentlig det er et vanskelig spørsmål! Man bruker matematikk for å finne ut noe. Vi forsker litt på en måte! Vi kan bruke matematikk som et hjelpemiddel til å forske, og kan du matematikk, kan du finne ut veldig mye annet! Jeg trenger helt klart matematikk videre! Jeg bruker det faktisk ganske mye selv om jeg kanskje ikke tenker over det. Jeg liker å lage mat, og da beregner jeg. Jeg planlegger, leser busstabeller, ser hvordan ting henger sammen,

Bilde 1: Martine (til venstre) og Louise.

jeg har faktisk brukt matematikk i humorsammenheng også!» sier Martine.

Malin er enig med Martine og sier: «Matematikk er jo en måte å løse problemer på. Kanskje ikke alle problemer som kjærlighetssorg og sånt, men veldig mange problemer kan vi løse ved hjelp av matematikk. Jeg trenger matematikk videre i livet, og jeg bruker matematikk til det samme som Martine nevner. Det er jo veldig tydelig når det gjelder kjøp og salg, tidsberegning og personlig økonomi.»

«Jeg tenker at matematikk er fremgangsmåter for å finne ut av ulike ting. Vi må ha matematikk for å legge planer, styre tiden vår, og ikke minst på butikken. Jeg trenger matematikk videre til en viss grad, men jeg tror ikke jeg trenger å kunne løse ligninger eller jobbe med

Bilde 2: Malin (til venstre) og Kiria.

funksjoner i hverdagen. Alle trenger kanskje ikke det?» sier Kiria spørrende.

«Matematikk er veldig viktig. Det er grunnlaget for veldig mye, og mye mer enn vi tenker over. Hvis man ikke vet hvordan man beregner og styrer egen økonomi, for eksempel, kan man jo miste huset og hjemmet sitt. Det er viktig for mennesker å ha oversikt over utgifter og inntekter. Jeg trenger helt klart matematikk videre. Jeg trenger for eksempel matematikk for å få den kunnskapen jeg trenger for å komme inn på de skolene jeg ønsker. For å få den utdanningen jeg ønsker, er matematikk et av fagene jeg må ha. Det er kanskje lett å tenke at vi ikke trenger alt vi jobber med på skolen, men det er viktig for noen yrkesgrupper, og da er det viktig!» sier Louise.

Guttene er også enige med jentene, og det varmer matematikklærerhjertet når alle elevene kontant svarer at matematikk er et viktig fag som de har nytte av og behov for videre.

Bilde 3: Edvard (til venstre) og Melvin.

«Når jeg hører matematikk, tenker jeg spørsmål og svar. Det er liksom tall man bruker og utnytter. Vi bruker alltid matematikk i hverdagen. Bare tenk når vi er i butikken! Jeg trenger matematikk videre, for jeg må jo ha styr på økonomi og egne penger, for eksempel,» sier Edvard.

«Når jeg hører matematikk, tenker jeg skole. Det er tall og regning, oppgaver og løsninger. Jeg bruker matematikk utenfor skolen, og kanskje spesielt i butikken. Og egentlig bruker du

Bilde 4: Oliver (til venstre) og Thomas.

matematikk hele tiden uten at du vet det. Jeg trenger matematikk videre, for jeg har lyst til å bli mekaniker. Da regner jeg med at det blir noen ligninger og litt av hvert av matematikken jeg har brukt for,» sier Thomas.

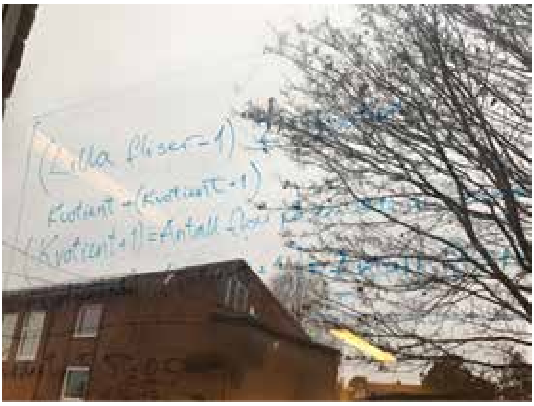
«Jeg tenker regnemåter som er nyttige i hverdagen, når jeg hører matematikk. Det er liksom flere måter å komme fram til et svar på. Jeg bruker matematikk i hverdagen, for eksempel når jeg spiller dataspill. Og i butikken, da selvfølgelig. I dataspillene bruker man matematikk for å beregne hva man trenger av ressurser, og som strategier. Jeg trenger matematikk for å klare å leve en vanlig hverdag, og jeg må vite hvor mye penger jeg har, og hvor mye jeg bruker. Lønn, økonomi, gjeld og sparing er områder det er viktig å kunne noe om!» sier Oliver.

Melvin nikker og sier at han bruker matematikken til det samme som Oliver gjør. «Jeg tenker på pluss, minus og tall. Alle mulige tall, liksom. Og det vi gjør her på skolen med ligninger og regning. Jeg tror ikke jeg har bruk for alt vi lærer på skolen, i livet, men kanskje det meste? Tror ikke jeg kommer til å lete etter så mange x-er når jeg er ferdig på skolen, så ligninger tror jeg ikke jeg får bruk for. I alle fall ikke ofte!»

Ulike elevgrupperinger og undervisningsmetoder

Samarbeidslæring og et sosiokulturelt læringsperspektiv er sentralt i matematikktimene, og matematikkundervisningen organiseres som regel slik at elevaktivitet og utforskende oppgaver er i sentrum. Elevene arbeider sjelden alene med oppgaver fra læreboken, og samarbeider stort sett alltid med medelever. Flere av elevene har tidligere gitt uttrykk for at denne arbeidsmetoden er ny for dem, og noen har savnet den mer tradisjonelle frontalundervisningen og oppgaveparadigmet de var vant til fra tidligere (Skovsmose, 2003).

Elevene har gjennom hele ungdomsskolen jobbet i ulike elevgrupperinger. De har vært delt inn i homogene ressursgrupper bestående av elever på tilnærmet samme nivå, og disse gruppene blir benyttet i vurderingssituasjoner. Her blir elevene oppfordret til å diskutere og samarbeide underveis i for eksempel en prøvesituasjon. Disse gruppene har i stor grad vært statiske, men har også blitt endret ved faglig utvikling hos elevene. I tillegg blir elevene delt inn i synlig tilfeldige grupper bestående av tre elever i alle undervisningssituasjoner hvor dette er hensiktsmessig (Liljedahl, 2014). Disse gruppene er ikke statiske, og benyttes kun i én undervisningsøkt. Ved neste time deles elevene inn i nye synlig tilfeldige grupper. Elevene har benyttet denne metoden i svært stor grad, i tillegg til at de har brukt ikke-permanente vertikale tavler (Forrester et al., 2017) og åpne, rike diskusjonsoppgaver (Liljedahl, 2014).



Bilde 5: Bruk av vindusflater som ikke-permanente vertikale tavler.

Jeg lurer på om elevenes ønske om mer tradisjonell undervisning har endret seg, og stiller spørsmålene «Hvordan liker du best å arbeide?» og «Når føler du at du lærer mest?».

«Jeg synes det er mye som er gøy. Jeg liker ikke å jobbe lenge med noe, for da blir det kjedelig. Når vi skal repetere, er det ensformig. Jeg liker mange forskjellige oppgavetyper og arbeidsmetoder blandet. Jeg er også sånn at jeg noen ganger liker å jobbe alene, men jeg liker jo også å samarbeide. Jeg synes det er veldig bra å jobbe i ressursgruppene!» sier Malin.

De andre i jentegruppen nikker og er enige. «Ressursgruppene er veldig bra! Da har man mulighet til å få hjelp og andres synspunkt underveis i en prøvesituasjon. Det er veldig bra!» sier Martine. Louise er enig, men legger også til: «Jeg synes noen ganger det blitt litt stress også. I en vurderingssituasjon er alle liksom opptatt av seg selv og egen nytte av ressursgruppen. Jeg synes ikke alltid alle er opptatt av samarbeid, men mer opptatt av å kun få hjelp til egne spørsmål.»

«Jeg er egentlig litt rar jeg altså,» sier Martine og fortsetter: «Jeg liker best å jobbe litt gammeldags. Jeg elsker å sitte for meg selv, alene, å rase gjennom mange oppgaver i oppgaveboka mi. Og det er perfekt når jeg kan sitte og høre på læreren som forteller og viser på tavla.»

Jeg stiller Martine et oppfølgingsspørsmål: «Men denne typen matematikkundervisning møter du jo veldig sjelden i timene her på ungdomsskolen. Vi har gruppearbeid og samarbeid nesten hver eneste time, og jeg står jo ikke veldig mye på tavla og forklarer? Det er jo dere som står for mesteparten av aktiviteten? Hvordan har du det egentlig i matematikktimene våre?» «Jeg har hatt det fint i hjemmeskoleperioden, da!» sier Martine og ler. «For da er det mer jobbing alene med oppgave, i alle fall når vi er hjemme. Det går fint, altså. Men når jeg kan noe, liker jeg å slippe å forholde meg til andres tanker og synspunkter. Det blir bare forvirrende.»

«For meg er det veldig bra å jobbe i grupper,» sier Kiria. «Jeg vet egentlig at jeg kan, men så blir jeg usikker. Og da er det så fint å jobbe i gruppe, for da får jeg bekreftelser på at jeg faktisk hadde rett.»

«Jeg er glad i variasjon, men også i rutiner. Jeg føler at jeg lærer best alene, men jeg er også så usikker at jeg liker å få bekreftelse i gruppen. Jeg er glad i samarbeid hvis det er vanskeligere oppgaver eller aktiviteter. Når vi jobber i grupper med åpne oppgaver og vertikale tavler, må vi ha mange innspill. Det er oppgaver vi ikke klarer å løse alene, liksom. Jeg lærer best om jeg får hjelp, men også når jeg jobber alene,» sier Louise.

«Det var veldig gøy da vi jobbet med kombinatorikk og du flyttet rundt på guttene for å vise antall kombinasjoner!» sier Kiria. «Da var det liksom greit å se hvilke muligheter vi hadde for å plassere dem på ulike måter. Det var jo litt gøy å se guttene bli flyttet rundt på denne måten!» smiler hun.

«Jeg synes det meste er greit. Jeg liker gruppearbeid, og spill og aktiviteter. Jeg synes jeg lærer mye når jeg jobber i små tilfeldige grupper, dersom jeg er på en gruppe med mennesker jeg jobber bra med,» sier Thomas. «Det var for eksempel veldig fint da vi jobbet med sannsynlighetsregning. Da var det mye spill og aktiviteter. Det er gøy når vi spiller, og det er mer lærerikt når undervisningen blir morsom,» fortsetter han.

«Jeg liker også best å jobbe i grupper. Det er veldig fint når vi jobber med spill og aktiviteter! Det er også fint når du går gjennom ting på tavla,» sier Melvin, og Edvard nikker. «Jeg liker også å jobbe med andre. Det er enklere når vi har gruppearbeid. Da kan vi diskutere og komme fram til en løsning,» sier han. «Noen ganger har jeg mest lyst til å jobbe alene, men jeg synes også det er fint å være flere i gruppe. Da får man liksom flere synspunkter i oppgaveløsningen,» sier Oliver.

«Den gangen vi jobbet med venndiagram, var bra!» sier Thomas. «Da var hele klassen ute, og du hadde laget to store ringer av tau som overlappet hverandre. Vi elevene måtte flytte oss etter hvilke egenskaper du leste opp. Jeg følte jeg forsto union og snitt bedre, og alle var med på aktiviteten. Det var bra!» «Jeg synes jeg fikk til mye da vi jobbet med brøk, jeg. Da var det liksom lett å huske hvordan vi skal regne med de ulike regneoperasjonene,» sier Melvin. Edvard legger til: «Det synes jeg også! Helt til det ble brøk samtidig som vi jobber med funksjoner! Da ble det bare tull. Jeg liker ikke funksjoner, altså!» «Jeg følte egentlig at jeg fikk til dette med funksjoner i fjor,» sier Oliver og fortsetter: «Men så ble det hjemmeskole og deretter sommerferie, og nå er funksjonene så vanskelige å få på plass igjen. Det er akkurat som det har blitt borte fra hodet.»

Hele guttegruppen nikker og sier at funksjoner har vært veldig krevende. Jeg spør om hva de tror årsaken kan være, og de tror det har noe med hjemmeskolesituasjonen å gjøre. «Det ble bare vanskelig. Vi hadde mye om funksjoner gjennom omvendt undervisning da det var hjemmeskole, og det var vanskelig å høre på de ferdigproduserte filmene,» forteller guttene.

Elevgruppen har benyttet både ferdigproduserte undervisningsfilmer og filmer produsert av meg, og jeg er nysgjerrig på hva elevene tenker om forskjellen på disse to tilbudene. «Det er mye bedre når det er en kjent lærer som lager filmen. Da snakker dere liksom til oss. Dere kjenner oss og vet hvordan dere skal prate til oss. Ferdigproduserte filmer blir så kjedelige og overfladiske,» sier Martine. Resten av jentegruppen nikker enig.

Guttegruppen mener også det er best dersom en kjent lærer produserer opplæringsfilmer. «Det er noe helt annet. Da blir bruk av filmer bra. Her kan vi jo spørre deg om det er noe vi lurer på fra filmen. Vi kan jo ikke snakke med læreren på en ferdigprodusert film!» sier Oliver mens de andre nikker.

Jeg avslutter elevmøtene med et siste spørsmål: «Hva tror du er mest krevende med å undervise i matematikk?»

«Jeg tror du er mye bedre til å svare på det spørsmålet enn oss,» sier Edvard. Resten av guttegruppen ler. «Det må være å få oss interesserte. Få oss til å være med, liksom. Hvordan få folk til å være med og delta. Det må også være vanskelig å forklare en oppgave til noen som ikke forstår! Da må man komme med mange forskjellige måter å forklare på.» Jentene har også tanker om dette. «Når noen tror de er dumme, men ikke er det, må det være vanskelig å få dem til å forstå at de ikke er dumme. Det må også være vanskelig å motivere de som bare sitter der, og faktisk finne ut hvordan vi lærer så bra som mulig,» sier Kiria. «Jeg liker en motivasjonstale, jeg!» sier Louise. «Da du forteller oss hva vi gjør som er bra, og forteller alt vi kan klare. Det kjennes bra!»

Jeg takker elevene for deltagelsen, og sitter igjen med en god følelse i kroppen. Intervjuet har gått over all forventning, og jeg er stolt og ydmyk over å få ta del i hverdagen til disse unge menneskene som står på terskelen videre ut i verden. Alle åtte har fortalt at matematikken er viktig, og at de ikke vil klare seg i livet uten kunnskap innen fagfeltet. De ser ikke bare nytten av samarbeid med andre, men de fleste foretrekker å arbeide sammen med andre. I tillegg har de gode refleksjoner knyttet til arbeidsmetoder og egen læring.

Elever som er bevisste på hvordan de lærer godt, og som ser nytten i å lære sammen med andre, rammer på flere måter inn det sosiokulturelle læringssynet som Fagfornyelsen legger opp til. Elevene i denne teksten er i mine øyne gode representanter for dagens elever. Norsk skole har gjennom flere år lagt til rette for økt bevissthet, kritisk tenkning, medvirkning og tverrfaglig fokus. Disse elevene forteller mye om akkurat dette, og kanskje begynner vi nå å se resultatene av prosessen som Gressvik ungdomsskole har vært gjennom de siste årene?

Til tross for de følger en annerledes skolehverdag har brakt med seg, har fortsatt elevene et bevisst og målrettet fokus på skolehverdagen.

Referanser

Forrester, T., Sandison, C. E & Denny, S. (2017). Vertical whiteboarding: Riding the wave of student activity in a mathematics classroom. *Australian Mathematics Teacher, 73*(4), 3–8.

Liljedahl, P. (2014). The affordances of using visually random groups in a mathematics classroom. I Y. Li, E. Silver & S. Li (red.), *Transforming Mathematics Instruction: Multiple Approaches and Practices* (s. 127–144). Springer

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.), *Kan det virkelig passe? Om matematiklæring* (s. 143–158). L&R Uddannelse

(fortsettelse fra side 18)

sammenhengen eksplisitt: «Jeg ser at maskinen dobler mengden min.»

