Korden

Problemløysing

Det er mange måtar å seia med få ord noko om kva matematikk er. Matematikk kan mellom anna sjåast som problemløysing. Elevar sin kompetanse i problemløysing vert i dei nye *læreplan*ane lagt vekt på under fagrelevans og sentrale verdiar, som kjerneelement og grunnleggjande ferdigheit og i kompetansemål for alle trinn. Kilpatrick, Swafford og Findell, i *Adding it up* frå 2001, skriv at «problem solving should be the site in which all of the strands of mathematics proficiency converge».

I eit slikt perspektiv kan heile dette nummeret seiast å handla om problemløysing. Naylor si faste spalte om matematikk og kreativitet og Torkildsen sine matematikkoppgåver er gode døme på problem der ein ikkje ser løysinga(r) med ei gong. Det same er Månsson sin tekst som utfordrar lesaren til å finna logikk i korleis ballar kan plasserast i bestemte rekkefølgjer utifrå gjevne startreglar.

Maugesten, Stigberg og Stigberg knyter problemløysing til programmering der elevar brukar kodedøme frå lærar, så modifiserer dei koden før dei til slutt lagar ein liknande kode basert på det dei har funne ut. I ein fagfellevurdert tekst viser Berg viser korleis problemløysing er sentralt ved algoritmisk tenking, særleg det *å* bryta problem ned i mindre delproblem, og korleis analoge programmeringsoppgåver i stor grad handlar om problemløysing. Amdal, Sanne og Våge plasserer problemløysing i ein eventyrkontekst. Dei legg vekt på verdien av at elevar ser etter mønster og arbeider systematisk med prøving og feiling. *Døma deira* innan talteori er problem som er eigna for å løysast med programmering.

Det kan vera utfordrande å vurdera elevar sitt arbeid med problemløysing der ein fremjar læring og lærelyst. Andreassen skriv om å legga til rette for gode vurderingssituasjonar. Han trekkjer særleg fram verdien av rike oppgåver, det å arbeida eksplisitt med problemløysingsstrategiar, å motivera og støtta elever undervegs med gode spørsmål og det å observera kva elevar faktisk gjer. Fauskanger og Bjuland går grundig inn i akkurat dette med korleis ein kan observera og analysera kva elever seier og gjer når dei løyser problem.

Dette er mitt siste nummer som redaktør for Tangenten. Redaktørskiftet kunne vore et problem, men det er løyst på ein særs god måte ved at Bjørn Smestad tek over. Eg ynskjer Bjørn lukke til som redaktør, og eg takkar redaksjonen for godt samarbeid i seks år og alle Tangenten sine lesarar for at de les og brukar bladet.

Maugesten, Stigberg, Stigberg

Programmering på ungdomstrinnet

Hvordan skal lærere undervise programmering i matematikk slik at elevene ser sammenhengen mellom matematikk og programmering? Det er en av utfordringene når programmering er blitt en del av LK20. I denne artikkelen gir vi et eksempel på en arbeidsmåte som kan bidra til å koble programmering tettere til det matematiske innholdet. Vi har gjennomført et utviklingsprosjekt med lærere (se egen ramme), og i denne artikkelen beskriver vi ved eksempler hvordan vi har arbeidet, og hva de deltakende lærerne har rapportert om denne arbeidsmåten. Det finnes helt sikkert andre måter å nærme seg programmering i matematikk på, men vi har ikke erfart og lest om «vår» måte andre steder i norsk kontekst.

Marianne Maugesten
Høgskolen i Østfold
marianne.maugesten@hiof.no

Henrik Stigberg
Høgskolen i Østfold
henrik.stigberg@hiof.no

Susanne Koch Stigberg
Høgskolen i Østfold
susanne.k.stigberg@hiof.no

Vårt utviklingsprosjekt

Skoleåret 2019–20 planla og gjennomførte vi (to tilsatte fra lærerutdanningen og én fra IT-avdelingen) fem heldagssamlinger med ni lærere fra tre ulike ungdomsskoler.

Vårt overordnede mål var å undersøke hvordan programmering kan støtte matematikken, og det innebærer også å undersøke hvordan man kan gi et tilbud til matematikklærere som har liten eller ingen tidigere erfaring med programmering. Vi ønsket å gi de deltakende lærerne et overblikk over hvilke verktøy som kunne anvendes, men vi ønsket også å jobbe med oppgaver som vi tenkte kunne brukes på elever på ungdomstrinnet. Fordi de deltakende lærerne hadde liten eller ingen erfaring med programmering, tok vi utgangspunkt i kompetansemålene på barnetrinnet og jobbet uten digitale hjelpmidler, for så å anvende en programmerbar robot (mBot). Deretter jobbet lærerne med Excel og Scratch, og avslutningsvis jobbet vi med Python ut fra kompetansemålene på ungdomstrinnet. På hver samling fikk lærerne noe input fra oss, de fikk selv prøve ut oppgaver, og til slutt fikk de tid til å planlegge for utprøving i egne klasser. Hver påfølgende samling startet med et fokugruppeintervju der lærerne diskuterte erfaringer med egne utprøvinger i klassene sine.

Matematikkplanen i LK20 har egne kompetansemål på hvert trinn som omhandler programmering, og algoritmisk tenking er beskrevet i kjerneelementet Utforsking og problemløsing:

8. trinn: Utforske korleis algoritmar kan skapast, testast og forbetrast ved hjelp av programmering
9. trinn: Simulere utfall i tilfeldige forsøk og berekne sannsynet for at noko skal inntreffe, ved å bruke programmering
10. trinn: Utforske matematiske eigenskapar og samanhengar ved å bruke programmering

Use – Modify – Create

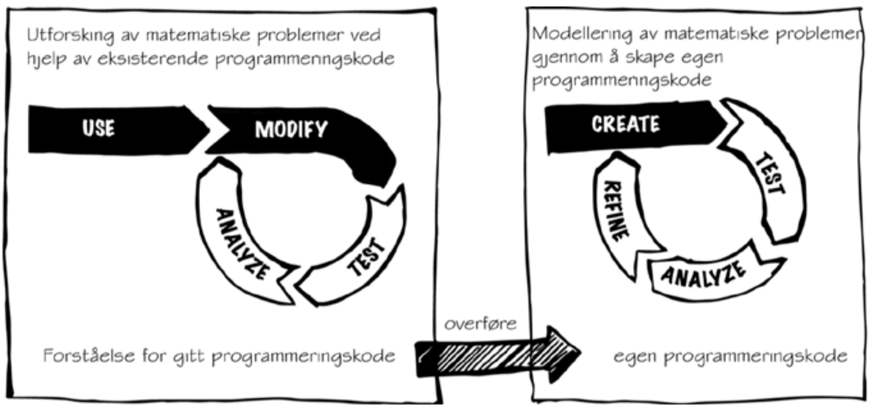
Vi har i prosjektet prøvd ut arbeidsmåten Use – Modify – Create (UMC) både i blokkprogrammering og i tekstprogrammering, og lærerne har gitt gode tilbakemeldinger på denne måten å arbeide på. Tilnærmingen er brukt i USA som en støtte til elever for å utvikle algoritmisk tenking (Lee et al., 2011; Martin et al., 2020). I kjerneelementet Utforsking og problemløsing beskrives algoritmisk tenking som viktig i prosessen med «å utvikle strategiar og framgangsmåtar for å løyse problem og inneber å bryte ned eit problem i delproblem som kan løysast systematisk» (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Arbeidsmåten UMC består av tre faser:

- Elevene får et kodeeksempel av lærerne og undersøker hvilke funksjoner programmet har, og hvordan programmet kan være oppbygd (USE). Spørsmål de kan stille seg, er: Hvordan virker dette? Hva skjer hvis …
- Elevene går inn, leser programkoden og endrer deler av den (MODIFY) i ulik grad og utforsker matematikk samtidig som de lærer noe programmering. De kan starte med å endre lite, og etter hvert i prosessen kan mer endres. Her gis elevene gode muligheter til å prøve og feile.
- Elevene bruker kunnskapen sin og programmerer et liknende program (CREATE).

Det er ikke noen tydelig grense mellom de tre fasene. Elevene oppmuntres til å samarbeide for å finne de ønskede løsningene. Figur 1 viser arbeidet der det er tydelig hva man får utdelt, og hva man gjør til sitt (forfatternes egen figur).

