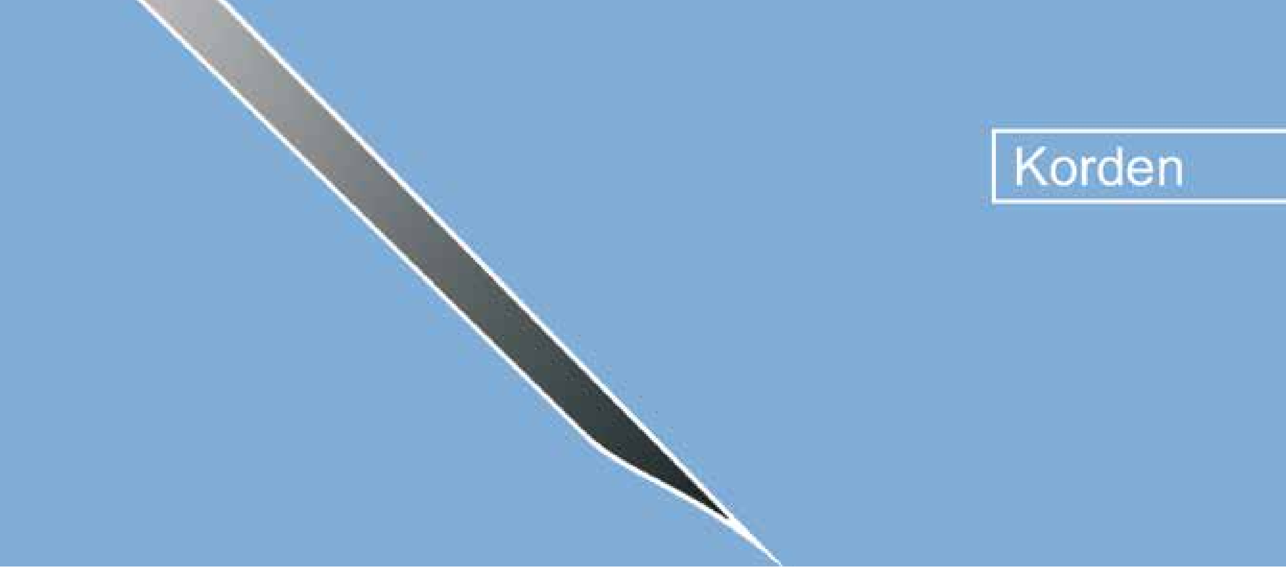


Kva vil det seia å forstå matematikk?

For å svara på kva kan det vil seia *å forstå matematikk*, er det naturleg å tenkja på dei fem fyrste kjerneelementa i læreplanen. Dei fangar det viktigaste på ein god måte. Samstundes kunne det vore klarare formulert at elementa dreier seg om ulike ting. Dei to fyrste, *Utforsking og problemløsing* og *Modellering og anvendelser*, kan ein sjå som overordna undervisingsmetodar. Dei tre neste, *Resonnering og argumentasjon*, *Representasjon og kommunikasjon* og *Abstraksjon og generalisering*, inngå ofte som sentrale kvalitetar når elevar utforskar, løyser problem, modellerer og brukar matematikk. I dette nummeret av Tangenten får du lesa om fleire døme på slike undervisingsmetodar og om korleis lærarar legg vekt på bestemte kvalitetar ved elevane sitt arbeid.

Nordheim har fokus på kvalitetar som resonnering, argumentasjon og generalisering når elevane hennar sorterer og klassifiserer på 1. trinn, arbeider med forståing av likskapsteiknet på 2. trinn og utforskar tal og bevis på 3. trinn. Sentrale kvalitetar på tvers av undervisingsmetodar er at elevane skal kunna forklara kva dei gjer og argumentera for at det fungerer.

Gulaker presenterer i sin tekst ein idé til ein undervisingsmetode der elevar gjennom utforsking kan matematisera og sjå etter mønster i eit fenomen som har vorte meir og meir kvardagsleg, nemleg rundballar. Konteksten kan tilpassast dei yngste med fokus på teljing til elevar på vidaregåande trinn som kan modellera og generalisera både trekant- og pyramidetal. Johannessen presenterer ein idé der elevar skal finna svar gjennom fyrst å gjera eigne eksperiment og deretter prøva å rekna seg fram til det same svaret. Denne metodiske vrien legg til rette for elevar sine faglege diskusjonar og argument.

Matematikk er mønster, og eit av faget sine store styrkar er det å generalisera. Nilssen skriv både om mønster og generalisering når ho presenterer utforsking med reknerammer i arbeid med talforståing på 2. og 3. trinn. Ved å utforska partal- og oddetalsmønster tek elevane i bruk ulike strategiar som gjenteken addisjon, dobling og multiplikasjon. Dei tek utfordringa med å generalisera når dei forstår kva den *n*-te figuren betyr, for så å finna eksplisitte utrykk for par- og oddetal.

Døma på undervisingsmetodar og vektlegginga av bestemte kvalitetar i dette bladet gir nokre svar på kva det vil seia å forstå matematikk. Du bør òg få med deg sidene til Matematikksenteret og LAMIS, og vil du lesa om grunnleggande ferdigheiter bør du ta med deg den fagfellevurderte teksten til Amdal og Morud om skriving i matematikk. God lesnad!

Nordheim

Resonnering og argumentasjon

Et av kjerneelementene i matematikk i LK20 er resonnering og argumentasjon. Kort gjenfortalt fra beskrivelsen i læreplanen handler resonnering om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker, og argumentasjon om at elevene kan begrunne egne framgangsmåter, resonnement og løsninger, og etter hvert at de beviser gyldigheten av disse.

Jeg har fulgt en klasse i matematikk siden de begynte i 1. klasse høsten 2015. Arbeidet med resonnering og argumentasjon har vært en naturlig, integrert del av arbeidet i matematikktimene fra begynnelsen av. Elevene i klassen har hele tiden blitt bevisstgjort verdien av å forstå det de gjør, og å kunne forklare hvordan de tenker. Gjennom klassesamtalen som didaktisk verktøy i dette arbeidet har elevene blitt utfordret til å kommunisere sine egne tanker, og til å forstå og bygge videre på andres. Andre lærere har lagt merke til at elevene i klassen har hatt nytte av tankesettet også i andre fag, og at de snakker godt for seg.

Det er mange typer oppgaver som egner seg til å jobbe med resonnering og argumentasjon. Det som er viktig (og noen ganger litt vanskelig), er å virkelig lytte til elevene når de begrunner framgangsmåter, tankesett eller ulike svar, for å forstå det de ønsker å formidle. Læreren har en viktig rolle i å gjøre elevenes ytringer tilgjengelig for de andre elevene, og ikke minst i å bygge videre på, og eventuelt styre, den matematiske forståelsen elevene viser, slik at det etableres sammenhenger.

Noen ganger bruker jeg korte læringsaktiviteter som «Hvem skal ut?» for å sette elevenes tankeprosesser i gang. Det hender også at jeg presenterer flervalgsoppgaver, eller oppgavesvar med bevisste feil i, for å utfordre elevene til å tenke annerledes enn de selv kanskje ville ha gjort i utgangspunktet. Andre ganger er utforskning en sentral del av oppgaven, og arbeidet tar lengre tid. Eksemplene jeg ønsker å dele, tar utgangspunkt i relativt enkle oppgaver, som kan tilpasses og utvides etter nivå og engasjement. De viser et utdrag av hvordan elevene gjennom samtale, samarbeid, konkretisering og skriftliggjøring/tegning utviklet sine egne tankerekker, bygget videre på andres tanker, og hvordan vi jobbet med bevis i 3. klasse.

Å bevise noe matematisk med de yngste elevene dreier seg om å verifisere og forklare noe på en måte som styrker elevenes forståelse. Denne forståelsen uttrykkes gjennom eksempler og generelle vendinger som elevene behersker. Ved å jobbe med uformelle bevis på denne måten kan det legges et grunnlag for senere arbeid med formelle, algebraiske bevis.

Tonje Katrine Nordheim
Granly skole
tonje.nordheim@horten.kommune.no

1. trinn – sortering og klassifisering

De fleste elever har gode sorteringsevner når de begynner på skolen. Mange har erfaringer fra opprydding i hjemmet og i barnehagen, og de har til en viss grad automatisert noe av kunnskapen. Som lærere bør vi hjelpe barna å sette ord på hvorfor de sorterer som de gjør; er det form eller funksjon, tilhørighet eller noe annet, som gjør at noe skal være samme sted? Hvilke likheter og forskjeller kan de identifisere, og hvilke begreper trenger vi for å vite at vi snakker om det samme?

En av aktivitetene vi gjennomførte på uteskole i 1. klasse, dreide seg om dette. Elevene ble delt inn i par og små grupper på tre. De fikk utdelt en rockering som fungerte som det definerte arbeidsområdet i oppgaven, og så fikk de fem minutter til å samle naturmateriell og legge i ringen sin. Det påfølgende oppdraget var felles for alle gruppene; sorter det dere har funnet, og legg det som hører sammen, i grupper. Dere må kunne forklare hvordan dere har bestemt hva som skal i de ulike gruppene. Dere skal ikke flytte noe ut av ringen.

Noen elever laget grupper som jeg umiddelbart kjente igjen (bilde 1), mens andre hadde sine egne systemer, og jeg måtte lytte godt til elevenes forklaringer for å forstå tankegangen bak (bilde 2). I ringen på bilde 1 er det sortert i følgende fem grupper: små blader, store blader, korte og tykke pinner, lange og tynne pinner, nøtter/bær fra trær. Jentene på bilde 2 valgte heller å sortere grupper med ulike «slag» sammen; dere kan se hvordan det ligger en liten pinne oppå hvert blad, og jentene er i ferd med å telle opp og fordele små nøtter og bær fra trær. Det som ble til overs etter at hvert blad hadde fått én pinne og to bær, ble lagt i ytterkanten.

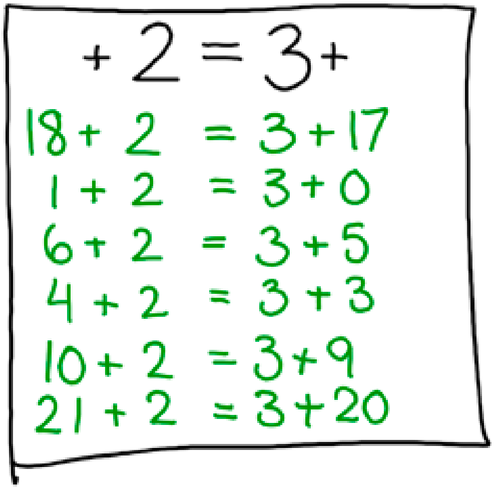
Oppfølgingsoppdrag ble gitt til elevgruppene etter hvert som de hadde vist fram og begrunnet grupperingene sine til læreren. Uten å legge til eller ta bort elementer i ringen skulle de omgruppere, altså finne en annen måte å sortere de samme gjenstandene på. Dette er kognitivt utfordrende for mange. De ser fort én løsning,

Bilde 1

Bilde 2

men måtte nå omstille tankegangen sin for å etablere nye grupper.

Elevene kunne velge å lage færre eller flere grupper. Løsningen til elevene på bilde 1 ble å slå sammen grupper slik at de fikk tre grupper; blader, pinner og nøtter/bær. Argumentet deres for sammenslåingen var: «Pinner er pinner, selv om noen er korte og noen er lange, så de kan være sammen.» Sideinnspill fra annen elev: «De har vært på treet sammen før.» Og selv om bladene var fra ulike typer trær, så var de grønne. Løsningen til elevene på bilde 2 var at de oppløste de sammensatte gruppene sine, og sorterte deretter gjenstandene i gruppene blader, pinner, nøtter/bær, gress, strå og søppel. Og begrunnelsen deres var at «det er sånn det egentlig er».



Bilde 3: Utsnitt av tavla med eleveksempler.

2. trinn – likhetstegnet

For å få relasjonell forståelse av likhetstegnet må elevene oppleve at det brukes på andre måter enn den rent operasjonelle der tegnet dukker opp etter to tall med et regnetegn imellom. Prinsippet om likevekt har vi utforsket på ulike måter ved flere anledninger, og blant annet fenget denne oppgaven på 2. trinn:

$$\_\_ + 2 = 3 + \_\_$$

Elevene kom med mange eksempler, og da vi hadde skrevet opp en del tall på tavla, kunne vi begynne å snakke om hvorvidt noen kunne se et mønster. Ivrige elever pratet med læringspartneren sin, og i klassesamtalen etterpå konkluderte de med at «fordi at det er en mindre der (*på den ene sida*), må vi legge på en mer på tallet der (*på den andre sida*) for at det skal bli likt». Vi konkretiserte det med tegning og klosser. Mange elever hadde nok med de ensifrede tallene, men alle var med på hvorfor for eksempel 6 + 2 = 3 + 5.

Oppgaven engasjerte og utfordret også elever med god tallforståelse. Flere syntes det var artig å finne mønster, for eksempel ved å systematisk øke og minke med samme siffer, eller prøve seg fram med andre regnearter. Den mest avanserte løsningen var $2 \cdot 11 + 2 = 3 + 10{,}5 \cdot 2$. Et svar som dette er med på å minne meg på hvor viktig det er å ha oppgaver som åpner for at elevene kan jobbe med det samme på ulikt nivå.

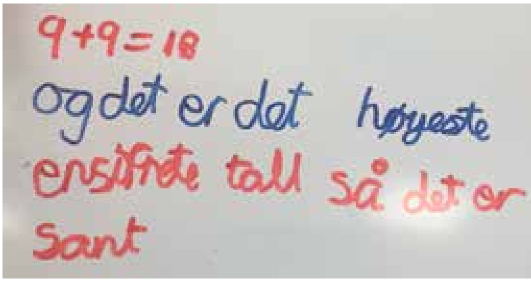
3. trinn – aldri, alltid eller noen ganger sant?

På 3. trinn skulle vi fordype oss litt i egenskaper og begreper rundt tall og siffer. I forbindelse med det gjennomførte vi en oppgavestreng over to uker, med utgangspunkt i påstander, og om de aldri, alltid eller noen ganger var sanne.

Vi startet med å snakke om hva påstander er, og vurderte om det er sant (aldri, alltid, noen ganger) at «2 + 3 = 1 + 4», og at «snøen er hvit». Oppfølgingsspørsmålene var «Hvordan kan du vite det?» og «Kan det bevises?». I den forbindelse måtte vi snakke om begrepet «bevis», hva det innebar, og hvordan det kan gjøres.

Når elevene begrunner matematisk, finner jeg det nyttig å tenke over hvilket nivå de begrunner på. Da tenker jeg nivå som i hvilken grad resonnementet kan fungere som et bevis på noe, og hvilke spørsmål jeg som lærer kan stille for å bevisstgjøre og utfordre elevene til å tenke videre, gjerne mer generelt. Balacheff (i Klaveness et al., 2019, s. 236) beskriver fire

Bilde 4



Bilde 5

nivåer som alle er viktige for elevenes utforskning og matematiske læringsprosess. De to første nivåene er naiv empirisme og avgjørende eksempel. Argumentasjonen på disse nivåene er eksempelbaserte, og en generell struktur er ikke synlig. De to neste nivåene kan betraktes som uformelle bevis fordi de uttrykker generelle sammenhenger. Ved generisk eksempel brukes et eksempel til å forklare og illustrere en generell sammenheng, og ved tankemodeller forklarer man en generell tankegang uten å bruke konkrete eksempler. Det naturlige for unge elever er å ta utgangspunkt i eksempler, men som arbeidet med denne oppgavestrengen viser, kan de veiledes til å tenke i mer generelle vendinger. Forhåpentligvis vil dette kunne danne et grunnlag som hjelper dem i senere arbeid med mer formelle bevis.

Den første påstanden elevene skulle ta stilling til sammen med læringspartner, var: «Summen av to ensifrede tall er mindre enn 20.»

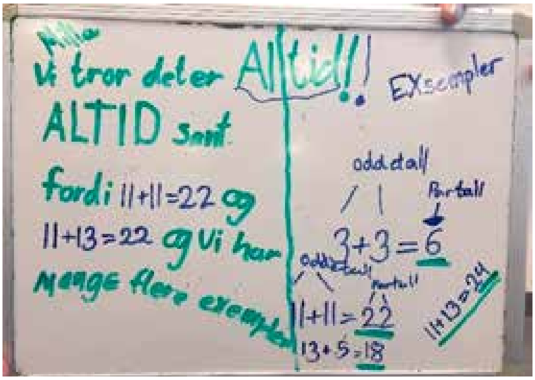
Noen elever brukte vilkårlige eksempler (bilde 4), og noen prøvde seg mer systematisk fram. Nærmere halvparten hoppet rett til konklusjonen, omtrent slik som Tiril og Joelien har skrevet på bilde 5. Elevene brukte tallforståelse som grunnlag for konklusjonen sin. Når det ikke finnes høyere ensifrede tall enn ni, så må påstanden alltid stemme. Eksempelet 9 + 9 = 18 brukes til å vise den generelle sammenhengen.

Når det gjaldt neste påstand om at summen av to tosifrede tall er mindre enn 100, var elevene raske med å konkludere med «noen ganger», fordi de fant eksempler på tilfeller der påstanden stemte, og der den ikke stemte. Et «system» de fleste fant raskt, og støttet seg til videre, var at summen av to tall mindre enn 50 er under 100, mens dersom begge tallene er over 50, blir summen over 100.

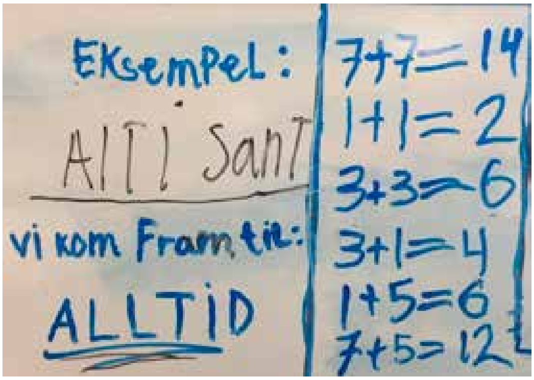
For å utfordre elevenes tankesett litt videre ba jeg dem om å se på andre kombinasjoner. Klassen utforsket da om det var mulig at ett tall kunne være mer enn 50 og det andre tallet mindre enn 50. Etter å ha undersøkt med en del tall oppsummerte Kasper (8 år) det slik: «Det går (*at summen blir mindre enn 100*) hvis det ene tallet er ganske stort, så må det andre være ganske lite.» Han valgte å understreke påstanden sin med et eksempel (bilde 6).

Disse oppgavene ledet mot den kanskje mest kognitivt krevende oppgaven, der elevene skulle finne ut om «summen av to oddetall er et partall», og bevise det. Nå hadde elevene gjort seg en del erfaringer med å tegne, finne eksempler og formulere generelle begrunnelser som kunne hjelpe dem i dette arbeidet. I begynnelsen var det flere elever som tenkte at bare de kunne finne mange nok eksempler, så ville det være nok som bevis (bilde 7). Jeg synes det var påfallende at så mange benyttet eksempler med like

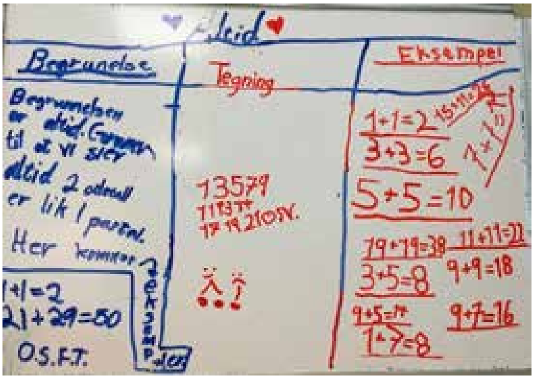
Bilde 6



Bilde 7



Bilde 8



Bilde 9

tall. En dobling (av heltall) resulterer naturlig nok i partall, men dette var lærerens tankegang, og viktig for elevene på dette nivået å oppdage.

En videre utforskning gjennom eksempler ble da å etterspørre ulike og kanskje flersifrede tall, slik at elevene kunne lete etter mønster og sammenhenger i et mer variert tallmateriale (bilde 8).

I samtalene virket flere av elevene mer bevisst på at de skulle prøve å finne en mer generell uttrykksform. Legg merke til de tegnede prikkene sammen med smilefjesene på bilde 9. Her er det elever som prøver å uttrykke noe av strukturen til et oddetall, med «en til overs». Jeg valgte å ta utgangspunkt i denne tegningen da vi skulle finne ut mer om strukturen til oddetallet, og se på forskjellige representasjoner for det.

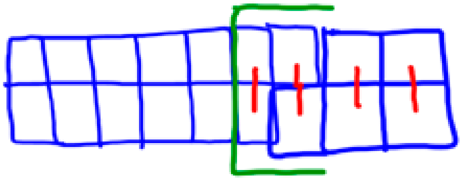
Alle elevene fikk på et tidspunkt stille seg opp i en gruppe med andre elever, og så skulle de sortere seg parvis i rekker. Hvis én ble til overs i gruppa skulle han eller hun stille seg først i køen. Elevene satte så ord på hva som skjedde når to grupper ble koblet sammen, og hver gang to grupper med «en til overs», altså et oddetall antall elever, ble koblet med annen tilsvarende gruppe, så ble det ikke lenger én til overs, uavhengig av hvor stor elevgruppa var (bilde 10).

Sammen med elevene skulle vi prøve å finne en gyldig notasjon som kunne beskrive hva som skjedde. Elevene satte ord på hva som skjedde, og jeg prøvde meg fram med illustrasjoner på tavla (figur 1). Liam (8 ½ år) uttrykte det slik: «Hvis du har to oddetall, da har du jo én til overs (*på hver*). Hvis du legger dem sammen, da blir det et partall, fordi da er det to til overs, og (*de*) setter sammen seg med (*til*) et partall.»

De to blå figurene ble tegnet hver for seg på tavla etter Liams instruksjoner og klassens samtykke. Jeg skjøv dem mot hverandre slik elevene hadde gått mot hverandre da de sto i grupper. Flere sa høyt «Åååååå», da de så hva som skjedde. Vi koblet «par» ved hjelp av røde streker. (Den grønne streken viser avgrensingen vi hadde på den gjeldende gruppa.)

Mange elever følte ikke lenger at de trengte alle eksemplene å støtte seg til. Konklusjonen var at summen av to oddetall alltid blir et partall, fordi «da liksom er ingen alene, og alle har liksom en venn hver. Sånn at de slipper å være alene». Det er også verdt å ta med seg at flere

Bilde 10



Figur 1

etter hvert ga uttrykk for at vi bare behøver å se på enerplassen for å bestemme om det er et oddetall eller partall. Det var elevene selv som kom fram til forståelsen og uttrykte det.

Avslutning

Resonnering og argumentasjon med de yngste elevene handler i stor grad om at de vet hvorfor de gjør som de gjør, og hvorfor det de gjør, fungerer. Dette må de få anledning til å erfare og sette ord på. Vi må ikke være redde for å bruke og utforske matematikkfaglige begreper i en kontekst som elevene kan relatere til.

For at elevene skal tørre å virkelig utforske matematikken, og være komfortable med å dele egne tanker og framgangsmåter, må de, uansett alder, erfare at det er trygt å gjøre feil. Lærerne må kommunisere tydelig at vi kan lære av og med hverandre, og at det er mange måter å løse oppgaver på. Disse normene er best å etablere tidlig, men min opplevelse er at det aldri er for seint, for elevene er raske til å oppfatte hva læreren legger vekt på. Ved at læreren forventer forklaringer også når svaret er riktig, og trekker fram misoppfatninger på en positiv måte som grunnlag for diskusjon og oppklaring, vil de fleste elevene nokså raskt omstille seg til forventningen om at de må underbygge egne tanker og strategier. Det er fruktbart for det matematiske klasserommet.

Referanser

Klaveness, E., Karlsen, L. & Kverndokken, K. (2019). *101 grep for å aktivisere elever i matematikk – matematikkdidaktikk i teori og praksis*. Fagbokforlaget.

Gulaker

Utforsking og rundballer

Kjerneelementene (Utdanningsdirektoratet, 2020) skal peke mot det som skal være viktigst i fagene. Et av kjerneelementene i matematikk handler om utforsking og problemløsning. «Utforsking i matematikk handlar om at elevane leiter etter mønster, finn samanhengar og diskuterer seg fram til ei felles forståing.» (s. 2).