Aktiviteten viser at elever på 2. trinn kan jobbe med funksjoner og algebra, og at man ikke trenger å bruke vanskelige matematiske begreper for å kunne jobbe med slike oppgaver. Det viktigste er å la elevene få prøve seg fram, velge representasjonsformer som gir mening for dem, og samtidig ha gode samtaler om bruken av disse representasjonsformene. Jobben min i denne timen var å veilede elevene i deres tankegang, mens de selv oppdaget matematikken i oppgaven. Jeg ga dem ikke noe svar, alt de kom fram til, bygde på elevenes innspill. I tillegg vil jeg hevde at timen var lekpreget, kreativ, undrende og motiverende for elevene, noe Eik at al. (2011) vektlegger når de understreker at «det hjelper ikke at læreren er god til å forklare, dersom eleven ikke er engasjert i det som skal læres» (s. 88).

Referanser

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom*. Heinemann.

Eik, T. E., Karlsen, L. & Solstad, T. (2011). *Lekende læring og lærende lek i en endret skole* (1. utg.). Pedlex Norsk Skoleinformasjon.

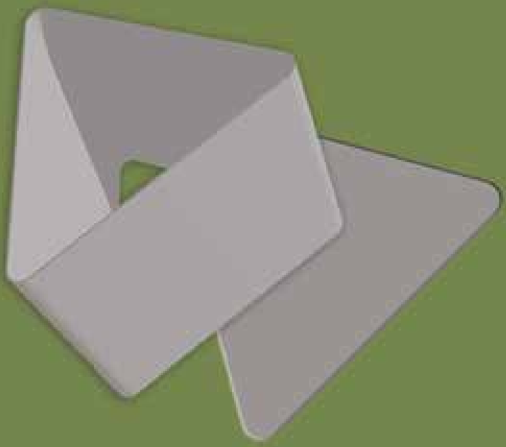
Solem, I. H. & Reikerås, E. K. L. (2017). *Det matematiske barnet* (3. utg.) Caspar Forlag.

Moss, J. & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. I J. Cai & E. Knuth (red.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (s. 277–301). Springer Science & Business Media.

Utdanningsdirektoratet (2006). *Læreplan i matematikk (MAT1-04)*. Hentet fra: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i matematikk (MAT01-05)*. Hentet fra: https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob

Vingdal, I. M. (2018). Lærende kropp i endring. I K. Palm & E. Michaelsen (red.), *Den viktige begynneropplæringen* (s. 33–55). Universitetsforlaget.



Naylor

Ugler og ruter

Her vil jeg presentere en del aktiviteter og puslespill basert på bretting av papirark.

Brett 1 til 10 ugler

Denne aktiviteten passer veldig godt til barnehage og småskoletrinn. Lag et 4×4 rutenett med 16 ruter og tegn/lim inn 10 ugler eller andre figurer slik som i figur 1. Klipp ut rutenettet langs ytterkanten og lag bretter som kan brettes både frem og tilbake mellom alle rutene.

Aktiviteten går ut på å brette papiret slik at bare et bestemt antall ugler er synlige på fremsiden. Dette antallet kan variere fra 1 til 10 ugler. For eksempel kan barna prøve å brette slik at det bare er 1 ugle på fremsiden, 2 ugler osv. Diskuter med barna mens de finner løsninger og sammenligner de forskjellige løsningene de finner. Det fins mange tallbegreper dere kan diskutere!

Figur 1: Ugletall

Addisjon	Det er to grupper, 3 ugler og 3 ugler. Da blir det 6 ugler til sammen.
Subtraksjon	7 ugler er 3 færre enn 10 ugler, så da kan vi brette 3 ugler til baksiden for å få 7.
Tiervenner	Med en brett er det 4 ugler på fremsiden, da må det være 6 ugler på baksiden.
Én flere, én færre	Med min løsning har jeg lagt til 3 ugler og tatt bort 2 ugler, da blir det én flere.

Mike Naylor
Matematikkbølgen
mike@matematikkbolgen.com

Utvidelse

Ved å bruke de samme arkene skal elevene prøve å brette et antall ugler på fremsiden og baksiden som til sammen blir et bestemt antall ugler fra 1 til 10. For eksempel kan de finne 8 ugler til sammen, hvor det er 3 ugler på fremsiden og 5 ugler på baksiden. Elevene må huske hvor mange det er på én side, når de snur arket for å telle på den andre siden.

Brett en stabel fra 1 til 8

Tegn 8 ruter i et 4×2 rutenett. Skriv tallene fra 1 til 8 i rutene slik:

1	8	7	4
2	3	6	5

Figur 2: Stabel #1

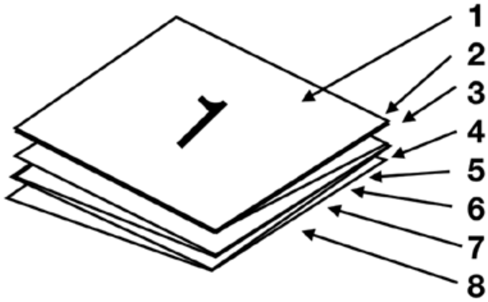
Klipp ut rutenettet langs ytterkanten og lag bretter som kan brettes både frem og tilbake mellom alle rutene. Målet med denne aktiviteten er å brette rutene til en stabel med ruter, slik at tallene kommer i rekkefølge fra 1 til 8 (se figur 3). Det er lov (og kanskje nødvendig) å stikke inn en del av papiret i de andre rutene.

Nå kan du prøve med tallene i rutenettet. i figur 4. Obs! Dette er mye vanskeligere!

Aktiviteten bygger romforståelse fordi man visualiserer hvor tallene ender opp, mens man bretter papiret.

Brett ugler i reir

Dette puslespillet er basert på et propagandastykke fra andre verdenskrig hvor man må brette arket slik at to av lederne av aksemaktene Tyskland, Italia og Japan havner i fengsel. Denne versjonen er litt mer vennlig og bruker ugler og koselige reir i stedet.



Figur 3: Papir brettet slik at rutene er i rekkefølge.

1	8	2	7
4	5	3	6

Figur 4: Stabel #2

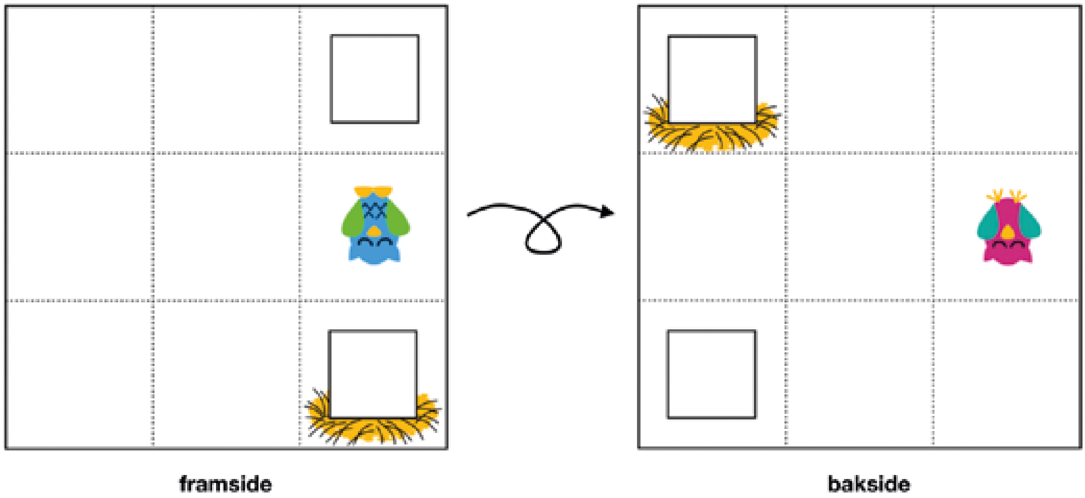
Arket er to-sidig. Tegn/lim inn fugler og reir på både fremsiden og baksiden som vist på figur 5 på neste side.

Brett papiret til det blir til en rute hvor uglene sover i hver sitt reir, én på fremsiden og den andre på baksiden av ruta (figur 6).

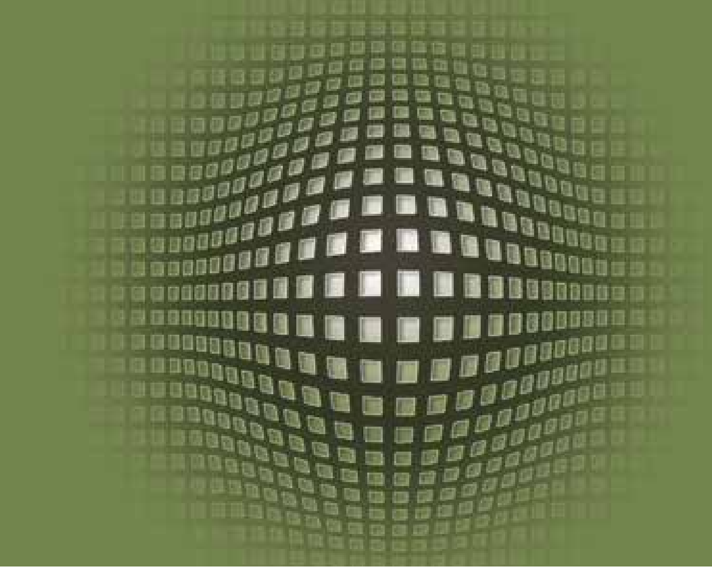
Figur 6: Uglene sover i reirene sine.

Ugler fra 1 til 10 er basert på en idé fra heftet «Number Without a Worksheet» av Association of Teachers of Mathematics (ATM), 2014.

Utskriftsbare PDF-er til alle oppgavene kan lastes ned fra: http://www.mike-naylor.com/ugler.pdf



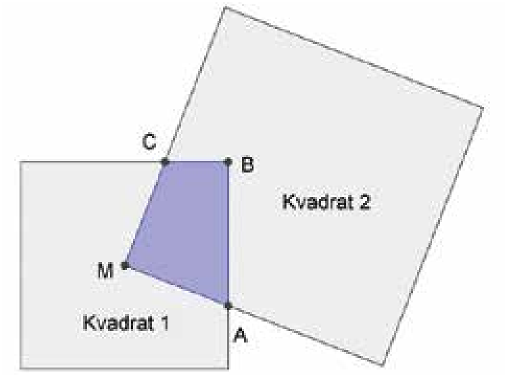
Figur 5: Uglereir



Torkildsen

To kvadrater

Kvadrat 1 har sider som er 3 lengdeenheter og midtpunkt *M*. Sidene i kvadrat 2 er 4 lengdeenheter. Kvadratene er plassert slik at ett av hjørnene i kvadrat 2 ligger fast på midtpunktet *M*, se figuren.



De to kvadratene overlapper hverandre i firkanten *MABC*, det blå feltet på figuren. I denne oppgaven skal du undersøke forholdet mellom arealet til firkanten *MABC* og arealet til kvadrat 1.

Undersøk følgende:

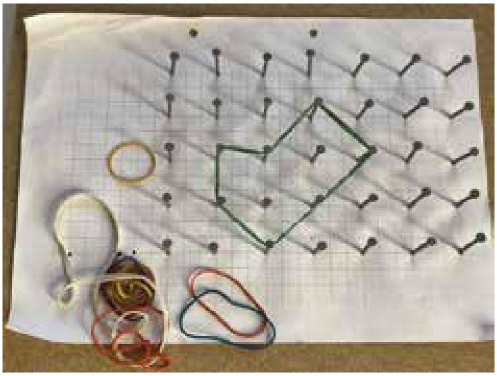
1. Hvor stor del av arealet til kvadrat 1 utgjør (er) arealet til firkant MABC (det blå feltet)? Forklar hvorfor du mener svaret ditt er rett.
2. Hva skjer med forholdet mellom de to arealene dersom sidelengden til kvadrat 2 forandres (økes eller minskes)?
3. Hva skjer med dette forholdet dersom kvadrat 2 dreies om punktet M?
4. Hvordan påvirkes forholdet mellom de to arealene dersom sidekantene i kvadrat 1 endres (økes eller minskes)?

I denne oppgaven kan GeoGebra være et nyttig redskap.

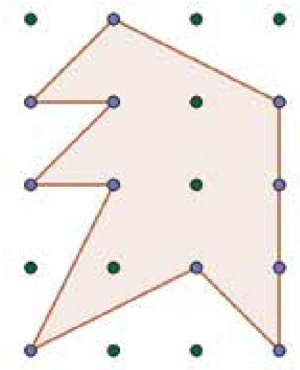
Ole Einar Torkildsen
Høgskulen i Volda
oet@hivolda.no

Kirfel

Picks teorem



Figur 1: Spikerbrett med strikkform.



Figur 2: Form med 3 indre og 11 ytre spiker.

Georg Alexander Pick (1859–1942) var en jødisk østerriksk matematiker. Han døde i konsentrasjonsleiren Theresienstadt i 1942. I dag er han best kjent for Picks teorem, en formel for arealet av former i et geometrisk gitter eller enklere sagt arealet av former laget med strikk på et spikerbrett (geoboard). Hovedpoenget med denne artikkelen er å gi en visuell geometrisk forklaring for denne formelen.

Mange slags mangekanter er lette å lage, og en kan starte forskjellige undersøkelser av areal, vinkler og lengder osv. Pytagoras' setning er for eksempel et yndet tema å utforske med spikerbrett (se for eksempel Baker & Bates, 1992). I dag finner man også apper der en kan arbeide med spikerbrettaktiviteter på skjermen (https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/).

Christoph Kirfel
Universitetet i Bergen
christoph.kirfel@uib.no

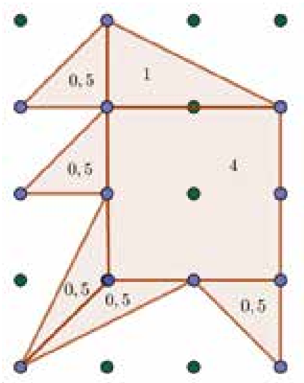
Kort fortalt går Picks teorem ut på at det er en enkel sammenheng mellom arealet av en strikkform på et spikerbrett, antall randspiker (ytre spiker som kommer borti strikken) og antall indre spiker (spiker som er inni formen). I en slik strikkform vil det alltid være slik at

$$A = i + \frac{r}{2} - 1$$

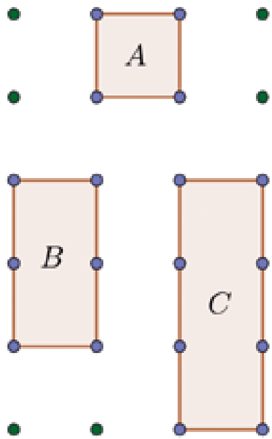
der A er arealet av strikkformen, i er antall indre spiker og r er antall randspiker av formen. I figur 2 har vi $i = 3$, $r = 11$ og dermed $A = 3 + \frac{11}{2} - 1 = 7{,}5$ arealenheter, noe som vi

Figur	Indre spiker i	Randspiker r	Areal A
A	0	4	1
B	0	6	2
C	0	8	3
D	1	4	2
E	1	5	2,5
F	1	6	3

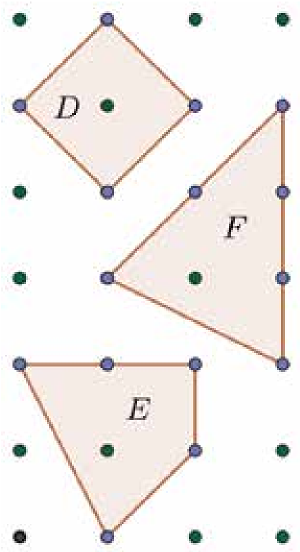
Tabell 1



Figur 3: Arealoppdeling.



Figur 4: Former uten indre spiker (i = 0).