Vi hadde tre argumenter for å prøve ut UMC i programmering i matematikkfaget. For det første kunne vi bruke ferdige lagde koder som tydelig viste sammenhengene mellom programmering og matematikk. Lærerne har ikke all verdens tid til å arbeide med programmering i matematikkfaget (det er mange andre kompetansemål i faget også), og sist, men ikke minst, «hjelper» metoden lærere som ikke har



Figur 1

programmeringserfaring, i gang fordi det er en ferdig kode tilgjengelig.

Terningkast: ett tema, to programmeringsspråk

Vi vil vise to eksempler på UMC med programmene Scratch og Python ved en aktivitet knyttet til kompetansemålet fra 9. trinn: «eleven skal kunne simulere utfall i tilfeldige forsøk og berekne sannsynet for at noko skal inntreffe, ved å bruke programmering» (Kunnskapsdepartementet, 2019).

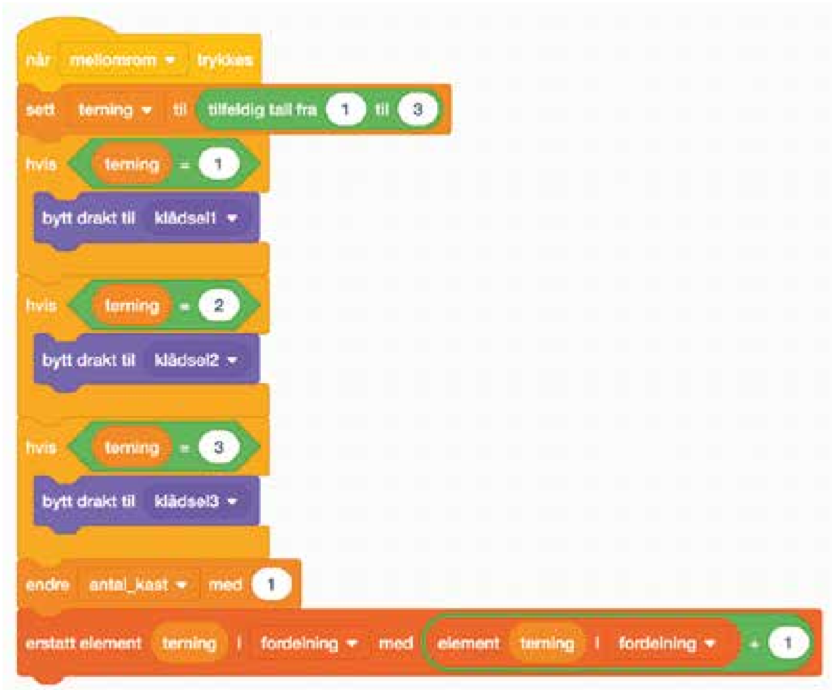
Lærerne hadde tidligere brukt regneark under arbeid med terningkast og sannsynlighetsregning. Det førte til gode diskusjoner om hvorfor det var nødvendig å bruke programmering til dette kompetansemålet, og om ikke regnearket også er en form for programmering.

Scratch

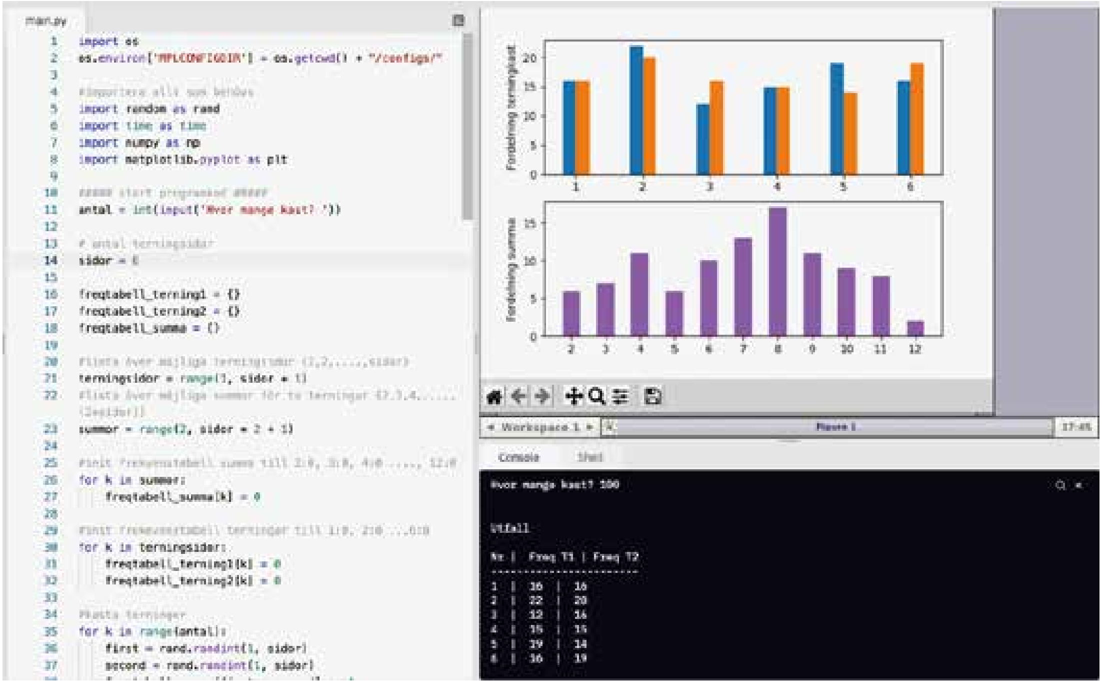
Elevene går til nettsiden https://scratch.mit.edu/studios/25998548/projects/ og velger «Start terningkast».

Figur 2: Eksempel på Use-fasen. Kast med terning med tre sideflater i Scratch.

USE: Elevene prøver flere ganger og observerer hva programmet gjør. De ser at her er det en terning med tre sideflater, og at programmet teller opp hvor mange enere, toere og treere de får når de velger et antall kast. Resultatene kan være et utgangspunkt for en samtale om Store talls lov og sannsynlighetsfordeling. Elevene vil muligens også diskutere om en fysisk terning kan ha tre sideflater, og bli nysgjerrige på om koden bak programmet kan endres slik at de får kast med en «tradisjonell» terning.



Figur 3: Eksempelkode i Scratch som kan forandres.



Figur 4: Eksempelkode i Python etter forandring til kast med to terninger med seks sideflater.

MODIFY: Elevene prøver i denne fasen å forstå koden og endre den slik at terningen får seks sideflater. Her må de prøve og feile. Mange elever har også sett at det finnes andre terninger med for eksempel 10 sideflater, og vil lage disse. Vi oppfordrer alle til å være systematiske i utprøvingen sin, men det er alltid mulig å starte fra begynnelsen eller å angre en forandring. Det er viktig at elevene ikke føler at de ødelegger noe, men at de kjenner en utforskerglede og utforskertrang.

CREATE: Hva annet kan elevene tenke at de kan gjøre? De foreslår kanskje å utvikle eksemplet til kast med to eller tre terninger, veldig mange kast, summen av terningenes øyne osv. De kan også lage et helt nytt program.

Underveis i arbeidet vil elevene diskutere med medelever, hva skjer hvis…, og i etterkant kan klassen diskutere hvordan fordelingen endres når antall sideflater endres, og når antall kast endres, hvilke summer som er mest sannsynlige når elevene kaster to eller tre terninger, og hva som skjer når antall kast blir veldig stort, osv. Her kan elevene også trenes i skriving og argumentasjon i matematikk i egen arbeidsbok.

Lærerens rolle er viktig når programmering skal knyttes til matematikkens innhold. På samme måte som bruk av konkreter i matematikkundervisningen ikke automatisk gir forståelse, står ikke programmet for en iboende kunnskap som elevene tilegner seg. Læreren må hjelpe til med og støtte denne overgangen.

Python

Å lære seg Python fra bunnen av er tidkrevende for lærere samtidig som det vil kreve at mye av tiden i matematikkundervisningen går med til programmering. Dette er ikke et forsøk på å minimere betydningen av programmering i matematikkfaget, men våre erfaringer fra klasserommet viser at det er mange andre temaer som også krever tid.

Eksemplet med Python omhandler også terningkast. Under nettsiden repl.it har vi forberedt en ressurs som inneholder ferdig lagde programmer:

https://repl.it/@SusanneStigberg/maprogterning#main.py

https://repl.it/@SusanneStigberg/terningkastutandiagram

Figur 4 viser hva elevene ser når de går inn på nettsiden ovenfor.