Ved å hente inspirasjon fra observasjoner ute (Fiskum & Husby, 2014) kan vi noen ganger sette elever på et «utforskingsspor». Ved å følge et slikt spor kan både elever og lærere få erfaringer som kan knyttes til andre kjerneelementer. Vi skal i det følgende se at å modellere, resonnere og argumentere, representere, abstrahere og generalisere blir aktuelle stikkord i det arbeidet vi leder elevene inn i.

Rundballer, vi har sett dem alle sammen. Fra midtsommer hvert år dukker de opp på jorder nær oss. Og ferdes du i jordbruksområder, så ser du mange av dem. Du har kanskje også hørt begrepet «traktoregg» brukt. Som hvite (noen ganger andre farger) plastpakkede sylindre dukker de opp, spredt ut over jorder, etter hvert som bøndene blir ferdige med slåtten. Mange har kanskje også blitt stående og studere prosessen med pakkingen av rundballer. Det er

Dag Gulaker
Nord universitet
dag.t.gulaker@nord.no

Rundballe, gress presset hardt sammen i en sylinderformet balle ved bruk av rundballepresse. Vanligvis er både ballebredde (lengde på sylinderen) og diameter på cirka 1,25 meter. Ballene pakkes inn i plast, vanligvis folieplast som legges på i 6–8 lag, slik at plastpakningen blir lufttett. Det er viktig for å oppnå riktig gjæring. Gresset konserveres ved melkesyregjæring til surfôr (silofôr), som nyttes som fôr til drøvtyggere og hest. Ofte tilsettes syre (maursyre) eller andre ensileringsmidler for å senke pH i startfasen og motvirke feilgjæring.

(Hentet fra https://snl.no/rundballe)

Bilde 1

fasinerende å se høyballen som kommer ut av pressa, og plasten som så surres rundt lag på lag.

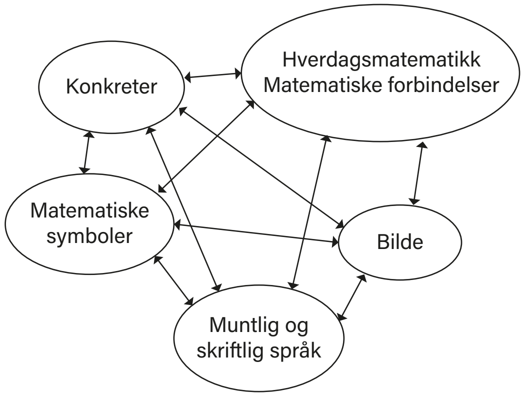
Rundballer setter sitt preg på våre omgivelser gjennom store deler av året. Vi kan se samlinger og stabler med rundballer i landlige miljøer. Noen ganger trenger vi heller ikke gå så langt unna skolen for å finne rundballer, se bilde 2.

Bilde 2

Historikken til rundballene i norsk landbruk er også verdt å lære mer om. Fra å være et helt ukjent fenomen for bare noen tiår siden til å bli brukt i svært stor grad i dag.

Du har kanskje også sett store jorder der rundballer nylig er presset og pakket inn i plast, og lurt på hvor mange rundballer det er der? Det kan være krevende å finne antallet gjennom telling, og kanskje er det bare bonden som gjennom telleverket på rundballepressa kan gi et raskt svar. Dette gir mange muligheter for lærere som vil engasjere elevene gjennom arbeid med matematikk ute. I denne teksten brukes rundballer som utgangspunkt når elevene jobber med tall og talloppfatning. En slik kobling fra matematikkfaget kjenner vi gjennom bruk av kvikkbilder (Matematikksenteret, 2021). Her kan bilder av rundballer brukes som grunnlag for øvelser på strategier i telling og talloppfatning.

I Grevholm (2013, s. 89) finner vi figur 1, som brukes til å argumentere for at elevenes muligheter for å bygge inn mening i matematikkens begreper styrkes gjennom å la elevene få arbeide med ulike matematiske representasjonsformer.



Figur 1: Hentet fra Grevholm (2013, s. 89).

Tanken i denne teksten er å la elevene få ta på matematikkbriller for å gjøre observasjoner, som gir muligheter til å bruke og utvikle matematikk ved hjelp av ulike representasjonsformer. Elever som blir invitert inn i en problemstilling knyttet til en kontekst (Fosnot & Dolk, 2018), vil erfaringsmessig kunne nå overraskende langt. Når elever først begynner å arbeide med en problemstilling, så dukker ofte også nye problemstillinger opp.

Rundballene samles ofte i små og store stabler. Hvis vi ser nøye etter og sammenligner hvordan stablingen gjøres, vil vi kunne observere at stableoppdraget løses på ulike måter. Noen av stablene er rene kunstverk og imponerer både gjennom størrelse, form og nøyaktighet i stablingen. Vi skal her se eksempler på hvordan disse rundballene kan stables, og hvordan antallet rundballer i ulike stabler kan telles og beregnes.

På bilde 3 er det greit å få oversikt. Vi teller lett hvor mange dette er, men tellingen kan gjøres på ulike måter. To treere kan være en mulighet. På bilde 4 er det også mulig å få oversikt hvis vi er på lagringsplassen. Det er en fin erfaring å observere at elever har ulike tellestrategier. De rekketeller, hoppeteller, dobler, multipliserer osv. På bilde 5 er det mer krevende å si noe om antall rundballer. Men vi kan se system

Bilde 3

Bilde 4

Bilde 5

og struktur som kan benyttes for å gjøre beregninger og for å kunne si noe om antall.

Når rundballene er samlet og stablet i et mønster, gir det mulighet for å matematisere. Vi skal regne ut hvor mange rundballer det er i noen slike stabler, ved å ta i bruk figurtall (Petersen & Tvete, 2014) og algebraisk tenkning.

Bilde 6

Bilde 7

La oss begynne med å se på to vanlige strukturer vi kan finne når vi ser på en stabel med et større antall rundballer. Disse to strukturene er vist på bilde 6 og bilde 7.

Den som stabler rundballene, må gjøre et valg under stablingen. På bilde 6 er rundballene stablet i forband. Det betyr at lagene forskyves en halv rundballe mellom hver høyde når vi ser rett inn mot stabelens lengderetning. Mens på bilde 7 er rundballene ikke stablet i forband når vi ser rett inn mot stabelens lengderetning. Det er ingen forskyvning mellom rundballene i de to høydene som vises her.

Forbandstrukturen finner vi ofte på veggflater dekket av murstein eller fliser. Belegningsstein legges også noen ganger i forband. Dette kan ha både estetiske og konstruksjonsmessige begrunnelser. For rundballene er det ikke først og fremst estetiske grunner til at de stables i forband.

Bilde 8

Bilde 8 viser en stabel slik som på bilde 7 sett fra enden. Vi kjenner kanskje igjen antall rundballer på enden av denne stabelen som et figurtall. Her kan vi se trekanttallet 3.

Bilde 9

På bilde 9 er rundballene stablet i forband. Men selv med en forskyvning mellom lagene

Høyden av stabelen	Antall rundballer sett fra enden	Antall rundballer i stabelen
1	1	$1 \cdot n$
2	3	$3 \cdot n$
3	6	$6 \cdot n$
4	10	$10 \cdot n$
5		

Tabell 1

kan vi likevel se trekanttallet 10 i denne stabelen når vi ser inn fra enden av stabelen.

Vi undersøker først en stabel der vi ikke har forbandsstabling (som på bilde 7). Vi lar lengden av en stabel, målt i antall rundballer, være n. Da kan vi sette opp sammenhengen i tabell 1.

Her kunne vi godt fortsette. Det er sjelden å se rundballestabler med mer enn 4 i høyden, men mulighetene for generalisering er til stede. Vi lar høyden av stabelen, målt i antall lag rundballer som er stablet oppå hverandre, være h og lengden av stabelen, målt i rundballer, være n (se tabell 1). Da vil antall rundballer R (rundballetallet) i en slik stabel være avhengig både av høyden og lengden og kunne skrives som

$$R(h, n) = \frac{h(h+1)}{2} \cdot n,$$

eller om vi bruker dette med trekanttallene (T) i tverrsnittet, så kan vi skrive dette som:

$$R(h, n) = T(h) \cdot n,$$

slik vi ser det i tabell 1.

Hvis rundballene er stablet i forband (som på bilde 6), vil det i begge ender av stabelen være færre rundballer i hvert lag etter det første laget. Vi ser at lengden på ett lag blir en rundballelengde kortere for hvert lag som stabelen vokser oppover. Rundballene er tunge å flytte på. Derfor kan det for å samle erfaringer gjennom modelleringen være gunstig for en representasjon ved hjelp av konkreter som lett kan studeres inne i klasserommet.

Et rimelig og enkelt materiale som kan brukes her, lager vi raskt selv ved å klippe passende biter fra en hageslange (bilde 10). Lengden på bitene klippes slik at lengden er like stor som diameteren (jf. bilde 1). Dette gir gode muligheter for å bygge modeller av rundballestablene for å studere sammenhenger og utforske antagelser.

Høyden av stabelen	Antall som mangler i hver ende	Antall som mangler i alt
2	½	1
3	2	4
4	5	10
5	10	20

Tabell 2

Bilde 10

Bilde 11

Vi ser at antall rundballer i en stabel, der rundballene er stablet i forband, reduseres noe i hver ende av stabelen, sammenlignet med en stabel der rundballene ikke er stablet i forband. For å finne et algebraisk uttrykk for antallet i stabelen der rundballene ligger i forband, må vi beskrive hvordan antallet reduseres i en slik stabel.

Ved å bygge med slangebiter og studere hvor mange biter som mangler i endene på forbandsstabler med ulike høyder for at alle lagene skal være like lange, får vi sammenhengen i tabell 2.

Bilde 11 og bilde 12 oppfattes som en trekantet pyramide eller som en tetraederform. Ser vi rett inn fra en av sidene, så ser vi trekanttal-

Bilde 12

lene på samme måte som i enden av rundballestablene. Antall kuler/slangebiter i hvert lag i pyramiden er et trekanttall.

Tetraedertallene, eller, om vi vil, pyramidetallene (antall kuler/slangebiter i hele pyramiden) $P(k)$ kan uttrykkes ved følgende sammenheng hvis vi lar k være antall lag i pyramiden:

$$P(k) = \tfrac{1}{6}k(k+1)(k+2)$$

De første pyramidetallene blir dermed 1, 4, 10, 20 … Sjekk at dette stemmer, ved å se på bilde 11 og bilde 12.

Når rundballene er stablet i forband, mangler vi altså et antall rundballer tilsvarende et tetraedertall, når vi ser på det som mangler i de to endene til sammen. Rundballetallet R for en stabel, der rundballene ligger i forband, kan beskrives som differansen mellom det rundballetallet vi fant for stabelen uten forband, og et pyramidetall:

$$R(h, n) = T(h) \cdot \mathrm{n} - P(h - 1).$$

Konteksten med rundballer har sitt utgangspunkt i noe mange elever ser daglig, og som alle elever lett kan settes inn i. Konteksten kan tilpasses alle aldersgrupper fra de minste som teller, skriver tall og måler til elever på ungdomsskole og videregående skole som kan modellere og generalisere mønstre samt beskrive dette gjennom formler. En slik kontekst kan også brukes i tverrfaglige sammenhenger. Både i naturfag og i samfunnsfag kan vi innen rammen av skolefagene finne en rekke aktuelle problemstillinger knyttet til rundballer.

Innledningsvis ble kjerneelementene nevnt. Gjennom arbeidet med denne konteksten får elever arbeidet med kjerneelementet matematiske kunnskapsområder knyttet til tall, geometri, algebra og ikke minst funksjoner.

Referanser

Fiskum T. A. & Husby, J. A. (2014). *Uteskoledidaktikk*. Cappelen Damm Akademisk.

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2018). *Unga matematiker i arbete*. Studentlitteratur.

Grevholm, B. (2013). *Matematikkundervisning 1–7*. Cappelen Damm Akademisk.

Matematikksenteret (2021). *Kvikkbilder*. https://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/mam/aktiviteter-og-filmer-i-mam/kvikkbilder

Petersen, V. & Tvete, K. (2014). *I tallenes verden*. Caspar Forlag AS.

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn*. Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nno

Refleksjoner fra elever i videregående skole

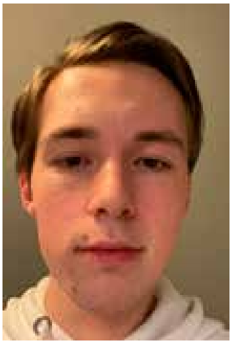
Grunnskoleelever har bidratt i de to foregående numrene av Tangenten, og nå er turen kommet til videregående skole. Jeg er avdelingsleder med ansvar for realfag ved Randaberg videregående skole, som er kombinert med noe yrkesfag og noe studieforberedende. Jeg har ikke undervisning i inneværende studieår og har støttet meg til faglærer for å få frivillige elever til å delta. De har skrevet uavhengige tekster basert på spørsmålene under:

1. Hva er matematikk?
   a) Hva mener du er matematikk?
   b) Bruker du matematikk? Utenom skolen?
   c) Trenger du matematikk?
2. Hva liker du best å gjøre i matematikkundervisning? Hvordan liker du å arbeide?
3. Hva kan du fortelle om noe dere har gjort hvor du har lært mye matematikk?
4. Hva slags oppgaver liker du å jobbe med?
5. Hva synes du er god matematikkundervisning?
6. Hvordan tror du det er å være matematikklærer?
7. Har du opplevd noe du synes var særlig kjekt i din matematikkundervisning?
8. Er det noe du ønsker å prøve ut/gjøre i din matematikkundervisning?
9. Hva tenker du at kan være utfordrende med å undervise i matematikk?

Odd-Bjørn Lunde
Randaberg videregående skole
odd-bjorn.lunde@lamis.no

Elevene ble bedt om å ta med noe om spørsmål 1), men ble ellers fristilt til å skrive fritt og vektlegge spørsmålene de ønsket. Det var spennende å se hva de la vekt på, og om deres perspektiv samsvarte med LK20, også med tanke på at skolen skal ruste elever til å møte morgendagens samfunn.

Eirik Hanasand 3MEA (Matematikk S2)



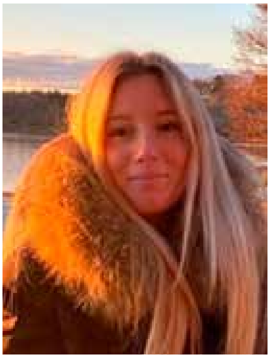
Hei. Jeg heter Eirik og går siste året på medier og kommunikasjon. Tar S2 matte for å kunne komme inn på programmering på NTNU. For meg er ikke matte bare et fag, men også noe jeg bruker ellers i hverdagen. Jobber deltid på butikk, så får bruk for mye av det jeg lærer her. Jeg liker å programmere på fritiden, så jeg bruker òg matte til det. I matematikkundervisningen er gruppearbeid det jeg lærer best av, spesielt når hele gruppen er engasjert. Liker da gjerne å jobbe med litt vanskelige oppgaver, slik at hele gruppen må gruble og samarbeide for å finne løsningen.

Jeg vil tro det er mange utfordringer knyttet til å være mattelærer, fordi man skal lære mange elever samtidig, og ofte er det forskjellige oppgaver man setter seg fast på. Da blir det vanskelig å kunne hjelpe alle med alt i løpet av en skoletime. Det beste jeg vet, er når lærerne virkelig viser engasjement, og tar initiativ til å gjøre oppgavene mer aktuelle og spennende. Dette kan for eksempel være med å sette dem inn i aktuelle temaer ellers i hverdagen.

God matematikkundervisning synes jeg er når lærerne først går gjennom et tema, og så gir oss mulighet til å jobbe med oppgaver som handler om det samme. Liker best å gå gjennom nytt stoff på skolen, for så å jobbe videre hjemme med samme type oppgaver. Da pleier stoffet å sitte.

Om 10 år tror jeg fremdeles jeg kommer til å bruke matematikk aktivt, fordi jeg ønsker å ta en utdanning innen informatikk, noe som gjør matte veldig relevant for meg. Det «kjedeligste» med matte er når man ikke får det til, men samtidig er det beste de «eureka»-øyeblikkene man får når man får til en oppgave man har slitt med lenge. Likevel bør ikke dette skje i arbeid med hver oppgave, siden det blir tyngre og tyngre for hver oppgave.

Anna Skagestad 2STC (Matematikk S1)



For meg er matematikk et fag som både er gøy og nyttig. I dagliglivet dukker det stadig opp matematiske problemer. Prosentregning og brøkregning har blant annet vist seg å være nyttig i min hverdag med tanke på kjøp og deling av ulike varer. Dermed er det lurt for de fleste å ha de mest grunnleggende matematiske formlene på plass, mener jeg.

Det gøyeste jeg vet i matematikken, er når jeg løser vanskelige oppgaver som jeg har jobbet lenge med. Det er som om en ny dør åpnes, som leder til enda flere innganger. Noe av det kjedeligste i matematikken derimot er å gjøre mange oppgaver om temaer som jeg synes er lette. De mer utfordrende oppgavene er mer gøyale, synes jeg, som er ekstra kjekt å diskutere sammen med venner!

Jeg lærer best matematikk gjennom oppgaver. Jo flere oppgaver, jo lettere blir stoffet. Selv foretrekker jeg at lærere presenterer et innhold gjennom ord og uttrykk fra hverdagslivet, i tillegg til demonstrasjoner på tavle/pc. Det at mattelæreren min skriver informasjon på tavla som jeg noterer ned, gjør det også lettere for meg å kunne bla tilbake i skriveboken min til eventuelle eksamener/prøver. Når stoffet er forklart og forstått, er det bare å gjøre så mange oppgaver som mulig. Det er viktig å ikke hoppe over oppgaver jeg ikke skjønner, da vil jeg ikke komme meg videre. Poenget er å dekke «hull» for et godt grunnlag. Et godt tips for meg er å gjøre oppgaver før man går bak i fasiten. Ved å se i fasiten uten å prøve vil jeg ikke kunne finne mine egne feil. Det er nemlig via feil jeg lærer!

Idunn Halse (Matematikk S2)

Hva mener du er matematikk?

Når jeg tenker på matte, tenker jeg på tall, bokstaver og formler med en verdi som beskriver ulike ting. Det kan være statistikk og økonomi. Det kan også være former eller grafer. Men aller først og fremst tenker jeg tall av betydning som beskriver noe, og hvordan man bruker disse til å finne ut av informasjon.

Bruker du matematikk? Utenom skolen?

Jeg bruker matematikk utenom skolen, men selvsagt ikke i like stor vanskelighetsgrad.

Jeg får liten bruk for å regne ut grenseverdier og derivere funksjoner i fritiden, men enkel pluss-minus matte eller prosent-regning bruker jeg en del. Det er som regel ved litt shopping eller planlegging av hva pengene skal gå til, altså sparing. Noen ganger får jeg bruk for annen matte, men ikke veldig ofte.

Å arbeide på egenhånd eller med medelever er måten jeg foretrekker å arbeide på. Jeg syns det er veldig greit å få sitte og bruke kunnskapene mine og trene med å jobbe med oppgaver. Det er også fint å jobbe med andre. Da kan vi løse oppgaver vi sliter med, sammen, og kanskje hjelpe å forklare hverandre. Det er også noen ganger lettere å spørre om hjelp om man er flere.

Jeg lærer mye matte ved å få forklaring av hvordan det skal gjøres, med hjelp av et godt eksempel, for så å arbeide mye med det selv. Da får jeg egne erfaringer og kan finne ut av om jeg trenger hjelp til noe. Jeg liker å jobbe med oppgaver som er litt utfordrende. Jeg liker å få oppgaver som er satt sammen litt ulikt, for å forstå det bedre. Da får jeg på en måte lært det fra ulike perspektiv, og uten å pugge stoffet kan det være enklere å forstå det. Jeg synes god matteundervisning er gode forklaringer av stoffet, og bruk av gode eksempler. Det er også hjelpsomt med en engasjert lærer som liker faget. Det er viktig å kunne stille spørsmål og få gode svar. Jeg tror det er viktig for mange å få en forklaring på hvordan det vi lærer, kan komme til nytte, altså å få gode eksempler for å forstå.

Har oppfattelsen av matte endret seg gjennom skolegangen? Hvorfor?

Min oppfatning av matte har definitivt endret seg gjennom skolegangen. Jeg var ingen tilhenger av faget da jeg var liten. Helt fram til kanskje 9. klasse var det noe av det verste på skolen. Mot slutten av 9. klasse og i 10. klasse snudde det brått, og plutselig var det ikke så verst likevel. Det ga liksom plutselig mening. Jeg vet ikke engang hvorfor, men da jeg forsto stoffet, ble det mye gøyere å jobbe med. Så mestringsfølelse er absolutt viktig.

Hva er gøy, og hva er kjedelig?

For å komme med konkrete eksempler på hva jeg personlig synes er greit å jobbe med, vil jeg nok si algebra og funksjoner. Jeg er tilhenger av konkrete formler jeg kan pugge, det gjør ofte ting enklere. Jeg er ikke så tilhenger av økonomisk matte eller statistikk.

Er matematikk viktig i samfunnet?

Ja, matematikk er veldig viktig i samfunnet. Det er omtrent overalt. Både på samfunnssiden og på realfagssiden.

Hva tror dere at dere kommer til å få bruk for om ti år?

Jeg tror at om ti år får jeg bruk for økonomisk matte, men også kanskje noe matte i arbeidslivet, men er usikker på hvilken matte det vil være. Det vil kanskje være viktig med statistikk og grafer.

Lars Helland (Matematikk R2)

Min beskrivelse av matematikk er at det er menneskets måte å oppfatte universet på gjennom verdier. Oppfattelsen av matematikk har for meg tatt stor forandring fra ungdomsskolen til videregående. Matematikk på ungdomsskolen for meg så jeg mest på som praktiske målinger av fysiske gjenstander eller fenomener i hverdagen, mens på videregående oppfatter jeg det mer som en viktig redskap for å løse vanskelige problemer. For meg er matematikk et nøytralt fag; verken kjekt eller kjedelig. Jeg liker følelsen av å løse vanskelige oppgaver på egen hånd, eller se løsninger i tider andre ikke hadde, men følelsen

(fortsettes side 21)

Eksperimentet som fasit

Elevøvelse med vektorer

I 1970-årene fikk skolefysikken et viktig løft når det gjaldt pedagogiske muligheter. Det ene var lommekalkulatoren, som muliggjorde beregninger raskt, og med en nøyaktighet og kompleksitet som tidligere var umulig i løpet av en skoletime. Det andre var nye teknologiske hjelpemidler som digitale klokker med oppløsning opp til 10^{-5} s med ulike sensorer for start og stopp. Det var nå mulig å måle lydfart i luft med tre sifres nøyaktighet over en meters distanse. «Eksperimentet som fasit» ble etablert som en idé på grunnlag av dette.

Etter min tid som lektor kom også dataloggere som samplet verdier over et tidsrom, f.eks. hvordan temperaturen i en boks med varmtvann sank med tiden. Sammen med PC-er åpnet slikt for grafiske fremstillinger med stor nøyaktighet og oppløsning. Slikt åpnet ytterligere for modellbetraktninger innenfor skolefysikken, altså hvilken formel som passet til en serie observasjoner, noe som er vanskelig med 3–4 målepunkter. Men noen målepunkter er mer spesielle enn andre – og er brukt som fasit i oppgaver for både matematikk og fysikk, også i eksperimentet som beskrives her.

Tor Hjalmar Johannessen
Pensjonist
tor.hjalmar.johannessen@gmail.com

Mitt mål var å øke elevenes opplevelser. De kunne delta i forsøk med overraskende gode målinger der elevene selv hadde beregnet et svar som lot seg verifisere, f.eks. i et ballistikkforsøk (via en «hoppbakke» med horisontalt hopp) hvor en kule traff en linjal som lå på gulvet etter en flukt på et par meter. Posisjonen til linjalen var beregnet av elevene selv. Erfaringsmessig ble de faglige diskusjonene flyttet fra lærer–elev til mellom elevene selv. Det oppsto et mål om selv å få svaret som målingene viste – ikke for å tilfredsstille et fasitsvar som sto i ei bok. Elever som hadde kalkulert feil, diskuterte med andre elever som hadde beregnet riktig, altså hvor kula traff gulvet. *Forsøksbetingelsene måtte selvsagt være reproduserbare.*

Sammen med Skolelaboratoriet i Fysikk ved UiO ble det utviklet et sett med «gjøringer», som var ulike eksperimenter der en problemstilling ble presentert, utstyr ble montert, og det ble gjort en del innledende målinger – og deretter beregninger som resulterte i et svar som kunne etterprøves.