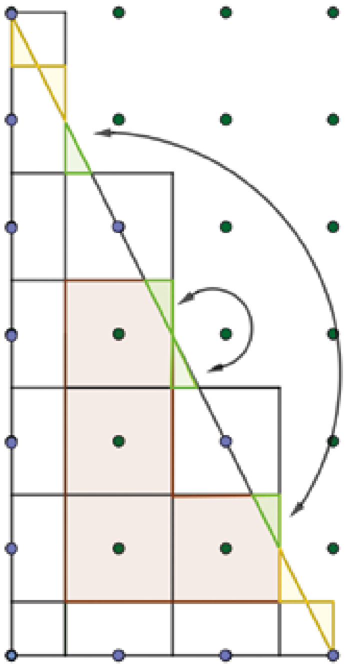
Figur 5: Former med én indre spiker.

kan kontrollere ved å dele formen opp i trekanter og et rektangel (se figur 3). Rektangelet har fire arealenheter. Den store trekanten har en arealenhet, mens de fem små trekantene har en halv arealenhet hver. Til sammen gir det $4+1+\frac{5}{2}=7,5$ arealenheter.

Innledende undersøkelser

Det er mange måter en kan ta opp denne pene formelen i undervisningen på. En måte kan være at man systematisk undersøker former med 0, så 1, så 2 osv. indre spiker og bestemmer deres areal. I figur 4 ser vi noen former uten indre spiker (i = 0). Hvilken sammenheng finner vi mellom arealet og antall randspiker? I figur 5 ser vi noen former med nøyaktig en indre spiker. Med utgangspunkt i tabell 1 over slike former kan elevene så begynne å undersøke sammenhengen mellom areal, antall indre og antall randspiker og på den måten klare å komme frem til forslag til en formel.

I disse eksperimentene vil elevene også kunne bruke alt de har lært om funksjoner og tabeller.



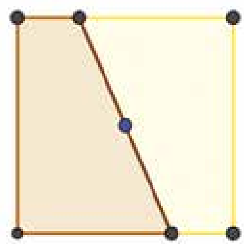
Figur 6: Akseparallell trekant.

Å forstå Picks formel

Et annet aspekt kan være å argumentere for at formelen er korrekt. Andre forklaringer av Picks teorem benytter seg gjerne av argumenter som involverer vinkler (Lie, 2013) eller andre matematiske begreper som ligger noe unna ingrediensene i Picks formel, nemlig areal, antall randspiker og antall indre spiker. På et tidspunkt oppstod det et ønske hos meg om å finne en forklaring som trengte minst mulig forutsetninger og begrepsapparat. En slik forklaring ville dermed kunne fungere for elever som skal øve seg på argumentasjonskompetansen som har fått en så sterk posisjon blant de nye kjerneelementene. Forklaringen som jeg var på jakt etter, skulle være slik at variabelen i skulle kunne knyttes til hele enhetskvadrater som var synlige i formen, siden i forekommer med faktor 1 i formelen, mens variabelen r skulle knyttes til halve enhetskvadrater som var synlige i formen siden r forekommer med faktor ½ i formelen.

Akseparallelle rettvinklete trekanter

I det videre forløpet ønsker jeg nå å gi en slik forklaring på Picks teorem. Vi tar utgangspunkt i de enklest mulige formene, nemlig rettvinklete trekanter der katetene er parallelle med koordinataksene på spikerbrettet. Figur 6 viser en slik trekant. Her har jeg også findelt rutenettet ved å lage horisontale og vertikale linjer mellom spikerradene. Dermed oppstår det et nett av kvadrater. Hvert slikt kvadrat hører da til spikeren i midten av kvadratet. Vi ser at indre spiker i trekanten vi betrakter, er ansvarlige for et kvadrat (rødt) av areal 1 hver, også de som ligger i nærheten av hypotenusen. Avskårne ører tas nemlig igjen et sted som ligger symmetrisk rundt midtpunktet på hypotenusen. De spikrene som ligger *på* hypotenusen, altså på randen, bidrar med nøyaktig et halvt kvadrat pga. symmetrien (se figur 7). En rett linje gjennom midtpunktet av et kvadrat vil alltid dele kvadratet i to symmetriske halvdeler.



Figur 7: Randpunkt med areal 1/2.

De «ordinære» randpunktene (langs katetene) er også ansvarlige for hver sitt halve kvadrat. Det som er problematisk, er hjørnene i trekanten.

Hjørnet nede til venstre (med den rette vinkelen) er ansvarlig for et kvadrat med areal ¼. Hjørnet oppe til venstre står for en liten trekant som «mangler» i det første halvkvadratet (gult), og bidrar dermed ikke til nytt areal, mens hjørnet nederst til høyre bidrar med et kvadrat med areal ¼ ved at en gul trekant flyttes til rett plass.

Fra de tre hjørnene får vi altså alt i alt to kvadrater med areal ¼ hver. Dermed er

$$A = i + \frac{r-3}{2} + \frac{1}{2} = i + \frac{r}{2} - 1$$

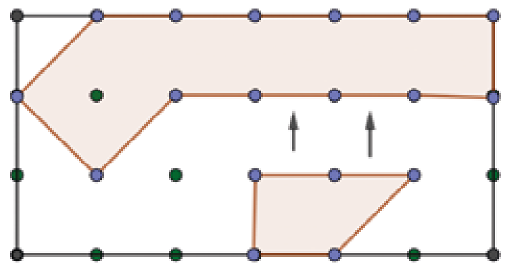
der tallet 3 representerer de tre hjørnepunktene og ½ representerer arealet som de tre hjørnepunktene bidrar med. Dermed har vi vist at Picks formel er korrekt for trekanten i figur 6, der to av sidene følger «koordinataksene» på spikerbrettet.

Hvis du velger en annen rettvinklet trekant, vil du møte de samme fenomenene. Noen av de indre spikrene vil ha et helt kvadrat rundt seg, mens de andre indre spikrene vil ligge så nær hypotenusen at denne skjærer av en liten bit. Men en tilsvarende bit vil man «få igjen» når man speiler biten som mangler rundt midtpunktet på hypotenusen. Treffer hypotenusen en randspiker, så blir det tilhørende kvadratet delt i to like deler (se figur 7). En halvpart ligger innenfor og en halvpart ligger utenfor trekanten vi betrakter. Randspiker langs katetene er ansvarlige for hver sitt halve kvadrat, mens de tre hjørnespikrene er til sammen ansvarlige for et areal av ½ enhet. Figur 6 kan dermed tjene som et såkalt generisk eksempel der alle mulige situasjoner som kan tenkes å forekomme i rettvinklete trekanter, er inneholdt. Dermed har vi vist at Picks formel er korrekt for akseparallelle rettvinklete trekanter.

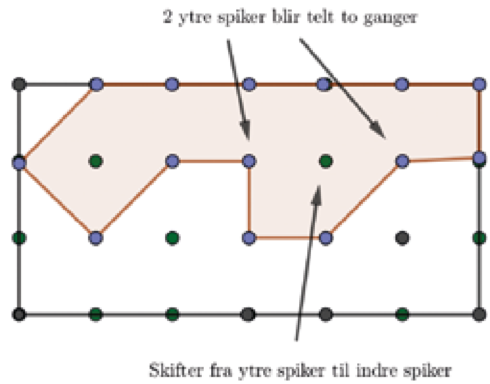
Sammensatte former

Vi skal nå gå videre til mer komplekse former. Setter man sammen to former der Picks formel gjelder (for eksempel to slike trekanter der to av sidene følger koordinataksene eller mer kompliserte former), så gjelder også Picks teorem for den sammensatte formen. For de enkelte arealene har vi da

$$A_1 = i_1 + \frac{r_1}{2} - 1 \quad \text{og} \quad A_2 = i_2 + \frac{r_2}{2} - 1$$



Figur 8: To former kobles sammen..



Figur 9: Ferdig sammenkoblet former.

der i_1 og i_2 er antall indre spiker og r_1 og r_2 er antall randspiker i hver av formene. Formene i figurene 8 og 9 er ikke rettvinklete trekanter. Likevel kan en sjekke at Picks teorem også gjelder for dem, ved å beregne arealet og telle randspiker og indre spiker. Vi skal nå vise at Picks teorem også gjelder når vi setter formene sammen. Det innebærer at en del av randen av den ene formen overlapper med en del av randen av den andre formen, og noen av spikrene vil skifte karakter. Figurene 8 og 9 fungerer dermed også som et generisk eksempel som inneholder alle forhold som kan tenkes i hver mulige sammensetningssituasjon.

Hvis for eksempel s spiker fra den ene formens rand overlapper med de samme s spikrene fra den andre formens rand, så vil $s - 2$ av disse spikrene skifte karakter, fra å være randspiker til å bli indre spiker. På figurene 8 og 9 er $s = 3$. For den sammensatte formen gjelder da:

Indre spiker: $I = i_1 + i_2 + s - 2$
Randspiker: $R = r_1 + r_2 - 2s + 2$

Randspikrene langs sammenkoblingskanten forsvinner nemlig i begge formene. Derfor får vi $-2s$ i uttrykket for R. Det siste tillegget (+2) kommer av at de to endepunktene på sammenkoblingskanten blir trukket fra to ganger når vi skriver ($-2s$). Men i den nye formen teller disse spikrene med. Dermed er

$$I + \frac{R}{2} - 1 = (i_1 + i_2 + s - 2) + \frac{r_1 + r_2 - 2s + 2}{2} - 1$$
$$= \left(i_1 + \frac{r_1}{2} - 1\right) + \left(i_2 + \frac{r_2}{2} - 1\right) = A_1 + A_2 = A$$

Dermed har vi vist at Picks teorem gjelder for alle strikkformer som kan bygges opp av trekanter der to av sidene følger koordinataksene.

Differanseformer

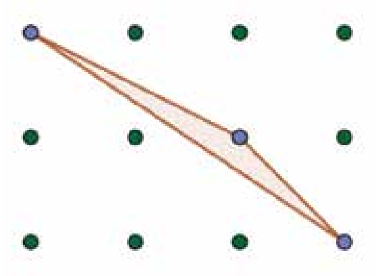
Men hva med følgende lille trekant i figur 10? Den kan vel ikke bygges opp av slike rettvinklete trekanter.

Her er ideen at slike former kan oppstå som differanse av andre former, for eksempel rettvinklete trekanter der to sider følger aksene. Figur 11 viser hvordan den nevnte formen kan komme frem som et differanseareal.

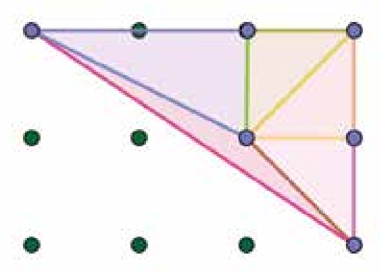
Det betyr at vi må vise at dersom Picks formel gjelder for to former, så gjelder den også for differanseformen hvis vi kobler formene fra hverandre langs en kant slik vi gjorde under sammensetningen. Vi kan igjen benytte oss av figurene 8 og 9 for å belyse situasjonen, men nå i omvendt rekkefølge. For den store formen gjelder

$$A = I + \frac{R}{2} - 1$$

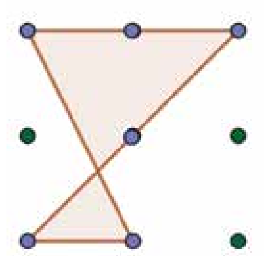
mens for den lille formen som skal «trekkes fra», har vi $A_1 = i_1 + \frac{r_1}{2} - 1$. Igjen antar vi at den «nye randlinjen» inneholder s spiker. Av disse



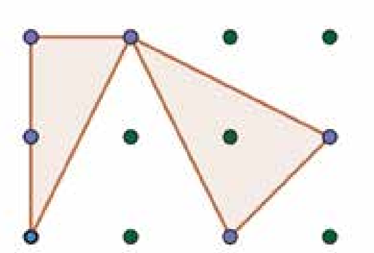
Figur 10: Trekant som ikke kan lages av mindre trekanter.



Figur 11: Trekant som kommer frem som differanseområde.



Figur 12: Forbudt form. Strikken krysser seg selv. Her gjelder ikke Picks formel.



Figur 13: Forbudt sammenkobling. Her gjelder ikke Picks formel.

var s – 2 stykker indre spiker i den store formen. Disse blir nå omgjort til randspiker i restformen, slik at vi har

Indre spiker: $i_2 = I - i_1 - s + 2$
Randspiker: $r_2 = R - r_1 + 2s - 2$

Ved å trekke fra har vi også «fjernet» spikrene fra sammenkoblingskanten. Disse må altså legges til to ganger. Endepunktene på sammenkoblingskanten er blitt lagt til for ofte. Derfor får vi fradraget (–2) i uttrykket for r_2. I restformen teller de nemlig bare enkelt. Dermed er

$$i_2 + \frac{r_2}{2} - 1 = \left(I - i_1 - s + 2\right) + \frac{R - r_1 + 2s - 2}{2} - 1$$
$$= \left(I + \frac{R}{2} - 1\right) - \left(i_1 + \frac{r_1}{2} - 1\right) = A - A_1 = A_2$$

og Picks formel gjelder også her. Dermed gjelder Picks teorem for alle former som kan fås som sammenkobling eller differanse av former som kan bygges opp av (akseparallelle) rettvinklete trekanter. Det er alle former vi kan lage med strikk på et spikerbrett når vi ser vekk fra former der strikken krysser seg selv (se figur 12).

Takk til

Takk til Vetle Rohde for grundig gjennomlesning og gode kommentarer.

Referanser

Lie, J. (2013). Om areal, invarians og Picks teorem. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 24*(1), 26–30.

Baker, L. og Bates, T. (1992). *ATM Activity Book, Using geoboards*. ATM.

Torkildsen, Gjøvik

Modellering som kjerneelement

Innledning

Den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020) ble høsten 2020 gradvis innført i den norske skolen. Denne har seks kjerneelementer som sammenfatter essensen i fag og faglige læringsprosesser, og ett av disse er kjerneelementet modellering og anvendelser.

Denne artikkelen handler om hva modellering er, og, ikke minst, kan være. Modellering sees tradisjonelt på som aktiviteten å beskrive et virkelig fenomen med matematikk for å løse et problem, gjerne ved å sette opp et funksjonsuttrykk eller utføre en regresjon (Meyer, 2015). I denne artikkelen utvides dette perspektivet noe, og det presenteres to ulike didaktiske retninger knyttet til modellering i matematikkundervisning. I den ene retningen er målet å utvikle modeller til å tenke og resonnere matematisk med, mens den andre er å løse et problem fra virkeligheten ved å anvende matematikk. Vi vil argumentere for at modellering er mer enn bruk og anvendelser, at det også kan være en måte å lære ny matematikk på. Videre vil vi beskrive modelleringsprosessen ved hjelp av modelleringssykluser fordi vi ser dette kan være nyttige verktøy for en lærer i planlegging, gjennomføring og evaluering av modelleringsøkter.

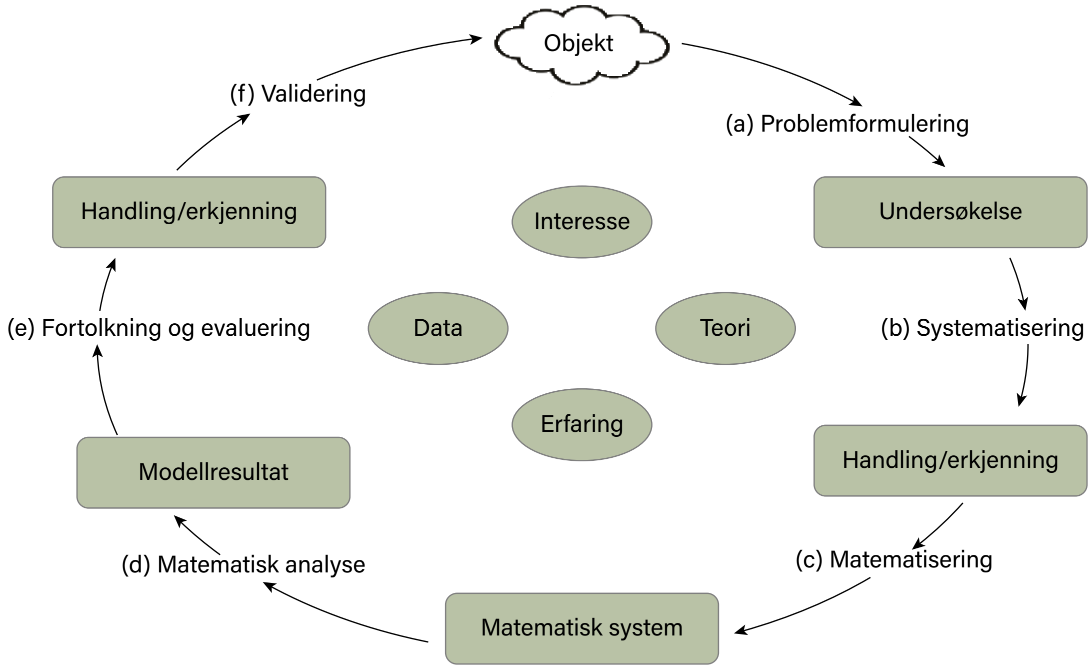
Hermund André Torkildsen
NTNU
hermund.a.torkildsen@ntnu.no

Øistein Gjøvik
NTNU
oistein.gjovik@ntnu.no

Modellering

Det brukes modeller og jobbes med modellering på mange forskjellige måter og nivåer i skolen. En matematisk modell skal beskrive en virkelig, eller i hvert fall realistisk, situasjon matematisk. Hensikten med å lage og bruke matematiske modeller er gjerne å kunne forstå en situasjon bedre slik at en kan treffe gode beslutninger. I spørsmål om klimaendringer, bærekraft og smitteutvikling (for eksempel knyttet til koronaviruset) er matematiske modeller og modellering sentralt. Modellering kan også ha et annet perspektiv. Måten vi behandler for eksempel multiplikasjon på, kan beskrives med en modell. Multiplikasjon kan tolkes med en rutenettmodell, der antall sjokoladebiter i en konfekteske er det samme som antall rader multiplisert med antall kolonner, eller som et areal der faktorene er sidene i et rektangel.