Når elevene skriver inn antall kast, vil de se kodene som trengs, i Python, diagram og tabell. Eksemplet er litt mer avansert enn det foregående eksemplet. Bruk av UMC kan da foregå slik:

USE: Elevene prøver ut programmet ved å velge forskjellige antall kast. Hva ser de i tabellen? Hvordan er fordelingen? Hvor mange terninger brukes? Hva ser de i diagrammet? Elevene ser at fordelingen av enere, toere, treere mfl. er ganske lik med mange kast. Men det gjelder ikke for summen av to terninger. Hvorfor forekommer noen summer hyppigere ved kast med to terninger? Vi håper dette kan invitere til matematiske diskusjoner der elevene forklarer og argumenterer.

MODIFY: I denne fasen lærer elevene seg syntaks. Det er sikkert ord de ikke forstår, men som de må søke opp.

Vi oppfordret deltakerne til å la elevene endre koden slik at de fikk kast med én terning eller tre terninger eller kast med terninger som har flere enn seks sideflater. Prøving og feiling står sentralt her sammen med systematisk utprøving.

CREATE: Kan elevene lage et annet program bygd på de samme ideene, for eksempel å skulle foreta valg og bruke stein, saks, papir?

Underveis og i etterkant vil læreren kunne igangsette gode matematiske diskusjoner, spesielt om resultatene av terningkast, for eksempel De store talls lov og hva vi oppnår ved å bruke Python som vi ikke oppnår ved regneark når det gjelder terningkast.

Våre erfaringer

Vi har prøvd ut metoden UMC på ni lærere fra lærerutdanningsskolene våre. Erfaringene kan ikke umiddelbart overføres til alle andre ungdomsskoler, men ungdomsskolelærere andre steder kan få noen ideer til hvordan programmering kan implementeres i matematikkfaget. Gjennom samlinger, fokusgruppeintervjuer og individuelle intervjuer med lærerne har de gitt oss beskrivelser av hvordan UMC fungerer i deres klasserom på ungdomstrinnet.

Lærerne mener elevene og de selv lettere igangsetter samtaler og diskusjoner om kodene og resultatene de observerte både i Scratch og Python. Flere av lærerne synes matematiske samtaler har vært vanskelige i andre temaer i matematikk. For eksempel rapporterte en lærer at elevene diskuterte hva i koden som måtte endres for å endre antall sideflater på terningen. De kom inn på Store talls lov, og læreren mente at programmeringsaktivitetene høynet kvaliteten på den matematiske samtalen. Igjen er lærerens rolle viktig ved at matematiske begreper kobles til kodene, og ved at de rette spørsmålene blir stilt.

Da vi startet opp kompetansehevingen, var lærerne skeptiske til hvordan de skulle få fram matematikken ved programmering i undervisningen. Flere av dem nevnte eksplisitt i intervjuene i etterkant at de kunne se hvilken nytte programmering kunne ha i enkelte matematikktemaer, for eksempel i sannsynlighet. De begrunnet dette med at vi tok utgangspunkt i kompetansemålene ved planlegging av programmeringsaktivitet. I prosessen med UMC må elevene prøve og feile, undre seg og stille spørsmålet «hva skjer hvis». Å gjøre feil og prøve å forstå hvorfor noe er feil, samt å endre feilene, hadde flere lærere tidligere slitt med å få elevene med på. De opplevde at det ble enklere i dette utviklingsprosjektet. Særlig i Modify-fasen ble prøve og feile en naturlig del av arbeidet, og lærerne håpet dette kunne ha overføringsverdi til andre matematiske temaer og oppgaver også. Flere lærere nevnte at denne arbeidsmåten også ga gode muligheter for tilpasset opplæring fordi kodene fungerte som en slags rike oppgaver: Alle kunne bruke dem, og de ga muligheter til utvidelse av kodene ut fra elevenes forutsetninger, samt initierte gode diskusjoner.

Andre refleksjoner vi har fått fra lærerne etter utprøving i klasserommet, var at metoden UMC var spesielt godt egnet når det gjaldt tekstprogrammering. At elevene kunne lese og forandre koden, senket terskelen betydelig for å kunne anvende relativt avanserte program som var koblet til matematisk innhold, for eksempel sannsynlighetsregning. Noen nevnte at de ikke ville kunne arbeidet med tekstprogrammering hvis de ikke hadde fått programkoden på forhånd.

Det som ikke gikk som planlagt fra begynnelsen, var at lærerne bare brukte de to første stegene i modellen under utprøving med Python. Vi prioriterte da å jobbe med Use og Modify fordi lærerne hadde liten erfaring med programmering på forhånd. Vi argumenterer for Use og Modify som tilstrekkelig i starten av arbeidet fordi lærerne og elevene ikke skal bli programmerere, men demokratiske borgere som skal få utvikle forståelse for hvordan den digitale verden er oppbygd. Vi er også klar over at Create er den mest utfordrende fasen i arbeidsmåten.

Vi har presentert en måte å tilnærme seg programmering i matematikkfaget på, men det er fortsatt et stykke igjen. Vi håper våre eksempler på Use Modify, Create kan være et lite bidrag. Det finnes andre måter også, men vi synes UMC gir mange gode muligheter til arbeid med kompetansemål og kjerneelementer på ungdomstrinnet.

Referanser

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. Grunnskolen*. Kunnskapsdepartementet.

Lee, I., Martin, F., Denner, J., Coulter, B., Allan, W., Erickson, J., Malyn-Smith, J. & Werner, L. (2011). Computational thinking for youth in practice. *Acm Inroads, 2*(1), 32–37.

Martin, F., Lee, I., Lytle, N., Sentance, S. & Lao, N. (2020). Extending and evaluating the use-modify-create progression for engaging youth in computational thinking. I J. Zhang & M. Sherriff (red.), *Proceedings of the 51st ACM Technical Symposium on Computer Science Education* (s. 807–808). Association for Computing Machinery. https://doi.org/10.1145/3328778.3366971

Ressurser

Denne lenken til film forteller mer om metoden:

http://www.it.hiof.no/~toremake/programmering-for-alle/vip/survey1/assets/videos/samtale_om_use_modify_create.mp4

Eksempler på undervisningsopplegg tilknyttet kompetansemålene på ungdomstrinnet kan du lese om på nettsiden vår: https://blogg.hiof.no/maprog/

Denne lenken er et eksempel på syntaks: https://www.w3schools.com/python/

Amdal, Sanne, Våge

Tyrannen – et eventyr

I undervisninga vil det ofte være hensiktsmessig å framheve matematiske arbeidsrutiner eller problemløsingsstrategier når de tas i bruk. Det kan være regler som mange lærere synes er helt selvfølgelige, men som kanskje ikke er like selvfølgelige for elevene. I det følgende tar vi for oss noen slike. Som et utgangspunkt ser vi på en oppgave som egner seg som underholdning samtidig som den belyser viktige matematiske sammenhenger. Vi kaller det en eventyrtime, og historien er:

Det var en gang en tyrann som styrte med hard hånd i et fjernt land. Som tyranner flest skapte han seg mange uvenner. For at de skulle stelle til minst mulig problemer for ham, gjorde han det til en vane å kaste dem i fengsel. Etter hvert ble han nødt til stadig å utvide fengslene og bygge nye. For å gjøre fangene vennligsinnede la han seg til den vanen at han en gang

Anders Sanne
NTNU
anders.sanne@ntnu.no

Arne Kristian Amdal
NTNU
arne.amdal@ntnu.no

Jostein Våge
Tidligere ved NTNU

Utgangspunktet for denne teksten er et manuskript som vi, Anders og Arne, fikk av vår gode kollega Jostein Våge da han ryddet seg ut av kontoret på NTNU for noen år siden. Jostein døde i januar 2021 i en alder av 85 år. Han var en varm forkjemper for induktiv tenkning, altså det å komme til erkjennelser gjennom å studere eksempler og se etter mønstre. Trofaste lesere av Tangenten vil huske noen av tekstene Jostein (1998, 1999, 2009, 2010, 2011, 2012) har skrevet i bladet. I de fleste tekstene er induktiv tenkning sentralt. Manuskriptet vi fikk av Jostein, er et matematikkeventyr. Vi har bearbeidet historien og sier noe om hvordan den kan brukes i matematikkundervisninga.

i året, på sin fødselsdag, ga amnesti til en del av fangene. Merkelig nok var han også bitt av matematikkbasillen, og da fødselsdagen nærmet seg, fant han ut at han ville velge de fangene som skulle få amnesti, ved å bruke en matematisk regel. Ved hvert fengsel var det like mange fangevoktere som det var fanger. Det gjorde fengslene sikre og, siden det var stor arbeidsløshet i landet, skaffet han på det viset arbeid til mange.