Med nytt utstyr ble avvik fra fasitmålingene senket til ytterst få prosenter – og noen ganger enda mindre. Dette la derfor grunnlaget for en helt ny opplevelsesverden i fysikklabben. Lommekalkulatoren tok seg raskt av regnestykkene.

På bakgrunn av dette skrev jeg et lærerhefte sammen med Brynjolf Dokken og Anders

Isnes. Heftet inneholdt flere forsøk utviklet etter samme metode – «Eksperimentet som fasit». Det viste seg at også «fasit»-forsøk i andre områder enn mekanikk var mulige, som gasslover og elektrisitet. Tilgang til relevant og enkelt måleutstyr satte begrensningene, men det pedagogiske prinsippet var det samme.

Dette er bakgrunnen for et forsøk som beskrives her om krefter og med det: vektorer. Krefter er også vektorer og derfor relevant i matematikkundervisningen i videregående skole.

Med oppsettet under kan elevene selv måle krefter, som de tegner inn som vektorer med størrelse og retning på et spesielt ark, hvor en gradskive er kopiert inn. Via parallellogramkonstruksjon beregnes resultantvektoren av tre krefter – vektorer, og til slutt dens motkraft, som tegnes inn på samme vis – med størrelse og retning, som er gitt ved vinkelen på gradskiva.

Motkraften vil sammen med de andre kreftene danne en «nullgruppe», som ved hjelp av den fjerde kraftmåleren brukes til å løsne trykket på ringen i midten, som de tre andre kreftene står for. Altså: «Eksperimentet som fasit» – finn motkraften, vis at den stemmer.

Vektorforsøket ble benyttet for både 1. klasse naturfag og 2. klasse fysikk i videregående skole. Øvelsen har ingen vanskelige beregninger, men det kan være lurt å være nøyaktig når man avleser kreftene og tegner opp vektorene.

Analogi med GeoGebra

Fasiteksperimenter har en viss likhet med eksperimentene jeg beskrev i Tangenten nr. 4/2016, «Gøy med GeoGebra», hvor elevene ble utfordret til å forutse den visuelle effekten av å kombinere ulike geometriske figurer med hverandre, enten via pluss, minus, skifte fortegn eller multiplikasjon. GeoGebra gir svar på komplekse beregninger – og tegner raskt opp svaret – fasitsvaret. Elevene kan med litt trening forutse effektene f.eks. på en parabel: $f(x) = x^2$, og hva som skjer når man adderer 5, eller trekker fra 3, eller skifter fortegn ($f(x) = -x^2$), multipliserer med 2 eller en annen funksjon, f.eks. den lineære skrålinjen: $g(x) = x$. Uten at læreren trenger å si mer enn hva de skal gjøre, vil elevene selv se at funksjonen blir hevet, senket, blir snudd opp ned, og endrer form, enten ved å bli smalere ($2 \cdot x^2$) eller bli usymmetrisk ($x + x^2$) eller endrer seg fra speilsymmetrisk om y-aksen til andre symmetriformer: $x \cdot x^2$. Dette kan også oppfattes som en form for fasitekperimenter, selv om det mer kvalitative (dvs. geometrisk form) er overordnet de rent kvantitative algebraiske uttrykk og verdier (overføres til datamaskinen å utføre). Visuelle og geometriske aspekter er dermed gjort til et pedagogisk supplement til selve algebraen. Kanskje elevene selv får lyst til å eksperimentere videre – uten at læreren må be dem gjøre det. Opplevelsen forteller at slikt kan skje! Og med egeneksperimentering øker læringen.

Øvelse med vektorer (krefter)

Oppgave: Finn og beregn den ukjente motkraften ved å måle enkeltkrefter og selv beregne og sjekke om svaret stemmer.

Tre kraftmålere (dynamometre) er spent opp over en 360-graders vinkelskive i vilkårlige retninger. De er sammenkoblet til en liten splittring som er tredd over og blir presset mot en spiker (stift) som er festet godt til underlaget gjennom sentrum av vinkelskiven (se bildene). Kreftene er tegnet med blå piler på bilde 4. *Sett noen tegnestifter i arket, slik at det ikke dreier seg.*

Størrelser og retninger avleses på hver av kraftmålerne, og tegnes som vektorer på et korresponderende ark hvor vinkelskiven er kopiert. Ved å beregne resultantkraften av først to og deretter ta med den siste kan den totale resultanten beregnes og tegnes opp. Siden den er like stor, men motsatt rettet motkraften til spikeren som virker mot ringen, kan også denne tegnes opp som en vektorpil.

Dermed er det på tide å foreta fasitmålingen:

Med beregnet svar kan elevene bruke den siste kraftmåleren og trekke den ut i den retningen og størrelsen som beregningen viser (gul pil på bilde 4). Hvis riktig avlest og konstruert vil den lille ringen så vidt løsne fra spikeren når man trekker. Den indre diameteren på ringen er typisk 6 mm, og med en spiker med diameter 1 mm vil slingringsmonnet være +/– 2,5 mm. *Kompleksiteten kan økes med flere kraftmålere, men det kan skape større rom for unøyaktigheter mht. den endelige resultantvektoren.*

Utstyr

1. Underlag. Et underlag av porøst materiale, stort nok til at to motstående kraftmålere får plass når sentrum i sirkelen plasseres midt på underlaget (maksimum 1×1 m).

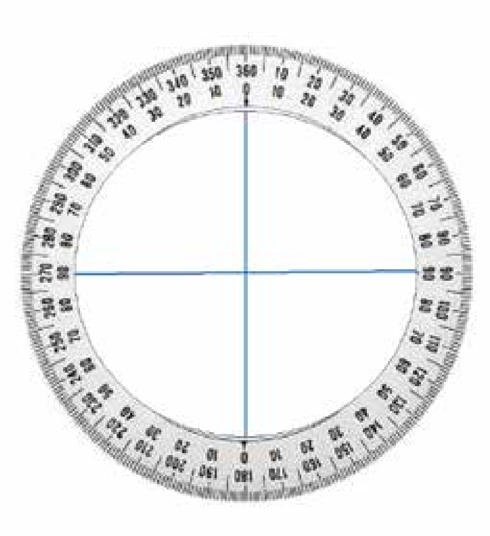
Dette må holde fast en spiker som plasseres i midten gjennom sentrum av gradskiva. Det må også være lett å sette fast og løsne nye spikre eller stifter der ytterendene av kraftmålerne festes.

Kroken på kraftmåleren hektes i øyet på virvlene. *En sponplate vil kreve hammer til å slå ned spikrene, og kanskje en tang til å løsne dem.*

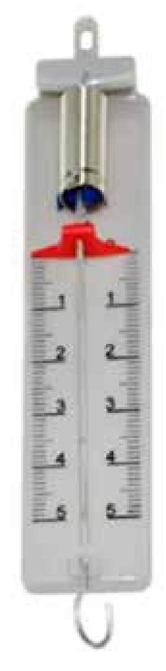
2. Gradskiver. En 360° gradskive som i bilde 1. Denne kopieres inn på papirark, som også deles ut til elevene. Tegn et kryss slik at midten av sirkelen er lett å finne, og kopier et klassesett. Diameteren bør være rundt 15 cm slik at vinklene er greie å avlese når kraftmålerne er spent opp.

3. Fire kraftmålere (dynamometere med innebygget skala; bilde 2). Kraftmålerne hektes til den innerste ringen via «virvler», se punkt 4.

Tre kraftmålere settes fast i vilkårlige retninger med stifter/spikre. Husk å ikke stramme dem for hardt i samme retning, ellers vil motkraften bli for stor for den fjerde kraftmåleren når fasit skal sjekkes.



Bilde 1: Gradskive med inntegnet kors, kopiert på et A4- eller et A3-ark.



Bilde 2: Kraftmåler – dynamometer
Kroken henges i en virvel, og toppen må kunne festes i en spiker.

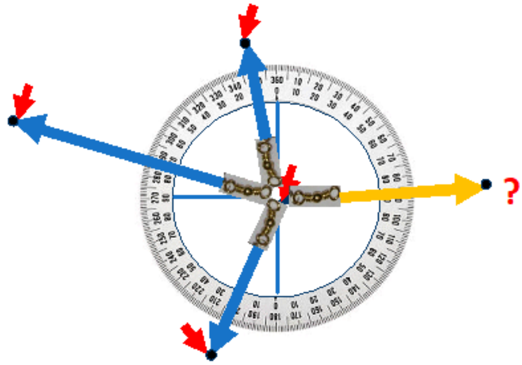
Bilde 3: Virvler, splittring og sammensetting av fire virvler på en ring.

4. En splittring og fire virvler (fiskeutstyr) som er tredd på splittringen (bilde 3 viser også en sammensetning av virvlene og en splittring. Indre diameter på splittringen er typisk 6 mm. Virvler med ekstra hekte kan også brukes.

5. Fire spikre eller stifter til å feste ringen og tre av kraftmålerne (røde piler på bilde 4).

6. Arbeidsark. Elevene må få et ark hver hvor den samme gradskiven er kopiert inn i midten (bilde 1). Læreren velger passende lengder for kraftenhetene slik at vektorkonstruksjonene får plass (det er muligens nødvendig med et A3-ark). Elevene noterer vinkel og størrelse på hver av kraftmålerne før de starter konstruksjonene. De trenger blyant, passer og linjal for å tegne opp vektorene, samt konstruere resultantvektorene.

Bilde 4 viser ringen med virvlene festet med spiker gjennom midten av gradskiven. Tre av kraftmålerne er strukket ut (tilfeldig), og festet med stifter/spikre (røde piler). *Ikke sett de tre dynamometrene for tett i samme retning, da det kan bli vanskelig for den fjerde å løsne ringen.*



Bilde 4: Oppstilling med tre kraftmålere (blå) og den siste (gul) klar til å verifisere beregningene (fasitmålingen).

Den gule pilen representerer fasitvektoren (kraften), og den tilsvarende kraftmåleren henger løst inntil beregningene er utført og fasiten skal testes.

Utførelse av fasit

Trekk den løse kraftmåleren i samme retning og størrelse som beregningene viser. Hvis korrekt beregnet løsner ringen i midten fra spikeren (så vidt).

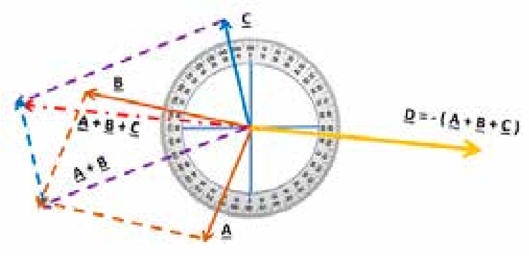
Hvis man vil holde resultatet hemmelig, er det nok å strekke motkraften ut til ringen løsner (og så tilkalle læreren for godkjenning). *Et spikerhull på stedet vil røpe svaret til neste gruppe.*

For å hindre kø ved fasitmålingen anbefales det å ha flere plater med tilhørende kraftmålere osv., og at elevene arbeider sammen i grupper – men hvor hver elev konstruerer på sitt eget ark.

Konstruksjon av resultanter for vektordiagrammet

Jf. tegningen med kraftmålerne (bilde 4). I bilde 5 er **A**, **B** og **C** brukt for de «kjente» kreftene.

A, **B** og **C** måles og tegnes inn på utlevert ark. *Bruk passende enhet for størrelsen av pilene.*



Bilde 5: Konstruksjonen

Resultanten **A** + **B** konstrueres, via parallellogramkonstruksjon, og tegnes inn (her: stiplet). Resultanten av (**A** + **B**) + **C** (blå) konstrueres, og tegnes inn (rød stiplet). Den ukjente vektoren (kraften) **D** finnes på bakgrunn av dette, og tegnes inn (heltrukken oransje pil).

Læreren er tilrettelegger og setter opp selve forsøket – og er siste hjelpeinstans hvis ingen elever får det til (noe som aldri skjedde forfatteren i alle årene han var lektor). «Forsøket-som-fasit»-oppgaver gir i det hele en helt annen elevopplevelse og et helt annet engasjement enn å slå opp i en fasitbok.

I tillegg viser øvelsen hvor sterkt fysikk (her krefter) er knyttet til matematikk (her vektorer).

Lykke til!

(fortsatt fra side 16)

av å ikke greie å forstå matematikken kan være frustrerende.

Matematikk er ekstremt viktig i samfunnet ikke bare for å utvikle ny teknologi som er presise, men også for økonomiske, politiske og demografiske grunner osv. Til mitt behov bruker jeg bare enkel matematikk i hverdagen min som f.eks. regne penger. Jeg tror at jeg kan få bruk for det meste jeg har lært om 10 år hvis jeg skal ta ingeniørstudie.

Måten jeg lærer best matematikk er ved å regne vanskeligere oppgaver og forstå tankegangen og prosessen bak kalkuleringen. Etterpå må jeg regne flere oppgaver for å gjenkjenne oppgavene slik at jeg husker hva jeg skal gjøre. Jeg lærer matematikk på en god måte når vi jobbet sammen med å løse oppgaver.

Takk til ...

Først av alt vil jeg rette en stor takk til elevene som bidro med sine tanker og refleksjoner, og faglærerne som satte meg i kontakt med dem. Suksessfaktorer disse elevene vektlegger for å lære matematikk, er blant annet utholdenhet, problemløsning, engasjert lærer og relevans. De fleste av disse faktorene er sentrale i LK20 både sett i forhold til nytt kompetansebegrep som vektlegger læring i kjente og ukjente situasjoner alene eller sammen med andre, ny overordnet del, i kjerneelementene, tverrfaglige temaer og fagspesifikke kompetansemål. Utholdenhet når det gjelder å «stå» i en oppgave/problemstilling lenge nok til at man alene eller sammen med andre kommer fram til løsning, fremheves som det de lærer best av. Elevene peker også på at det å lykkes med krevende oppgaver er noe av det som oppleves som mest positivt ved matematikkfaget. Når fagstoff skal presenteres, foretrekker de at oppgaver og teori blir presentert med virkelighetsnære problemstillinger og eksempler. Lærerens engasjement blir også fremhevet som viktig for læring av faget. Hvordan de kommer til å bruke matematikk i fremtiden, er de mer usikre på, men de ser utvilsomt fagets plass og nytte i samfunnet. Til slutt vil jeg legge til Annas siste setning om læring av matematikk og det å ikke gi opp: «Det er nemlig via egne feil jeg lærer!»

Nilssen

Mønstergeneralisering i regneramme

I norskfaget er en skriveramme et godt hjelpemiddel når elever skal strukturere og skrive en tekst. På samme måte kan en regneramme være til hjelp når elever på småtrinnet skal utforske figurmønster. Jeg har designet og testet ut en regneramme som kan hjelpe yngre elever til å holde orden og kontroll på tegninger, tallmønster og regneuttrykk (Nilssen, 2019). Regneramma kan også hjelpe elever til å se sammenhengen mellom ulike representasjonsformer når de arbeider med mønstergeneralisering. Regneramma slik vi ser i tabell 1, er designet som en tabell der elevene kan velge å arbeide horisontalt eller vertikalt eller veksle mellom begge deler dersom det faller naturlig. Målet er å tilnærme seg mønstergeneralisering og klare å uttrykke det de oppdager, på en oversiktlig måte, etter hvert uten bruk av regneramme.

Nyere forskning viser at yngre elever kan lære å like og forstå algebra gjennom å øve på å se mønster og tilnærme seg algebra gjennom visuelle voksende mønster, for så å knytte aritmetiske uttrykk til det visuelle (Wilkie, 2014). Mønstergeneralisering er derfor en god måte å innføre algebra for elever på (Radford, 2010). Ifølge Carraher et al. (2008) er språket en av representasjonsformene i tidlig algebra, og elever kan beskrive en generalisering med ord før de kan uttrykke den symbolsk/algebraisk.

I denne teksten vil jeg dele erfaringer jeg har fra bruk av regneramma på 2. og 3. trinn. Først beskriver jeg hvilke strategier elevene på 2. trinn tok i bruk i prosessen da de arbeidet med partallsmønster. Deretter beskriver jeg hvilke strategier elevene på 3. trinn tok i bruk i løsningsprosessen med en videreutviklet ramme med partalls- og oddetallsmønster.

Erfaring fra 2. trinn

Elevene på 2. trinn hadde tidligere arbeidet med partall og oddetall, og for å ta utgangspunkt i noe som var kjent for elevene, valgte jeg partallsmønster. Oppgaven ble løst i samarbeid med læringspartner, der de undersøkte hva som var likt og hva som var forskjellig fra figur til figur, tegnet neste figur, skrev inn tallmønsteret under figurene og laget et regneuttrykk til hver figur. De tre første figurene var tegnet inn i oppgaven.

Gjentatt addisjon som strategi

Elevene startet med å beskrive økningen for hverandre. Et eksempel er der en elev uttrykte: «Vi begynner med to, så to oppå. Det blir to mer for hver figur. I figur fire er det fire 2-ere, 2 + 2 + 2 + 2 = 8», som vi ser i tabell 2. Etter hvert som elevene tok i bruk oppsettet i regneramma

Mette Nilssen
UiT – Norges arktiske universitet
mette.nilssen@uit.no

Voksende mønster

Dag 1	Dag 2	Dag3	Dag 4	Dag	Dag
Tallmønster					
Regneuttrykk					

Tabell 1: Regneramme

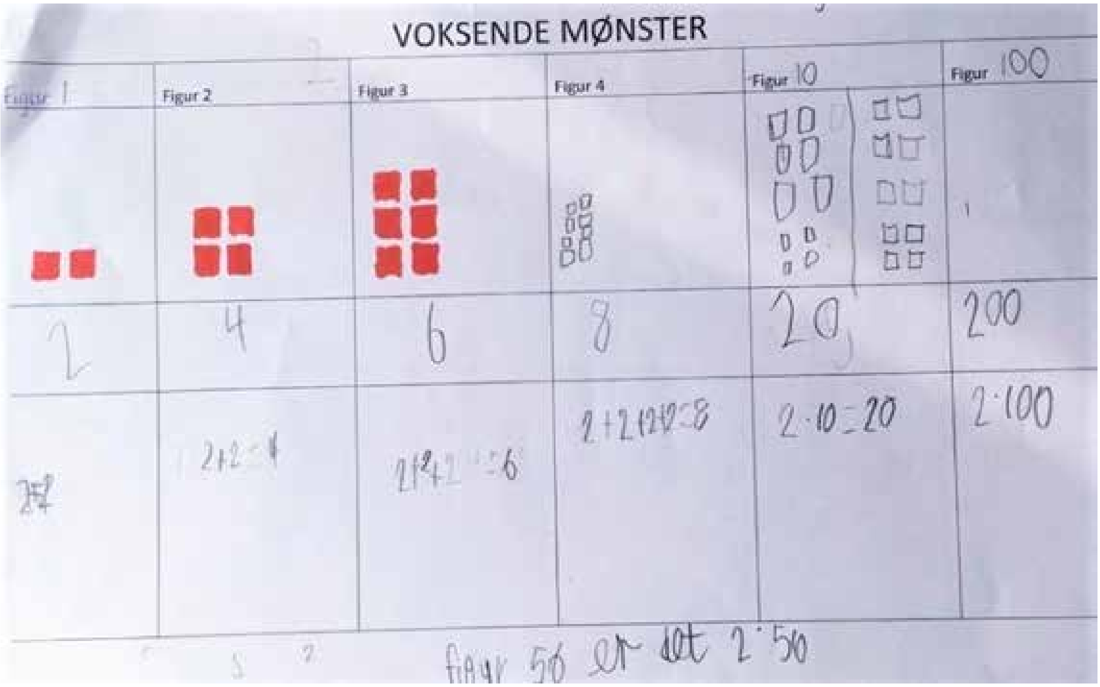
VOKSENDE MØNSTER

Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4	Figur 5	Figur 10
2	4	6	8	10	20
2=2	2+2=4	2+2+2=6	2+2+2+2=8	2+2+2+2+2=10	2+2+2+2+2+2+ 2+2+2+2=20

Tabell 2

der de tegnet tabell 4, noterte ned tallmønsteret og regneuttrykket symbolsk, gjenkjente flere av elevene partallene og sa: «Det er partallene.» Elevene fant det neste leddet i mønsteret ved å se på hvordan mønsteret utviklet seg fra figur til figur, og tok i bruk en rekursiv generalisering (Wilkie, 2014). Ved hjelp av hverdagsspråket og aritmetisk uttrykk regnet de seg frem til riktig antall ved å bruke figurnummeret som her blir variabelen, og kom f.eks. frem til at figur 5 hadde fem 2-ere, men de kjente ikke til at det kan innføres bokstavsymboler for en variabel. De oppdaget også etter hvert at de to objektene i første figur var et mønster som de fant igjen i

Tabell 3: Partallsmønster og dobling.

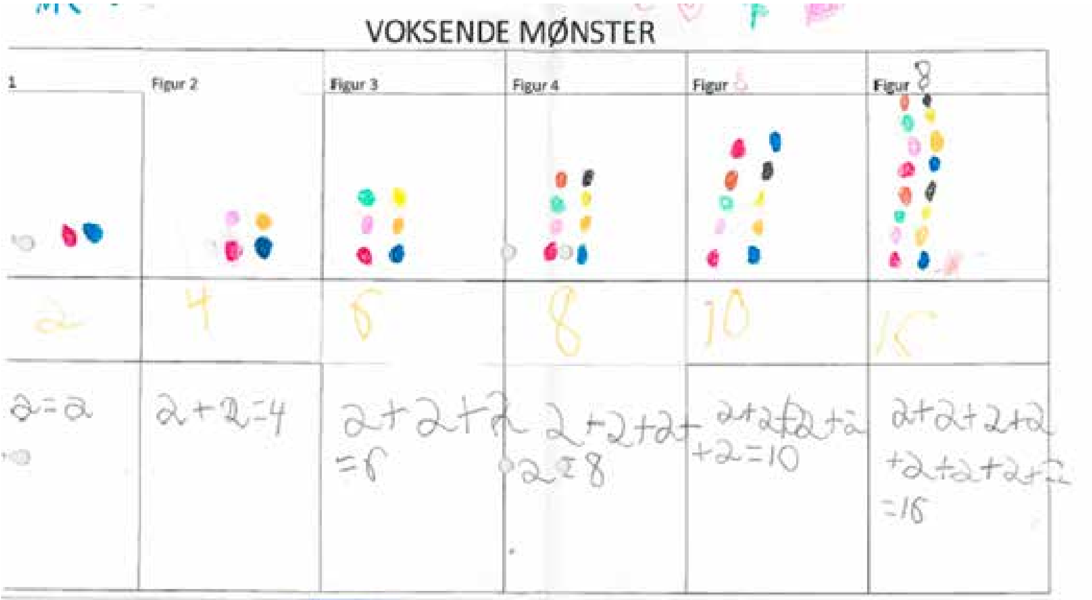


Tabell 4: Partallsmønster og multiplikasjon.

alle figurene, og vi kalte dette noe som var fast (konstant). De andre objektene endret seg, og vi kalte det noe som varierte. Elevene fikk første innføring i konstant- og variabelbegrepet.

Dobling som strategi

Flere elever så den underliggende strukturen som dobling. De klarte etter hvert å frigjøre seg fra det visuelle ved å bruke figurnummeret



Tabell 5: Partallsmønster som gjentar seg.

som de varierende mengdene, og de fant en regel med å doble. De gikk over til å bare skrive regneuttrykk slik vi ser i tabell 3, der de ikke har tegnet figur 100 og figur 200, men skrev regneuttrykkene 100 + 100 = 200 og 200 + 200 = 400. En elev uttrykte videre: «I figur 500 må det være ti-hundre, for vi bare dobler.» Elevene har ifølge Wilkie (2014) generalisert eksplisitt da de så sammenhengen mellom figurnummeret i mønsteret og de varierende mengdene for hver figur.