Det er ofte slik at en kan bruke matematikk til å jobbe med situasjoner som er for farlige til å undersøkes direkte, tar for lang tid, er for dyre eller rett og slett for vanskelige å få direkte tilgang til. Tenk på eksemplet fra fysikken der elever møter Ohms lov: $U = R \cdot I$, altså



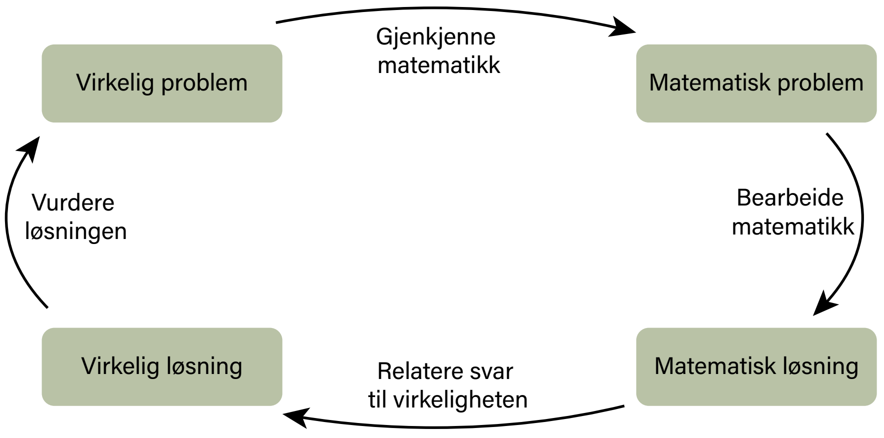
Figur 1: Modelleringssyklusen, basert på Blomhøj (2006).

at strømmen i en krets er direkte proporsjonal med potensialet (spenningen) i kretsen. En kan komme fram til dette resultatet ved å utføre noen målinger i en strømkrets. Så kan en videre anta at dette også gjelder når spenningene og strømstyrken er for farlig til å eksperimentere med for elevene. Selv med utgangspunkt i et begrenset antall strømkretser kan en generalisere dette til å gjelde mer eller mindre overalt, slik at en kan finne strømstyrke i andre kretser om en vet motstand og spenning. En modell kan som regel forbedres, og i dette tilfellet kan det være tjenlig å spørre om det er en eksakt lov, eller om den ikke lenger gjelder om strømmen eller spenningen blir veldig høy.

Modelleringssyklusen

Sett fra et undervisningsståsted kan matematisk modellering handle både om å løse problemer i virkeligheten ved hjelp av matematikk og å lære seg matematikk (Lesh & Caylor, 2007). I begge tilfeller går modellering ut på at elevene skal oppleve en sammenheng mellom en reell verden og matematikken. En kan se for seg undervisning i modellering som å følge en syklus som skissert i Blomhøj (2006) (figur 1).

Denne modellen beskriver hvordan elever ideelt gjennomløper en modelleringsprosess i undervisningen. Modellen er basert på klasseromsundervisning, men slik kan et forløp i modellering utenfor skolen også kunne fungere. Syklusen vektlegger at elever og lærere tar med seg interesse, datamateriale, teorier og erfaring inn i modelleringsarbeid. Modellen går ut fra at det eksisterer et objekt (det kan godt være en praktisk situasjon) som elever fatter interesse for, og at elevene deretter går gjennom stegene i modellen for å komme fram til en matematisk beskrivelse av situasjonen. Stegene består i å først formulere et problem som kan løses ved hjelp av matematikk (a). Syklusen inneholder videre punkter som ikke nødvendigvis må gjøres i rekkefølge. Elevene må systematisere undersøkelsene sine (b) og oversette dette til matematisk «språk» (c). De kan bruke matematiske verktøy (alt fra enkle verktøy som



Figur 2: Modelleringssyklusen, typisk forenkling (forfatternes forenkling). Lignende forenklinger finnes også i litteraturen (for eksempel Kjærnsli & Olsen, 2013).

plotting av graf til mer avanserte som kalkulus og matrise- og differensialregning) til å konstruere sin matematiske modell av situasjonen. Modellen må gjøres så funksjonell og enkel som mulig (e). Det hører med at elevene til slutt vurderer om den faktisk besvarer det opprinnelige spørsmålet som ble stilt. Hvis den ikke svarer tilfredsstillende på problemstillingen, jobber de videre med de aktuelle punktene i syklusen.

Det finnes alternative varianter av denne syklusen, for eksempel Blums modell (Blum, 2015), som i større grad vektlegger at det er en syklus som går fram og tilbake mellom den reelle verden og matematikken. En annen variant er Pind & Bjerre (2019) sin, som vektlegger at man vanligvis gjennomløper flere runder i en modelleringssyklus.

En annen mer forenklet modell for å organisere modelleringsaktiviteter er kanskje mer anvendelig i skolen, se figur 2.

Slike framstillinger av modelleringsarbeid kan en finne mange av i et søk på nettet, og som lærer kan en velge hva som skal vektlegges, og så synliggjøre hva som skal være de forskjellige bestanddelene, og hva en kaller de ulike prosessene for å knytte dem sammen.

Inspirert av Blomhøjs (2006) modelleringssyklus er det grunn til å anta at elevenes interesser og erfaringer i den virkelige verden kan spille en rolle i modelleringsarbeidet, slik at det vil kunne gjøre faget mer virkelighetsnært og motiverende for elevene. Når elever har interesse av å utvikle modeller, eller har erfaringer som kan hjelpe til med å besvare det opprinnelige spørsmålet, er veien kanskje kortere til å engasjere seg i problemstillinger eller validering i modelleringsoppgaver.

Dan Meyer foretok en kartlegging av modelleringsoppgaver i skolen og kom fram til at en stor del av det som blir kalt modellering, egentlig var oppgaver i å tolke en graf eller å sette opp et funksjonsuttrykk ut fra et datamateriale (Meyer, 2015). Å bruke en av de nevnte syklusene som et redskap vil kunne motvirke at elever bare jobber med noen få av delene i modelleringsprosessen. Spesielt kan en jo forestille seg at elever som ikke blir trent i å se hvor de kan anvende matematikk og i å vurdere hva en skal måle og modellere, heller ikke blir gode til å gjenkjenne modellerbare situasjoner fra dagliglivet, og heller ikke være i stand til å kritisk vurdere andres modeller og modeller i mediene.

To modelleringsretninger

Det finnes flere modelleringsretninger der det fokuseres på noe annet enn bare å løse virkelige problemer med kjent matematikk. Her behandles to retninger: modellframkallende aktiviteter (model eliciting activities) og framvoksende modeller (emergent modelling) innenfor RME (Realistic Mathematics Education). Her er fokuset å lære ny matematikk gjennom modellering, og ikke nødvendigvis bare anvende kjent matematikk på ulike praktiske situasjoner.

Begge retningene har mange fellestrekk, men det er også noen forskjeller. RME har et langtidsperspektiv, der modellene utvikles over uker og måneder, mens modellframkallende aktiviteter kan foregå over noen få økter. Hensikten innenfor RME er å utvikle modeller, slik som arealmodellen for multiplikasjon eller tallinjen, som man kan bruke til å resonnere matematisk med. I retningen modellframkallende aktiviteter er ikke hensikten å utvikle modeller som elever kan bruke til å tenke med i andre lignende situasjoner, men elevene settes i en realistisk situasjon, og målet er at elevene skal lage modeller som svarer på problemstillingen i den virkelige situasjonen. Slik sett kan man si at denne retningen er mer lik tradisjonell modellering, altså å løse et virkelig problem med matematikk, enn RME-retningen, som handler om framvoksende modeller.

Modellframkallende aktiviteter

Aktivitetene er formet som problemer, der elevene ikke har noen kjent metode for å løse problemstillingen. Et eksempel fra boka Omega (Skott et al., 2008) er en aktivitet der elevene skal lage en modell for å regne ut forsikringsutbetalingen for en stjålet sykkel. De må ta hensyn til mange variabler, som alder på sykkelen, pris da den var ny, om den var låst eller ikke, osv. Elevene må selv treffe valg underveis i arbeidet knyttet til hvordan de vil vekte de ulike faktorene.

Et annet eksempel kan være at det skal arrangeres en fotballcup på skolen, og der de skal lage en modell for å lage jevnest mulige lag. Elevene kan få utdelt informasjon om de ulike spillerne, for eksempel mål på hurtighet, utholdenhet, styrke, spenst, antall mål forrige sesong, antall redninger forrige sesong osv. På bakgrunn av denne informasjonen og problemstillingen må elevene systematisere datamaterialet, treffe valg om hvordan de bør vekte de ulike variablene opp mot hverandre, og komme fram til en modell og metode for hvordan lagene bør fordeles.

Lesh og Caylor (2007) lister opp seks prinsipper som aktiviteter innenfor denne modelleringsretningen skal innfri:

1. Personlig meningsfullhet: Aktiviteten må være realistisk i den forstand at elevene skal kunne sette seg inn i og forstå situasjonen. På samme måte som i RME betyr ikke realistisk i denne sammenhengen at det må tas utgangspunkt i noe fra virkeligheten. Det kan gjerne være en oppkonstruert problemstilling, men den må gi mening for elevene og være en del av deres erfaringsverden.
2. Modellkonstruksjon: Aktiviteten må skape et behov for å lage en modell. Eksemplene knyttet til sykkelforsikring og fotballcupen skaper behov for å vurdere tilgjengelig informasjon og lage en modell som kan brukes til å ta en avgjørelse.
3. Selvevaluering: Målet og hensikten med aktiviteten må være klare for elevene, slik at de på egen hånd kan evaluere resultatet av modellen de lager, og arbeidet sitt. Gir modellen de har kommet fram til, et forventet svar på forsikringsutbetalingen for en stjålet sykkel?
4. Modelldokumentasjon: Arbeidet og resultatet skal dokumenteres. Elevene må begrunne sine valg og tanker underveis og ha mulighet til å forklare modellene sine. Hvorfor ble hurtighet vektet høyere enn utholdenhet? Og hvordan ble denne vektingen løst matematisk?

5. Enkelhet (simple prototype): Situasjonen bør være så enkel som mulig, uten at det går ut over de andre fem kravene.
6. Modellgeneralisering: Det må legges opp til at modeller som utvikles gjennom slike aktiviteter, skal kunne generaliseres til andre lignende situasjoner. Kan modellene som bestemmer utbetaling for forsikring, generaliseres til andre typer forsikring? Kan modellen som genererer jevne fotballag, tilpasses til andre idretter? Eller enda mer generelt: Kan den tilpasses til helt andre situasjoner der ulike variabler og egenskaper må vektes i den hensikt å kunne treffe valg om jevnest mulig fordeling?

Modeller som er resultater fra slike aktiviteter, kan være av forskjellig art og kompleksitet. En kan se for seg at elever på høyere trinn kan komme fram til et funksjonsuttrykk som gir forsikringsutbetalingen for en stjålet sykkel, der de ulike faktorene er vektet på en eller annen måte, eller en skår på hvor godt et fotballag vurderes å være på bakgrunn av den informasjonen som gis.

På den andre enden av skalaen, og på lavere trinn, kan en modell helt enkelt være en beskrivelse eller en algoritme, kanskje til og med tekstlig uten matematiske symboler, på hvordan man skal gå fram for å regne ut forsikringsutbetalingen eller fordele jevnest mulige lag. Ulik grad av kompleksitet på modellene som framkommer, kan selvsagt også skje innenfor samme trinn.

Innenfor denne modelleringsretningen er det også lett å se for seg at digitale verktøy kan være nyttige for å innfri noen av prinsippene. Elevene kan arbeide med relativt store datamengder som skal systematiseres. Modeller som framkommer i arbeidet, kan dokumenteres ved at man implementerer dem og automatiserer dem digitalt i for eksempel regneark, graftegnere eller til og med i et programmeringsspråk. Modellene kan evalueres på en digital plattform mer effektivt enn for hånd, og man kan gjøre simuleringer av virkeligheten for å generere data og for å teste modellene.

Framvoksende modeller (RME)

I den nye læreplanen nevnes spesielt at elevene skal jobbe med realistiske sammenhenger. Det er ikke så lett å skulle skille mellom hva som er realistisk matematikk, og hva som ikke er det. RME er en måte å lære matematikk på, startet opp ved Freudenthal-instituttet[1]. I RME er det en grunntanke at elevene skal bruke kontekster for selv å skulle gjenoppdage matematikken under veiledning fra læreren (guided reinvention). I denne sammenhengen betyr reell at det skal være mulig for eleven å forestille seg matematikken.

En kan altså tenke «realistisk» på flere måter. Det kan være reelt på den måten at en elev faktisk kunne stått i denne situasjonen («På denne butikken koster tre varer 37 kroner, og på den andre butikken er prisen for fire av de samme varene 45 kroner. Hvor gjør du det beste kjøpet?»), og det kan være det en kan kalle semi-reell eller kvasi-reell, der en kan se at oppgavene ikke kunne vært fra den virkelige verden, men fra en tilnærmet idealisering av verden.

Et klassisk eksempel, og kjent for mange norske lærere innenfor RME, er en oppgave som har blitt brukt for å introdusere divisjon på 3. trinn: «81 foreldre kommer på foreldremøtet, og hvert bord tar 6 personer. Hvor mange bord trenger vi?» Dette er en realistisk kontekst i den forstand at elevene kan sette seg inn i den og forstå den, uavhengig av matematikken (for eksempel at dette er divisjon – faktisk, og ikke tilfeldigvis, målingsdivisjon). Uten å ha blitt introdusert for divisjon kan elevene typisk begynne å tegne bordene, plassere foreldrene på bordene og telle opp antall bord til slutt. Dette er en uformell modell av selve situasjonen, og den er sterkt knyttet til konteksten.

Ideen i RME er at slike uformelle modeller av situasjonen over tid skal utvikles, gjennom en rekke undermodeller, til å bli mer formelle og uavhengige av konteksten. Hensikten er at modellene som elevene utvikler, skal dekontekstualiseres og bli modeller som elevene kan tenke med for å løse lignende matematiske situasjoner – altså fra modeller av tanken til modeller for tanken. Kjente eksempler på slike modeller kan være like-grupper-modellen (altså at multiplikasjon tolkes som et visst antall grupper med et visst antall elementer i hver gruppe) og arealmodellen for multiplikasjon, tallinjen for å resonnere rundt addisjon og subtraksjon, ulike modeller som kan representere brøker og operasjoner på brøker eller grafer som representasjoner for funksjoner.