Fødselsdagen nærmet seg, og det gikk rykter om at alle de som hadde akkurat to krittstreker på celledøra, ville få amnesti. Krittstrekene ble tegnet av fangevokterne etter følgende regel: Fangevokter nummer 1 satte først en krittstrek på celledør nummer 1, og siden på hver celle. Han startet i første etasje i den ene av fløyene i fengslet og fortsatte systematisk videre. Fangevokter nummer 2 satte først en strek på celledør 2 og siden på hver andre celledør i hele det store fengslet. Fangevokter nummer 3 satte først en strek på celledør 3, og siden på hver tredje celledør. En kunne tydelig høre hvordan han mumlet 1, 2, 3, 1, 2, 3, … på ferden gjennom fengslet. De neste fangevokterne fulgte de samme rutinene, slik at fangevokter nummer 4 først satte en strek på celledør 4 og siden på hver fjerde celledør videre, og slik fortsatte de til alle fangevokterne hadde gjort jobben sin.

Læreren kan nå velge å si til klassen: Siden dere alle blir kastet i fengsel like før tyrannens fødselsdag og dere alle har hørt ryktet om at alle som har akkurat to streker på celledøra, får amnesti, har dere store sjanser for å slippe ut av fengslet ganske snart. Dere får nemlig selv bestemme hvilke celler dere vil sitte på. Det er bare én begrensning, og det er at alle cellene opp til celle nummer 100 allerede er fullsatt. Dere får bare én sjanse, og her gjelder regelen Den som kommer først til mølla …

I fengslet har de også en regel om at dersom en fange gir andre fanger tips om hvordan de skal beregne et godt cellenummer, vil vedkommende bli kastet på en celle som i alle fall vil være stengt i minst ett år. Det eneste en fange har lov til å si, er det cellenummeret han eller hun velger. Det kan derfor være nærliggende å tenke at man legger opp til en konkurranse i klasserommet der elevene jobber individuelt. Analogt til det «kappløpet» fangene i fengslet må gjennom. Men læreplanen slår fast at «matematikk skal bidra til at elevane utviklar eit presist språk for resonnering, kritisk tenking og kommunikasjon gjennom abstraksjon og generalisering» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Derfor er det neppe lurt å legge opp til et individuelt kappløp i klasserommet. Vi foreslår at man heller deler elevene inn i små grupper, og lar dem samarbeide om å løse oppgavene. Man kan for eksempel følge Peter Liljedahls (2018) råd om å dele elevene inn i tilfeldige grupper som jobber på vertikale tavler langs veggene i klasserommet. En slik organisering kan bidra til god kunnskapsflyt mellom gruppene, og det blir lettere å lykkes med å få til en god faglig samtale der hele klassen deltar.

Det er naturlig å forsøke en induktiv tilnærming, og her fins noen enkle strategier som med fordel kan framheves i klasserommet. En av disse er: Forsøk først systematisk med små tall. For oss lærere vil dette kanskje være så selvfølgelig at vi glemmer å nevne det, men erfaring viser at mange elever prøver usystematisk og hopper fra ett tall til et annet. En annen nyttig regel er: Samle alle tallene som oppfyller kravet, på ett sted. Da er det lettere å se hvilke hypoteser du kan formulere.

Advarsel til leseren: Dersom du selv vil forsøke å finne ut hvilke tall som er «lykketall», må du vente med å lese videre.

Med en oppgave som denne kan en få praktisert nyttige problemløsningsstrategier i matematikk. For å få en oversikt er det viktig å samle data. Hvilke celledører har akkurat to krittstreker? Det er fornuftig å starte med små tall, og gjerne stille dem opp i rekkefølge. En mulighet til å komme godt i gang kan være å tegne de første 20 dørene, for deretter å utføre oppgavene til de 20 første fangevokterne. Da viser det seg at antallet streker på celledørene vil være som i figur 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	6	2	4	4	5	2	6	2	6

Figur 1

Stiller vi de dørnumrene hvor antall streker er 2, opp i rekkefølge, får vi et bedre overblikk: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, … Vi antar at flere elever på ungdomstrinnet eller vg1 vil kjenne igjen disse tallene og kunne formulere en hypotese. Da vil de også kunne velge fornuftige celler å sitte på slik at de slipper ut på tyrannens fødselsdag. Det har betydning at cellenummer 1 ikke er med. Det fins nok mange grunner til at 1 ikke regnes som primtall. Én kan være at det blir upraktisk stadig å måtte føye til «unntatt 1» i mange tallteoretiske setninger, som for eksempel aritmetikkens fundamentalsetning, som sier at alle naturlige tall kan faktoriseres på en entydig måte. Nå er den vanligste definisjonen av et primtall de tall som har nøyaktig to divisorer. Det er nettopp dette denne historien illustrerer. Caldwell et al. (2012) gir en historisk oversikt over tenkningen rundt dette spørsmålet.

Det følgende året gjentar historien seg. Like før tyrannens fødselsdag blir hele klassen kastet i fengsel. Igjen hadde det ryktes at tyrannen ville gi amnesti til noen av fangene. Han tenkte at denne gangen ville han lure fangene ved å bruke en annen regel. Likevel hadde noen fått nyss om hva som kom til å skje. Det gikk rykter om at han dette året ville gi amnesti til de fangene som satt bak celledører med et odde antall streker. Metoden til å sette strekene på celledørene var likevel den samme som året før. Igjen var de første 100 cellene opptatt. Hvilke celler ville elevene nå velge den dagen de ble tatt til fange?

Elevene får igjen muligheten til å praktisere en god strategi: Finn små tall som tilfredsstiller kravet, og skriv dem i rekkefølge. I den første korridoren vil tallene være: 1, 4, 9, 16, …

Mange vil være i stand til å formulere en hypotese, men hvordan kan en vise at den er riktig?

En god måte å se sammenhengen på kan være å se på mengden av divisorer til noen tall som er kvadrattall, og noen som ikke er det. Vi bruker 36 som eksempel. Divisorene kommer gjerne i par der produktet er 36. For eksempel er $3 \cdot 12 = 36$. Derfor er både 3 og 12 divisorer til 36. Hvis man så lister opp alle divisorene til 36, legger man merke til at tallet 6 er det eneste tallet som ikke er en del av et par. Slik vil det være for alle kvadrattall n^2. Alle divisorene kommer i par unntatt n. Det er nettopp dette som er nøkkelen til løsningen av dette siste fengselsproblemet.

Begge problemene kan gi en økt innsikt i tallsystemet vårt som kan være nyttig også i andre sammenhenger. I tillegg får en illustrert gode arbeidsrutiner som kan være nyttige ved undersøkelser og problemløsning.

Mulige variasjoner av oppgaven

Problemet kan ytterligere varieres. Vil man for eksempel kunne finne igjen alle naturlige tall på minst én celledør? Utfordre elevene med tall som 7 eller 10. Litt leting gir at det vil stå 7 streker på dør nummer 64 og 10 streker på dør nummer 48. Hva kjennetegner disse tallene? Vi har $48 = 2^4 \cdot 3$. Kanskje kan noen elever til og med komme så langt som til å si at 10 streker på en dør svarer til cellenummer av en viss form, nemlig produktet av ett primtall og en fjerdepotens av et annet primtall?

Antall streker på celledørene er tett knyttet til antall divisorer i cellenummeret. I GeoGebra finnes det en kommando som gir antall divisorer til et gitt tall. Divisorer[48] gir for eksempel 10 til svar. Med denne kommandoen blir en oversikt som tabellen i figur 1 lett å lage, og en slik tabell kan brukes som utgangspunkt for å oppdage nye sammenhenger. Lesere som har lest tallteori, vil gjenkjenne antall divisorer til et tall n som verdien av den tallteoretiske funksjonen τ. For eksempel er $\tau(48) = 10$. Et kjent teorem sier at hvis $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdots p_r^{k_r}$, der p_1, p_2, p_3, …, p_r er ulike primtall, så er $\tau(n) = \prod_{i=1}^{r}(k_i + 1)$. Dermed blir $\tau(48) = 5 \cdot 2 = 10$. Målet trenger selvsagt slett ikke å være at elevene skal innse dette teoremet og formulere det i en slik språkdrakt, men elevene vil ha kommet svært langt om de innser at problemet med antall divisorer i virkeligheten er et kombinatorisk problem.

```
antallDivisorer = 0
tall = int(input('Skriv inn et heltall: '))

# Gå gjennom alle tall fra 1 til og med tall
for i in range(1, tall+1):
    # Hvis vi får null til rest, er tall delelig med i
    if tall % i == 0:
        antallDivisorer += 1

print(f'Tallet {tall} har {antallDivisorer} divisorer.')
```

Figur 2

Tallteoretiske problem som dette er velegnet til å øve algoritmisk tenkning (Gjøvik & Torkildsen, 2019) og programmering i matematikkfaget. Det gjelder alle problemstillingene som det er vist til i denne artikkelen. Den korte koden på figur 2 viser for eksempel hvordan man til et naturlig tall n kan få ut antall divisorer, $\tau(n)$.