Multiplikasjon som strategi

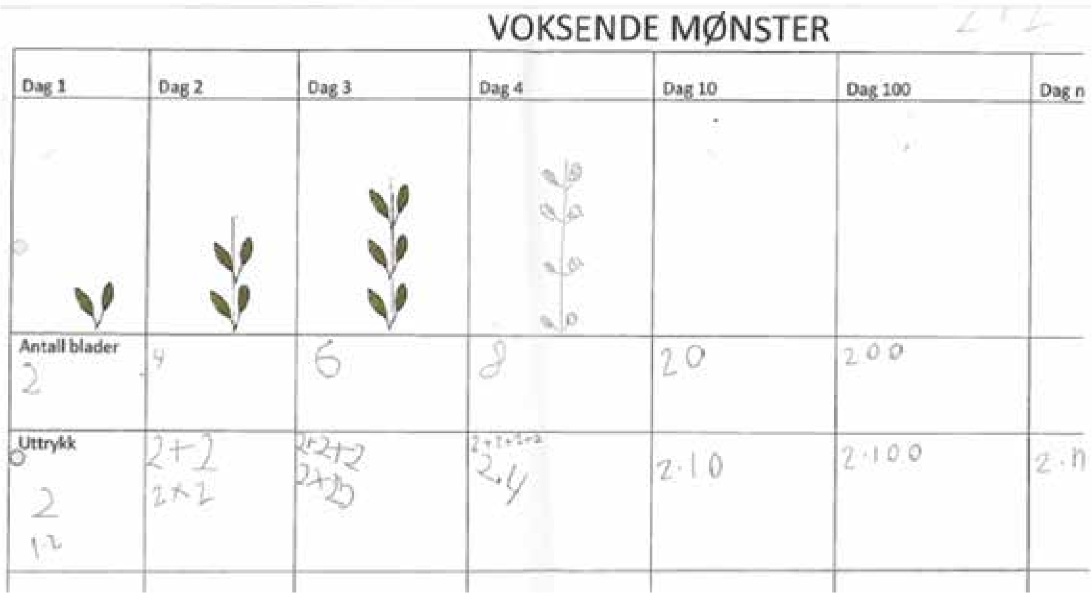
Alle elevene som oppdaget multiplikasjon som underliggende struktur, brukte først rekursiv generalisering i figurene 1 til 4. Elevene som undersøke figurene 10, 56 og 100, fikk en ny antakelse og omorganiserte uttrykkene fra gjentatt addisjon til multiplikasjon, slik vi ser i tabell 4. Jeg tolker dette som at de testet ut spesialtilfeller for å finne antall objekter i figurene. Den ene sa: «Det er svarene i togangen. Vi tar figurnummeret og multipliserer med to, da får vi hvor mange figurer det er.» Elevene klarte også her å frigjøre seg fra det visuelle, og brukte de varierende mengdene til å finne en regel med å multiplisere figurnummeret med 2. Elevene generaliserte eksplisitt (Wilkie, 2014).

Kreativitet og glede i egne konstruksjoner

Ifølge Mason et al. (2014) er det viktig for motivasjonen å være kreativ og treffe valg gjennom egne konstruksjoner, der elevene kan se etter friheter og begrensninger i oppgavene de får, for å demonstrere at de har forstått metoden. En elev tok i bruk sine åtte tusjer for å lage mønster, og den algebraiske tenkningen kom til syne med ulike farger som gjentar seg. Det kan vi se i tabell 5, der eleven tegner prikk nummer 9 og nummer 10 i 5. figur med samme farge som prikk nummer 1 og nummer 2, og dermed gjentar mønsteret seg. For å finne riktig antall i figur 8 tar eleven først opp to fingre, så to til og enda to til, og arbeider systematisk med å sjekke mot figur 5. Eleven tar i bruk rekursiv generalisering (Wilkie, 2014).

Erfaringer fra 3. trinn

Etter denne positive erfaringen videreutviklet jeg opplegget med inspirasjon fra Wilkie (2014). Jeg valgte å bytte ut geometriske former med

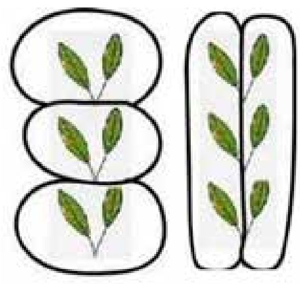


VOKSENDE MØNSTER

	Dag 1	Dag 2	Dag 3	Dag 4	Dag 10	Dag 100	Dag n
Antall blader	2	4	6	8	20	200	
Uttrykk	2 1·2	2+2 2×2	2+2+2 2+2+2	2+2+2+2 2·4	2·10	2·100	2·n

Tabell 6: Partallsmønster med symbolsk generalisering.

en plante som vokser hver dag, og tok utgangspunkt i noe elevene kunne kjenne igjen fra sin hverdag. I tillegg ville jeg tvinge 3.-trinnselever fra den voksende planten på dag 4 over til dag 10, dag 100 og dag *n* (Nilssen, 2019). De ble forklart at dag n er en hvilken som helst dag. Alle elever kom med forslag på konkrete dager før flere ble fortrolig med betydningen av dag *n*.



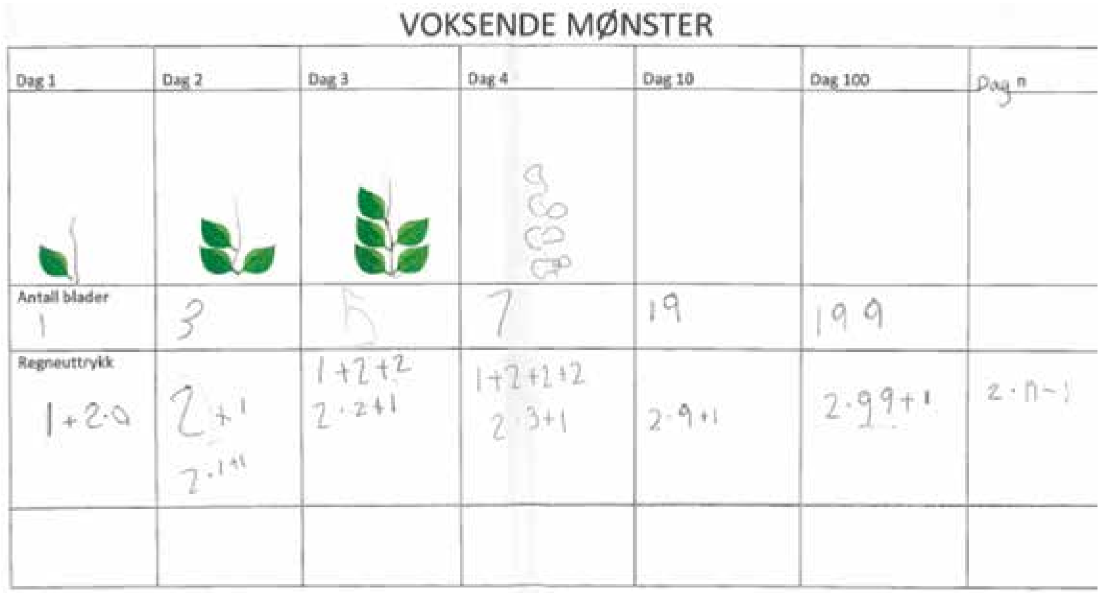
Bilde 1

Partallsmønster

Elevene startet med å se økningen rekursivt, og beskrev mønsteret, der de så økningen med to for hver dag. De tegnet dag 4 og fant riktig antall blader, og kom frem til tallmønsteret 2, 4, 6, 8 på de fire første dagene, slik vi kan se i tabell 6. Ut fra dette laget de regneuttrykk først med gjentatt addisjon, og gikk raskt over til å se de underliggende strukturene som multiplikasjon eller dobling, slik bilde 1 viser.

Oddetallsmønsteret

Oddetallsmønsteret ble litt mer utfordrende enn partallsmønsteret. Samtidig tok elevene med seg erfaringene de hadde fra løsningen av partallsmønsteret, med inn i neste løsningsprosess. Elevene som løste oddetallsmønsteret, oppdaget nye underliggende strukturer underveis i prosessen. De starter med å se bladet fra dag 1 i alle planter, for så å legge til to nye blader for hver dag. Det uttrykte de på dag 4 først som $1 + 2 + 2 + 2$, og gikk fra gjentatt addisjon over til et sammensatt uttrykk med multiplikasjon og addisjon $2 \cdot 3 + 1$. Videre oppdaget de ved å se på regneuttrykkene at det var en 2-er mindre i planten enn dagsnummeret. Denne strukturen fortsatte de med på dag 10 og dag 100, der de skrev $2 \cdot 9 + 1$ og $2 \cdot 99 + 1$, og fant riktig antall blader på begge dagene. Da dag *n* skulle utfor-



Tabell 7: Oddetallsmønster med symbolsk generalisering

skes, oppdaget elevene en ny underliggende struktur ved hjelp av regneramma og raden der antall blader er skrevet inn. De så på dag 10 med 19 blader, og på dag 100 med 199 blader, og oppdaget at det var ett blad mindre enn dagsnummeret multiplisert med to. Dermed endret de uttrykket og generaliserte eksplisitt med å skrive uttrykket $2n - 1$, slik vi ser i tabell 7.

Avslutning

Gjennom å arbeide systematisk ved bruk av regneramma erfarte jeg at mange elever både på 2. trinn og 3. trinn klarte å generalisere muntlig, og flere klarte det også skriftlig. Det klarte de ved å se hva som var likt, og hva som var ulikt i figuren/planten, tallmønsteret og regneuttrykkene.

Regneramma er etter min erfaring et verktøy som kan være med på å hjelpe yngre elever til å holde orden, og til å se sammenhengen mellom ulike representasjonsformer fra tegning over til tilhørende regneuttrykk. Oversikten i regneramma kan hjelpe elever til å se endringene og mønsteret / underliggende strukturer i både figurer, tallmønster og regneuttrykk, slik at de kan klare å generalisere muntlig og symbolsk/algebraisk.

Referanser

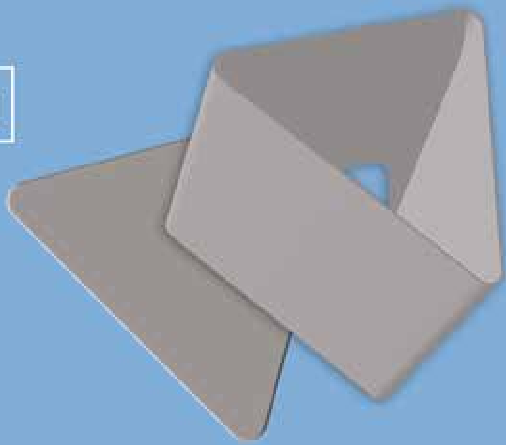
Carraher, D. W., Martinez, M. V. & Schliemann, A. D. (2008). *Early algebra and mathematical generalization*. Springer Link.

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2014). *Å lære algebraisk tenkning*. Caspar Forlag AS.

Nilssen, M. (2019). *Tidlig algebra. Kjennetegn på 3. trinnselevers tilnærming til mønstergeneralisering* (Masteroppgave). UiT Norges arktiske universitet.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37–62.

Wilkie, K. J. (2014). Learning to like algebra through looking : Developing upper primary students' functional thinking with visualisations of growing patterns. *Australian Primary Mathematics Classroom, 19*(4), 24–33.



Naylor

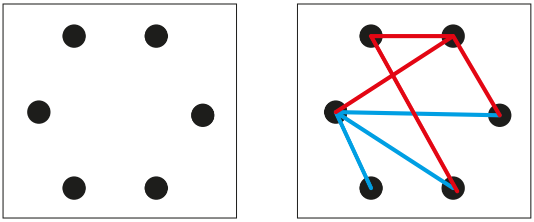
Matematiske papir-og-blyant-spill

Spill egner seg godt for å utvikle kreativ matematisk tenkning. Mange spill krever at spillerne tenker fremover, visualiserer muligheter og bruker logikk for å finne de beste trekkene. De løser nye problemer som dukker opp, kontinuerlig mens de spiller. Når spillerne analyserer strukturen og logikken i spillet og diskuterer strategier med hverandre, lærer de mye om matematiske strukturer. Her er flere interessante spill som kan spilles med papir og blyant, og som gir mange muligheter for kreativ problemløsning og strategier.

Ikke lag en trekant!

Dette spillet er raskt å lære og spille, men strategien er ikke åpenbar. Tegn seks prikker som danner hjørner i en sekskant. Spillerne har hver sin farge. På sin tur tegner en spiller en rett linje mellom to av prikkene. En spiller kan ikke tegne en linje mellom to prikker som allerede har en linje tegnet mellom dem. Målet er å unngå å lage en trekant med sin farge hvor prikkene danner hjørner i trekanten. I figur 1 er et spill i gang. Det fins en rød trekant i figuren, men den har ikke alle tre hjørnene på prikkene, så den teller ikke. Den spilleren som blir tvunget til å tegne en trekant, har tapt.

Mike Naylor
Matematikkbølgen
mike@matematikkbolgen.com



Figur 1: Et spill med 6 prikker

Etter flere runder kan spillerne diskutere strategier. Fins det en strategi som garanterer at en av spillerne vinner? Spill med færre prikker for å se om du kan utvikle en strategi.

Spørsmål som kan være interessante å utforske eller bruke som problemløsningsoppgaver, er:

- Hvor mange trekk kan spillet maksimalt ha?
- Hvor mange mulige trekanter (uansett

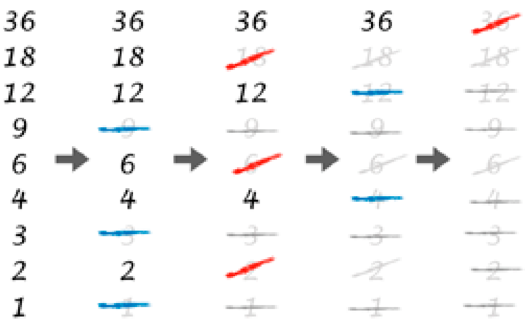
hvilke farger sidene har) kan tegnes mellom prikkene?

– Kan spillet fortsette til alle mulige linjer er tegnet, uten at noen trekanter er tegnet (altså: det blir uavgjort)? Kan du bevise det?

Divisjonsspill

To spillere blir enige om et heltall, n, og skriver ei liste med alle positive faktorer i tallet n, inklusive 1 og n. Etter tur streker spillerne ut et tall på lista og alle faktorene til dette tallet. Spilleren som streker ut n, taper.

Figur 2 er et eksempel med $n = 36$. Første spiller streker ut 9 og alle faktorene, dvs. 3 og 1. Den andre spilleren streker ut 18 og faktorene (6 og 2). Spiller 1 tar bort 12 og 4, og da må den andre spilleren ta bort 36, og han taper.



Figur 2: Hver kolonne er en tur i spillet.

Spillet kan bli en flott problemløsningsoppgave: Hvilke n kan velges slik at den første spilleren er garantert å vinne?

Tips: Begynn med å utforske spesifikke eksempler, som når n er et primtall (13) eller har bare to primfaktorer ($35 = 5 \cdot 7$). Hva hvis n er en potens av et primtall ($2^5 = 32$)? Hva hvis n er et kvadrattall ($11^2 = 121$), og hvordan er $11^2 = 121$ forskjellig fra $10^2 = 100$?

Tall med flere primtallsfaktorer og repeterende primtallsfaktorer kan føre til komplekse og fasinerende strategier!

Spirer

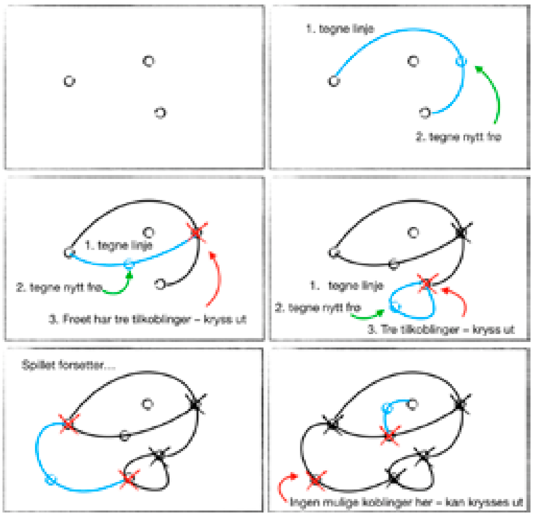
Dette spillet er for to spillere og handler om å tegne spirer og frø. Tegn 3–5 små sirkler som skal forestille «frø». På sin tur skal en spiller:

– tegne en «spire» (en linje) fra ett frø til et annet, eller tilbake til det samme frøet, uten å krysse andre linjer.

– deretter tegne et nytt frø på linjen.

Da er det neste spiller sin tur, som gjør det samme. Et frø kan ikke ha flere enn 3 tilkoblinger. Når et frø har 3 tilkoblinger, er frøet krysset ut og kan ikke brukes lenger. Frø som blir avstengt og ikke har mulige frø å koble til, krysses også ut. Siste spiller som kan tegne en linje, er vinneren.

Figur 3 er et eksempel på begynnelsen av et spill med 3 frø.

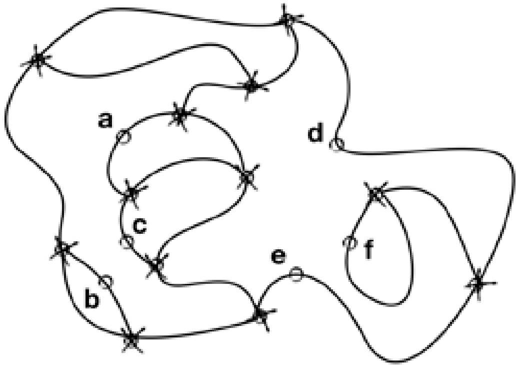


Figur 3: Et spirespill med tre frø.

Ofte kommer spillet til et «kritisk punkt» hvor en av spillerne kan vinne eller tape avhengig av valget sitt. Bruk spillet i figur 4 til å teste gode strategier. Forutsatt at det er din tur, hvordan kan du vinne?

Territorier

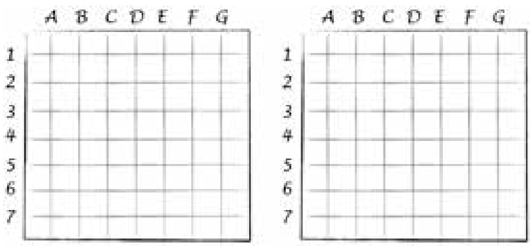
Dette er et spill for to spillere som handler om logikk og romforståelse. Hver spiller tegner



Figur 4: Det er din tur. Hvordan kan du vinne?

noen territorier på et kart. Ved å spørre etter informasjon fra hverandre prøver de å bli den første for å gjenskape motstanderens kart.

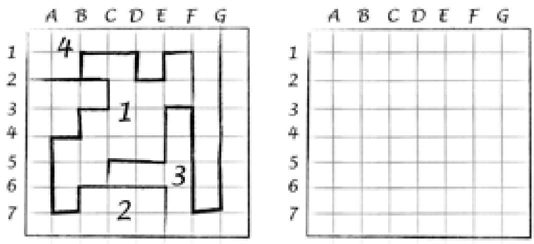
Hver spiller tegner to 8×8 rutenett. Benevn rutenettet ved å skrive fra A til G over de loddrette linjene mellom rutene og 1 til 7 til venstre for vannrette linjer mellom rutene som vist i figur 5.



Figur 5: Hver spiller har to rutenett.

I et av rutenettene tegner spilleren linjer for å lage grenser til fire territorier som er lukket og består av nøyaktig 16 ruter hver. Territoriene markeres med tall fra 1 til 4, som visst i figur 6. Spillerne skal ikke vise kartene sine til hverandre.

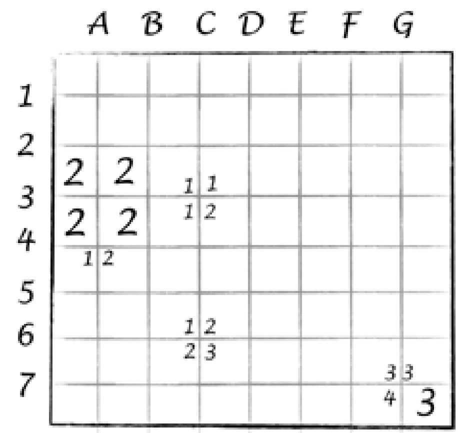
På sin tur spør en spiller om et krysspunkt, for eksempel «B3». Den andre spilleren kikker på sitt kart og sier 4 tall som representerer territoriene til de fire rutene som ligger rundt krysspunktet. For eksempel rundt krysspunkt B3 på kartet i figur 6, er det én rute i territoriet 1 og



Figur 6: Fire territorier er tegnet i venstre rutenett.

tre ruter i territoriet 2. Den andre spilleren sier «1, 2, 2 og 2». Tallene kan nevnes i hvilken som helst rekkefølge.

Spillerne noterer svarene på det blanke kartet sitt ved bruk av små tall eller notater ved siden av kartet, for eksempel som i figur 7. I figuren kan vi se at spilleren fikk svaret «2, 2, 2 og 2» på A3, som gir svarene til alle rutene rundt A3. På G7 fikk spilleren svar «3, 3, 3 og 4», som var nok for å bestemme at 3 må være i hjørnet. Hvis ikke vill ruten med 4 bli avstengt fra resten av kartet, og territorium 4 vil ikke tilfredsstille kravet om å være på 16 ruter.



Figur 7: Spiller noterer informasjon fra den andre.

Om en spiller tror at han eller hun har løst motstanderens kart, kan spilleren i stedet for å spørre om et krysspunkt presentere svaret til motstanderen. Hvis det ikke er riktig, mister han eller hun sin tur, og spillet fortsetter. Hvis det er riktig, er spillet over.

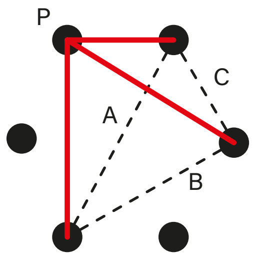
En kortere versjon kan spilles med et 6×6 rutenett og territorier som består av 9 ruter hver.

Noen løsninger

Ikke lag en trekant

Spillet vil ha maksimalt 15 trekk. Det kan tegnes 5 linjer fra første prikk, 4 fra den neste osv. Dette gir 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 antall trekk. Hver trekant trenger 3 prikker, så antall trekanter kan regnes ut ved å finne hvor mange måter du kan velge 3 prikker på fra et sett med 6 (6C3) som gir 20 trekanter[1].

Det er ikke mulig at spillet blir uavgjort. Hvis alle linjer er tegnet, er det 5 linjer fra hver prikk. Velg en av prikkene. Det må være minst 3 linjer av en farge koblet til denne prikken, siden det bare er to farger. I figur 8 er prikken P, og de 3 linjene er røde (de andre linjene er ikke tegnet i figuren).



Figur 8

Se på prikkene på den andre enden av disse linjene. De er også koblet sammen med 3 linjer, A, B og C i figur 8. Hvis en (eller to eller tre) av disse linjene er rød, har vi en rød trekant (eller flere). Hvis ingen av A, B og C er røde, er alle blå, og da har vi en blå trekant med A, B, og C. Derfor, hvis alle mulige linjer er tegnet, må vi ha minst én trekant der alle sidene har samme farge. Det er derfor ikke mulig at spillet blir uavgjort.

Hvordan vinne Spirer i figur 4?

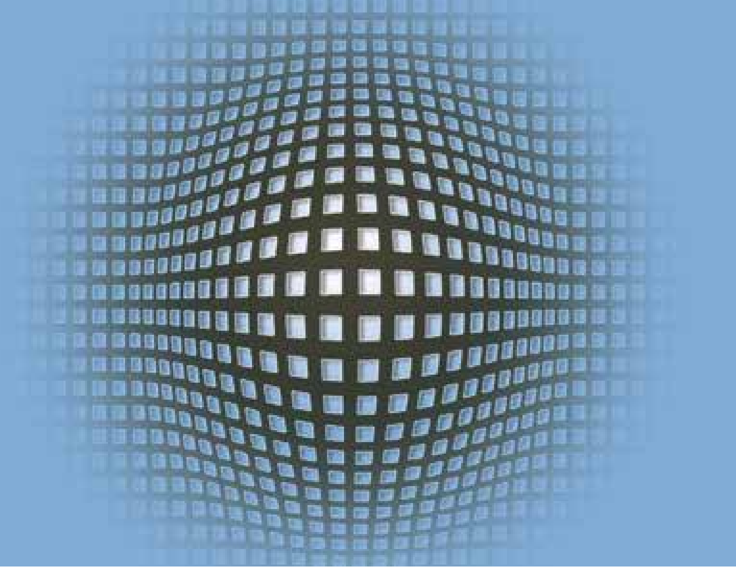
Det finnes bare én måte å vinne på. Du må koble d til e på utsiden av figuren. Da blir f og det nye frøet du tegner, ute av spillet. Med bare a, b og c i spillet blir det to trekk igjen, ett til motstanderen din og det siste vinnertrekket til deg.