I eksemplet med foreldremøtet kan læreren legge inn begrensninger og utvidelser i konteksten for å hjelpe elevene videre med å matematisere. Læreren kan utvide konteksten ved å endre tallene i oppgaven eller legge til flere oppgaver, og man kan sette begrensninger ved at bordene også må ha kaffekanner (Fosnot & Dolk, 2001). De elevene som ikke ønsker å tegne, kan da representere på en annen måte, for eksempel ved tellestreker. Tanken er at arbeidet med denne og lignende kontekster, utvidelser og begrensninger av disse over tid, kan støtte elevene i å matematisere og komme fram til modeller av mer generell matematisk karakter som kan brukes i alle målingsdivisjonssituasjoner.

I denne sammenhengen viser Gravemeijer (1999) til fire nivåer i elevers arbeid med framvoksende modeller:

1. Kontekstuelt nivå. Elevene er i, og avhengige av, den realistiske konteksten, og modellerer gjerne ved å tegne bord og stoler og plasserer foreldrene for så å telle opp antall bord.
2. Referensielt nivå. Elevene har en matematisk modell, men den er ikke løsrevet fra selve situasjonen.
3. Generelt nivå. Modellen er uavhengig av selve konteksten, og kan benyttes i andre lignende situasjoner.
4. Formelt nivå. Modellen er av ren (formell) matematisk karakter.

Avslutning

Modellering er en kompleks aktivitet, både for elever og lærere. Læreren må støtte elevenes arbeid i alle deler av modelleringssyklusen slik at de får erfaringer de kan ta med seg både i arbeid med matematikk og når de skal forholde seg til matematiske modeller brukt som argumentasjon i for eksempel samfunnsdebatter. Modellering kan brukes til å løse virkelige problemer med allerede kjent matematikk, og samtidig kan modellering brukes som et middel for å lære ny matematikk.

Nytteperspektivet er uten tvil viktig, men vi håper også at læring av ny matematikk vil stå sentralt i temaet modellering. De to didaktiske retningene vi har skissert ovenfor, gir noen flere perspektiver på hva modellering er og kan være, og de kan anvendes på alle trinn i modelleringsarbeidet som kommer.

Note

1 https://www.uu.nl/en/research/freudenthal-institute Litt forenklet kan en si det hele begynte med Sputnik-sjokket i 1957, der det begynte et kappløp om å utdanne elevene godt i realfag. Et av tiltakene var svært abstrakt matematikk allerede fra et tidlig stadium. Det er nok stor konsensus i matematikkmiljøene om at dette ikke var spesielt vellykket, og en motreaksjon på dette var RME.

Referanser

Blomhøj, M. (2006). Mod en didaktisk teori for matematisk modellering. I M. Blomhøj & O. Skovsmose (red.), *Kunne det tænkes? Om matematikklæring* (s. 80–109). Malling Beck.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? I S. J. Cho (red.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 73–96). Springer International Publishing.

Fosnot, C. T. & Dolk, M. L. A. M. (2001). *Young mathematicians at work. Constructing multiplication and division*. Heinemann.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155–177.

Kjærnsli, M. & Olsen, R. (2013). *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Universitetsforlaget.

Lesh, R. & Caylor, B. (2007). Introduction to the special issue: Modeling as application versus modeling as a way to create mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 12*(3), 173–194.

Meyer, D. (2015). Missing the promise of mathematical modeling. *The Mathematics Teacher, 108*(8), 578–583.

Pind, P. & Bjerre, E. (2019). *Modellering og estimering*. Forlaget Pind og Bjerre.

Skott, J., Schou, J., Jess, K. & Hansen, H.C. (2008). *Matematik for lærerstuderende: Omega 4.–10. klasse*. Forlaget Samfundslitteratur.

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i matematikk (MAT01-05)*. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Johannessen

Om differensialligninger

Formålet med denne artikkelen er å beskrive noen strategier for å løse lineære differensialligninger. Målgruppen er matematikklærere i den videregående skolen.

Meningen er ikke å løse slike ligninger rent konkret, men å gjøre oppmerksom på visse egenskaper som kan lette forståelsen av løsningsmetodene, samt ha en formening om hva selve løsningen kan være. Metodene bygger på følgende: Kunnskap og erfaring med visse funksjoners deriverbarhet vil gjøre det lettere å løse differensialligninger siden man da forstår sammenhengene.

Pensumet for differensialligninger i den videregående skolen omfatter bare en liten del av feltet. Det dreier seg om lineære ligninger av 1. og 2. orden. Det er disse artikkelen setter søkelyset på. Det finnes mange andre typer, ofte komplekse, som ikke kan løses eksakt, og hvor man må ty til approksimasjonsmetoder, samt bruke kraftige computere. Artikkelen omfatter ikke slike. Det gjøres også oppmerksom på såkalte differensligninger, som ikke må forveksles med differensialligninger. Disse dreier seg om rekursive tallfølger og funksjoner som ikke er deriverbare. Fibonacci-tall er ett eksempel.

Tor Hjalmar Johannessen
Pensjonist
tor.hjalmar.johannessen@gmail.com

Noen grunnleggende funksjoner

De funksjonene som betraktes i denne artikkelen, har spesielle egenskaper – de gjentar seg selv, eller skifter fortegn ettersom de deriveres flere ganger. Vi ser spesielt på «syklisiteten» mht. derivasjon, dvs. hvor mange derivasjoner som må utføres før man er tilbake til utgangspunktet. Nettopp dette utnyttes i løsningene fordi en differensialligning er et uttrykk sammensatt av funksjoner som er derivert et antall ganger.

Ett eksempel er $f(x) = \sin(x)$: Deriver en gang, og du får $f'(x) = \cos(x)$, to ganger: $f''(x) = -\sin(x)$, tre ganger: $f'''(x) = -\cos(x)$, og etter fire derivasjoner får du $f''''(x) = \sin(x)$, som er det samme som $f(x)$. Det samme gjelder for $\cos(x)$.

Funksjonen $f(x) = e^x$ er uforandret uansett antall derivasjoner, det samme er $f(x) = ke^x$, hvor k er en konstant. Derimot skifter $f(x) = e^{-x}$ fortegn for hver derivasjon og repeterer seg selv etter to derivasjoner (kjerneregelen):

$$f'(x) = -e^{-x} \quad \text{og} \quad f''(x) = (-)(-)e^{-x} = (+)e^{-x}$$

Tabell 1 på neste side viser et utvalg av funksjoner og deres sykliske egenskaper mht. derivasjon. Med disse som utgangspunkt er det nå enkelt selv å konstruere noen enkle differensialligninger.

Hva med $f(x) = f'(x)$? Altså: finn en funksjon som er lik sin egen deriverte. Svar: $f(x) = e^x$ eller

1	2	3	4	5	6	7	Rad
Ligningstype	1. orden	1. orden	2. orden	2. orden	3. orden	4. orden	1
Ligning	$f'(x) = f(x)$	$f'(x) = -f(x)$	$f''(x) = f(x)$	$f''(x) = -f(x)$	$f'''(x) = f(x)$	$f''''(x) = f(x)$	2
$f(x) = e^x$	Ja	Nei	Ja	Nei	Ja	Ja	3
$f(x) = e^{-x}$	Nei	Ja (*)	Ja	Nei	Nei	Ja	4
$f(x) = \sin(x)$	Nei	Nei	Nei	Ja (*)	Nei	Ja	5
$f(x) = \cos(x)$	Nei	Nei	Nei	Ja (*)	Nei	Ja	6

Tabell 1 Noen elementære differensialligninger med sykliske funksjoner. Alle multiplikasjonskonstanter er fjernet fra uttrykkene, men er forutsatt å være positive tall. En stjerne markerer at funksjonen skifter fortegn når den deriveres.

mer generelt $f(x) = ke^x$ hvor k er en konstant. Siden k kan velges på uendelig mange måter, forstår vi at det er uendelig mange funksjoner som oppfyller differensialligningen, men samtlige kan skrives på formen $f(x) = ke^x$.

En multiplikasjonskonstant foran funksjonene i kolonne 1 har ingen innvirkning for tabellen. Om $f(x) = ke^x$ eller $f(x) = e^x$ spiller ingen rolle for ja/nei eller skifte av fortegn, verken for denne eller de andre funksjonene.

Prøv selv ved å bruke tabellen over:

$$\begin{array}{lll} f(x) = -f'(x) & \text{eller} & f(x) + f'(x) = 0 \\ f(x) = f''(x) & \text{eller} & f(x) - f''(x) = 0 \\ g(x) = -g''(x) & \text{eller} & g(x) + g''(x) = 0 \\ h''''(x) = h(x) & \text{eller} & h(x) - h''''(x) = 0 \end{array}$$

Du vil lett finne et svar, for eksempel $g(x) = \sin(x)$. Hvilken innvirkning ville en konstant bety? Ligning 3 blir enten slik:

$$g(x) = k \cdot \sin(x) \quad \rightarrow \quad g''(x) = -k \cdot \sin(x)$$
altså: $g''(x) = -g(x)$

eller slik:

$$g(x) = \sin(kx) \quad \rightarrow \quad g''(x) = k^2 \cdot \sin(kx)$$
altså: $g(x) = -k^{-2} \cdot g(x)$

Ligningen blir i det første tilfellet uendret og i det andre tilfellet endret med konstantfaktoren i 2. potens.

En slik kartlegging kan være nyttig, også for å gjette svaret. På videregående skole er det ofte enkle stykker med konstanter enten som multiplikasjonsfaktor eller i argumentet $f(x) \rightarrow f(kx)$ som skal beregnes. Man vil se at ligningene 1, 2 og 4 vil ligne på ligning 3 når man introduserer konstanter. Lag gjerne en egen tabell for å vise dette.

En ting å merke seg er at løsningene her av 1. og 2. ordens differensialligninger ikke inneholder polynomer, dvs. funksjoner med x, x^2, x^3 osv. Polynomer er normalt heller ikke sykliske mht. derivasjon; de kan bare deriveres så mange ganger som graden av polynomet pluss 1. (For eksempel vil $f(x) = x^2$ bli 0 når den deriveres tre ganger.)

Unntak finner vi blant uendelige polynomrekker, for eksempel Taylor-rekka for e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty$$

Her står $x!$ for «fakultet», $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$. Du får det samme igjen og igjen for hver derivasjon (prøv selv), og siden rekka er «uendelig», vil det aldri stå igjen «bare 0». Tilsvarende for Taylor-rekkene til e^{-x}, $\sin(x)$ og $\cos(x)$. Her er to av dem:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

En digresjon:

Deriver Taylor-polynomet for sin(x) og se at du får Taylor-polynomet for cos(x). Gjør det samme med cos(x), og du får Taylor-polynomet for sin(x). Det skulle bare mangle!

Viktig: Mer komplekse differensialligninger kan inneholde polynomer i sine løsninger for $f(x)$.

Differensialligninger inneholder ofte sin(x), cos(x), e^x og e^{-x} i sine løsninger. Syklisiteten forklarer litt om «hvorfor». Dessuten hvorfor sin(x) eller cos(x) ikke inngår i 1. ordens differensialligninger, men derimot e^x eller e^{-x}. Å bygge opp (eller konstruere) differensialligninger basert på kunnskaper om visse funksjoners sykliske egenskaper er svært nyttig bakgrunnserfaring når man skal løse mer intrikate differensialligninger. «Å gjette på mulige løsninger» er ofte en nyttig strategi. En enklere tabell som viser syklisiteten, er vist i tabell 2.

Grafiske assosiasjoner og anvendelser

I vår tid er det relativt lett å lage en graf av selve løsningen $f(x)$, selv om den er relativt kompleks. GeoGebra er her et nyttig verktøy. Det minnes også om at den førstederiverte beskriver stigningsforholdet til grafen, mens den andrederiverte har med krumningen av kurven å gjøre: Den deriverte av den deriverte sier noe om hvordan stigningen endrer seg: opp eller ned, lite eller mye. Dvs. at grafen er mer eller mindre krum – den ene eller den andre veien.

Interpretasjon av løsningen er viktig i mange miljøer, her kan grafikk være til hjelp: Den viser om løsningen «svinger» (oscillerer), om den vokser ubegrenset, eller om den konvergerer mot en bestemt verdi. Dette sier noe om den matematiske beskrivelsen eller «modellen», som differensialligningen ofte representerer, viser en ustabil eller stabil tilstand eller utvikling når x øker.

Funksjon	e^x	e^{-x}	sin(x)	cos(x)
1 gang derivasjon	Sykl.	*		
2 ganger derivasjon	Sykl.	Sykl.	*	*
3 ganger derivasjon	Sykl.	*		
4 ganger derivasjon	Sykl.	Sykl.	Sykl.	Sykl.

Tabell 2: En stjerne betyr at funksjonen endrer fortegn, for eksempel sin(x) → –sin(x).

Slikt er viktig som prognoseunderlag for økonomer og økosystemanalytikere, eller i studiet av elektroniske kretser. Differensialligninger har i det hele tatt vide bruksområder.

Notasjon og lineære differensialligninger

Notasjonen $f'(x)$ er benyttet for å angi den førstederiverte av $f(x)$, $f''(x)$ den andrederiverte, osv. Leibnitz-notasjoner[1] som $d(y)/d(x)$ eller $d^2(y)/d(x)^2$ kunne vært brukt som likeverdig alternativ.

Med lineære differensialligninger menes ligninger som inneholder lineærkombinasjoner av en funksjon og dens deriverte, andrederiverte osv., for eksempel $f(x) = f''(x)$. Uttrykk som $f(x) \cdot f'(x)$ eller $(f'(x))^2$ er ikke-lineære.

Praktiske regler for løsning av lineære differensialligninger

Merk: For ligninger av 2. orden vises her bare de uten ledd av 1. orden. Slike kan ellers løses via «karakteriske polynomer». Men de behandles ikke i denne artikkelen.

1. En gitt differensialligning må først ordnes, slik at den mest deriverte funksjonen står alene (se ligningene i tabell 1, 3. rad).
2. Deretter kan man sammenligne med sannhetsverdiene («ja» eller «nei») i kolonnen under den tilsvarende ligningen.
3. Der det står «ja», vises hvilken funksjon som er oppfylt (samme rad, kolonne 1). Dvs. at du kan si hvilken funksjon (eller hvilke, dersom man tar med en ukjent kon-

stant) som har likhetstrekk med det svaret du vil få ved fullstendig beregning.

«Nei» betyr at funksjonen til venstre ikke er oppfylt.

Eksempel 1
Kan vi si noe om differensialligningen $f''(x) + f(x) = x^3$ uten å løse den?

Etter litt flytting får vi at det viktigste innholdet er $f''(x) = -f(x) = x^3$. Den viktigste delen er $f''(x) = -f(x)$ (som utgjør den homogene parten). Dette leddet har «ja» både for $\sin(x)$ og $\cos(x)$ i tabell 1. Svaret blir derfor et uttrykk med en eller begge disse, samt noen integrasjonskonstanter, altså en funksjon med en graf som viser en bølge.

Riktig svar uten at vi går inn på løsningsmetoden er:

$$f(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + x^3 + 6x$$

hvor C_1 og C_2 er konstanter. Altså to bølgefunksjoner pluss et polynom av tredje grad. Den interesserte leser kan tegne grafen i GeoGebra, for eksempel ved å sette begge konstantene lik 1. (Slikt var ikke enkelt for en generasjon siden – i dag er det en kurant sak!)

Eksempel 2 (hentet fra fysikken):
Farten til en ball i fritt fall vil være påvirket av to krefter: gravitasjon og luftmotstand. Vi kan skrive differensialligningen slik:

$$ma = -kv + mg$$

Her er m masse, a akselerasjon, v fart, k en konstant som har med luftmotstand å gjøre (minustegnet viser at den virker mot bevegelsen) og g er tyngdens akselerasjon.

Utskrevet som differensialligning hvor $a = v'(t)$ (den tidsderiverte av farten v) og ordnet:

$$v'(t) = -\frac{k}{m}v(t) + g$$

Vi ser at dette er i overensstemmelse med $f(x) = -f(x)$ i tabell 1, kolonne 3, rad 4. Løsningsmengden vil derfor inneholde et ledd med e^{-x}, altså en negativ eksponentialfunksjon. Endelig løsning (med t i stedet for x) er

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

(hvis $v = 0$ når $t = 0$).