Utforsking og problemløsning er et av kjerneelementene i den nye læreplanen, og i denne artikkelen har vi gjennom Våges matematikkeventyr ønsket å minne om kjente problemløsningsstrategier som å se etter mønster i en systematisk oversikt og å samle alle tallene som oppfyller kravet, på ett sted.

Referanser

Caldwell, C. K., Reddick, A., Xiong, Y. & Keller, W. (2012). The history of the primality of one: A selection of sources. *Journal of Integer Sequences, 15*(9).

Gjøvik, Ø. & Torkildsen, H. A. (2019). Algoritmisk tenkning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 30*(3), 31–37.

Liljedahl, P. (2018). Building thinking classrooms – Teaching and learning secondary school mathematics: Canadian perspectives in an international context. I A. Kajander, J. Holm & E. J. Chernoff (red.), *Teaching and learning secondary school mathematics. Advances in mathematics education* (s. 307–316). Springer International Publishing.

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn.* Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/fagets-relevans-og-verdier

Våge, J. (1998). Bare en liten brøk. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 9*(4), 2–5.

Våge, J. (1999). Om å forstå og å forklare. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 10*(2), 11–14.

Våge, J. (2009). Apollonius' sirkler. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 20*(3), 25–27.

Våge, J. (2010). Konstruksjon av kvadratrotstørrelser. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 21*(3), 46–47.

Våge, J. (2011). Omforming av arealer. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 22*(3), 37–39.

Våge, J. (2012). Suksessive tall – en undersøkelse. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 23*(1), 24–26.

Lærerkonferanse:

Nye læreplaner i matematikk med fokus på 1. til 7. trinn

Tema: Argumentasjon og språklig mangfold ved arbeid med modellering og programmering i matematikkundervisningen.

Konferansen blir arrangert av Høgskulen på Vestlandet, Bergen, **5. november 2021**

Konferansen er gratis, og lunsj er inkludert. Mer informasjon og påmelding her:
https://www.hvl.no/forsking/konferanse/larerkonferanse-5.-november

Vurdering av utforsking og problemløysing

«I dagens utforskande vurdering skal de få bryna dykk på eit kvadrat med 81 ruter. Nå gjeld det å bruka erfaringane de gjorde dykk førre gong. Er det nokon som lurer på noko før me startar?»

Slik har fleire av timane våre i matematikk 1T starta i år. Den nye læreplanen i matematikk legg vesentleg større vekt på utforsking og problemløysing enn før (Utdanningsdirektoratet, 2020)[1], og for å ta dette på alvor utvikla me ein ny type formell vurderingssituasjon. Målet var ikkje å erstatta prøvar eller eigenvurderingar, men å supplera verktøykassa, både for å få oversikt over utviklinga til elevane og for å motivera dei til å ta utforskande undervising på alvor.

Målet her er å skildra og gi eksempel på det ein kan kalla «utforskande vurdering». Sidan denne vurderingsforma er utforma med utgangspunkt i vurderingsforskrifta og teoretiske råd for utforsking og problemløysing, startar teksten med ein kort gjennomgang av dette.

Kjenneteikn på gode vurderingsituasjonar

Føremålet med alle vurderingssituasjonar skal vera «å fremje læring og bidra til lærelyst undervegs, og å gi informasjon om kompetanse undervegs og ved avslutninga av opplæringa i faget» (Forskrift til opplæringslova, 2020, § 3-3). Vidare skal vurderingssituasjonen vera ein integrert del av undervisinga, fremja tilpassa opplæring og legge til rette for at elevane får

– «delta i vurderinga av eige arbeid og reflektere over eiga læring og faglege utvikling
– forstå kva dei skal lære, og kva som blir venta av dei
– få vite kva dei meistrar
– få rettleiing om korleis dei kan arbeide vidare for å auke kompetansen sin» (Forskrift til opplæringslova, 2020, § 3-10)

Det kan vera vanskeleg å leva opp til dette idealet i klasserommet, og det blir ikkje lettare når læreplanen nå vektlegg ei ny tilnærming til faget.

Forsking på utforsking og problemløysing

Den nye læreplanen slår fast at «utforsking i matematikk T handlar om at elevane leiter etter mønster, finn samanhengar og diskuterer seg fram til ei felles forståing», medan «problemløysing i matematikk T handlar om at elevane utvikler ein metode for å løyse eit problem dei ikke kjenner frå før» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Dette samsvarer i stor grad med det ein i internasjonale forskingsmiljø kallar «inquiry». Her er eit sentralt poeng at utforsking og

Håvard Andreassen
Valle Hovin videregående skole
lektorhaavard@gmail.com

problemløysing ikkje bør reduserast til enkelte undervisingsaktivitetar, men heller vera ei heilskapleg tilnærming til faget (Wells, 1999).

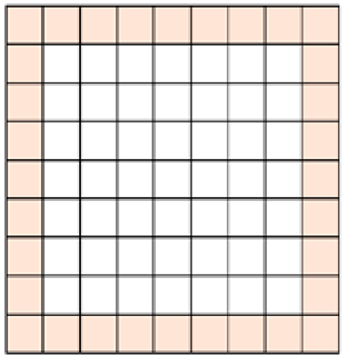
I samband med PRIMAS[2]-prosjektet skildrar Maaβ & Reitz-Koncebovski (2013) fem aspekt av denne heilskapen. Målet er å fostra fram undersøkande, kritiske og kreative tankesett i ein klasseromskultur med ei felles kjensle av eigarskap og meining og samtalar som verdset bidrag, sjølv med feil. Læringsmiljøet tar utgangspunkt i opne problem som kan løysast med ulike strategiar og hjelpemiddel for å fokusera på forklaringar, ikkje oppskrifter. Læraren dyrkar og verdset elevane si resonnering og hjelper dei til å ta stilling til andre sine erfaringar. I staden for å fortelja elevane korleis stoffet heng saman, støttar han eller ho dei i deira eigne prosessar. Elevane stiller spørsmål, samarbeider og bruker dei fem E-ane: «engage, explore, explain, extend and evaluate» (engasjerer seg, utforskar, forklarer, utvidar og evaluerer).

Det er utarbeidd mange råd og modellar til lærarar som vil bruka utforsking og problemløysing, men for å ikkje gå ut over omfanget av denne artikkelen må me nøya oss med nokså korte samandrag. Interesserte lesarar kan finna fleire skildringar hjå for eksempel Andreassen (2017).

For det første kan ein tilnærma seg både utforsking og problemløysing gjennom såkalla rike problem. Ifølgje Hedrén et al. (2005, s. 36) er dette oppgåver som tar utgangspunkt i viktige matematiske idear eller løysingsstrategiar, som kan løysast på ulike nivå med ulike metodar, og som legg til rette for lærerike samtalar og formulering av spørsmål og nye problem. Matematikksenteret kallar dette LIST-oppgåver, altså oppgåver med «låg inngangsterskel og stor takhøgd» (Mattelist, 2021). Figur 1 og figur 4 viser eksempel som er henta frå ressurssidene www.mattelist.no og nrich.maths.org.

For det andre kan lærarar planlegga og gjennomføra aktivitetar som tar utgangspunkt i slike oppgåver, ved hjelp av fem praksisar føreslått av Stein et al. (2008). Desse er:

Samarbeidsoppgåve
Figuren er eit kvadrat med 81 ruter. Dei farga rutene ytst kallar me ramma i kvadratet.