Note

1 Utregningen skjer ved binomialkoeffisienten:

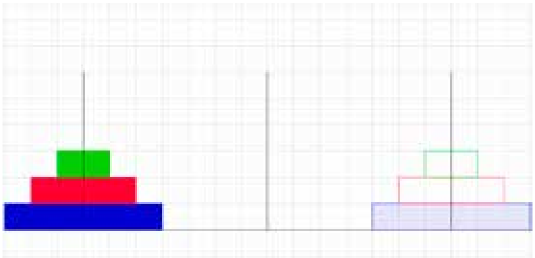
$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 20$$

På mange kalkulatorer heter knappen for dette «nCr» eller liknende.



Tårnene i Hanoi

Dette er et spill som består av tre pinner og noen runde skiver som har et hull i midten. Alle skivene har ulik diameter. Når spillet starter, er alle skivene plassert over en pinne og ordnet i rekkefølge slik at den største skiven ligger nederst og den minste på toppen. Figuren under viser dette med tre skiver. Skivene danner et tårn med høyde 3.



Spillet går ut på å flytte tårnet over til en annen pinne, f.eks. den til høyre, etter følgende regel:

Ole Einar Torkildsen
Høgskulen i Volda
oet@hivolda.no

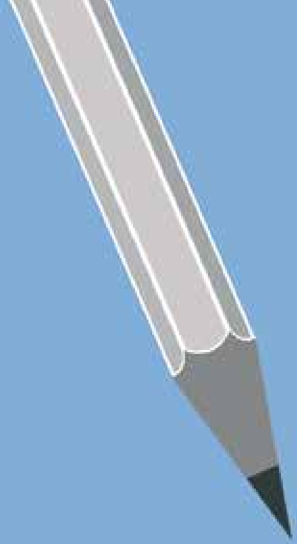
Du kan flytte bare én skive om gangen, og du kan ikke legge en større skive over en mindre, f.eks. kan ikke den røde skiven ligge over den grønne skiven.

Spørsmålet er: *Hvor mange flytt trengs for å flytte dette tårnet over til den høyre pinnen?*

Undersøk også hvor mange flytt du trenger å utføre når tårnet har flere skiver.

En vietnamesisk legende forteller at det skal ha eksistert et stort tempel med tre tårn (pinner) og 64 skiver av gull. Munkenes oppgave var å flytte alle skivene over fra ett tårn til et annet, etter regelen forklart over. Legender forteller også at når de er ferdige med oppgaven, skal enden være nær. Dersom munkene klarer å flytte én skive i sekundet, hvor mange år vil det ta før de er ferdige med oppgaven?

På nettet fins det program som kan være nyttige redskaper i undersøkelsen, f.eks. https://www.matematikk.org/trinn1-4/hanoistaarn/



Jahr

Matematikk og nytte

Når forskere intervjues om hva de har funnet ut, kommer nesten alltid spørsmålet om hva resultatene kan brukes til. Ofte blir forskeren litt forlegen over ikke straks å kunne fortelle hvordan menigmanns liv kan bli bedre på en eller annen måte, kanskje først og fremst materielt, på grunn av funnene som er gjort. Ikke minst matematisk forskning sliter med å rettferdiggjøre seg slik. Å forstå abelprisvinnerens arbeid helt ut er forbeholdt de få, mens arbeidet som gir en nobelpris i medisin, lett kan populariseres og dermed gi håp til mange. Men den som får nobelprisen i litteratur, får aldri spørsmålet om hva disse romanene, skuespillene eller diktene kan brukes til. Er disse da helt fritatt fra kravet om nytte? Jeg mener nei. For å forstå dette svaret må vi utvide vårt begrep om nytte. Det å berike menneskenes liv er etter min mening noe av det nyttigste som kan gjøres. Dette er skjønnlitteraturens nytteverdi. På samme måte har matematikken en egenverdi, som kunst, i tillegg til de mer praktiske anvendelsene. Vitenskaper av alle slag drives framover ikke bare ut ifra forhåndsbestemte praktiske formål, men, kanskje i hovedsak, av menneskets nysgjerrighet etter å forstå hvordan verden er. Nytten av forskningen ligger da i gleden forskerne har av å forstå verden bedre, og gjennom dette bli inspirert til å formidle metodene og resultatene slik at også andre får del i denne gleden. Anvendelse av matematikk i moderne teknologi, økonomi osv. krever avanserte matematikkunnskaper. Veien dit er lang, og går ikke alltid gjennom praktiske anvendelser. Derfor er det uhyre viktig å vekke og utvikle elevenes sans for den fascinerende skjønnheten som ligger i det å forstå de matematiske sammenhengene og strukturene. Nysgjerrighet og kunnskapstørst er kanskje det viktigste skolen skal gi i sin formidling av kunnskaper.

Mange sier at matematikken er overalt i verden utenfor oss. Det er en besnærende tanke, men jeg mener at det er feil å tenke slik. Jeg ser det slik at matematikkens verden er inne i våre hoder; en fantasiverden. Et rektangel er ikke matematikk. Men hvis vi i en firkant finner ut at tre av vinklene er rette, trenger vi ikke å måle

Einar Jahr
Pensjonert matematikklærerutdanner
einjahr@hotmail.no

den fjerde; den er nødvendigvis også rett. Og vi vet at diagonalene nødvendigvis er like lange og halverer hverandre. Da bruker vi matematikk. Den norske matematikeren Axel Thue sa det slik: «Jo fjernere fra praktisk anvendelse, desto viktigere!» Han ble professor i anvendt matematikk. Dette virker jo paradoksalt, men det innebærer en dyp sannhet. Matematikkens nytteverdi ligger i en enorm fleksibilitet. Dens abstrakte læresetninger kan brukes i nær sagt uendelig mange forskjellige praktiske sammenhenger. Hvis vi skal lære matematikk bundet til spesielle anvendelser, blir det som å lære italiensk etter «parlør»-metoden. Vi kan be om et bord ved vinduet i en restaurant, men hvis hovmesteren sier at de bordene som tilsynelatende er ledige, er reservert til noen som kommer om et kvarter, men at vi derimot kan få det like til høyre for den runde søylen ved kjøkkendøra, forstår vi ingenting.

I skolematematikken er det viktig å få fram matematikkens praktiske nytteverdi. Samtidig er det en analogi med å lære å spille et instrument: Det blir ikke vakker musikk fra første forsøk. Man må lære de grunnleggende bevegelsene, og skalaer og fingerøvelser er nødvendige, selv om det kan være kjedelig å øve på dem. Etyder som er fin musikk, finner vi hos Bach og Chopin, men ingen begynner der. Vi må være ærlige overfor elevene og si at mesteparten av skolematematikken er øvelser i å tilnærme virkeligheten med forenklede matematiske modeller som er gode nok til at de kan brukes i praksis. Samtidig skal elevene få tilstrekkelig mange glimt av den fantastiske veien videre.

Noen later til å tro at de som skal bli ingeniører eller andre brukere av avansert matematikk, kan vente til høyere studier med å lære slikt som algebra, annengradslikninger og Pytagoras. Det er en forståelig, men helt feilaktig tanke. Hvilke elever skal dette være? Det er ikke så enkelt at det bare er å plukke ut dem som er raskest i det enkleste som alle har daglig bruk for. Av egen erfaring både som elev og matematikklærer vet jeg det svært godt. Det kan jo være at det trivielle kjeder noen.

Å kunne matematikk er ikke å huske noen regler for hvordan man løser standardoppgaver fra læreboka. Det handler om å *tenke*, kritisk og strategisk. Dette rendyrkes i matematikk mer enn i noe annet fag, og har overføringsverdi til mange områder. Det er ikke lurt å være avhengig av å ha noen eksperter til å tenke for seg.

Det er viktig for samfunnet at det allmenne kunnskapsnivået er så høyt som mulig. Vi må ikke være så redde for å påføre elevene nederlag at vi ikke gir dem sjansen til å vinne en eneste seier. Alle må få prøve seg, alle må lære å arbeide hardt for å lære så mye som mulig, men ingen skal få sår på sin sjel av ikke å klare alt. Det er den pedagogiske utfordringen.

Smestad

En formel til besvær

Våren 2017 ble det gitt en eksamensoppgave til landets tiendeklassinger som jeg har tenkt mye på i ettertid. Oppgave 6a i del 2 lød som følger: «En bil har en gjennomsnittsfart på 60 km/h. Hvor langt kan bilen kjøre på 1,5 h?» Siden det er viktig å se sammenhengen oppgaven står i, viser jeg i tekstboksen hele oppgaven (Andresen et al., 2017).

I de tre årene 2017, 2018 og 2019 evaluerte FAFO og OsloMet grunnskolens matematikkeksamen på oppdrag fra Utdanningsdirektoratet. Vi samlet blant annet inn vurderingsskjemaer knyttet til om lag 4000 elever. Oppgave 6a fikk 76 prosent av landets tiendeklassinger til. Av de elevene som ut fra poengene havnet på karakteren 1, var det 90 prosent som *ikke* fikk til denne oppgaven (se figur 2). Hvorfor fikk hver fjerde tiendeklassing ikke til denne oppgaven? Vil ikke de aller fleste elever langt ned på barnetrinnet klare å svare riktig på hvor langt en bil kjører på en og en halv time når du vet hvor langt den kjører på én time?

Jeg har vært med på å holde en del innlegg om eksamen og har diskutert denne oppgaven med mange elever, lærere og lærerutdannere. De har kommet med et mangfold av interessante forslag til hvorfor så mange elever ikke fikk til denne oppgaven. Jeg skal her diskutere noen av disse, og etter hvert nevne en elev som gjorde et ekstra sterkt inntrykk.

«Til vanlig bruker vi t for time, h er engelsk», sa en elev. Denne h-en i oppgaven er ofte det første som nevnes som forvirrende når opp-

Oppgave 6 (5 poeng)

a) En bil har en gjennomsnittsfart på 60 km/h. Hvor langt kan bilen kjøre på 1,5 h?

Bremselengden *s* målt i meter for en bil er gitt ved formelen

$$s = \frac{v^2}{19{,}62 \cdot f}$$

- *v* er farten til bilen målt i meter per sekund (m/s)
- *f* er et friksjonstall, dette avhenger av veidekket

b) En bil kjører på tørr asfalt. Da er $f = 0{,}9$. Farten er 21 m/s. Så bremser bilen. Bruk formelen ovenfor og vis at bremselengden til bilen er ca. 25 m.

c) En bil kjører på våt asfalt. Da er $f = 0{,}6$. Så bremser bilen, og bremselengden er 15 m. Bruk formelen ovenfor til å bestemme farten til bilen.

Bjørn Smestad
OsloMet – storbyuniversitetet
bjorsme@oslomet.no

Figur 2: Andelen rett, feil og ubesvart på oppgave 6a, ut fra eksamenskarakter.

gaven diskuteres. I eksamensoppgaver har ikke km/t forekommet siden 2009. Utdanningsdirektoratet har bestemt at det er de offisielle forkortelsene for SI-måleenhetene som skal brukes på eksamen, og dette vet jo de elevene som har finstudert den 28 sider lange eksamensveiledningen. De elevene som bare har forholdt seg til lærebøkene, er ikke så heldige – noen lærebøker bruker km/t, andre km/h.

Noen mener at ordet «gjennomsnittsfart» gjør oppgaven vanskeligere enn om det bare sto «fart», spesielt hvis elevene er utrygge på begrepet gjennomsnitt. Bruken av ordet «gjennomsnittsfart» er sikkert ment å gjøre oppgaven mer virkelighetsnær, siden ingen bil kjører i konstant fart i en og en halv time. Andre mener at det er ordet «kan» som er forvirrende – hvis bilen kjører i 60 km/h i gjennomsnitt i 1,5 h, så kjører den faktisk 90 km, det er ikke noe «kan» inne i bildet her! Oppgaven inneholder dessuten et desimaltall (1,5), og noen trekker også dette fram som en forklaring.

Ser vi på hele denne sida i eksamenssettet (figur 1), ser vi at det dukker opp en litt stygg formel med en f i nevner litt lenger ned i oppgaven. Noen elever kan ha droppet hele oppgaven da de så denne formelen – kanskje spesielt de som har kommet på at det finnes en vei-fart-tid-formel som de ikke helt husker. I tillegg har oppgaven et stort bilde av to politimenn, og dette er sannsynligvis mer distraherende enn nyttig. Og så er det de som mener at de elevene som gjerne skårer svakest, har fått streng beskjed om hvilke oppgaver de bør konsentrere seg om på del 2 av eksamen for å sanke noen få poeng. Da er det neppe oppgaver med kompliserte formler i som prioriteres.

Slik er det med eksamensoppgaver: Det vil alltid være noe med ordbruken eller illustrasjonene vi kan stille spørsmål ved. Diskusjonene om oppgaven har derfor ofte handlet mest om detaljer ved oppgaveutformingen. Men så besøkte vi noen skoler på vårparten i 2018 og ba tiendeklasseelever arbeide med et oppgavesett med blant annet denne oppgaven, som altså var fra eksamen året før. Jeg husker godt en av elevene, la meg kalle ham Per. Jeg spurte hvordan det gikk, og han sa at han ikke fikk til oppgaven. Jeg kikket ned på arket hans, og så at han hadde skrevet tallet 90, så jeg spurte ham naturligvis om det. Per svarte «Ja, jeg ser at svaret blir 90, men jeg husker ikke formelen». Han forklarte at når bilen kjørte 60 km på en time, måtte den kjøre halvparten, 30, på en halvtime, så det ble 90 til sammen. Da jeg sa at det var helt fint å skrive sånn som han tenkte, ble han overrasket. Han trodde at han måtte skrive det på en «fancy» måte, som han sa. Da vi etterpå skulle diskutere oppgavene i klassa, ba jeg ham forklare hvordan han tenkte, og ga ham ros for løsningsmetoden.

Inntrykket mitt ble at problemet for Per var at han visste om at det fantes en formel som kunne brukes, at han trodde at han *måtte* bruke den formelen, og at han ikke husket den. Så vil noen sikkert si at hovedproblemet var at han ikke husket formelen. Jeg tenker at hovedproblemet lå i at han trodde at han måtte bruke den.

På disse skolebesøkene ba vi også tiendeklassinger om begrunnelser for at de så på denne oppgaven som enkel eller vanskelig. De som syntes den var enkel, begrunnet det med at den var enkel hvis man husket vei-fart-tid-trekanten, og at de hadde gjort liknende oppgaver før. Ingen argumenterte med at det var lett å løse oppgaven ved å tenke logisk. De som syntes den var vanskelig, begrunnet det med at det var vanskelig å huske formelen og rekkefølgen på elementene i den, at det var mye tekst, og at de ikke var så flinke på dette med km og t. (Se også Bjørnset et al., 2018.)

De innspillene elevene ga oss, passer godt inn i det bildet forskning gir av hvordan mange elever ser på matematikkfaget. Mange elever oppfatter matematikk som et fag hvor elevene skal lære seg bestemte metoder, og hvor oppgavene er til for å vise at de har lært metoden (de Corte et al., 2002). Ofte lærer elevene huskeregler som forteller hva de «må» gjøre, men som de har vanskelig for å huske (Herheim, 2016). Eksemplet med Per antyder at et slikt syn kunne føre til problemer ved eksamen etter LK06. Fagfornyelsens matematikkfag legger mer vekt på utforskning og på å argumentere for sine egne metoder. Det gjør det enda viktigere å jobbe aktivt med elevenes syn på matematikkfaget.

Jeg er skeptisk til den sterkt økte vekten på flervalgsoppgaver på eksamen de siste årene (Bjørnset et al., 2020). Flervalgsoppgaver fratar elevene muligheten til å vise sin kommunikasjons-, argumentasjons- og representasjonskompetanse. Når det gjelder akkurat Pers arbeid med denne oppgaven, kunne det imidlertid hatt noe for seg – flervalgsoppgaver kan gi inntrykk av at det bare er svaret som gjelder, men paradoksalt nok kan det kanskje åpne for at elever som tror de ikke husker den «riktige» metoden, likevel tør å komme med sitt svar. Så kanskje elever som Per ville ha fått et velfortjent poeng på denne oppgaven hvis dette hadde vært en flervalgsoppgave.

Men det er ikke i flervalgsoppgaver løsningen ligger. For at elevene skal få vist kompetanse i kommunikasjon, argumentasjon og representasjonsformer, trenger de mot til å tenke logisk og å stole på egne vurderinger også på eksamen. Dette må vi arbeide med i undervisningen. Og så må eksamensoppgavene gi elevene muligheter til å vise sin samlede kompetanse – og inngi tillit til at det ikke er bare én løsningsmetode som gir uttelling. I eksempeloppgavene som Utdanningsdirektoratet nå har lagt ut, er det flere oppgaver hvor elevene må finne sin egen løsningsmetode, og det kan i så måte være et godt tegn.

Takk til ...

Takk til mine medforskere i evalueringsprosjektet som empirien er hentet fra.

Referanser

Andresen, S., Fossum, A., Rogstad, J. & Smestad, B. (2017). *På prøve. Evaluering av matematikkeksamen på 10. trinn våren 2017*. FAFO.

Bjørnset, M., Fossum, A., Rogstad, J. & Smestad, B. (2020). *På like vilkår? Evaluering av matematikkeksamen på 10. trinn 2017–2019*. FAFO.

Bjørnset, M., Fossum, A., Rogstad, J., Smestad, B. & Talberg, N. (2018). *Digitale skillelinjer. Evaluering av matematikkeksamen på 10. trinn våren 2018*. FAFO.

de Corte, E., Op't Eynde, P. & Verschaffel, L. (2002). 'Knowing what to believe': the relevance of students' mathematical beliefs for mathematics education. I B. Hofer & P. R. Pintrich (red.), *Personal epistemology: The psychology of beliefs about knowledge and knowing* (s. 299–322). Lawrence Erlbaum.

Herheim, R. (2016). Matematikk som magi – hugsereglar og konsekvensar. I T. E. Rangnes & H. Alrø (red.), *Matematikklæring for framtida. Festskrift til Marit Johnsen-Høines* (s. 129–146). Caspar Forlag AS.

Amdal, Morud

Skriveoppgaver i matematikk

I denne artikkelen begir vi oss inn på semiotiske irrganger i de matematikkfaglige skriveoppgavene i Normprosjektet[1]. Vi ser disse i sammenheng med den grunnleggende ferdigheten skriving i matematikk. Spesielt vil vi se på skriveoppgaver som er gitt elever på mellomtrinnet. Spørsmålet vi stiller, er: Hvilke semiotiske muligheter, som bruk av symboler, figurer eller tegninger, legger oppgavene i Normprosjektet til rette for? Spørsmålet omfatter både å se på hvordan matematikkoppgavene legger til rette for multimodalitet, og hvordan oppgaveteksten kan bidra til å åpne eller lukke for multimodalitet avhengig av hvem som er mottaker. For å svare på spørsmålet har vi gjort en studie av et utvalg av skriveoppgaver i matematikk for 6. og 7. trinn utformet av lærerne i Normprosjektet.

Semiotikk er læren om tegn, eller tegnsystemer (O'Halloran, 2015) og dreier seg om hvordan vi uttrykker noe, og hvordan vi skaper mening. I uttrykket semiotiske muligheter legger vi altså hvilke tegn eller uttrykksformer det er mulig å bruke når en oppgave skal besvares. Ved multimodalitet kombineres to eller flere tegnsystem for å skape mening. Med skriveoppgaver mener vi her tekster som lærere formulerer – med mål om å få elever til å skrive (Otnes, 2021). Vi begynner med å ta for oss skriving i matematikk.

Arne Amdal
NTNU
arne.amdal@ntnu.no

Elin Morud
NTNU
elin.morud@ntnu.no

Dette er en fagfellevurdert artikkel på nivå 1. Tangenten er et sted der læreres og forskeres perspektiv på matematikkundervisning møtes og derfor har vi med praksisrelaterte forskningsartikler. Les mer i retningslinjene: www.caspar.no/nivaa1

Hvorfor skriving i matematikk?

Skriving i de forskjellige fag kan ha ulike formål. Å jobbe med skriving i matematikk kan gi grunnlag for å lære faget og for å løse matematikkproblemer. Misfeldt (2006) argumenterer for at i matematikkfaget er det ikke slik at man først tenker ferdig, så skriver man det man har tenkt. Selve skrivingen krever bearbeiding av tanken.

Dysthe et al. (2002) fokuserer på begrepene *skrive for å lære* og *lære å skrive* som to ulike mål for ferdigheten skriving. Det skilles mellom skriving som en aktivitet for å fremme egen læring og det å lære skriving for å kunne presentere stoff for andre. Begrepene *tenkeskriving* og *presentasjonsskriving* (Dysthe et al., 2000, s. 41) brukes også for å få fram noe av det samme, hvor tenkeskriving er en friere form hvor målet er å forklare/klargjøre tanker for seg selv eller andre, utvikle ideer og «tenke med pennen». I tenkeskriving er ofte mottaker skriveren selv, eller det kan være medelever/-studenter eller lærere. Presentasjonsskriving fokuserer på kommunikasjon, det å presentere og framstille stoff for andre. I skolesammenheng kan mottaker av teksten ofte være en lærer eller medelever. I slike tekster forventes uttrykket å være mer velskrevet og mottakerorientert enn ved tenkeskriving.

For matematikk kan dette skillet identifiseres ved at «skrive for å lære» eller tenkeskriving handler om det å formidle en forståelse til seg selv. I tenkeskrivingen kan det ofte inngå ulike uttrykksformer som skrift og tegninger eller figurer (Nordbakke, 2014; Enge & Iversen, 2010). Enge og Iversen (2010) viser i sin artikkel gode eksempler på det å «tegne for å lære», og synliggjør dermed det multimodale aspektet ved matematisk problemløsning. Det multimodale er selvsagt også sentralt i presentasjonsskrivingen.

Læreplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020) skiller også mellom tenkeskriving og presentasjonsskriving. Skriving i matematikk framheves som «ein reiskap for å utvikle eigne tankar og eiga læring». Det framgår i beskrivelsen av den grunnleggende ferdigheten skriving at matematikken er mangfoldig i sine uttrykk, og det står at «det å skrive inneber å beskrive og forklare samanhengar, oppdagingar og idear ved hjelp av formålstenlege representasjonar» og «å kunne løyse problem og presentere løysingar som er tilpassa mottakaren og situasjonen». For å kunne beskrive og forklare i matematikk vil det altså være nyttig for elevene å håndtere et mangfoldig skriftlig uttrykk.

Det er flere momenter som kan trekkes fram for å begrunne hvorfor det er viktig å vektlegge skriving i matematikkfaget. Kolstø (2010) framhever at elevene bør settes i stand til å delta på arenaer der matematisk kunnskap og problemløsning inngår. Videre argumenterer han for at elevene har bruk for å lære seg fagets egenart når det gjelder fagets tenke- og arbeidsmåte. Det å avkode et matematisk fagspråk eller kode om informasjon til et matematisk språk er nødvendige ferdigheter i faget. Her understrekes altså viktigheten av å være i stand til å veksle mellom ulike modaliteter.

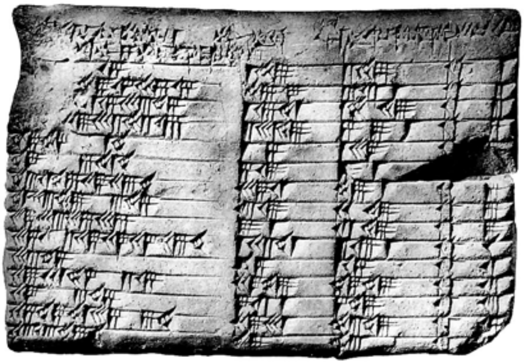
Multimodalitet i matematikk

Lemke (1998) hevder at matematikken av natur er multimodal. Man velger det uttrykket en mener passer best, men en må samtidig være bevisst på at andre uttrykk ikke nødvendigvis gir samme mening. Det matematiske symbolspråket er mer kraftfullt, men mindre intuitivt enn andre mer visuelle uttrykk. Det kan representere mønster og sammenhenger som ikke så lett lar seg visualisere, og med symbolspråket kan det være lettere å sammenlikne og kombinere, sier Lemke (1998).