Tiden er inne til å «spå» litt om utviklingene for et par kjente begivenheter. Begge kan beskrives med differensialligninger:

Eksempel 3
Radioaktiv stråling: En radioaktiv substans vil avgi stråling som skyldes desintegrasjoner av radioaktive isotoper. Dette brukes til å bestemme alderen på en gjenstand, for eksempel et skjelett fra vikingtiden, eller en granittstein fra et fjellområde. Isotopene som måles, må være inneholdt i prøven og representative for tidsspennet. Karbon i bein har alle isotopen ^{14}C, som er brukbart til å datere omtrent 50 000 år tilbake i tid. Eldre enn det er radioaktiviteten knapt målbar. Granitt (og mye annen stein) inneholder uran, som blir til bly via radioaktivitet. Det går sakte for en uranisotop som det måles på, så det brukes til analyse av selve jordas alder, dvs. milliarder av år. Verdens eldste menneske, Lucy, ble aldersbestemt via en kalsiumisotop, som finnes i kalken i beinrester. Tidsspenn: noen hundre tusen år før det ikke er noe mer å måle på. Uansett: $N'(t) = -k \cdot N(t)$, der $N(t)$ er antall isotoper i prøven til enhver tid, startverdien $N(0)$ er gitt, k er en positiv konstant, og den deriverte er antall desintegrasjoner per sekund – og med det strålingsintensiteten. Kurven gjelder både vikingen, Lucy og granittsteinen, men med ulike former og tidsakselengder.

Bruk tabell 1 til å vurdere hva slags funksjonell utvikling strålingen har.

Rammebetingelsene som bestemmer ulike konstanter, må finnes på egne metoder, og er ikke essensielle her. Siden forskjellen bare beror på ulike konstanter, så ser man at de ikke har innvirkning på hovedformen på den geometriske løsningen.

Eksempel 4

Lønns- og prisvekst pleier å utvikle seg med en årlig vekstfaktor. Denne oppgis som et prosenttall, som i en differensialligning blir en multiplikasjonsverdi (> 1).

Ny lønn kan derfor skrives som

$$\text{Ny lønn} = (\text{gammel lønn}) \cdot p$$

Vi later som dette er en kontinuerlig sak, og glemmer at det er bare en gang i året lønnsoppgjøret skjer. Vi får dermed ligningen $L'(t) = p \cdot L(t)$. Bruk tabell 1 til å vise hva slags funksjon dette er.

Noen fysiske eksempler til slutt

I fysikken er fenomener som elektriske utladninger fra en oppladet kondensator, stråling fra en radioaktiv kilde eller tapping av vann fra en full beholder brukbare for slik analyse. Spenningen, strålingen eller trykket er størst til å begynne med, og synker med tiden, Spenningen eller strålingen eller trykket synker også mest til å begynne med, når kondensatorene er oppladet, den radioaktive prøven er nydannet, eller når trykket er størst. Differensialligningen ligner på noe vi kjenner og har løst, og besvarelsene er en eksponentialfunksjon med negativ eksponent. Den første tabellen viser at $f'(x) = -f(x)$ har et «ja» for funksjonen $f(x) = e^{-x}$.

Differensialligninger av 2. orden, dvs. de som inneholder $f(x)$ og $f''(x)$ (og noen ganger også $f'(x)$), kan betraktes på samme måte ved hjelp av tabell 1.

$f''(x) = -f(x)$ har «ja» for $f(x) = \sin(x)$ og $\cos(x)$, så løsninger vil inneholde disse funksjonene. Mens $f''(x) = f(x)$ har «ja» for $f(x) = e^{-x}$.

Differensialligningen for en pendelbevegelse kan se slik ut: $y'' = -k \cdot y$, hvor y er vinkelutslaget, konstanten $k = g/l$ hvor g er tyngdens akselerasjon, og l pendellengden. Uten å løse den kan vi si noe om løsningen ved å betrakte ligningen uten k, nemlig $y'' = -y$. Tabell 1 viser at ligningen har «ja» for $\sin(x)$ og $\cos(x)$ som beskriver bølgebevegelser. En endelig løsning overlates til oppgaver i matematikkurset. Bevegelsen som beskrives av den endelige funksjonen for små pendelutslag kalles «harmoniske svingninger».

Note

1 Gotfried Leibnitz regnes sammen med Isaac Newton som oppfinner av infinitesimalregningen. Lagrange brukte aksent som notasjon (slik som: f′(x)), mens Newton brukte en prikk.

©Michèle Constantini/AltoPress/Maxppp

ETTER- OG VIDEREUTDANNING VED UNIVERSITETET I BERGEN

VIDEREUTDANNING FOR MATEMATIKKLÆRERE

Universitetet i Bergen har flere gode tilbud til deg som er matematikklærer og ønsker å videreutdanne deg.

1 **Matematikk for lærere nivå 1 (8.–13. trinn) (15 stp.)**
Mangler du studiepoeng for å fylle de nye kompetansekravene i faget er dette et passende tilbud for deg.

2 **Matematikk for lærere nivå 2 (8.–13. trinn) (15 stp.)**
Underviser du på VGS og vil du fordype deg i matematikkfaget eller mangler du studiepoeng er dette et passende tilbud for deg.

3 **Algoritmisk tenkning og programmering i matematikkfaget (VGS) (15 stp.)**
Algoritmisk tenkning og programmering er nå en del av de nye læreplanene i matematikk. Vi har skreddersydd et kurs for deg som trenger en grundig innføring i dette.

4 **Erfaringsbasert master i undervisning med fordypning i matematikk**
Ønsker du å fordype deg i matematikkfaget og elevenes læring – og vil videreutvikle deg som matematikklærer – er dette det rette tilbudet for deg.
Nytt i år: Forkurs (mai–juli) til deg som mangler opptil 10 stp.

Alle tilbudene er samlingsbasert med god og tett oppfølging mellom samlingene og kan lett kombineres med jobb i skolen. Tilbud 1 og 2 er del av den nasjonale videreutdannings-ordningen *Kompetanse for kvalitet* som innebærer at man får frikjøp fra jobb eller stipend for å videreutdanne seg. Du kan søke støtte om alle tilbudene, også tilbud 3 og 4. Alle som har tatt tilbud 3 har fått støtte.

Tilbudene ved UiB får høy skår på Utdanningsdirektoratets spørreundersøkelser og gjennomføringsprosenten er svært høy.

www.uib.no/math Klikk på «Videreutdanning for lærere»

UNIVERSITAS BERGENSIS
UNIVERSITETET I BERGEN

MENINGSFULL MATEMATIKK FOR ALLE

– et samspill mellom praksis, forskning og utvikling

Matematikksenteret, NTNU, vil bidra til at matematikkopplæringen tar utgangspunkt i barn og unges tenkning og bygger på deres interesser, bakgrunn, erfaringer og kunnskap. Målet er at barn og unge skal utvikle en matematisk kompetanse som består av fem komponenter.

Matematikksenteret vil arbeide for å fremme en matematikkundervisning i skolen hvor barn og unge blir møtt med høye forventninger. Læreren leder arbeidet mot læringsmålet for timen, og legger til rette for et godt læringsmiljø.

For barnehage vil Matematikksenteret bidra til at personalet inviterer barna til matematisk utforskning gjennom varierte aktiviteter og berikende samtaler.

Vi ønsker at barn og unge får arbeide med kognitivt krevende aktiviteter som fremmer resonnering og forståelse, og de får diskutere forskjellige løsningsstrategier med hverandre. Feil anses som en naturlig del av læringsprosessen. Slik kan barn og unge erfare at matematikk er engasjerende, utfordrende og meningsfullt.

Matematikksenteret sin virksomhet skal være et samspill mellom praksis, forskning og utvikling. Senteret skal utvikle praksis- og forskningsbaserte ressurser og modeller for kompetanseutvikling som våre målgrupper kan benytte, og bli inspirert av.

For å lykkes med dette må Matematikksenteret ha tett kontakt med praksisfeltet. Matematikksenteret skal drive med forsknings- og utviklingsarbeid i tett samarbeid med praksisfeltet. Senteret skal være oppdatert på nasjonal og internasjonal forskning i matematikkdidaktikk, og senterets arbeid skal være forskningsbasert.

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

NTNU

Utforsking med kenguruoppgaver

Mange av oppgavene fra Kengurukonkurransen er problemløsningsoppgaver som egner seg til å bruke i den ordinære matematikkundervisningen. Oppgavene dekker fagemnene tall og algebra, geometri og logikk.

Matematisk idé

Som alle problemløsningsoppgaver, bygger også kenguruoppgavene på en matematisk idé. Det vil si den eller de matematiske tema som utfordres og bearbeides i arbeidet med oppgaven. I problemløsningsoppgaver er ideen satt inn i en kontekst. Hensikten er å vekke nysgjerrighet og gjøre oppgaven interessant å arbeide med. Et eksempel er den klassiske håndtrykk-oppgaven som går ut på å finne antall håndtrykk mellom personer dersom alle hilser på hverandre i en gruppe. I en slik kontekst skal hver kombinasjon kun telles en gang, for når en person A har hilst på person B, har også person B hilst på person A. Ideen i oppgaven bygger på kombinatorikk og systematikk.

Mennesker har gjennom flere århundrer blitt fasinert av matematiske problemer. Klassiske problemløsningsoppgaver fra oldtiden, som for eksempel kubens fordobling og vinkelens tredeling, har bidratt til utviklingen av matematikken (abelie.no).

Den som løser en problemløsningsoppgave, trenger ikke nødvendigvis å kjenne til ideen oppgaven bygger på. For en lærer derimot, er kjennskap til den matematikken som ligger bak, et viktig redskap når han blant annet skal velge problemer elevene skal arbeide med. En lærer bør kunne identifisere viktige matematiske ideer og de muligheter en oppgave kan inneholde. Hva slags matematikk handler oppgaven om, og hva kan elevene lære ved å arbeide med oppgaven? Er det tallenes egenskaper, sifrenes plassering i et multiplikasjonstykke, tallmønster, kombinatorikk, egenskaper til to- eller tredimensjonale figurer eller logiske resonnement matematikken i oppgaven handler om? Når elevene skal arbeide med oppgaven må læreren, slik Valenta (2015) beskriver det, «pakke ut» det faglige innholdet i oppgaven og gjøre det tilgjengelig for elevene.

Jeg betrakter ofte den matematiske ideen som kjernen i en problemløsningsoppgave, og jeg bruker denne som utgangspunkt når jeg utvider en oppgave med nye problemstillinger. En bevissthet om den matematiske ideen kan sørge for at den matematikken elevene skal utfordres på, ikke forsvinner eller forringes i en slik prosess.

Nye ressurser

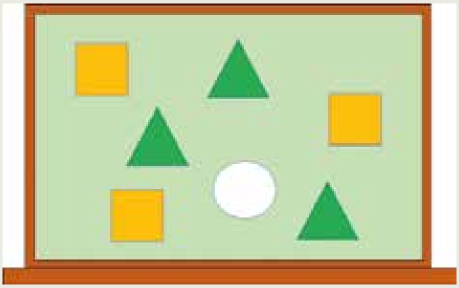
Matematikksenteret har laget ressurser kalt Hopp videre med Kenguru som viser eksempler på hvordan oppgaver fra Kengurukonkurransen kan brukes som en start for videre utforsking. Noen av ressursene har vi oversatt fra dansk Kenguru (Kænguruen.dk). Hver ressurs starter med en kenguruoppgave, der de påfølgende oppgavene er slik at spørsmålet i originalen er utvidet, andre og flere betingelser er trukket inn, eller problemstillingen er snudd om på. Hensikten er at elever kan arbeide og utforske én og samme idé fra ulike innfallsvinkler og med variert vanskegrad. Når elever har jobbet seg inn i en problemstilling, kan en lignende, en mer kompleks eller en noe annerledes spørsmålsformulering, utfordre elevene på et høyere faglig nivå.

Originaloppgaven i Hopp videre med Kenguru har vi merket med oppgavenummer og årstall slik at det er enkelt å finne fasit med korte løsningsforslag i oppgavebanken på våre nettsider. De påfølgende oppgavene er nummerert, og lærer kan velge de oppgavene som er mest egnet for elevene sine. Originaloppgaven har fem svaralternativer, mens de mer utforskende oppgavene er uten svaralternativer.

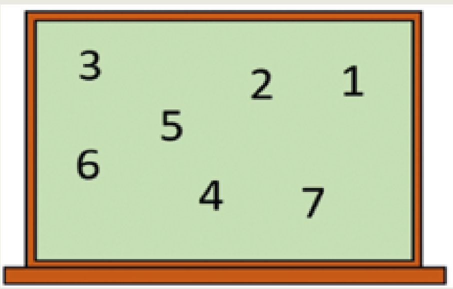
Hopp videre med Kenguru - et eksempel

Her ser vi at ideen i oppgave 17 fra Ecolier 2020 er bearbeidet og utviklet videre. Tavleoppgaven handler om summer av tall mellom 0 og 10. I oppgaven oppgis to ulike summer samt hvor mange tall som skal summeres. Hvert av tallene kan bare brukes én gang. Det er om å gjøre å finne hvilket tall som ikke er med i noen av summene.

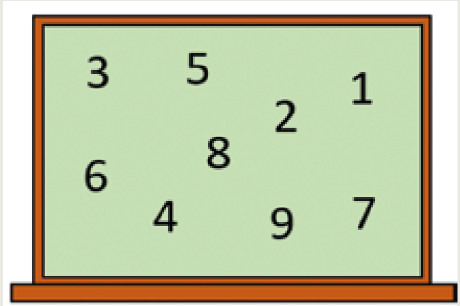
1. Læreren skriver tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6 og 7 på tavla. Deretter dekker læreren til tallene med trekanter, kvadrater og en sirkel. Hvis du legger sammen tallene bak trekantene, får du 6. Hvis du legger sammen tallene bak kvadratene, får du 15. Hvilket tall skjuler seg bak sirkelen?

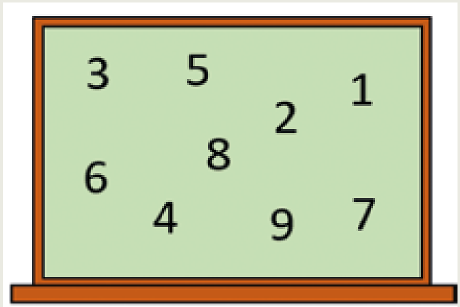


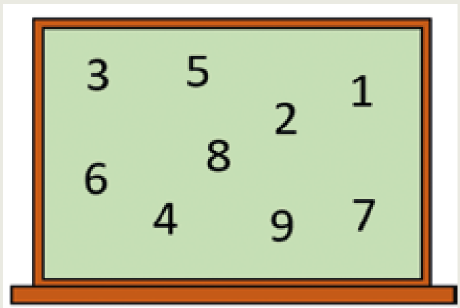
2. Læreren skriver tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6 og 7 på tavla. Du skal dekke til tallene med trekanter, kvadrater og en sirkel slik at: Hvis du legger sammen tallene bak trekantene, får du 9. Hvis du legger sammen tallene bak kvadratene, får du 18.



3. Læreren skriver tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9 på tavla. På hver av de tre tavlene skal du dekke tallene med trekanter, kvadrater og sirkler slik at summen av tallene bak hver av figurene er den samme. Kan du finne flere løsninger?







I oppgave 2 utelates opplysninger om hvor mange tall som er med i hver sum. Oppgaven kan oppleves som mer utfordrende fordi den nå har mer enn én løsning. Både elever og lærer må selv stille spørsmålene: Hvor mange løsninger finnes, og hvordan vet vi at vi har funnet alle løsningene? Elevene må sammenligne løsninger, argumentere for ulike kombinasjoner av tall som gir en bestemt sum, prøve og feile for å undersøke om de har funnet alle kombinasjoner – gjerne i lys av hvilke kombinasjoner som ikke er mulige.

Dersom elevene starter på oppgave 3 etter å ha jobbet med de to første, vil de være godt kjent med i problemstillingen. Elever kan her dra nytte av noen erfaringer fra arbeidet med de to første oppgavene. Lærer kan stille spørsmål som løfter fram hvilke erfaringer elevene kan ha bruk for. For eksempel i oppgave 1 har elevene sett at det kun er tre tall som kan gi sum 6, mens i den neste, har de erfart at det er flere kombinasjoner av tall som gir sum 9. I oppgave 3 får elevene enda flere tall å velge mellom, og vil ha flere kombinasjonsmuligheter enn tidligere. Det stiller større krav til at de må jobbe mer systematisk. Må alle tallene dekkes til med figurer eller ikke? Det kan elevene selv være med på å avgjøre.