Undersøk om det er ein samanheng mellom sidelengde og kor mange ruter det er i ramma.
Finn flest mogleg framgangsmåtar som viser at når sidelengda er 12 345, er det 49 376 ruter i ramma.
Henta og tilpassa frå: https://www.mattelist.no/522, 15. mai 2021

Figur 1

Moglege metodar til samarbeidsoppgåva
– Teiknar figurar og tel ruter
– Set opp talrekke
– Skildrar mønster med ord
– Skildrar mønster med bokstavuttrykk:

$4 \cdot n - 4$
$2 \cdot n + 2 \cdot (n - 2)$
$4 \cdot (n - 2) + 4$
$4 \cdot (n - 1)$
$n^2 - (n - 2)^2$

Figur 2

– forvent kva elevane vil gjera i møte med kognitivt krevjande matematiske oppgåver
– observer kva dei faktisk gjer når dei utforskar problemet

Problemløysingsstrategiar

Fleire av desse strategiane kan vera nyttige når de skal løysa problemet:

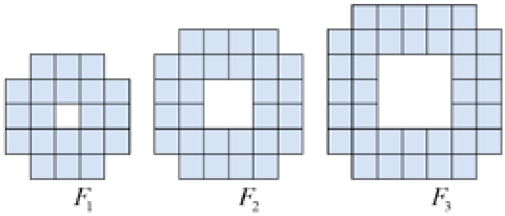
A. Foreslå stadig nye hypotesar om mønster og resultat.
B. Teikn figurar, blokker, grafar eller flytdiagram.
C. Gjett, sjekk, forbetra og gjenta til de finn ei løysing.
D. Undersøk ein enklare versjon av problemet (gjerne med sjølvvalte tal).
E. Lag ei oversikt, ei liste eller ein tabell og sjå etter mønster.
F. Generaliser ved å skildra mønstera med ord, bokstavuttrykk eller grafar.
G. Jobb baklengs frå målet mot starten.
H. Gå vegen om 1.
I. Tenk praktisk og visualiser korleis situasjonen vil utfalda seg i verkelegheita.
J. Sjå tilbake og undersøk om stega du har tatt og resultata er rimelege.
K. Klarer du å overtyda deg sjølv og ein venn?
L. Bruk det å streve og ta feil som moglegheiter til å prøve nye tilnærminger og utvikle problemløsningskompetansen dykkar vidare!

Figur 3

Individuell del

1. Forklar steg for steg korleis de løyste samarbeidsoppgåva slik at eg, som ikkje var til stades, forstår korleis de tenkte.
2. Ta først utgangspunkt i samarbeidsoppgåva.
   a) Kor mange farga ruter har ramma i eit kvadrat med sidelengde lik 20?

   Sjå nå på figurane under.



   b) Undersøk om det er ein samanheng mellom figurnummeret og kor mange farga ruter det er på figuren.
   c) Kor mange farga ruter trengst for å laga den tiande figuren?
   d) Ein figur har 332 farga ruter. Kva nummer er det?
3. Sjå tilbake på arbeidet ditt med oppgåvene 1 og 2. Reflekter over i kva grad du klarte å bruka problemløysingsstrategiane til å løysa ukjente oppgåver.

Oppgåve 2 er henta og tilpassa frå: https://nrich.maths.org/6800 16. mai 2021.

Figur 4

– vel med omhug ut nokon elevar til å presentera sine løysingar i ein påfølgande klassesamtale
– ordna desse ulike tilnærmingane i ei naturleg rekkefølgje
– hjelp klassen å gjera matematiske koplingar mellom bidraga og mellom bidraga og dei sentrale ideane som ligg til grunn for oppgåva

I eit tidlegare nummer av Tangenten viser Hovik (2018) meir utførleg korleis ein kan bruka desse i praksis ved å ta notat i eit skjema.

For det tredje kan lærarar bruka samtaletrekk («talk moves») for å hjelpa elevar til å dela og utdjupa eiga tenking og ta stilling til og bygga vidare på medelevar si tenking (Chapin et al., 2013). Eksempel på samtaletrekk er å be elevane skriva ned tankane sine, dela dei med sidemannen eller å stilla utdjupande spørsmål som: «Kven kan forklara det som blei sagt, med eigne ord?», «Korfor tenker du det?», «Er du einig eller ueinig? Korfor?» og «Kven kan bygga vidare på det?» Dette òg har vore utdjupa med eksempel tidlegare i Tangenten (Wæge, 2015), og på nettsidene til Mattelist kan ein finna ei oversikt av samtaletrekka på norsk (Mattelist, 2021).

Løysingsforslag til individuell oppgåve 2

a) $4n - 4 = 4 \cdot 20 - 4 = 76$

b) Bruk ein (eller fleire) av framgangsmåtane til samarbeidsoppgåva for å visa at $F_n = 8n + 12$.

c) $F_{10} = 8 \cdot 10 + 12 = 92$

d) $8n + 12 = 332$ betyr at $n = 40$.

Figur 5

Til slutt treng òg elevane nokre verktøy å støtta seg på i møte med dei rike og ukjente problema. Her kan ein dra vekslar på problemløysingstradisjonen med bidrag av for eksempel Polya (1957) og Mason og Davis (1991). Figur 3 inneheld ei liste basert på dei, som ein kan dela med elevane.

Råda frå teorien, så vel som rammevilkåra i vurderingsforskrifta, reiser fleire spørsmål for nye vurderingssituasjonar. Korleis kan dei leva opp til kriteria for god vurdering? Korleis kan ein legga til rette for samarbeid, men likevel få vurderingsgrunnlag for kvar enkelt elev? Korleis kan vurderinga tilpassast både lågtpresterande og høgtpresterande elevar? Kan ein legga til rette for både vurdering av og for læring, og korleis får ein tid til dette viss ein i tillegg ønskjer å gjennomføra skriftlege prøvar eller liknande?

Utforskande vurdering – Eit forslag til vurderingssituasjon

Lærar Oj! De har verkeleg klart å brukt strategi D til å overkomma utfordringane de hadde i stad. Bra jobba!

Elev Ja, me gjorde det fleire gonger, og nå skal me akkurat til å bruka strategi E for å sjå om me finn eit mønster.

Slike samtalar har eg hatt gleda av å oppleva når me har gjennomført utforskande vurderingar. Dette er ein vurderingssituasjon med følgande fem komponentar:

Ekstra utfordringar

Utvidingar til samarbeidsoppgåva

1) Prøv å finna ein av dei andre framgangsmåtane.
2) Undersøk om det finst ein tilsvarande samanheng for kvadrat som ikkje er delte inn i ruter, men der de får vita sidelengde og breidde på ramma.
3) Undersøk om det finst ein tilsvarande samanheng for rektangel med lengde som er dobbelt så stor som breidda. Kan de laga ein formel der ein i tillegg kan velja forholdet mellom lengde og breidde òg?

Utvidingar til individuell oppgåve 2

4) Lag eit eige geometrisk mønster og finn ein samanheng mellom figurnummer og kor mange farga ruter det er på figuren.
5) Undersøk om de kan laga ein formel som seier kor mange fleire farga ruter det er på neste figur.

Figur 6

- Førebuing
- Samarbeidsdel (45–90 min) med problemløysingsstrategiar
- Individuell del (45–90 min)
- Ekstra utfordringar
- Vurdering og gjennomgang

I forkant av vurderinga må læraren bestemma seg for kva mål elevane skal bli vurderte i, og finna rike problem som passar til dette. For eksempel kan oppgåva på figur 1 knytast til målet om at elevar skal kunna «identifisere variable storleikar i ulike situasjonar, setje opp formlar og utforske desse ved hjelp av digitale verktøy» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Som førebuing til samarbeidsdelen blir elevane delte inn i grupper på tre (gjerne etter nivå), og i samsvar med det første punktet til Stein et al. (2008)

bør læraren prøva å sjå for seg kva dei ulike gruppene vil gjera (sjå figur 2), kva vanskar dei vil møta, og kva slags støtte dei kan trenga. For elevane startar vurderinga med at dei i grupper skal løysa eit rikt problem (figur 1) med ein eller fleire ulike framgangsmåtar (figur 2). Både som hjelp og påminning om overordna fokus finn dei òg ei liste av problemløysingsstrategiar (figur 3) på oppgåvearket. Under samarbeidsdelen har læraren to oppgåver: motivasjon og støtte ved hjelp av samtaletrekk, og observasjon av korleis kvar enkelt elev bidrar, på eit overordna plan. Dette svarer til steg 2 i modellen til Stein et al. (2008).

Både for å motivera elevane til å delta i samarbeidsdelen og for å få oversikt over den enkelte si utvikling blir samarbeidsdelen avløyst av ein individuell del med tre oppgåver. Først skal elevane summera opp framgangsmåtane og funna frå samarbeidet med eigne ord. I den andre oppgåva må dei bruka og utvida desse metodane i ein ny, men liknande situasjon. Den siste oppgåva gir elevane sjanse til å reflektera over eiga utvikling i å bruka problemløysingsstrategiar. figur 4 og figur 5 viser eit eksempel som bygger på figur 1. I denne delen lønner det seg å bruka eit samskrivingsverktøy, som OneNote, for då kan læraren følga med og gi tilbakemeldingar fortløpande.