Det matematiske symbolspråket inngår i ferdigheten *skriving i matematikk* og er et resultat av en lang historisk utvikling i faget. Under beskrivelsen av den grunnleggende ferdigheten skriving i Kunnskapsløftet 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2020) står det om utvikling av skriveferdigheten at «Utvikling i å skrive i matematikk går frå å bruke kvardagsspråk til gradvis å bruke eit meir presist matematisk språk».

Vi gir her et bakteppe som kan illustrere matematikkens multimodale natur i dag ved å presentere glimt fra den historiske utviklingen av skriving i matematikk. Vi ønsker med dette å synliggjøre at læreplanens beskrivelse av utvikling i matematisk skriving kan sies å være i godt samsvar med den historiske utviklingen av multimodalitet i matematikk.

Menneskene har gjennom tidene hatt behov for å skrive for å utvikle og dokumentere matematisk kunnskap som er utviklet. Dette har gitt seg forskjellige utslag. Den berømte leirtavla *Plimpton 322* (år 1900 før Kristus) viser at babylonerne i en viss forstand hadde kjenn-

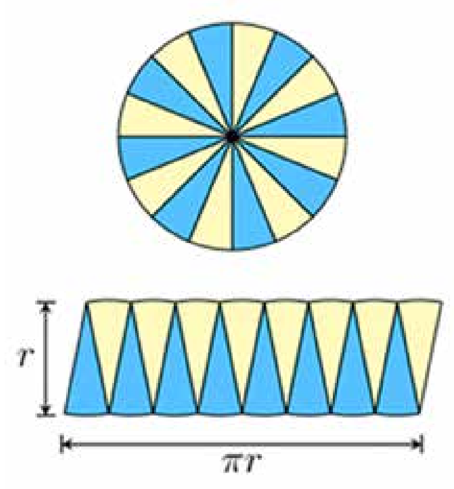


Figur 1: Plimpton 322. Kilde: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plimpton_322.jpg

Figur 2: Elementene. Kilde: https://en.wikipedia.org/wiki/Oxyrhynchus_Papyri

skap til den pytagoreiske læresetningen idet den består av en tabellarisk oversikt over mange av de første pytagoreiske talltriplene (Eves, 1990). Det matematiske uttrykket vi her ser eksempel på fra denne tiden, er altså en tabell.

Med grekerne, ca. 300 år før Kristus, kom det en revolusjon i matematikken. Fra at man var opptatt av hva og hvordan, spurte man nå hvorfor. Det utviklet seg et behov for en sterkere stringens i slutningene. Matematikk ble etter hvert oppfattet som et system som kan utvikles ut fra aksiomer. Figurer ble en viktig del av uttrykket, men det ble også argumentert i form av ren prosa. Figur 2 viser et fragment fra en versjon av Elementene fra ca. år 100, der det er brukt hjelpefigur og prosa, og det multimodale uttrykket er tydelig til stede.



Figur 3: Bhaskara

I andre kulturer, som hos inderne, var uttrykket mer visuelt orientert. De nøyde seg ofte med ordet «se» når de skulle bevise eller forklare noe. Brun (1964) nevner et eksempel fra inderen Bhaskara (1100-tallet):

> Sirkelflaten får man som et rektangel av den halve diameter og den halve sirkelperiferi. Se!

En kort prosatekst konstaterer sammenhengen mellom areal og omkrets i en sirkel, men forklaringen ligger i den tilhørende figuren. Tekst og figur utfyller hverandre i en multimodal tekst.

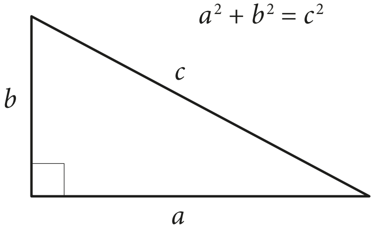
Den skriftlige argumentasjonen i matematikk og det matematiske symbolspråket har det historisk sett tatt lang tid å utvikle. Iversen (2015, s. 226) skriver at «[d]en matematiske symbolisme er gennem historien udviklet som en semiotisk ressource til at beskrive og bearbejde abstrakte relationer og mønstre». Utviklingen har gått fra såkalt retorisk algebra, der løsningene av problemer ble skrevet i ren prosastil til symbolsk algebra slik vi kjenner det i dag. For mange kan det være noe overraskende at det symbolspråket vi kjenner fra dagens matematikkbøker, ikke er eldre enn 400 år.

Et eksempel på symbolspråkets effektivitet over løpende tekst er følgende to formuleringer av Pytagoras' læresetning. Enten slik:

> Når sidene i et rettvinklet triangel er målt med den samme lengdeenhet, så er kvadratet av det tall som angir hvor mange lengdeenheter som hypotenusen inneholder, lik summen av kvadratene av de tall som angir hvor mange lengdeenheter hver av katetene inneholder (Bonnevie & Eliassen, 1934, s. 94).

Eller slik:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Utviklingen av det matematiske symbolspråket har lettet kommunikasjonen av matematiske framgangsmåter og løsninger samtidig som de matematiske sammenhengene blir uttrykt på en mer og mer økonomisk måte (O'Halloran, 2015). Det var den raskt utviklende naturvitenskapen på 1500-tallet og utover som førte til et press på matematikken om å innføre rene symboler (Kline, 1972, s. 259).

Kunnskapsløftets beskrivelse av den grunnleggende ferdigheten skriving i matematikk gjenspeiler mange av de framstillingsmåtene vi her har vist til. Vi finner igjen varierte uttrykk som tabeller og figurer kombinert med prosatekst og viser slagkraften i et formelt og presist symbolspråk.

Det er gjort flere studier av multimodalitet i matematisk skriving, både av lærebøker og av elevtekster. Meaney (2012) viser i en studie fra New Zealand at både lærere og elever mener det å jobbe med skriftlige forklaringer og begrunnelser bidrar til å støtte deres matematiske tenkning. Norberg (2019) har studert lærebøker på barnetrinnet i Sverige og finner at det er krevende for elevene å manøvrere blant ulike modaliteter, og at det derfor er viktig å ta hensyn til dette når undervisning skal planlegges. Ulland et al. (2018) har studert potensielle sammenhenger mellom skriving og forståelse blant elever fra 7. og 10. trinn i Norge, og finner at «en kombinasjon av utregning og forklarende tekst gir mer informasjon om elevenes matematikkforståelse […] enn utregningen med tall alene». Halliday og Matthiessen (2004) peker på at matematikkens språk er en designet semiotisk ressurs og på den måten skiller seg fra (verbal) språk, som har en mer naturlig utvikling. O'Halloran (2015) har studert det meningsfortettede symbolspråket i matematikk på høyere årstrinn i skolen, og peker på at det matematiske språket er både lingvistisk, symbolsk og visuelt i sin natur og at matematikkfagets multimodalitet må få implikasjoner for hvordan faget skal undervises og læres. Skoleskrivingen har tradisjonelt vært monomodal, skriver Berge (2021), og med det menes at det alfabetiske skriftsystemet har dominert skriveopplæringen. Men han peker på at skriving utenfor opplæringen i skolen som regel er multimodal. Videre påpekes det at et moderne demokratisk samfunn bygger på ulike skriftkulturer, hvor deltakelse i disse ulike skriftkulturene krever opplæring og trening i hensiktsmessig skriving.

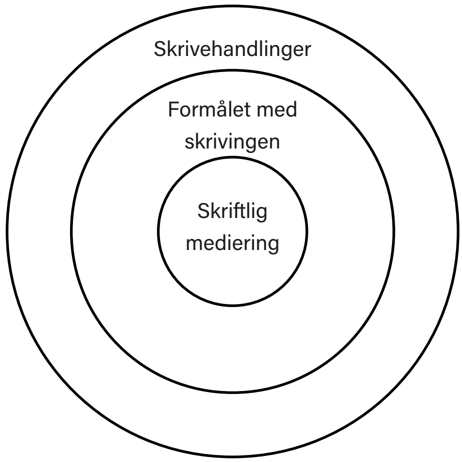
Ut fra disse studiene ser det ut til at det er viktig at lærere som underviser i matematikk, er bevisst på fagets multimodalitet når de planlegger læringsaktiviteter som skal fremme skriveferdigheter i faget. Å jobbe aktivt med det multimodale kan styrke elevenes muligheter til å tilegne seg kompetanse i matematikk.

Normprosjektet og skrivehjulet

Normprosjektet har som «mål å støtte lærere til å utvikle gode skriveoppgaver i alle fag. I tillegg skal oppgavene stimulere elevene til å ta i bruk spesifikke skrivehandlinger med spesifikke formål for å nå spesifikke mottakere (Otnes, 2021).

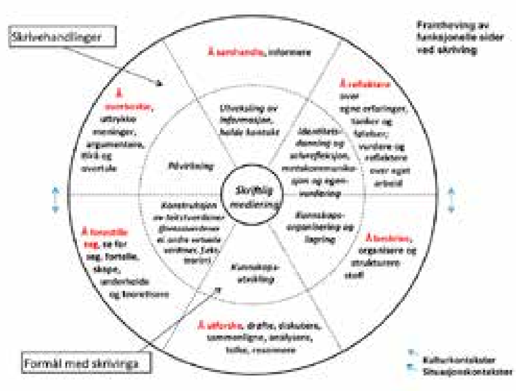
Prosjektet ble gjennomført med elever og lærere på mellomtrinnet. Det var 20 skoler som deltok fra 2012 til 2014. Det er en intervensjonsstudie hvor lærere har deltatt i faglige nettverk som har diskutert og utformet både skriveoppgaver og vurderingskriterier. Det er samlet inn data fra elever og lærere på 3., 4., 6. og 7. trinn i form av skriveoppgaver som lærerne har gitt elevene sine i alle fag, og det er samlet inn elevbesvarelser på oppgavene (Kvistad & Otnes, 2019). Alle fag er representerte med oppgaver i det innsamlede materialet.

Normprosjektet bruker skrivehjulet som et verktøy for å se på ulike sider ved skriving. Skrivehjulet er et dynamisk redskap, slik at de tre sirklene kan endre posisjon i forhold til hverandre. Figur 4a viser skrivehjulet i en forenklet utgave, og figur 4b uthever de ulike inndelingene i *skrivehandlinger* og *formål med skrivingen*.



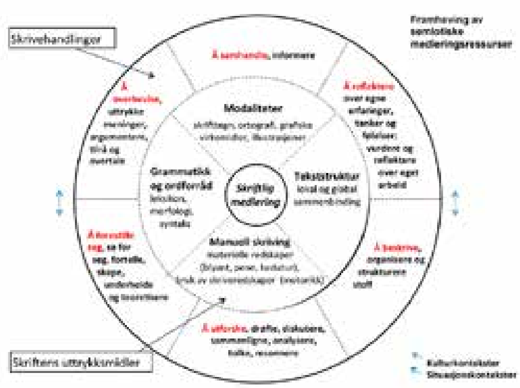
Figur 4a

Disse sees i sammenheng med hverandre (Solheim & Matre, 2014, Otnes, 2014). *Å beskrive*, *å utforske* og *å overbevise* er tre eksempler på skrivehandlinger. *Kunnskapsutvikling* og *kunnskapsorganisering* er to eksempler på skrive*formål*. I matematikk kan dette for eksempel være skriveoppgaver hvor elevene skal utforske et matematisk problem.



Figur 4b: Kilde: http://norm.skrivesenteret.no/skrivehjulet-bm/

Skrivehandlingene sees også i sammenheng med de skriftlige medieringsressursene som for eksempel ulike modaliteter. I den innerste sirkelen i skrivehjulet blir disse framhevet (se figur 4c). Modalitetene har også betydning for elevenes utvikling av ferdigheter i skriving. I øverste kvadrant ser vi at ulike modaliteter blir navngitt. Her finner vi elementer av det som framheves når man drøfter matematikkens multimodale tradisjon, som grafiske virkemidler, bruk av skrifttegn og illustrasjoner.



Figur 4c: Kilde: http://norm.skrivesenteret.no/skrivehjulet-bm/

Berge (2021) skriver at «skriving brukes i alle skolefag for å utvikle og understøtte læring og forståelse av kompleks faglig kunnskap», og at skrivehjulet er et redskap for å utvikle klarere forståelse av hvilke skrivehandlinger og medieringsressurser som kan bidra til å utvikle kunnskap.

Mottakerinstansen er også et viktig aspekt når det gjelder skriveoppgaver (Otnes, 2021), og er i Normprosjekt-modellen ofte nær knyttet til *formålet* med skrivingen. Formålet med en skrivehandling vil ofte være å oppnå noe hos mottaker, det kan for eksempel være informasjonsoverføring, underholdning eller kunnskapsutvikling. I matematikkfaget kan formålet med en utforskende oppgave ofte være kunnskapsutvikling.

En undersøkelse gjennomført i amerikanske skoler viser at i de fleste tilfellene hvor elevene får skriveoppgaver i skolen, er det læreren som er mottakeren for elevtekstene (Applebee & Langer, 2011). Kvistad og Otnes (2019) viser at dette også gjelder i norsk skole. Læreren kan være mottaker på ulike måter, fra å være en vurderer av elevens forståelse i faget, for eksempel innenfor et gitt matematisk emne, eller en reell mottaker av elevenes tekster til å være en fiktiv mottaker i en konstruert skrivesituasjon (Kvistad & Otnes, 2019). De har gjort en studie av mottakerinstansen i skriveoppgavene i Normprosjektet, og finner at det blir gitt en del skriveoppgaver uten en klar mottaker, og om mottaker blir oppgitt, er det ofte en i den nære sfære, som medelever, familie eller læreren, men det er også eksempel på fiktive mottakere i materialet. Læreren som mottaker for å kontrollere elevenes faglige utvikling er ganske vanlig (Mehlum, 1994; Kvistad & Otnes, 2019). I de tilfeller hvor læreren ikke er oppført som mottaker, men hvor det likevel er et mål at læreren skal ha mulighet til å kontrollere elevens faglige utvikling, betegner Kvistad og Otnes som «dobbeltkommunikasjon». Elevens læringsutbytte eller lærerens mulighet for vurdering av eleven er i mange tilfeller det reelle formål med skriveoppgaver som blir gitt i skolen (Smidt, 1994).

Metode

Vi vil først beskrive vår metodiske tilnærming til datamaterialet, og videre presenterer vi funn og drøfter funnene i lys av skrivehjulet og matematikkfagets multimodale tradisjon. Matematikkoppgavene i Normprosjektet er interessante å studere fordi dette ikke er tilfeldige skriveoppgaver, men et utvalg av oppgaver som lærere har utviklet gjennom felles diskusjoner om skriving i faget.

For å analysere datamaterialet, i form av skriveoppgaver gitt elever på 6. og 7. trinn, er det brukt en hermeneutisk tilnærming (Crotty, 1998; Fejes & Thornberg, 2015). Samtlige oppgavetekster er lest, og læreplanen i matematikk for 5.–7. trinn er studert. Med en forforståelse av praksiser i matematikkfaget, læreplanene og det matematikkfaglige er oppgavene blitt gruppert og kategorisert, og dette har vært utgangspunkt for analysearbeidet. Denne tilnærmingen er inspirert av Rennstam og Wästerfors (2015). De beskriver prosessen med kvalitativ analyse som en tredelt prosess. Først er det en *sortering* av datamaterialet for å få en oversikt, videre en *redusering* av materialet for å ta bort det som ikke er relevant for analysen, og til slutt utformer man en *argumentasjon* på bakgrunn av datamaterialet.

Vi[2] har analysert hvordan oppgavene legger til rette for ulike modaliteter, tilknyttet de skriftlige medieringsressursene i skrivehjulet. Videre er det gjort en vurdering av hvordan oppgavene passer inn i skrivehjulets inndeling i skrivehandlinger og formål med skrivingen.

Vi startet med å lese gjennom alle oppgavene som var gitt for 6. og 7. trinn, uavhengig av fag. Det var til sammen 354 oppgaver fordelt på første og andre interveneringsår. De fleste av oppgavene var av lærerne selv kategorisert i fag og skrivehandling (men ikke i skriveformål). Vi valgte likevel å lage våre egne uavhengige kategoriseringer.

Til sammen fant vi 48 oppgaver som kunne knyttes til faget matematikk ut fra læreplanen. Med utgangspunkt i Rennstam og Wästerfors

(2015) beskrivelse av prosessen med kvalitativ analyse gjennomførte vi så den første sorteringen av de 48 oppgavene. Den tok utgangspunkt i oppgavenes matematikkfaglige tilknytning til læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020), og vi endte med fire ulike grupper: (1) rene matematiske oppgaver, (2) oppgaver som har elementer fra læreplanen i matematikk, men som av lærerne er arkivert under andre fag, (3) oppgaver som ikke har klar tilknytning til noen læreplanmål, men som kan knyttes til matematikk, og (4) oppgaver som læreren har arkivert som matematikkoppgaver, men som vi vurderte at ikke har tilknytning til læreplanen i matematikk. Ut fra omfanget av oppgaver ønsket vi ikke å behandle alle oppgavene i det videre analysearbeidet. Vi foretok en kategorisk reduseringsering (Rennstam & Wästerfors, 2015, s. 114) og valgte å ikke ta med oppgavene som vi plasserte i gruppe (4).

De tre gruppene vi valgte å se nærmere på i det videre arbeidet, har alle tilknytning til læreplanen i matematikk. Vi eksemplifiserer de tre ulike gruppene av oppgaver og kommenterer dem kort.

Den første gruppen er de som uten tvil passer inn i betegnelsen «rene matematiske oppgaver», for eksempel:

> Beskriv for en elev som er yngre enn deg, forskjellene på partall, oddetall, primtall og sammensatte tall. Bruk eksempler.

Skriveoppgaven er her knyttet til hovedområdet «tall og algebra» i matematikk.

Gruppe 2 er oppgaver som har elementer fra læreplanen i matematikk, for eksempel:

> Lag en spørreundersøkelse om ungdommers holdninger til røyk og snus! Undersøkelsen skal være på minst ti spørsmål, noen spørsmål skal være reflekterende og noen kunnskapsbaserte.

Her er emnet bruk av tobakk og snus, som kan knyttes til læreplanen i naturfag, mens et av kompetansemålene i matematikk sier at elevene skal «kunne planleggje og samle inn data i samband med observasjonar, spørjeundersøkingar og eksperiment», og dermed vil oppgaven også kunne knyttes til matematikkfaget. Oppgaven kunne like godt vært gitt som en skriveoppgave i matematikk, eller som en tverrfaglig oppgave.

Den tredje oppgavegruppen har et potensial til å kunne knyttes til matematikkfaget, men er i utgangspunktet faguavhengig, for eksempel:

> Lag en side i en fagbok. Teksten skal være informerende. Det vil si at du får bruk for å definere, illustrere, sortere og organisere.

Denne skriveoppgaven er helt åpen for alle fag, og kan slik godt brukes også i matematikkfaget.

Alle oppgavene i gruppene 1, 2 og 3 er interessante å studere. Men i denne artikkelen har vi valgt å fokusere på oppgaver i gruppe 1, rene matematiske oppgaver. En av oppgavene er gitt to ganger av ulike lærere – den har vi valgt å telle som én oppgave. Vi sto igjen med 19 oppgaver som vi i det videre arbeidet analyserte ved hjelp av skrivehjulet som verktøy. De rene matematikkoppgavene ble analysert ut fra to perspektiver. Først med utgangspunkt i *skriftlig mediering*, den indre sirkelen i skrivehjulet, og i hvilken grad oppgavene legger til rette for at elevene får øvelse i å skrive innenfor fagets multimodale tradisjon. Videre har vi vurdert skrive*formålet* og skrive*handlingene* i oppgavene, slik skrivehjulet inviterer til. Vi har også vurdert hvilken mottakerinstans elevene er bedt om å skrive til.

Typiske trekk ved matematikkoppgavene

Den første kategorien vi trekker fram, er oppgaver hvor elevene skal skrive en tekst som *beskriver* et geometrisk objekt. Seks av de nitten oppgavene faller innenfor denne kategorien. Et typisk eksempel på en slik oppgave er:

> Forklar hvordan terning, prisme, sylinder og kjegle ser ut for en som aldri har sett dem før.

> Hva kjennetegner de ulike romfigurene? Nevn noen likheter og ulikheter.

Denne oppgaven ber om en klar skrivehandling fra skrivehjulet, en *beskrivelse*. Elevene skal gi en beskrivelse (forklaring) av de ulike geometriske figurene, og ut fra oppgavens ordlyd kan vi anta at det er kjent stoff for elevene. Flere av oppgavene ber elevene om å gi en forklaring. Vi knyttet disse oppgavene til skrivehandlingen «å beskrive». Det blir ikke direkte gitt signaler om at tegninger eller illustrasjoner kan inngå i besvarelsen. Det multimodale aspektet i matematikken er slik ikke gjort eksplisitt. Verbet «kjennetegner» kan imidlertid åpne opp for at elever tegner, for eksempel en kjegle, og ikke bare beskriver at den har en spiss. Men en elev kan altså skrive en ren sammenhengende tekst (monomodal), og på den måten besvare det oppgaven spør etter. En annen oppgave, gitt til elever på 6. trinn, som også ber om en beskrivelse, er:

> Forklar forskjellen på omkrets og areal til en femteklassing. Vis gjerne med tegning.

Elevene inviteres til å besvare oppgaven multimodalt – de blir eksplisitt oppfordret til å tegne, men oppgaveformuleringen inviterer også til andre skriftlige uttrykk. Dette kan være prosatekst eller beregninger ut fra konkrete eksempel.

I begge disse oppgavene er mottaker oppgitt til å være en som innehar mangelfull kunnskap om geometriske figurer, i og med at det står «en som aldri har sett dem før», og man er bedt om å forklare noe for en elev på lavere trinn. Elevene skal systematisere sin kunnskap om geometriske figurer og presentere denne slik at den som leser teksten (mottaker), skal få en forståelse av disse. Læreren kan – i større grad enn kunnskapsutvikling hos mottakeren – ha et formål om at elevene for egen del skal oppnå kunnskapsorganisering og -lagring. Hvorvidt skolens femteklassinger noen gang får lese disse forklaringene, er ikke kjent, men oppgaven bærer preg av det Kvistad og Otnes (2019) kaller dobbeltkommunikasjon når det gjelder mottakerinstansen. Elevene blir eksplisitt bedt om å formulere teksten til en mottaker som er en yngre elev, mens det er klart at læreren (også) er en mottaker av teksten.

En annen kategori av oppgaver vi finner flere av i materialet, er oppgaver hvor elevene skal skrive en tekst til noen som enten er yngre enn dem selv eller fiktive skikkelser, og gi disse en *beskrivelse/forklaring på en regneart eller algoritme* og/eller hvorfor det er viktig å kunne denne. Det er fem av oppgavene som plasserer seg her, og et eksempel er:

> Tuku og Taka fra landet Fiktiv vet ikke hva divisjon og multiplikasjon er. Forklar hva multiplikasjon og divisjon er, slik at Tuku og Taka forstår hvorfor du bruker multiplikasjon og divisjon i ditt liv.

Elevene blir i denne oppgaven bedt om å forklare hva multiplikasjon og divisjon *er*. Det åpnes for at elevene kan gi en forklaring på selve framgangsmåten eller algoritmen, men det er ikke nødvendig slik oppgaven er formulert. Elevene kan nøye seg med å beskrive *begrepene* multiplikasjon og divisjon. Oppgaven gir ingen oppfordring eller forventning til bruk av ulike multimodaliteter som illustrasjoner eller symboler, og den har heller ikke et tydelig skriveoppdrag, den kunne blitt besvart muntlig. Formålet med denne skriveoppgaven slik den er gitt, er at de fiktive mottakerne (her: Tuku og Taka) skal utvikle kunnskap om regneartene multiplikasjon og divisjon og få en forståelse av hvorfor regneartene brukes. Det kan problematiseres at denne typen oppgaver med fiktive mottakere gir rom for usikkerhet hos elevene. Hvordan skal/kan man kommunisere med Tuku og Taka? Kan de norsk? Kjenner de til vårt alfabet og tallsystem? Det ligger et potensial for misforståelser og uklarhet i denne typen oppgaver med fiktive mottakere. Dette er forhold rundt oppgaven som kan framforhandles i klasserommet.