Sammenlignet med de to første oppgavene er problemstillingen i nummer 3 veldig åpen. Elevene vet ingen summer og må selv finne summer som er aktuelle i denne sammenhengen. De får heller ikke vite hvor mange tall som skal danne den summen de selv bestemmer.

Før elever går i gang med å arbeide med tavleoppgaven, kan de selv skissere de ulike tavlene på et A4-ark, men elevene bør ha tilgang på tallkort og geometriske figurer. Disse hjelpemidlene gjør at det blir enkelt å prøve forskjellige tallkombinasjoner ved å flytte og bytte om på tallkort eller figurer. På denne måten legger lærer til rette for at elevene får konsentrere seg om å utforske problemet og jakte på flere løsninger.

Nye ressurser på *Hopp videre med Kenguru* er tilgjengelig på Matematikksenteret sine nettsider fra midten av februar.

Referanser

Valenta, A. (2015). *Matematikklærerkompetanse*. Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Bli med på Kengurukonkurransen!

Kengurukonkurransen er en årlig internasjonal matematikkonkurranse for elever fra 4.-10. trinn. Konkurransen passer for alle, og oppgavene er en lett blanding mellom lette, middels og vanskelige oppgaver. Dette er rett og slett en fin mulighet til å motivere og inspirere flere til å utforske matematikk!
Oppgavene er delt inn i tre kategorier: Ecolier (4.–5. trinn), Benjamin (6.–8. trinn) og Cadet (9.– 10. trinn), og oppgavesettene er tilgjengelig på bokmål, nynorsk og engelsk.
Startskuddet for Kengurukonkurransen 2021 er 18. mars.

Les mer på www.matematikksenteret.no/kenguru

Nytt studium for lærerutdannere i matematikk

Hvordan kan vi sammen utvikle lærerutdanningen i matematikk? I denne videreutdanningen ved NTNU kan lærerutdannere utforske ulike tilnærminger til matematikkundervisning, og utvikle ny innsikt i sentrale matematiske ideer og matematikkdidaktiske tema.

Noen matematikklærerutdannere har bakgrunn fra matematikk som vitenskapsfelt, noen har erfaring med undervisning i skolen, mens andre har erfaring fra det matematikkdidaktiske forskningsfeltet. I utdanningen av matematikklærere må vi forholde oss til disse ulike feltene. Målet med denne videreutdanningen er å lære hvordan vi kan knytte disse feltene enda tettere sammen i lærerutdanneres profesjonelle praksis.

Videreutdanningen vil være en arena der matematikere og matematikkdidaktikere i fellesskap kan utvikle en lærerutdannerpraksis for fremtiden.

Hvorfor etablerer vi dette studiet?

Mens det er forsket mye på lærerstudenter og lærere i matematikk, har tilsvarende forskning på matematikklærerutdannere fått mindre oppmerksomhet. Det er først de senere årene forskere har undersøkt undervisning og lærerstudenters læring i sammenheng.

Målgruppe

- Lærerutdannere med en sterk matematikkfaglig bakgrunn,
- Lærerutdannere som vil kvalifisere seg som førstelektor,
- Lærerutdannere som ønsker å forbedre undervisningen og veiledningskompetansen,
- Nyansatte i lærerutdanningen,
- Lærerutdannere som har fullført master fra GLU

Det er Matematikksenteret ved NTNU og MatRIC ved Universitetet i Agder som har utviklet studieprogrammet, og vi har fått med oss flere av verdens fremste forskere på feltet som foredragsholdere:

- Professor Merrilyn Goos, EPI*STEM - National Centre for STEM Education, University of Queensland
- Professor Elham Kazemi, University of Washington
- Professor Peter Liljedahl, Simon Fraser University
- Professor Emeritus John Mason, Open University; Senior Research Fellow, University of Oxford

Utdanning av matematikklærere vektlegger i økende grad både lærernes undervisningskunnskap og deres undervisningspraksiser. I dette studiet får lærerutdannere delta i et læringsfellesskap og de får utforske undervisningspraksiser som engasjerer lærerstudenter og som støtter dem i deres utvikling som fremtidige matematikklærere.

Deltagerne vil utforske og utvikle sin undervisningspraksis som lærerutdanner, og vil i tillegg gjennomføre sitt eget forskningsprosjekt, der målet er å skrive en publiserbar artikkel. Studiet vil også bidra til å utvikle deltagernes veiledningspraksis.

Matematikkdidaktikk for lærerutdannere er et deltidsstudium som godt kan kombineres med jobb som lærerutdanner. Videreutdanningen er på 30 studiepoeng og gjennomføres over to år. Reise og opphold for deltakerne dekkes i pilotperioden (det første kullet).
Les mer om studieprogrammet hos Matematikk-senteret:
www.matematikksenteret.no/nyheter/nytt-studie-lærerutdannere-i-matematikk
Studiebeskrivelse hos NTNU: www.ntnu.no/videre/matematikkdidaktikk

Forelesere og faglærere i Matematikkdidaktikk for lærerutdannere:

- Raymond Bjuland, Professor i matematikkdidaktikk, Matematikksenteret, NTNU og Universitetet i Stavanger
- Janne Fauskanger, Førsteamanuensis i matematikkdidaktikk, Matematikksenteret, NTNU og Universitetet i Stavanger
- Simon Goodchild, Professor i matematikkdidaktikk, MatRIC, Universitetet i Agder
- Reidar Mosvold, Professor i matematikkdidaktikk, Matematikksenteret, NTNU og Universitetet i Stavanger
- Linda Gurvin Opheim, Universitetslektor, MatRIC, Universitetet i Agder
- Kjersti Wæge, Ph.d i matematikkdidaktikk og leder ved Matematikksenteret, NTNU, Gjesteforeleser
- David A. Reid, Professor i matematikkdidaktikk, MatRIC, Universitetet i Agder

Matematikk på yrkesfag: Mer samarbeid på tvers

Det sier seg kanskje selv: Det er enklere å finne motivasjon i matematikk når du erfarer hvordan det kan bidra til å løse utfordringer i ditt framtidige yrke.

De nye læreplanene i matematikk på yrkesfag i videregående skole åpner for mer samarbeid i lærerkollegiet på tvers av fagene. De inneholder en del felles kompetansemål og en del kompetansemål som er relevant for hvert programområde. Matematikkfaget skal kobles til relevante kontekster i programfaget, noe som kan gi elevene større motivasjon og interesse for matematikk.

Læreplanen er på et vis en videreføring av det arbeidet som ble gjennomført under FYR-prosjektet i regi av Utdanningsdirektoratet i perioden 2014 til 2016. FYR står for «Fellesfag, yrkesretting og relevans». Prosjektet startet med et hovedmål om å lage gode relevante og yrkesrettede ressurser i matematikk gjennom å koble oppgavene til yrkesfagenes opplæringsarenaer, fagspråk, verktøy og arbeidsmetoder.

Men hvem hadde kompetanse til å kvalitetssikre at de kontekstene som ble benyttet var reelle? Jo, det var programfaglærerne på hver enkelt skole. Og etter hvert gikk prosjektet over til også å bli et skoleutviklingsprosjekt som omfattet både matematikklærere, programfaglærere og skoleledelsen.

Hvis dere har lyst til å bli med lærling Emilie Beck i Anleggsgartnerfaget for å høre på hvilken måte de trenger matematikk i hennes fag for å kunne utføre arbeidsoppgavene sine, kan du bruke denne lenka: https://www.youtube.com/watch?v=-5w6r_nAlps

Hvordan etablere samarbeidsarenaer?

For å lage gode, og samtidig reelle, oppgaver og eksempler vil det kreve at matematikklærerne kjenner til hva som skjer på verkstedet, på laboratoriet eller på kjøkkenet. Hvilket utstyr brukes, hva er arbeidsmetodene, og hva er fagspråket som brukes på de ulike praksisarenaene? Dette gir nye utfordringer til både matematikk- og programfaglærere. De må finne arenaer for å møtes, lære av hverandre og utveksle kompetanse og erfaring. Samtidig gjelder det å ha respekt for hverandres fagfelt.

Å få til en god og trygg arena for samarbeid kan være krevende i en ellers travel skolehverdag. Det skal ikke bare settes av tid til samarbeid, men det bør også utvikles en kultur for samarbeid.

Et eksempel til etterfølgelse

Lærerne ved Meldal videregående skole i Trøndelag har begynt å bygge gode samarbeidsarenaer. De har gått aktivt inn i dette og har satt av tid til samarbeid og kompetanseutveksling.

Ved Meldal videregående skole kommer av og til programfaglæreren inn i matematikktimen hvis det er noe matematikklæreren ikke føler seg trygg på. Og motsatt kan matematikklæreren besøke verkstedet både for å se hvordan elevene jobber og for å få ideer til nye matematikkoppgaver.

Der det har vært felles undervisningsfri, har programfaglærerne kjørt praktisk opplæring i verkstedene for matematikklærerne slik at de har fått et innblikk i hva programfagene omfatter.

Her er en lenke til en kort film fra Meldal videregående skole som viser hvordan de utnytter samarbeidet på Bygg- og anleggsteknikk: https://vimeo.com/320717693

Gratis kompetansepakker for samarbeid på tvers

For ett år siden lanserte Matematikksenteret fire kompetansepakker som kan støtte ledere og lærere i en systematisk tilnærming med å gjøre matematikkfaget mer relevant og motiverende for elevene på yrkesfag. Ressursene er utviklet i tett samarbeid med skoleledere, matematikklærere og programfaglærere, og er gratis.

Hver pakke inneholder framdriftsplaner, ansvars- og arbeidsoppgaver, samt tips og ideer til hvordan arbeidet kan gjennomføres på egen skole:

Pakke 1 – Forankring i ledelsen
Pakke 2 – Etablere arena for samarbeid
Pakke 3 – Planlegge og gjennomføre
Pakke 4 – Videre arbeid

De ulike pakkene er laget som en helhetlig framdriftsplan, men det er mulig å ta for seg deler av pakkene hvis en ser nytte i det.

https://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/yrkesretting-av-matematikk

Å få til samarbeidet mellom matematikklærere og programfaglærere handler om å etablere møteplasser, systematisere samarbeidet, dele kunnskap og kompetanse og å se nytten av hverandres fag. Det siste punktet går begge veier.

For matematikklærere handler det om å bli trygge på det som skjer i programfaget for å kunne utnytte mulighetene til å lage gode yrkesrettede ressurser i eget fag.

Eller, som de sier ved Hjalmar Lundbohmsskolan i Kiruna når elever og lærere samles i et mekanisk verksted rundt et bord med motordeler: «Det är dags för matte!».

Referanser

Mathilda Lennersmo Selin, M. H. (2020): Ämnesintegrerad matematik på fordonsprogrammet, *Nämnaren Nr 2.2020*

Utdanningsdirektoratet (2016): *FYR-fellesfag, yrkesretting og relevans (2014-2016)*. Sluttrapport.

UH-seminar om matematikk i barnehagen 2021

18. og 19. mars arrangerer Matematikksenteret seminar for barnehagelærerutdannere og andre som er interessert i problemstillinger og forskning på matematikk i barnehagen. Seminaret vil arrangeres digitalt, men det vil også være mulighet til å delta fysisk om smittevernreglene tillater det.

Seminaret er et tiltak for å bygge opp et sterkt kompetansemiljø om matematikk i barnehagen ved å dele, samarbeide og utvikle kompetanse på tvers av UH-sektoren. På samlingen er det derfor ønskelig at deltagerne også bidrar med presentasjon av pågående forskningsprosjekter og utviklingsarbeid. Dette vil være med på å løfte tema og problemstillinger som er relevante for fagområdet. Om du ønsker å bidra, send oss en beskrivelse av tema i påmeldingsskjemaet.

Seminaret gir i tillegg Matematikksenteret mulighet til å få innblikk i arbeidet som foregår i UH-sektoren, slik at vi kan utvikle ressurser og materiell som treffer målgruppen.

Mer informasjon og påmelding: www.matematikksenteret.no/konferanser/uh-seminar-om-matematikk-i-barnehagen-2021

Påmeldingsfrist: 18. februar 2021

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
Matematisk institutt UiO
Postboks 1053 Blindern
0316 OSLO

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det er en demokratisk rett å få en matematikkundervisning som setter en i stand til å delta aktivt som borger i et demokrati. Derfor vil Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) sette fokus på matematikk for alle.

Styret for LAMIS

Leder
Renate Jensen, Vestland

Barnetrinnet
Henrik Kirkegaard, Møre og Romsdal

Mellomtrinnet
Inger-Lise Risøy, Viken
Svend Eidsten, Viken

Ungdomstrinnet
Kari-Anne Bjørnø Rummelhoff, Viken

Videregående skole
Odd-Bjørn Lunde, Rogaland

Høgskole/universitet
Marianne Maugesten, Viken

Varamedlem (Barnetrinnet)
Hilde Svendsen

Medlemskontingent 2019

450 kr for enkeltmedlem
200 kr for husstandsmedlemmer
300 kr for studenter/pensjonister
975 kr for skoler/institusjoner

Organisasjonssekretær

Elin Unstad, org.sek@lamis.no

Lederen har ordet

Renate Jensen

Godt nyttår til alle LAMIS kollegaer. Starten på 2021 ble ikke helt slik vi hadde håpet. Meldingen om strenge tiltak og mange skoler på rødt nivå krever mye av elever, lærere og skoleledere. Drift og organisering tar mye tid i disse dager, i tillegg til at skoler skal drive utvikling og innføre nytt læreplanverk.

For oss i LAMIS handler det om å lage mange planer for våre oppgaver som for eksempel UngeAbel og sommerkonferansen. Vi vil denne våren og sommeren arbeide for at vi kan gjennomføre våre arrangementer fysisk, men vet at vi må tenke alternativer, og ha både en plan B og C.

I arbeidet med UngeAbel ønsker vi å legge til rette med så god forutsigbarhet som mulig, slik at lærere og elever ser muligheter i å delta uansett situasjon. Denne våren er det ekstra spennende at finalen i UngeAbel skal foregå samme dag som utdeling av Holmboeprisen. Dette håper vi vil bli en anledning til å vise sammenhengen mellom lærere sitt arbeid, og elever sine muligheter for å arbeide utforskende med matematikk og være gode problemløsere. Vi håper også at oppgaver fra tidligere år med UngeAbel, som dere finner på vår hjemmeside, vil være en ressurs når man skal legge til rette for variasjon i en hverdag der elevene i perioder arbeider både på skolen og hjemme. I hvert nummer av Tangenten velger vi ut en oppgave fra UngeAbel og i det neste nummeret presenterer vi ulike løsningsforslag. Vi vil gjerne høre fra lærere som har brukt oppgavene med elever – og håper å få en e-post med erfaringer dere har hatt med oppgavene. Send oss gjerne også forslag til oppgaver vi bør presentere i Tangenten.

Vi er optimistiske for sommerkonferansen i august og håper at dette vil være en anledning til å kunne møtes. Påmeldingen åpner i mars, og på de neste sidene kan dere lese om konferansen. Temaet er tverrfaglighet. Vi ønsker at innholdet på konferansen skal handle om god matematikkundervisning. Vi ønsker også å løfte situasjonen vi har opplevd det siste året, og se på hvilke muligheter vi ser i digitale løsninger. Hvordan elever og lærere har jobbet dette året er også en viktig del av det tverrfaglige temaet livsmestring. Har du gode ideer til et verksted, vil vi gjerne høre fra deg. Fristen for å melde inn ideer er utvidet, og du finner invitasjon til å dele dine ideer på side 59.

Denne tiden handler også om å tenke nytt, og flere av våre lokallag har gjennomført og planlegger for digitale medlemskvelder. På side 61 kan du lese om LAMIS Sunnmøre sin digitale medlemskveld om LK20 og tverrfaglighet. Det var mer enn 50 personer som fulgte denne digitale økten, og mange som ellers vil ha lang reisevei fikk muligheten til å være med. Tilbakemeldingene var at det var nyttig og gav inspirasjon til å gå i gang med tverrfaglige tema og tverrfaglighet som metode. I løpet av februar vil lokallaget i Fosen arrangere en digital kveld om programmering. LAMIS sentralstyre bidrar gjerne med innlegg og hjelp til idemyldring om hvordan slike digitale medlemskvelder kan arrangeres. Vi håper dere tar kontakt.