Eit særpreg med utforsking og problemløysing er at ein ofte kan utvida problemet og oppdaga meir generelle samanhengar. Difor går den fjerde komponenten av denne vurderingssituasjonen ut på at læraren har klart eit sett med ekstra utfordringar til både samarbeidsdelen og den individuelle delen. Lista på figur 6 kan, slik Stein et al. (2008) tilrår, settast opp som ein tabell med plass til å mellom anna notera ned namn og grupper. Denne komponenten styrker den tilpassa opplæringa for alle elevane og gjer det lettare for læraren å styra arbeidet sett i forhold til tida.

Det er vanskeleg å seia på førehand korleis utforsking og problemløysing vil arta seg, og kva resultat elevane vil enda opp med. Dette gjer det igjen vanskeleg å bruka eit poengsystem i vurderinga. Ei løysing på dette kan vera å førebu eit vurderingsskjema med stikkord og avkryssningsboksar. Då kan det går raskt å få oversikt over kva nivå den enkelte eleven ligg på, og kva som er naturlege steg i utviklinga hans eller hennar. Eksempelet i tabell 1 neste side er basert på ei forenkling av kjenneteikna på måloppnåing som er publisert i samband med læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Etter at læraren har sett gjennom alle elevsvara, kan han eller ho gjennomføra dei resterande tre stega i modellen til Stein et al. (2008), det vil seia velja ut elevløysingar som resten av klassen kan læra noko av, og la desse elevane presentera dei for klassen i ei gjennomtenkt rekkefølge. Her bør ein igjen bruka samtaletrekka til Chapin et al. (2013) for å skapa ein læringsrik samtale om dei sentrale ideane i oppgåva og ei kjensle av felles eigarskap til funna. Denne komponenten løyser tidsproblematikken. Fordi målet ikkje er å testa om elevane har lært seg noko etter at «dei skulle ha lært det», men heller å vurdera i kva grad elevar er i stand til å utforska noko nytt, kan vurderingsforma òg fungera som undervising i eit nytt tema.

Moglegheiter og utfordringar – ei avrunding

Dei største moglegheitene denne vurderingsforma gir, er sjansane til å leva opp til ambisjonane i vurderingsforskrifta, læreplanen og teoretiske tilrådingar. Opplegget tar utforsking, problemløysing og inquiry på alvor og legg til rette for både læring og metalæring. Vidare varetar todelinga av situasjonen omsynet til både individ og samarbeid, både med tanke på vurderingsgrunnlag og tilpassa opplæring.

Ei utfordring for denne vurderingstypen er at det ikkje blir tid til å testa eit spesifikt sett tradisjonelle kunnskapar og ferdigheiter. Ein ønskjer jo òg å vita om elevar for eksempel kan løysa ulikskapar, drøfta funksjonar eller gjennomføra polynomdivisjon. Det går sjølvsagt an å laga oppgåver relaterte til desse temaa, men sidan rike problem gir ofte mindre kontrollen

	Lav	God	Fremragende
Utforskning Leter etter, finner og argumenterer for mønstre og strukturer. Generalisere fra eksempler og enkle situasjoner til generelle og mer komplekse sammenhenger.	Oppdager mønstrene og beskriver disse med ord og eksempel for: – Oppgave 1 – Oppgave 2	Beskriver mønstrene med bokstavuttrykk i: – Oppgave 1 – Oppgave 2	Oppdager og beskriver med bokstavuttrykk ett eller flere mønstre i utfording nr.: ______
Problemløsning Utvikler metoder for å løse ukjente problemer vha. ulike strategier, representasjoner og hjelpemidler. Vurderer om løsninger er gyldige og om de kan forbedres.	– Løser oppgave 2a Bruker enkle fremgangsmåter som å – gjøre beregninger for enkelte figurer – systematisere beregninger i tabell – konkludere basert på dette – nevne og bruke noen enkle problemløsnings-strategier	– Løser oppgave 2c og 2d Bruker noen hensiktsmessige fremgangsmåter og hjelpemidler som å – finne mønster vha. regresjon – sette opp formel fra figur – regne for hånd eller med CAS – tegne og lese av grafer (eller noen av de til høyre) – bruker hensiktsmessige problemløsnings-strategier, forklare hvordan og foreslå forbedringer	Bruker og drøfter styrker og svakheter ved hensiktsmessige fremgangsmåter som å – gjøre komplekse algebraiske beregninger for hånd eller med CAS – lage Python-programmer (eller noen av de til venstre) – Drøfte styrker og svakheter ved egne problemløsnings-ferdigheter per nå og videre utvikling
Kommunikasjon Følger, vurderer og argumenterer for og mot resonnementer og fremgangsmåter. Bruker matematisk språk og notasjon.	– Følger andres resonnementer – Bruker et enkelt språk med enkelte begreper og symboler	– Beskriver egne resonnementer – Bruker et hensiktsmessig språk med begreper og symboler	– Forklarer og argumenterer for egne resonnementer – Bruker et rikt, hensiktsmessig og abstrakt språk med begreper og symboler

Tabell 1: Ei forenkling av kjenneteikna på måloppnåing.

enn tradisjonelle prøvar. Dette kan ein løysa ved å bruka prøvar eller eigenvurderingar i tillegg.

Vidare kan ein innvenda at enda fleire vurderingssituasjonar vil legga beslag på tid som heller burde vore brukt på å læra matematikk. Ei løysing på dette er å bruka desse situasjonane ikkje berre som vurdering av og for læring, men òg som læring. Sidan elevane nå får trening i å løysa ukjente problem, kan dei for eksempel arbeida og læra om arealsetninga utan introduksjon på førehand. Etter kvart kan skiljet mellom vurdering og undervising bli viska gradvis vekk, og då lever ein verkeleg opp til vurderingsforskrifta.

Tid kan òg vera ei utfordring for læraren. Det kan vera tidkrevande både å venna seg til noko nytt, å laga nye opplegg og å finna ut korleis ein skal vurdera elevar i nye situasjonar. Mykje av denne tida må ein legga ned uansett for å imøtekomma fagfornyinga, og mi erfaring er at det er det vel verdt. Fleire av opplegga eg har laga, er publiserte på https://sinus-1t.cappelendamm.no/verksforside for dei som vil sjå fleire døme og etter kvart testa ut utforskande vurdering i eigne klasserom.

Noter

1 Dette forsterka fokuset på utforsking og problemløysing er godt forankra i både norsk og internasjonal forsking på undervising og læring i matematikk, slik Andreassen (2017) utdjupar.

2 PRIMAS står for «Promoting inquiry in mathematics and science education across Europe».

Referansar

Andreassen, H. (2017). *Utvikling av inquiry-basert undervising i matematikk: Kvalitative erfaringar frå eit intensivt og forskingsbasert utviklingsprosjekt med to lærarar i den vidaregåande opplæringa* (Masteroppgåve). Universitetet i Agder. Henta frå https://uia.brage.unit.no/uia-xmlui/handle/11250/2455738

Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, N. C. (2013). *Classroom discussions in math: A teacher's guide for using talk moves to support the common core and more* (3. utg.). Math Solutions.

Forskrift til opplæringslova. (2020). *Forskrift til opplæringslova (FOR-2006-06-23-724).* Henta frå Lovdata: https://lovdata.no/dokument/SF/forskrift/2006-06-23-724/KAPITTEL_5#KAPITTEL_5

Hedrén, R., Taflin, E. & Hagland, K. (2005). Vad menar vi med rika problem och vad är de bra till? *Nämnaren, 32*(1), 36–41.

Hovik, E. (2018). Fem praksiser: Verktøy for lærere. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(4), 24–30.

Maaß, K. & Reitz-Koncebovski, K. (2013). *Inquiry-based learning in maths and science classes*. Henta frå https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/primas_final_publication.pdf

Mason, J. & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving.* Deakin University Press.

Mattelist (2021). *Om Mattelist*. Henta frå https://www.mattelist.no/artikkel/om-mattelist

Mattelist (2021). *Samtaletrekk som legger til rette for matematiske diskusjoner*. Henta frå https://www.mattelist.no/artikkel/samtaletrekk-som-legger-til-rette-matematiske-diskusjoner

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2. utg.). Anchor-Doubleday.

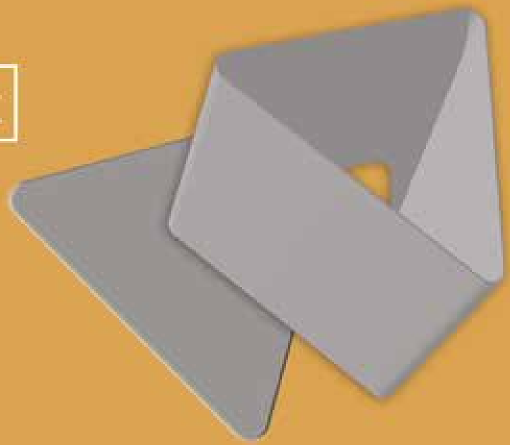
Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practives for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical thinking and learning, 10*(4), 313–340.