Gjennomgangen av oppgavene viser at seks av matematikkoppgavene har et multimodalt skriveoppdrag, som at elevene blir bedt om å forklare ved hjelp av illustrasjoner og tekst. Det er eksempel på oppgaver som i stor grad utnytter fagets egenart som multimodalt tekstfag:

> 3. trinnet skal ha om multiplikasjon. Læraren vil at du skal forklara for ein av elevane på trinnet kva multiplikasjon er, og kvifor me treng det. I forklaringa di kan du nytta siffer, illustrasjonar, heile reknestykke og matematiske uttrykk.

I denne oppgaven er ikke skriveoppdraget eksplisitt uttrykt, men det kommer fram at elevene gjerne kan bruke ulike tilnærminger i forklaringen. Det blir nevnt illustrasjon, siffer, regnestykker og matematiske uttrykk som mulige alternativer for å forklare multiplikasjon for denne tredjeklassingen. Det som kan være interessant å merke seg fra et skrivestående, er at sammenhengende verbaltekst (prosatekst) ikke er nevnt som et av alternativene.

I de tilfeller hvor mottaker av teksten ikke er gitt, er det læreren som er den naturlige mottaker. Et eksempel på en slik oppgave er:

> Skriv ein tekst der du forklarar kva de tenkte då de skulle finne ein regel for korleis kvadrattala veks. Skriv regelen de kom fram til.

I oppgaven over kan vi finne argument for at læreren kan ha kunnskaps*organisering* og/eller kunnskaps*utvikling* hos eleven som formål for skriveoppgaven. Dette er *kunnskapsutvikling* for eleven i den forstand at det først har funnet sted en utforskning. Det å skrive ned resultatet av utforskningen vil være *kunnskapsorganisering* for eleven. Men det kan også være at formålet med skriveoppgaven er en vurderingssituasjon, hvor læreren skal overbevises om at avsender (eleven) har oppnådd den kompetansen som er ønsket innenfor et gitt emne, altså dobbeltkommunikasjon.

Drøfting av funn

I de fleste av de oppgavene vi har sett på, er elevene bedt om å beskrive egenskapene ved et matematisk objekt eller forklare noen (en tenkt person eller en fiktiv skikkelse) hvorfor noe er viktig å kunne. De plasseres til skrivehandlingen «Å beskrive» i skrivehjulets ytterste sirkel. Imidlertid brukes ofte verbet «å forklare» i stedet for «å beskrive» av lærerne i oppgavene vi har analysert. Vi har tolket det som at verbene i disse sammenhengene er synonyme, men at ordet «forklare» i andre sammenhenger kan ha en videre betydning. Dagsland (2018) har tidligere kategorisert matematikkoppgavene for 3. og 4. trinn i Normprosjektet. Han finner også en overvekt av skrivehandlingen «å beskrive».

I oppgavetekstene finner vi at flere av oppgavene i Normprosjektet mangler et eksplisitt formulert skriveoppdrag, det står ikke at elevene skal skrive en tekst, eller hvordan de skal skrive. Slik mange av matematikkoppgavene er utformet, kan de også løses muntlig eller i en annen form. Siden disse oppgavene er knyttet til Normprosjektet, antar vi imidlertid at selve skriveoppdraget er forklart elevene muntlig på skolen. Likevel hevder vi at det kan være en svakhet ved disse oppgavetekstene at det ikke er eksplisitt i oppgavene at elevene skal skrive for å løse oppgavene. Denne mangelen på skriveoppdrag kan være en utfordring fordi det ikke gir elevene noen pekepinn på de ulike mulighetene de har når de skal besvare oppgaven på en tilfredsstillende måte. Det kan synes som om den multimodaliteten som ligger i matematikkfaget, ikke nødvendigvis har en sterk plass i oppgavene som er gitt, med andre ord at elevene ikke inviteres til å utnytte de skriftlige medieringsressursene til fulle, slik Berge (2021) argumenterer for at er viktig.

Mange av oppgavene kan besvares i form av en prosatekst. Vi har funnet bare én oppgave der elevene konkret er bedt om å løse et matematisk problem. I denne oppgaven får elevene gitt dimensjonene til en eske og blir så bedt om å finne ut eskens volum og overflateareal. Deretter blir elevene bedt om å skrive «ein tekst der du forklarar utrekning ...». Siden problemløsning kan sies å være selve kjernen i matematikkfaget, hadde vi forventet flere oppgaver der elevene blir bedt om å løse et matematisk problem. En mulig forklaring på dette kan være at lærerne ikke tenker på det å skrive ned løsningen av et matematisk problem som en *skriveoppgave*. De kan som deltakere i Normprosjektet ha fokusert mer på skriving enn på hva på fagets premisser innebærer. Flere av oppgavene inviterer som nevnt over til multimodalitet, men vi finner at langt de fleste oppgavene ber om en forklaring eller en beskrivelse av noe framfor at elevene faktisk er bedt om å løse et matematisk problem.

Selv om vi tar forbehold om at oppgavene gis i en undervisningskontakt der lærerne kan gi supplerende informasjon, mener vi at vår studie viser at en betydelig andel av oppgavene fra Normprosjektet ikke gir støtte for utvikling av elevenes grunnleggende ferdigheter i skriving i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2020). Det ser ut til at lærerne lager skriveoppgaver som dreier mot en forståelse av skriving som løpende tekst, og at fagets mangfoldige skriftlige tradisjon ikke vektlegges når det legges til rette for utvikling av ferdigheter i skriving i matematikkfaget. Som Lemke (1998) argumenterer, er matematikken av natur multimodal, og for at elevene skal kunne få utvikle bruk av multimodalitetene i skriving som grunnleggende ferdighet i matematikk, bør de både få anledning til og oppmuntres til å bruke de ulike modalitetene som symboler, tekst, tall og figurer når de får skriveoppgaver i faget. Vi argumenterer for at elevene må få skriveoppgaver som støtter utvikling i bruk av fagets multimodale tradisjon, for at elevene skal få bedre ferdigheter i skriving i matematikk. Dette gjelder både for å utvikle elevenes ferdigheter innenfor tenkeskriving / skrive for å lære og presentasjonsskriving / lære å skrive.

Oppsummering

Vi har i denne artikkelen stilt spørsmål ved hvilke semiotiske muligheter oppgavene i Normprosjektet legger til rette for. Noen av oppgavene inviterer direkte til multimodalitet, men totalt sett finner vi at oppgavene legger mindre vekt på de skriftlige medieringsressursene enn vi hadde forventet før vi startet. Vi finner det overraskende i og med de lange tradisjonene matematikkfaget har i å være multimodalt. Ut fra Kunnskapsløftets beskrivelse av hva den grunnleggende ferdigheten skriving i matematikk er, så hadde vi forventet et større innslag av problemløsningsoppgaver. Skriving i matematikk er også avhengig av presisjon i bruk av tegn og symboler, og gjennom målrettede skriveoppgaver i matematikk kan elevene få nødvendig trening i dette.

Noter

1 Normprosjektets fulle navn er «Developing national standards for the assessment of writing. A tool for teaching and learning», og ble finansiert av NFR og Høgskolen i Sør-Trøndelag i perioden 2012–2016. Se www.norm.skrivesenteret.no.

2 Heretter betyr «vi» artikkelforfatterne.

Referanser

Applebee, A. & Langer, J. (2011). A snapshot of writing instruction in middle schools and high schools. *English Journal, 100*(6), 14–27.

Berge, K. L. (2021). Normprosjektets forståelser av skriving og vurdering. I S. Matre, R. Solheim og H. Otnes (red.), *Nye grep om skriveopplæringa – forskingsfunn og praksiserfaringar* (s. 46–73). Universitetsforlaget.

Bonnevie, J. & Eliassen, A. (1934). *Kortfattet lærebok i plangeometri*. Aschehoug.

Brun, V. (1964). *Alt er tall. Matematikkens historie fra oldtiden til Renessanse*. Universitetsforlaget.

Crotty, M. (1998). *The foundations of social research: Meaning and perspective in the research process.* SAGE.

Dagsland, S. (2018). *Om å jakte på heffalomper. Et metalingvistisk perspektiv på antatt reflekterende og antatt utforskende skriving i norsk og matematikk* (Doktoravhandling). NTNU.

Dysthe, O., Hertzberg, F. & Hoel, T. L. (2000). *Skrive for å lære. Skriving i høyrere utdanning*. Abstrakt forlag.

Enge, O. & Iversen H. M. (2010). Et norsk og matematikkfaglig blikk på matematiske tekster i en femteklasse. I J. Smidt (red.), *Skriving i alle fag – innsyn og utspill* (s. 143–161). Tapir Akademisk forlag.

Eves, H. W. (1990). *An introduction to the history of mathematics. The Saunders Series*. Saunders College.

Fejes, A. & Thornberg, R. (2015). *Handbok i kvalitativ analys*. Liber.

Halliday M. A. K. & Matthiessen, C. M. I. M. (2004). *An introduction to functional grammar* (3. utg.). Arnold.

Iversen, S. M. (2015). Om stemme og opgavegenrer i faget matematik. I E. Krogh, T. S. Christensen & K. S. Jakobsen (red.), *Elevskrivere i gymnasiefag* (s. 225–245). Syddansk Universitetsforlag.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press.

Kolstø, S. D. (2010). Forord. I E. Maagerø & D. Skjelbred (red), *De mangfoldige realfagstekstene. Om lesing og skriving i matematikk og naturfag*. Fagbokforlaget.

Kvistad, A. H. & Otnes, H. (2019). Mottakerinstansen i skoleskriving – En studie av skriveoppgaver fra Normprosjektet. *Nordic Journal of Litteracy Rease-arch, 5*(2), 100–119.

Lemke, J. L. (1998). Multiplying meaning: Visual and verbal semiotics in scientific text. I R. J. Martin & R. Veel (red.), *Reading Science* (s. 87–113). Routledge.

Meaney, T. (2012). Writing to help students think mathematically». I T. Meaney, T. Trinick & U. Fairhall (red.), *Collaborating to meet language challenges in indigenous mathematical classrooms* (s. 99–120). Springer.

Mehlum, A. (1994). *Skriveundervisning. Mellom styring og frihet*. Tano Aschehoug.

Misfeldt, M. (2006). *Mathematical writing* (Doktoravhandling). The Danish University of Education.

Nordbakke, M. (2014). Grunnleggende ferdigheter i matematikk. I K. Skovholt (red.), *Innføring i grunnleggende ferdigheter. Praktisk arbeid på fagenes premisser* (s. 88–125). Cappelen Damm.

Norberg, M. (2019). Potential for meaning making in mathematics textbooks. *Designs for Learning, 11*(1), 52–62.

O'Halloran, K.L. (2015). The language of learning mathematics: A multimodal perspective. *Journal of Mathematical Behavior, 40*, 63–74.

Otnes, H. (2014). Å designe skriveoppgaver. I A. J. Aasen & A. Skaftun (red.), *Skriv! Les! 2: Artikler fra den andre nordiske konferansen om skriving, lesing og literacy* (s. 237–256). Akademika forlag.

Otnes, H. (2021). Skriveoppgavene – viktige springbrett til skriving. I S. Matre, R. Solheim & H. Otnes (red.), *Nye grep om skriveopplæringa – forskingsfunn og praksiserfaringar* (s. 312–345). Universitetsforlaget.

Rennstam, J. & Wästerfors, D. (2015). *Från stoff til studie. Om analysarbete i kvalitativ forskning*. Studentlitteratur.

Solheim R. & Matre S. (2014). Forventninger om skrivekompetanse. Perspektiver på skriving, skriveopplæring og vurdering i Normprosjektet. *Viden om Læsning*, (15), 76–89.

Smidt, J. (1994). *Oppgavesett og skrivesituasjoner – en studie av norske skriveoppgaver i en brytningstid. Skrive-puff. The DEVEL Project.* Senter for samfunnsforskning. Universitetet i Trondheim.

Ulland, G., Røskeland, M. & Herheim, R. (2018). Språk teller! Om hvordan ever løser, tenker rundt og skriver om et regnestykke. *Nordic Journal of Literacy Research*, (1), 121–141.

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn*. Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nno

ETTER- OG VIDEREUTDANNING VED UNIVERSITETET I BERGEN

VIDEREUTDANNING FOR MATEMATIKKLÆRERE

Universitetet i Bergen har flere gode tilbud til deg som er matematikklærer og ønsker å videreutdanne deg.

1 **Matematikk for lærere nivå 1 (8.–13. trinn) (15 stp.)**
Mangler du studiepoeng for å fylle de nye kompetansekravene i faget er dette et passende tilbud for deg.

2 **Matematikk for lærere nivå 2 (8.–13. trinn) (15 stp.)**
Underviser du på VGS og vil du fordype deg i matematikkfaget eller mangler du studiepoeng er dette et passende tilbud for deg.

3 **Algoritmisk tenkning og programmering i matematikkfaget (VGS) (15 stp.)**
Algoritmisk tenkning og programmering er nå en del av de nye læreplanene i matematikk. Vi har skreddersydd et kurs for deg som trenger en grundig innføring i dette.

4 **Erfaringsbasert master i undervisning med fordypning i matematikk**
Ønsker du å fordype deg i matematikkfaget og elevenes læring – og vil videreutvikle deg som matematikklærer – er dette det rette tilbudet for deg.
Nytt i år: Forkurs (mai–juli) til deg som mangler opptil 10 stp.

Alle tilbudene er samlingsbasert med god og tett oppfølging mellom samlingene og kan lett kombineres med jobb i skolen. Tilbud 1 og 2 er del av den nasjonale videreutdanningsordningen *Kompetanse for kvalitet* som innebærer at man får frikjøp fra jobb eller stipend for å videreutdanne seg. Du kan søke støtte om alle tilbudene, også tilbud 3 og 4. Alle som har tatt tilbud 3 har fått støtte.

Tilbudene ved UiB får høy skår på Utdanningsdirektoratets spørreundersøkelser og gjennomføringsprosenten er svært høy.

www.uib.no/math Klikk på «Videreutdanning for lærere»

UNIVERSITETET I BERGEN

MENINGSFULL MATEMATIKK FOR ALLE

– et samspill mellom praksis, forskning og utvikling

Matematikksenteret, NTNU, vil bidra til at matematikkopplæringen tar utgangspunkt i barn og unges tenkning og bygger på deres interesser, bakgrunn, erfaringer og kunnskap. Målet er at barn og unge skal utvikle en matematisk kompetanse som består av fem komponenter.

Matematikksenteret vil arbeide for å fremme en matematikkundervisning i skolen hvor barn og unge blir møtt med høye forventninger. Læreren leder arbeidet mot læringsmålet for timen, og legger til rette for et godt læringsmiljø.

For barnehage vil Matematikksenteret bidra til at personalet inviterer barna til matematisk utforskning gjennom varierte aktiviteter og berikende samtaler.

Vi ønsker at barn og unge får arbeide med kognitivt krevende aktiviteter som fremmer resonnering og forståelse, og de får diskutere forskjellige løsningsstrategier med hverandre. Feil anses som en naturlig del av læringsprosessen. Slik kan barn og unge erfare at matematikk er engasjerende, utfordrende og meningsfullt.

Matematikksenteret sin virksomhet skal være et samspill mellom praksis, forskning og utvikling. Senteret skal utvikle praksis- og forskningsbaserte ressurser og modeller for kompetanseutvikling som våre målgrupper kan benytte, og bli inspirert av.

For å lykkes med dette må Matematikksenteret ha tett kontakt med praksisfeltet. Matematikksenteret skal drive med forsknings- og utviklingsarbeid i tett samarbeid med praksisfeltet. Senteret skal være oppdatert på nasjonal og internasjonal forskning i matematikkdidaktikk, og senterets arbeid skal være forskningsbasert.

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

NTNU

Hvordan stille gode spørsmål i arbeid med LIST-oppgaver?

Ingunn Valbekmo, universitetslektor ved Matematikksenteret, NTNU

For å utvikle elevenes matematiske kompetanse og styrke deres kognitive utholdenhet, bør læreren:

- være bevisst hvilke spørsmål han stiller
- reflektere over hvilke spørsmål han stiller i ulike faser av elevenes arbeid
- reflektere over hvilke nivå av matematisk tenkning de ulike spørsmålene stimulerer til
- planlegge spørsmål på forhånd
- prøve å forutse elevenes respons og spørsmål, og forberede svar til disse

Når elever arbeider med LIST-ressurser, er lærerens oppgave å veilede dem i utforsking av matematikk. Elever kan utforske den samme oppgaven på ganske ulike vis, med ulike strategier og ved hjelp av ulike representasjoner. Det kan derfor være en utfordring å stille de riktige spørsmålene – på riktig tidspunkt.

Spørsmålene en stiller, bør ha som mål å avdekke den matematiske tenkingen bak elevenes arbeid. Målet for den som skal gi hint og utvidelser til elevene, bør være å opprettholde en god balanse mellom utfordringene i den gitte oppgaven og elevenes evner til å arbeide med den. Alle spørsmål læreren stiller, må gi elevene muligheter til å tenke videre. Spørsmålene bør være åpne og videreføre tankeprosessene hos elevene.

Gode veiledningsspørsmål

På Mattelist.no har Matematikksenteret samlet nærmere 500 oppgaver og aktiviteter, og mange av oppgavene er LIST-oppgaver (de har lav inngangsterskel og stor takhøyde). I lærerveiledningene til disse ressursene finnes det ofte forslag til veiledningsspørsmål. Elevene bør streve litt i arbeidet med oppgaven før læreren stiller slike spørsmål. De må få mulighet til å prøve seg fram med ulike startpunkt eller strategier, og de må oppleve at de har behov for hjelp. Spørsmålene i lærerveiledningen er eksempler, men det finnes flere. Eksemplene mot slutten av denne teksten vil gi læreren et utgangspunkt for å stille mange gode spørsmål underveis i arbeid med LIST-oppgaver og andre typer oppgaver.

Artikkelen er hentet fra Mattelist.no, hvor dere finner flere «miniartikler» om forskjellige tema innenfor matematikkdidaktikk: www.mattelist.no/artikkel/gode-sporsmal-i-arbeid-med-list-oppgaver

Hvordan forholde seg til svar fra elevene?

Når læreren har stilt et spørsmål til elevene, må de få tid til å tenke. Med 10 sekunders betenkningstid vil mange elever ha mulighet til å kunne svare. Når en elev svarer på eller stiller spørsmål, er det viktig at læreren lytter nøye for å forsøke å forstå hva eleven sier. Læreren må være åpen for elevens forklaringer og nysgjerrig på hva det er han egentlig uttrykker. Læreren bør stoppe opp og vurdere svar sammen med elevene. En vurdering trenger ikke handle bare om hvorvidt svaret er rett eller feil.

Spørsmål kan kategoriseres på ulike måter. Her tar vi utgangspunkt i når spørsmål brukes i undervisningen. Noen spørsmål brukes i startfasen, mens andre egner seg best i oppsummering eller vurdering av arbeidet.

1. Startspørsmål er åpne og legger vekt på å fremme elevenes tenkning for å gi dem et utgangspunkt for å begynne arbeidet.

- Hva har vi gjort tidligere som ligner på dette?
- Hvordan kan du sortere disse …?
- Hvor mange ulike måter kan du finne for å …?
- Hva skjer om vi …?
- Hva kan vi bruke dette til?
- Hvor mange ulike … kan vi finne?

2. Spørsmål underveis i arbeidet støtter elevene i arbeidet med bestemte strategier og kan hjelpe dem med å se mønster og sammenhenger.

- Hva er likt? Hva er forskjellig?
- Kan du gruppere disse … på noen måte?
- Kan du se noen mønster? Kan mønsteret hjelpe?
- Hva tror du kommer etterpå?
- Hvordan vil du skrive ned det du har funnet ut?
- Hva skjer om du …?

3. Vurderingsspørsmål ber elevene forklare hva de gjør, eller hvordan de har kommet frem til en løsning. De lar lærer se hvordan elevene har tenkt, hva de forstår og hvilket nivå de opererer på.

- Hva har du oppdaget eller sett?
- Hvordan fant du ut det?
- Hva tenker du om det?
- Hva gjorde at du bestemte deg for å gjøre det på denne måten?
- Kan du gjøre det på en annen måte?

4. Oppsummerende spørsmål åpner for å sammenlikne de ulike strategiene og svarene som elevene i klassen har kommet med. De gir mulighet for videre refleksjon.

- Hvem har samme svar/mønster/løsning som dette?
- Hvem har en annen løsning?
- Har alle fått samme resultat? Hvorfor/hvorfor ikke?
- Har vi funnet alle muligheter? Hvordan vet vi det?
- Har noen tenkt at dette kan gjøres annerledes?
- Tror dere vi har funnet den beste løsningen?

Spørsmål kan også kategoriseres ut fra hvilket nivå av matematisk tenkning de oppfordrer til

Noen spørsmål stimulerer til å huske eller gjenkalle informasjon, f.eks. «Hva har vi gjort tidligere som ligner på dette problemet?» Andre spørsmål kan oppfordre elevene til å oversette fra én representasjon til en annen, f.eks.: «Kan du finne en annen måte å skrive eller vise det du har funnet ut?» Når læreren stiller spørsmål som «Ser du et mønster?», «Hvordan kan dette mønsteret hjelpe oss å finne svaret?», eller «Hva tror du kommer etterpå?», oppmuntres elevene til å tolke og til å bruke hensiktsmessig forkunnskap og hensiktsmessige strategier. En del spørsmål kan stimulere elevene til å analysere og vurdere sitt eget arbeid, f.eks.: «Hva har du oppdaget?», «Har du finnet alle mulighetene?», «Har du tenkt på om det kan gjøres på en annen måte?».

Spørsmål kan også grupperes ut fra hvilke matematiske ferdigheter de oppmuntrer til å bruke

Noen spørsmål velger læreren for å få elevene til å eksemplifisere eller spesialisere: «Finnes det flere?», «Hva gjør ... til et eksempel?», «Kan du finne noe som ikke er et eksempel?» Andre spørsmål kan stilles for å få elevene til å fullføre eller korrigere arbeidet sitt: «Hva kan legges til/fjernes uten å påvirke?», «Fortell meg hva som er galt med …» Spørsmål kan også oppmuntre elever til å endre, variere, eller reversere elementer i oppgaver: «Hva skjer om vi endrer … ?», «Hva skjer hvis … ?», «Kan du gjøre dette på to eller flere måter?», «Hva er dette et eksempel på?», «Er det alltid/aldri/noen ganger slik at … ?» er eksempler på spørsmål som oppfordrer elevene til å tenke generelt. Utsagn som «Forklar hvorfor/hvordan», er eksempler som oppfordrer dem til å forklare, verifisere eller tilbakevise påstander i arbeidet sitt.

Referanser

Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, N. C. (2009). *Classroom discussions. Using math talk to help students learn*. Math Solutions.

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C. & Sherin, M. G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education*, 81–116.

Liljedahl, P. (2018). Building thinking classrooms. I A. Kajander, J. Holm & E. J. Chernoff (red.), *Teaching and learning secondary school mathematics: Canadian perspectives in an international context* (s. 307-316). Springer.

Liljedahl, P. (2019). Conditions for supporting problem solving: Vertical non-permanent surfaces. I P. Liljedahl & Santos-Trigo (red.), *Mathematical problem solving: Current themes, trends and research* (s. 289–310). Springer.

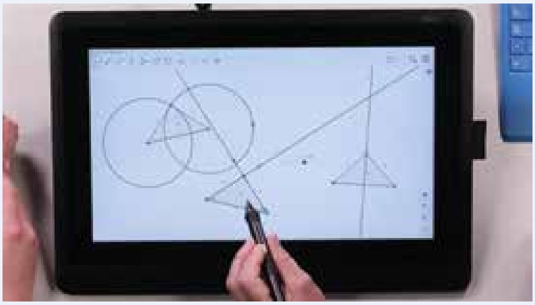
Mansergh, J., Jeffcoat, M., Jones, M., Mason, J., Sewell, H. & Watson, A. (2004). *Primary questions and prompts*. Association of Teachers of Mathematics.

Digitalt foredrag i utforsking av trekanter

Er du på jakt etter inspirasjon i GeoGebra? Matematikksenteret har utviklet et digitalt foredrag hvor vi deler ideer om hvordan du kan utnytte de dynamiske egenskapene til GeoGebra i undervisningen din. Foredraget tar for seg utforsking av likebeinte trekanter.

GeoGebra er godt egnet til å utforske geometriske sammenhenger. Det er lett å komme i gang, og det er lett for elevene å rette opp dersom de gjør feil eller vil endre på noe. I dette kurset har vi valgt å utforske likebeinte trekanter. Elevene kjenner egenskapene til slike trekanter fra før, men for å lage dynamiske trekanter GeoGebra må de bruke kunnskapen bevisst og i en ny situasjon. Det bidrar til dybdelæring.