Til slutt vil jeg si noe om arbeidet med ressursen om FN sine bærekraftsmål som LAMIS har kjøpt fra vår danske samarbeidspartner. Vi er i gang med å legge en plan for arbeidet, og håper at mange lokallag vil være med på dugnaden. Dette arbeidet, kombinert med at vi jobber med en ny og bedre hjemmeside, håper vi vil gi gode ideer til undervisningen. Alle lokallag vil om kort tid motta en e-post med en tidsplan for hvordan dere kan bidra. LAMIS sentralstyre ser frem til en spennende vår med mye godt arbeid – om det blir digitalt eller mulighet for å møtes fysisk.

Ta godt vare på hverandre!

LAMIS Sommerkonferanse 2021

Sommerkonferansekomiteen

Blir det sommerkonferanse i år? Midt i all usikkerhet kan vi i alle fall love én ting: Vi arbeider for, og som, at det skal bli en fullskala konferanse i august. Det er på tide å møtes fysisk igjen for faglig påfyll og sosialt samvær, dersom situasjonen er tilbake mot det normale. Hold av helga, tips kolleger og go'snakk litt med rektor, så dere er klare når påmeldingen åpner i mars.

På årets sommerkonferanse «Matematikk på kryss og tvers», vil tverrfaglighet stå i sentrum for alt. Dette er mer aktuelt enn noen gang. Arbeidet med det faglige og sosiale programmet er straks ferdig, og vi garanterer interessante plenumsforedrag og verksteder der deltagerne får være aktive og medvirkende.

Konferansen avholdes 6.–8. august 2021 på Sørmarka konferansehotell på Siggerud, rett sør for Oslo.

Fredag 6. august

Den første dagen av konferansen blir det plenum, verksteder og LAMIS årsmøte før vi avslutter dagen med middag på hotellet.

Lørdag 7. august

Denne dagen starter vi med plenum og verksteder på hotellet.

På ettermiddagen blir det sosial utflukt med rebusløp og matematisk pub (GeoGebar) på Lillebru Gård hvor det venter forfriskninger og lett servering. Her varter også verdensmester i hukommelse, Memo-forfatter Oddbjørn By opp med underholdning og noen lure tips.

Om kvelden blir det en fullspekket konferansemiddag på hotellet.

Søndag 8. august

Vi avslutter konferansen med plenum og verksteder på hotellet, og en avslutning med lunsj.

Så langt har vi fått disse navnene på plass for plenum og verksteder: Hans Persson, Svein Torkildsen, Anne Seland, Mona Nosrati, Helmer Aslaksen, Sigbjørn Hals, Astrid Bondø, Oddbjørn «Memo» By og Pia Ve Dalen.

På neste side kan du lese vår invitasjon til å holde verksted på konferansen. Vi ønsker spesielt bidrag fra nye verkstedsholdere velkommen.

Hilsen Sommerkonferansekomiteen 2021:

Tone Skori, Hilde Eik Svendsen, Tove Branæs, Anders Baumberger og Hanan M. Abdelrahman

Vil du holde verksted på sommerkonferansen 2021?

LAMIS ønsker å invitere deg med gode idéer til å holde verksted på sommerkonferansen 2021. Temaet for konferansen er tverrfaglighet, og tittelen er «Matematikk på kryss og tvers»

Verkstedet bør ha en tidsramme på 75 minutter, og inneholde praktiske aktiviteter der deltakerne får være aktive og diskutere sammen. Konferansen holdes på Sørmarka konferansehotell som ligger en kort busstur fra Oslo sentrum. Hotellet er omkranset av skog og vann. Her er mulighetene for utendørs arbeid på verkstedene meget gode.

Som verkstedholder får du dekket reise og opphold, og muligheten til å dele dine gode idéer med andre.

Dersom du er interessert sender du en mail med en kort beskrivelse av verkstedet, og hvilke trinn verkstedet passer for til tone.skori@gmail.com

Frist for å sende inn ditt forslag er 20. februar, men vi mottar gjerne forslag så snart som mulig.

Vi gleder oss til å høre fra deg!

JA – YES – QUI – SI – det snør

Henrik Kirkegaard

Snø og vinter er her. Selv her ute langs den milde Golfstrømmen ved nordvestkysten av Norge. Det er faktisk ikke målt mindre enn 4 plussgrader i vannet selv midtvinters.

3. klasse var klar for utedag og aking. I klassen skulle vi planlegge dagen litt i lag – klassen og jeg. Hvor var det best å ake. Det var mange forslag – Sarabakken, Hvalbakken og så videre. Vi diskuterte lengde, hvor bratt det var, om det var humpete og om det var langt å gå. «OPPGAVEBANKEN på lamis.no,» tenkte jeg straks. Her må det være mulig å finne noen idéer til en matematisk innfallsvinkel. Etter litt søken fant jeg noen brukbare oppgaver om temaet tid. Disse kunne jeg med en vri bruke i klassen.

Elevene i 3. klasse og jeg bestemte at vi skulle måle tiden det tok å ake fra toppen til bunnen i tre utvalgte akebakker. Men ville tiden bli den samme for alle elevene? Litt mer diskusjon. Nei – vi ble ikke helt enige, dette måtte undersøkes nærmere. Det var jo også dette med akebrett og kjelke. De var jo også ganske forskjellige.

Utedagen kom og vi dro til den første bakken. Vi ble enige om en startstrek og en mållinje, og elevene ble delt i små grupper. De tok tiden for hver elev på ulike typer akebrett og kjelker. Dette ble gjort i alle de tre akebakkene. Resultatene tok vi med tilbake til klassen og brukte den neste dagen på å finne den «lengste» bakken og det beste akebrettet.

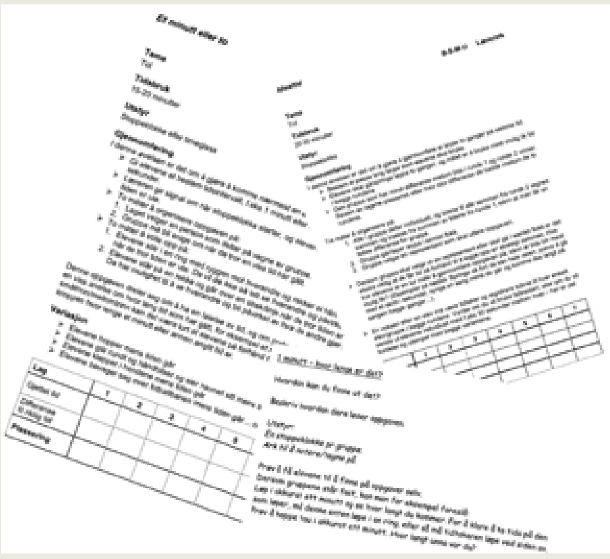
Uken etter var det fremdeles akevær, og det var flere idéer i OPPGAVEBANKEN som ikke var prøvd. Elevene i 3. klasse hadde nå fått i oppgave å finne en strekning på akebakken hvor det tok presis 15 sekunder å renne. Dette var ikke så enkelt – skulle det være stående start eller var det lov å ta tilløp? Oppgaven å kjøre så nærme på 15 sekunder som mulig skulle utføres tre ganger. Vinneren ble den som sammenlagt gikk færrest sekunder over eller under tiden. Hadde det vært 5. klasse kunne det selvfølgelig ha vært gjennomsnittet nærmest 15 sekunder som vant.

Elevene ble veldig inspirert av dette. De målte tid, de sprang opp bakkene og var i full aktivitet stort sett hele tiden. Vi har allerede planlagt «akeskyting» med en rundløype og snøballkast på blink. Det er også en idé fra OPPGAVEBANKEN.

Trenger du en litt mer tverrfaglig vinkling på en akedag er det bare å kaste blink på en plate med 9–10 bokstaver. Kast fire ganger, skriv bokstavene du traff og lag så mange ord du kan av disse fire bokstaven som mulig. Dette kan gjøres på både norsk og engelsk. Bruk fantasien og ta elevene med på idédugnaden.

Er det ikke noe særlig snø? Da er det bare å finne frem sparkesyklene.

God fornøyelse.



Ein digital medlemskveld i LAMIS
Lokallaget LAMIS Sunnmøre

I eit normalår har styret i LAMIS Sunnmøre som mål å invitere til to medlemskveldar. Ein på våren og ein på hausten. Medlemskveldane har gjerne vore gjennomført med ei praktisk og praksisnær tilnærming. Vi ønsker å stimulere til refleksjon og diskusjon om kva god matematikkundervisning kan vere, og håpar at deltakarane går frå møta med inspirasjon til å prøve ut nye tilnærmingar i matematikktimane sine. Representantar i styret har delteke på LAMIS sine årlege matematikk-konferansar. Vi verdsett den innverknaden som desse samlingane har hatt på eiga forståing av læring, og dermed også våre roller som lærarar, og skulle helst sett at slikt materiale kunne nådd enda fleire barnehagar og skular.

Hausten 2019 var fagfornyinga på full fart ut i skulane, og vi som var i felten vart kasta ut i debattar og refleksjonar med både ferske og meir erfarne kollegaer. Omgrep som kjerneelement, grunnleggande ferdigheiter, tverrfagleg arbeid, berekraftig utvikling, livsmeistring, demokrati og utforsking dukka hyppig opp. Kva ligg i desse uttrykka, og korleis skal ein prioritere? Kva med vurdering og rettleiing? Kva var målet med fagfornyinga? Kva går tverrfagleg arbeid eigentleg ut på? Er skulen på veg tilbake til tverrfagleg organisering på tvers av skulefaga, er det tradisjonelt temaarbeid vi skal drive med? Kvar einskild lærar har si eiga erfaring med inn i tolkinga av og arbeidet med å sette læreplanen ut i praksis. Skal vegen verte til medan ein går? Kor fritt kan vi eigentleg tolke?

Kan LAMIS vere bidragsytar for å leie tankeprosessane og støtte lærarane i dette arbeidet? Styret bestemte seg for å planlegge neste medlemskveld med mål om å støtte medlemmar i den retning fagfornyinga ønsker. På LAMIS.no har sentralstyret på oppmoding frå medlemmar formidla det dei kan bidra med ut til lokallaga. Så vi drista oss frampå for å høyre om Renate Jensen, leiar for sentralstyet, og med erfaring i utviklinga av fagfornyinga, kunne tenke seg å bidra. Vi inviterte henne like godt til Ålesund, noko ho takka ja til. Det er vel ingen vi kjenner som har vore djupare i kjernen av fagfornyinga enn det ho har vore. Ho har i tillegg ein måte å formidle vesentlige overordna prinsipp på som gjer at det vert både tydeleg, overordna og praksisnært. Vi følte vi hadde vunne førstepremien da ho meldte at ho ville ta turen. Styret sette straks i gang med å planlegge tidenes medlemsmøte våren 2020. Men no vart ikkje våren 2020 slik nokon hadde tenkt, og alt vart satt på vent. Møtet vart først utsett til hausten. Men når seinsommaren kom, med auka smitte, måtte vi krype til korset og finne alternative løysingar. Vi ville ikkje gå glipp av sjansen til å dele Renate sin kunnskap med våre medlemmar. Medlemskvelden vart for første gong digital. I utgangspunktet tenkte vi å ha forelesar på storskjerm, slik at dei som ville kunne vere til stades og delta i økter med idémyldring, samtalar og gruppearbeid. Vi kunne opne opp for spørsmål og Renate kunne belyse utfordringar, gjere dei handterbare og samtidig styre møtet frå Bergen? Men om vi håpte aldri så mykje, ei slik samling vart aldri aktuell. Møtet måtte bli heildigitalt, for gjennomførast skulle det.

Men korleis skulle vi no klare å aktivisere deltakarane våre. Var dette mulig å få til digitalt? Kva med gruppearbeid? Vi landa på ein fagleg sesjon med høve til å sende spørsmål i chat. Leiar kan ikkje nekte for at det vart ein noko spesiell medlemskveld, der til og med styremedlemmane var spreidde rundt omkring i minst seks ulike kommunar. Giske, Ålesund, Sula, Stranda, Volda og Lillestrøm.

Det var nervepirrande å logge seg inn i møtet. Ville det dukke opp folk? Fants det lærarar som var villige til å sette av ein torsdagskveld seint i november til å høyre om fagfornyinga? Jau, der poppa den eine etter den andre opp, av både kjente og mindre kjente deltakarar. Nokre satt aleine bak skjermen, medan andre hadde samla seg. Det var tydeleg at dette temaet var aktuelt for fleire enn berre oss i styret. Renate gjennomførte eit høgst relevant seminar der ho belyste vesentlege område i fagfornyinga: Ho sette mellom anna søkelyset på viktige prioriteringar i arbeidet med LK20, sider ved tverrfagleg arbeid, lærarrolle og bruk av udir sitt planleggingsverkty. Responsen i chat etter møtet var udelt positiv, også frå deltakarar som hadde sitt første møte med LAMIS.

- *Takk for presentasjonen! Mitt første LAMIS-møte ble en positiv opplevelse ☺*

- *Veldig interessant*
- *Veldig lærerikt. Eg vert så inderleg inspirert ☺*
- *Kanskje det går an å lage til flere slike tilstellinger med andre tema.*
- *Veldig bra presentasjon! 1000 takk!*

Styret kan seie seg særs nøgde med gjennomføringa og oppslutninga også denne gongen. Ein kan ta seg i å trekke parallellar til praksiskvardagen ute i skulen, for dette var som ei opa oppgåve.

Den digitale verda stilte med alternative effektive løysingar, og medlemskvelden vart noko annleis enn vi hadde tenkt. Fysiske hindringar som fjord, ferjer, fjell og lange reisevegar vart omgått ved at vi gjennomførte møtet digitalt. Deltakarane logga seg på også utanfor vårt området. Spesielt kjekt var det å sjå deltakarar frå Romsdalen som enno ikkje har eige lokallag.

Er det ikkje ofte slik at det opnar seg nye vegar når dei vegane ein nyttar til vanleg vert stengde?

Løsning på oppgave fra UngeAbel i 04/2020

Bestefars 10-ere

Oppgaven er hentet fra UngeAbel finaleoppgaver 2016–2017.

Bestefar har spart slik at han har 58 tiere.

Han vil gi penger til de 16 barnebarna sine. Det yngste barnebarnet er ett år og det eldste 14 år.

De som er 1–4 år skal få 1 tier hver. De som er 5–9 år skal få 3 tiere hver, og de som er 10 år eller mer skal få 5 tiere hver.

Da alle barnebarna hadde fått det de skulle ha, var det ingen tiere igjen!

Hvor mange barnebarn kan bestefar ha i hver av de tre aldersgruppene?

Løsningsforslag

Aldersgruppe	1–4 år	5–9 år	Over 10 år
Alternativ 1	1	9	6
Alternativ 2	2	7	7
Alternativ 3	3	5	8
Alternativ 4	4	3	9
Alternativ 5	5	1	10
Alternativ 6*	0	11	5

(Alternativ 6 gjelder dersom det kan være 0 i en aldersgruppe)

Oppgave fra UngeAbel
utvalgt av Marianne Maugesten

Oppgaven som presenteres denne gang er hentet fra semifinalen 2019, og kan brukes på hele ungdomstrinnet. På 8. trinn er et av kompetansemålene at elevene skal «beskrive og generalisere mønster med eigne ord og algebraisk», og på 9. trinn skal elevene «beskrive, forklare og presentere strukturar og utviklingar i geometriske mønster og i talmønster».

Oppgaven

Hvor mange kvadrater kan vi lage på geobrettet?

Materiell: Ark med «geobrett» av typene 5×5 (25 spiker) og 6×6 (36 spiker). Merk! Sidene i kvadratene skal være parallelle med sidekantene på geobrettet! Hvor mange kvadrater kan lages på et 5×5-geobrett? Hvor mange kvadrater kan lages på et 6×6-geobrett? Hvor mange kvadrater kan lages på et n×n-geobrett? (Altså: Beskriv generelt hvordan vi kan regne ut dette antallet.)

Elevene trenger ark med geobrett 5×5 og 6×6 til å tegne på. Slike ark finner dere på: https://lamis.no/files/2019/04/ungeabel_semifinale_og_finale_oppgaver_2018-2019.pdf