Utforskingen i kurset starter med en utfordring som passer for alle elever. Etter hver øker vi de matematiske kravene slik at utfordringene passer best for elever på ungdomstrinn og i den



videregående skole. Vi oppfordrer deg til å se hele filmen. Uansett hvilket trinn du arbeider på, er det nyttig å kjenne til hva elevene skal lære i hele utdanningsløpet.

Foredraget finner du her: www.matematikksenteret.no/digitale-kurs-og-foredrag/digitalt-kurs-i-geogebra-utforsking-av-likebeinte-trekanter

Nyhet: Læreplankart på Mattelist.no

Aktivitetene på Mattelist er et fint utgangspunkt for god matematikkundervisning i tråd med ny læreplan. Nå finner du et «læreplankart» på disse sidene. Det gjør det enklere å finne aktiviteter som passer til de ulike kompetansemålene.

Læreplankartet gir en oversikt over hvilke oppgaver på Mattelist.no som kan være relevante for elevene på ditt trinn, ulike kompetansemål og tema.

En av de største fordelene med læreplankartet er at det er lett å orientere seg, og du kan se en progresjon i aktivitetene fra trinn til trinn. Det betyr at du kan velge aktiviteter innenfor et tema etter elevenes nivå, og ikke nødvendigvis trinn.

Her er læreplankartet:
www.mattelist.no/læreplankart

Mattelist.no:
Ambisiøse og utforskende aktiviteter

Aktivitetene på Mattelist.no er utviklet for å skape bedre forståelse og større engasjement i matematikk. Nettsiden er laget for både elever og lærere, og flere av aktivitetene inneholder lærerveiledninger som er bygget på undersøkende arbeidsmetoder, og en opplæring som tar utgangspunkt i barn og unges tenkning, deres interesser, bakgrunn, erfaringer og kunnskap.

Andreas Alberg vant Abelkonkurransen for fjerde år på rad!

Heller ikke i år kunne noen av de andre 27 finalistene hamle opp med 17 år gamle Andreas Alberg fra Oslo Katedralskole. Han gikk rett til topps i Abelkonkurransefinalen med 39 av 40 mulige poeng.

Førstepremien er på 15.000 kroner og muligheten til å representere Norge i den internasjonale matematikkolympiaden 2021, i St. Petersburg, Russland.

Andreas Notøy (17) fra Sandefjord videregående skole fikk 33 poeng, og havnet på andreplass. David S. Eikeland (15) fra Orstad skole tok tredjeplass med 32 poeng. På delt fjerdeplass kom Noah Hessen Bjerke (17) fra Nydalen videregående skole og Maxim Scherbakov (18) fra Blindern videregående skole med 28 poeng. Også sjetteplassen ble delt mellom to finalister; Zejia He (15), Oslo International School og Christoffer Grøndal Tryggestad (18) fra Oslo katedralskole fikk begge 24 poeng.

Les mer om Abelkonkurransen: www.matematikksenteret.no/abelkonkurransen

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
Matematisk institutt UiO
Postboks 1053 Blindern
0316 OSLO

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det er en demokratisk rett å få en matematikkundervisning som setter en i stand til å delta aktivt som borger i et demokrati. Derfor vil Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) sette fokus på matematikk for alle.

Styret for LAMIS

Leder
Renate Jensen, Vestland

Barnetrinnet
Henrik Kirkegaard, Møre og Romsdal

Mellomtrinnet
Inger-Lise Risøy, Viken
Svend Eidsten, Viken

Ungdomstrinnet
Kari-Anne Bjørnø Rummelhoff, Viken

Videregående skole
Odd-Bjørn Lunde, Rogaland

Høgskole/universitet
Marianne Maugesten, Viken

Varamedlem (Barnetrinnet)
Hilde Svendsen

Medlemskontingent 2019

450 kr for enkeltmedlem
200 kr for husstandsmedlemmer
300 kr for studenter/pensjonister
975 kr for skoler/institusjoner

Organisasjonssekretær

Elin Unstad, org.sek@lamis.no

LAMIS gratulerer årets semifinalister

Fylkesvinnere

Agder	Abel Skole – 9. trinn
Innlandet	Børstad ungdomsskole – Klasse 9B
Møre Romsdal	Molde Friskole – 9. trinn
Nordland	Narvik ungdomsskole – Klasse 9B
Oslo	Skøyenåsen skole – Klasse 9C
Rogaland	Samfundets skole Egersund – 9. trinn
Troms Finnmark	Bardufoss ungdomsskole – Klasse 9A
Trøndelag	Lensvik skole – 9. trinn
Vestfold og Telemark	Rugtvedt skole – 9. trinn
Vestland	International School of Bergen — 9. trinn
Viken	Rygge Ungdomsskole – Klasse 9C

De fem andre

Rogaland	Frakkagjerd ungdomsskole – Klasse 9B
Trøndelag	Birralee International School – 9. trinn
Viken	Norges Realfagsgymnas Ungdomsskole – Klasse 9R
Viken	Asker International School – 9. trinn
Viken	Norges Realfagsgymnas Ungdomsskole – Klasse 9N

Lederen har ordet

Renate Jensen

Vel overstått påske til alle LAMIS-kollegaer.

Påsken 2021 ble heller ikke slik vi hadde sett frem til. Vi håper likevel at noen dager med mulighet for å være ute i naturen eller sammen med familie og venner, har gitt overskudd til å drive utforskende og kreativt arbeid med matematikk utover våren.

Vi i sentralstyret har den siste måneden snakket med mange av våre lokallag for å få råd om både lokallagsarbeid og sommerkonferansen. LAMIS sitt arbeid har helt siden starten i 1998 handlet om det å komme sammen og utforske oppgaver og aktiviteter på lokallagskvelder, delta på kreative verksteder på sommerkonferansen eller ha gode matematikksamtaler på konferanser eller fagdager. Vi håper å komme gjennom denne perioden uten å miste medlemmer, fordi vi som alle andre må tenke nytt og se etter alternativer en stund fremover.

Mange av lokallagene ser heldigvis muligheter og tenker kreativt og nytt. De siste månedene har tre av våre lokallag tilbudt digitale lokallagskvelder. Sunnmøre og Bergen har hatt tverrfaglig arbeid som tema, og Fosen lokallag arrangerte en digital kveld om algoritmisk tenking og programmering. Denne kan du lese mer om på side 62 og 63. Fordelen med digitale lokallagskvelder, er at alle kan melde seg på, selv om man ikke bor i nærheten av der lokallaget holder til. Alle kveldene har hatt en oppslutning over det vi forventet. LAMIS' sentralstyre bidrar gjerne med innlegg og hjelp til idemyldring om hvordan flere slike digitale medlemskvelder kan arrangeres. Ta kontakt med lokallaget eller med leder@lamis.no. På vår hjemmeside finner dere oversikt over lokallag, og hvilke tema vi i sentralstyret kan bidra med.

Rett før påske var det oppstartsmøte med seks av våre lokallag som ønsker å være med i arbeidet med å oversette en dansk ressurs om tverrfaglighet. Målet er at vi i løpet av sommeren kan publisere opplegg til de ti første av FN sine bærekraftsmål. Til høsten starter vi en ny dugnad der vi har som mål å få på plass mer av ressursen. Dette arbeidet, kombinert med at vi jobber med en ny og bedre hjemmeside, håper vi vil gi gode ideer til undervisningen.

Vi har rådført oss med lokallagene når vi tok avgjørelsen om å utsette sommerkonferansen 2021. Vi var lenge optimistiske for sommerkonferansen i august, og ønsket at dette skulle være en anledning til å kunne møtes. Hvordan hverdagen blir i august vet vi lite om, men det vi lyttet ut hos våre lokallag, var at det å melde seg på en konferanse i april/mai, ville ikke mange våge å prioritere. Vi presenterer derfor på de neste sidene det vi arbeider med å få til. Det innebærer både digitale arrangement, lokallagssamling senere i høst og fagdager rundt om i landet.

Så til slutt litt om UngeAbel-konkurransen. Vi i LAMIS er imponert over elever og lærere på de 16 skolene som har kommet til semifinalen. Disse skolene har valgt å si ja til å levere fordypningsoppgave og film digitalt. Selve semifinalen gjennomføres på zoom den 12. april og finalen den 22. april. Kunnskapsminister Guri Melby vil dele ut premier. Vi gleder oss til at elever får oppleve matematikkglede og mestring disse dagene, og følg med på vår hjemmeside der vi vil presentere vinnerne.

Jeg ønsker alle en god innspurt av dette skoleåret, og ser frem til en høst der vi igjen kan komme sammen og dele erfaringer.

Ta godt vare på hverandre i tiden fremover!

LAMIS Sommerkonferanse 2021

Sommerkonferansekomiteen og sentralstyret

I forrige nummer av Tangenten startet teksten om sommerkonferansen slik:

«Blir det sommerkonferanse i år? Midt i all usikkerhet kan vi i alle fall love én ting: Vi arbeider for at det skal bli en fullskala konferanse i august på Siggerud, rett sør for Oslo.»

Til tross for stor optimisme, må vi nå ta avgjørelsen om å utsette konferansen og arbeide for alternative arrangementer også dette året. Selv om vaksinering skulle gå etter beste plan og vi ikke får flere muterte virus, innser vi at det å skulle melde seg på en konferanse i april/mai vil være utfordrende. Vi kan derfor ikke binde oss til en stor bestilling på Sørmarka konferansesenter.

Vi er derfor i disse dager virkelig i tenkeboksen. Hva kan vi få til i august og hva kan vi satse på utover høsten? Vi i sentralstyret har snakket med mange av lokallagene og fått gode innspill. Vi arbeider nå med følgende ideer:

Lokallagssamling i Oslo i september/oktober med årsmøte og arbeidsseminar om tverrfaglig ressurs.

Fagdager med tema knyttet til LK20 i løpet av høsten. Vi ser her for oss samme modell som vi brukte da vi arrangerte fagdager om Forebygging av matematikkvansker. Vi ønsker å holde tre slike dager rundt om i landet, der både medlemmer og ikke-medlemmer kan melde seg på en dag med faglig påfyll og gode matematikksamtaler

En digital dag i august der vi tenker alternativer til de mange webinarer som er tilgjengelig

ellers. Vi ser for oss en dag der praktiske aktiviteter både ute og inne kan bli presentert, og deltakerne kan få være aktive i øktene – kanskje lærere eller lokallag kan være samlet.

Vi vil holde dere oppdatert på vår facebookside og på www.lamis.no. Vi vil i tillegg holde lokallagene informert via e-post.

Sommerkonferansekomiteen har jobbet godt med program for konferansen, og vi er glade for at de har sagt ja til å arrangere i 2023. I 2022 skal vi til Sandefjord.

Og mens vi venter på tider der høydepunktet i LAMIS sitt årshjul – sommerkonferansen - kan gå som normalt, kan vi mimre litt om gode dager i Rojales og Drammen.

UngeAbel – Rygge ungdomsskole er fylkesvinner fra Viken

Marianne Maugesten

UngeAbelkonkurransen for 9. klasser er dette skoleåret heldigital. Styret i LAMIS og juryen i konkurransen hadde håpet at finalen kunne gjennomføres fysisk sammen med Holmboprisutdelingen på Oslo Katedralskole. Det er et ønske at mest mulig skal være forutsigbart, og på grunn av smittesituasjonen ser vi ingen annen mulighet enn å gjennomføre både semifinale og finale digitalt.

I første runde av konkurransen som ble avsluttet rundt 1. desember, deltok 197 klasser. I andre runde som ble avsluttet i begynnelsen av februar, leverte 143 klasser inn løsninger. Til sammen har 2289 jenter og 2479 gutter deltatt i de innledende rundene. Sentralstyret i LAMIS er veldig fornøyde med oppslutningen, og det ser ut til at mange skoler har prioritert arbeidet med oppgavesettene selv om det har vært gult og rødt nivåer i skolene. Hele konkurransen inneholder oppgaver som både er rike og utforskende og slik i tråd med LK20.

Vi kåret 11 fylkesvinnere (de nye fylkene), og i tillegg fikk de fem lagene som hadde høyest poengsum utover fylkesvinnerne tilbud om deltakelse i arbeidet med fordypningsoppgavene og deltakelse i semifinalen.

Alle takket ja til deltakelse, og nå foregår det mye spennende arbeid rundt om på skolene. Elevene arbeider med en utforskende oppgave (https://lamis.no/files/2021/02/ungeabelfordypningsoppgave20202021.pdf) som skal beskrives i en rapport, samtidig som de skal lage en film som viser arbeidet med oppgaven. Selve semifinalen foregår digitalt. Lærerne får tilsendt de seks semifinaleoppgavene på mail, og juryen har tilgang digitalt til rommene elevene arbeider i. Løsningene skannes inn og sendes juryen. Fredag 16. april kl 12.30 kunngjøres det digitalt (zoomlenke tilsendes lagene) hvilke tre lag som går videre til finalen og hvilket lag som har vunnet fordypningsoppgaveprisen på 3000 kroner. Flere steder har klasser opplevd at lokalavisa har fattet interesse for arbeidet deres.

Rygge ungdomsskole er fylkesvinner fra Viken fylke. Lærer Kine Mysen forteller at klassen har arbeidet entusiastisk med oppgavene fra runde 1 og 2, alle har deltatt, og det har vært mange gode diskusjoner. Elevene sier det er morsomt å arbeide slik. Tilfeldighetene har gjort at begge innledende rundene kunne gjennomføres fysisk på skolen selv om kommunen har vandret ut og inn av gult og rødt nivå.

Nå har elevene hennes startet med fordypningsoppgaven. Halvparten av elevene har satt seg inn i hvordan de skal forstå oppgaven og kriteriene og presentert disse for resten av klassen. Deretter har hele klassen diskutert hvordan de skal angripe oppgaven. Læreren ønsker at det skal være mest mulig elevstyrt. Elevene ønsker å dele seg inn i grupper etter interesser når det gjelder geometri: passer og linjal, Geogebra og konkreter. Det oppleves ikke problematisk med rødt nivå, elevene er trent i jobbe i Teams og i grupper der.

Kine Mysen sier at elevene var lett å sette i gang i de innledende rundene, men at det var litt tråere å komme i gang med fordypningsoppgaven. Derfor mener hun lærerens rolle som igangsetter blir viktig.

Denne konkurransen oppleves som et positivt tilskudd, og problemløsing og utforskende arbeid er jo en del av fagfornyelsen.

Finalen gjennomføres som nevnt også digitalt torsdag 22. april. I etterkant av finalen jobber vi for at premiene kan deles ut av kunnskapsminister Guri Melby.

Det går mot lysere tider

Henrik Kirkegaard

Knoppene på trærne er på bristepunktet, det er lyst om morgenen og våryre elever virrer rundt i skolegården. Hvor hen du enn snur deg, blir du overfalt av reisereklamer med tilbud til solhungrige nordboere. Det går virkelig an å føle hvordan hele den skandinaviske halvøy dirrer.

Lysere tider på mange måter. Hvorfor ikke utnytte situasjonen og gå ut med elevene. En tverrfaglig, kohortvennlig matematisk uteaktivitet som elevene vil elske. Det kan være i skolegården, på uteskoleplassen, et sted i solen, en plass hvor snøen så vidt har smeltet eller på nærmeste parkeringsplass. Det spiller ingen rolle.

Gå inn på www.lamis.no og logg inn i Oppgavebanken. Søk på 2011 og du vil få frem 47 forslag til oppgaver som passer fra barnehagen til videregående skole. Du finner helt sikkert mer enn 10 oppgaver som passer akkurat for ditt trinn. Mange av oppgavene kan du helt sikkert også lett tilpasse til dine elever eller de gir inspirasjon til å hente frem andre oppgaver du selv kjenner til fra før.

Jeg har søkt og funnet oppgaver mange ganger med ulike trinn i barneskolen, og laget et sporløp hvor elevene er delt inn i mindre grupper. Disse går da fra post til post i vilkårlig rekkefølge. Det er bare å gå til nærmeste ledige post. På denne måten kan du starte hele elevgruppen samtidig. Sender du ut en gruppe om gangen blir det ganske mye ventetid både før og etter. Hver gruppe har med seg papir og blyant eller iPad/læringsbrett, for å dokumentere løsningene på postene.

Syns du dine elever er for unge til dette, bør du prøve allikevel. Det går så mye bedre enn du tror. Eller du kan få fadderklassen til å hjelpe deg. De eldre elevene syns bare det er kjekt å stå på post og hjelpe de yngre elevene – og det blir jo innen for samme kohort.

Der er nesten ingen grenser for hvor mange elever/grupper du kan ha ute på sporløpet samtidig med mindre du er på rødt nivå. Du må bare huske på å ha tre, fire poster mer enn det er grupper. Da blir det lite ventetid, og det vil alltid vil være en ledig post i nærheten.

Synes du sporløp høres ut av litt for mye av det gode? Elever som springer rundt uten at du har

kontroll på noe som helst? Det kommer til å gå så bra. Jeg har gjort det med 350 elever fra den gang da «kohort» ennå ikke var oppfunnet, og til tross for veldig skeptiske lærere og en hoderystende rektor.

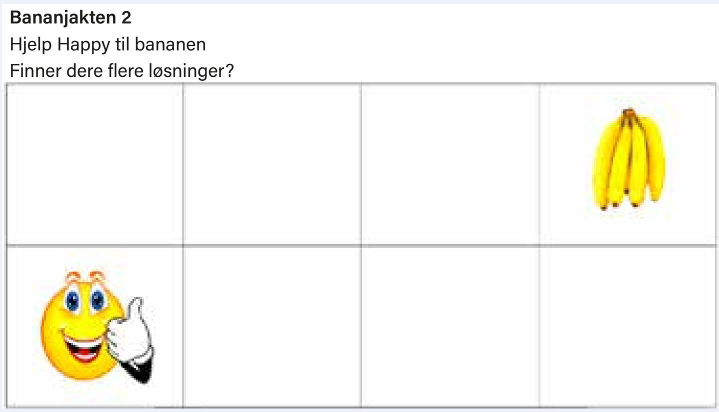
ELLER du kan bruke oppgavene på stasjoner ute. Da tror du som lærer, at du har mer kontroll og vil sette like stor pris på oppgavene og det å være ute som elevene. Du kan selvfølgelig også bare velge fire eller fem oppgaver og bruke disse inne. Da kan elevene når det klappes i hendene, liste rundt som dresserte mus fra stasjon til stasjon og hviskende løse disse glimrende oppgavene du har valgt ut – men da går du glipp av mye.

Riktig god fornøyelse.

Digital medlemskveld nummer to

Lokallaget LAMIS Fosen

Bilde 1



Figur 1

Fosen lokallag har siden i høst jobbet for en digital lokallagskveld om algoritmisk tenking og programmering. Målet var å arrangere en kveld for lærere både på barnetrinnet, ungdomstrinnet og videregående skole. Vi samarbeidet med sentralstyret, og fikk på plass to dyktige damer som kunne holde hver sin økt denne kvelden.

Vi var veldig spente på om vi hadde nådd ut med innbydelse til alle skoler i Fosen-regionen. Det viste seg at noen innbydelser ikke kom fram til matematikklærerne. Vi jobber derfor med å skaffe oss kontaktpersoner ved alle skoler etter hvert. Vi er likevel veldig fornøyde med at over 40 personer var med denne kvelden. Noen skoler fikk ha dette som planleggingstid for alle lærere, og lærerne satt sammen og diskuterte oppgaver. I tillegg ble kvelden annonsert i LAMIS sin facebookgruppe og på hjemmesiden. Dette gjorde at vi fikk med noen både fra Bergen og Sunnmøre.

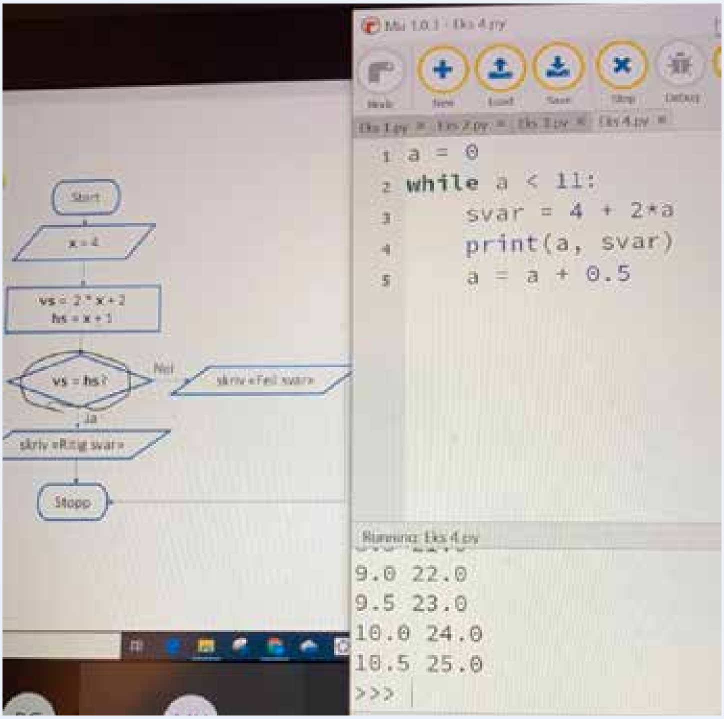
Teknikken fungerte veldig bra hos oss! Vi erfarte at det er greit at en har ansvar for å lese kommentarer/spørsmål fortløpende.

Den første økten for barnetrinnet engasjerte veldig! Bente Irby sammen med Inger Lise Risøy delte sine erfaringer og gode oppgaver med deltakerne (figur 1). Flere lærere kommenterte at de skulle starte med en gang – uten mer kursing. «Elevene finner da ut av det raskere enn oss!» Tøft at lærere hiver seg på så raskt uten å være «ferdig utdannet.» Læring skjer underveis.

I den andre økten viste Anne Karin Wallace oss eksempler på tekstprogrammering (figur 2). Deltakerne fikk gjøre erfaringer med blant annet flytskjema ved å prøve selv underveis i økten. Hun koblet oppgaver og eksempler til matematikk både på ungdomstrinnet og i videregående skole.

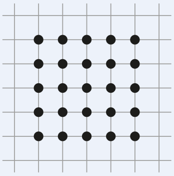
Digital medlemskveld ble en god erfaring for oss, og deltakerne gav gode tilbakemeldinger på kvelden:

– Takk for en fin kveld med påfyll
– Takk for inspirasjon og deling!
– Tusen takk for interessant webinar. Jeg synes dette fungerte fint. Passe langt og med fin variasjon i tema og eksempler. Det er nyttig i alle fall for meg.
– Når det gjelder tema for en kveld, tenker jeg vgs og ny læreplan: hvordan legge til rette for kjerneelementer.
– Nyttig og inspirerende å være med på ☺



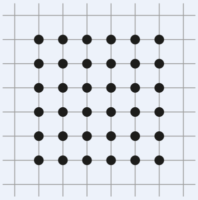
Figur 2

Løsning på UngeAbel-oppgave
Tangenten 01/2021



5×5-geobrett
1 kvadrat av typen 4×4
4 kvadrater av typen 3×3
9 kvadrater av typen 2×2
16 kvadrater av typen 1×1

Totalt: 1 + 4 + 9 + 16 = 30



6×6-geobrett:
1 kvadrat av typen 5×5
4 kvadrater av typen 4×4
9 kvadrater av typen 3×3
16 kvadrater av typen 2×2
25 kvadrater av typen 1×1
Totalt: 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55

Vi legger merke til at vi finner antall kvadrater ved å summere kvadrattall til og med én mindre enn «størrelsen» på geobrettet. Generelt, altså på et $n \times n$-geobrett, får vi dermed at antall kvadrater er gitt ved kvadratsummen $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \ldots + (n-1)(n-1)$.

(En kan utlede at denne summen kan skrives som $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$, men det forventes neppe.)

Oppgave fra UngeAbel
utvalgt av Marianne Maugesten

Oppgaven som presenteres denne gang er hentet fra semifinalen 2017, og kan brukes på hele ungdomstrinnet. I oppgaven får elevene arbeidet med kjerneelementene utforsking og problemløsing, samt resonnering og argumentasjon.

Kjede med ringer

Hjelpemiddel: Kalkulator

Et antall ringer er kjedet sammen slik figuren viser. Lengden av kjedet er 1,7 m.

Hvor mange ringer er det i kjedet? Vis framgangsmåte.