Utdanningsdirektoratet (2020). *Kjennetegn på måloppnåelse – matematikk fellesfag 1T*. Henta frå https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/kjennetegn/kjennetegn-pa-maloppnaelse-matematikk-1t-vg1/

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i matematikk fellesfag Vg1 teoretisk (matematikk T) (MAT09-01).* Henta frå https://www.udir.no/lk20/mat09-01?lang=nob

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Towards a sociocultural practice and theory of education*. Cambridge University Press.

Wæge, K. (2015). Samtaletrekk: Redskap i matematiske diskusjoner. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 26*(2), 22–27.



Naylor

Lek med navnet ditt

Alle liker å leke med sitt eget navn. Med disse aktivitetene kan elever bruke matematikk for å finne spennende sammenhenger … noe som er både kreativt og motiverende!

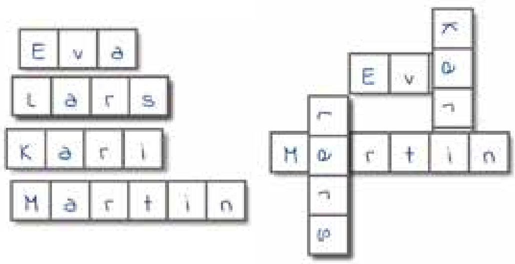
Færre–flere–samme navn

Alle elevene skriver navnet sitt på et ruteark, én bokstav i hver rute, og klipper ut navnestripsene sine (figur 1). Spør: Hvor mange bokstaver er det i navnet ditt? Hvem har det samme antall bokstaver som du? Flere? Færre? Spør også: «Hvor mange flere …» og «Hvor mange færre …»

Elevene kan organisere navnestripsene fra korteste til lengste. Hvilken lengde fins det flest og færrest av? Er noen lengder unike?

De kan også bygge et slags kryssord med alle navnene. En elev starter med å legge ut sin navnestrips. Dersom en annen elev har en bokstav felles med det første navnet, kan navnet legges slik at de to navnestripsene krysser hverandre. Så kan et tredje navn legges slik at det krysser, osv. (figur 1). Kan alle navnene bygges til et kryssordarrangement? Teip den sammen eller be elevene om å kopiere arrangementet på et ruteark.

Mike Naylor
Matematikkbølgen
mike@matematikkbolgen.com



Figur 1

Navnekoder

En populær kode er at hver bokstav har en verdi i forhold til sin posisjon i alfabetet: A = 1, B = 2, C = 3, … , Å = 29.

Elevene skriver navnene sine som tall med denne koden. Skriv noen av disse navnekodene på tavla og spør om de kan finne ut hvem kodene tilhører.

Nå skal elevene finne summen av tallene i navnekoden. Summene kan kalles navnetall. Hvem har det største navnetallet? Det minste?

Be elevene om å organisere seg i en rekke fra det minste navnetallet til det største navnetallet innen 30 sekunder! Etterpå kan elevene sammenligne med naboer i rekka. Hvilke elever har samme navnetall som andre? Hva er den største differansen mellom to navnetall i rekka?

Utfordre videre elevene til å skape sin alder ved å bruke alle tallene i navnekoden sin en gang i en ligning (tallsetning). Eksempel: Carl (3-1-18-12) er 9 år gammel, og han kan finne at (18 – 12 + 3) · 1 = 9, mens Trine (20-19-9-14-5) er 10 år gammel, og hun kan finne at 9 + 24 – 19 – (20/5) = 10. Kan elevene finne flere enn én måte? Hva om de prøver med etternavnene? Diskuter strategier!

Navnekunst

Lag kunst med navnet ditt ved å bruke et skriveprogram eller et lysbildeprogram. På denne måten kan elevene utvikle visualisering og evne til å tenke med hensyn til rotasjoner. Denne aktiviteten er morsom for elever og for deg!

- Bestem hvilken rotasjonssymmetri du vil bruke, for eksempel 5-tallig rotasjonssymmetri.
- I programvaren kan du lage en tekstboks og taste inn navnet ditt. Dupliser tekstboksen slik at du har så mange bokser som du trenger (5 i dette eksempelet).
- Finn vinklene som boksene må roteres etter. Del 360° på antall kopier for å finne den første vinkelen (360° / 5 = 72°). Hver boks roteres med et multiplum av denne vinkelen. Med 5-tallig symmetri skal du bruke 72°, 144°, 216° og 288°. Den første boksen roteres ikke.
- Velg en tekstboks som objekt og tast inn rotasjonsvinkel ved bruk av rotasjonsfunksjonen i programvaren. Fortsett med alle boksene, slik at hver er rotert til de bestemte vinklene (figur 3 på neste side).

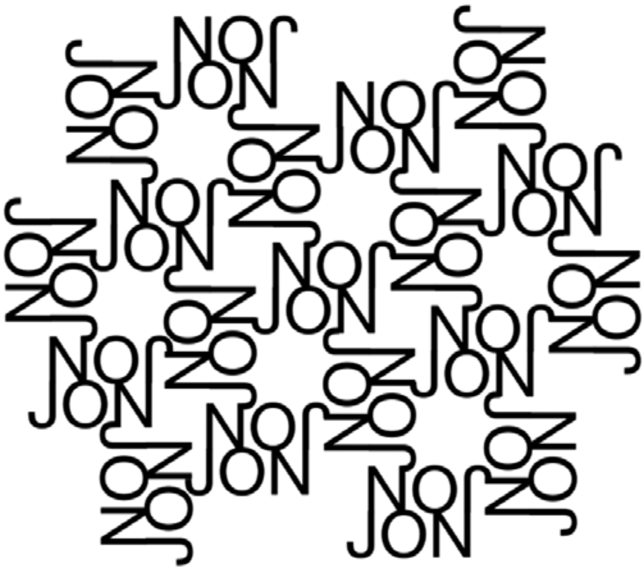
Lag et design med rotasjonssymmetri ved å flytte på boksene. For å få et godt resultat kan det være lurt å bestemme en regel for hvordan navnene skal settes sammen. For eksempel med «Åsta» kan du plassere sirkelen over «Å» på bunnen av «T» på det neste navnet og fortsette til alle navnene passer sammen. Figur 2 viser tre forskjellige resultat med forskjellige regler for hvordan navnene kan settes sammen.

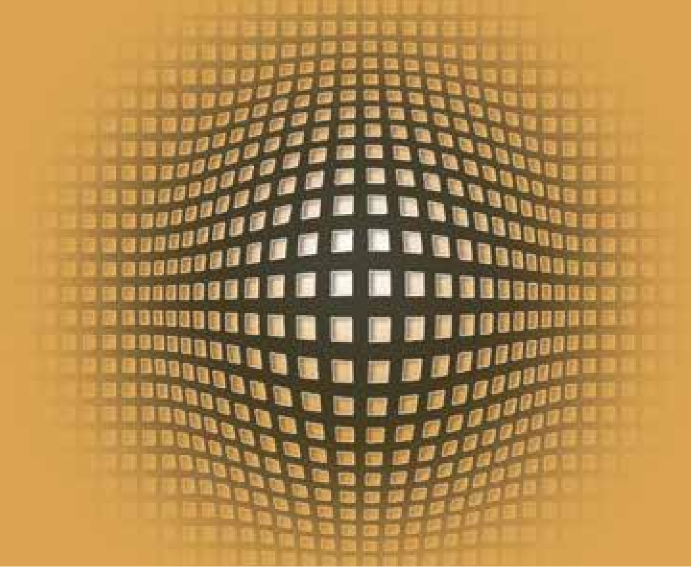
Figur 3

Figur 2

Lag flere forskjellige design med samme type symmetri, eller nye design med ulik type symmetri som vist på figur 4. Prøv med forskjellige fonter. Hva slags spennende former kan du finne? Du kan utvikle designene dine ved å sette samme mange kopier til en slags tesselering som vist til slutt. Lykke til!

Figur 4: Navnedesign med 3-4-5- og 6-tallig rotasjonssymmetri.





Oppgaver

Torkildsen

Tallkryss

Tallkryss ble lansert av den danske avisen *Informationen* i 1955. Et tallkryss skiller seg fra et «vanlig» kryssord ved at alle kodeordene er erstattet av tall. I de tomme feltene skal det skrives tall som har ett siffer, altså bare tall fra og med 0 til og med 9. Temaet for dette tallkrysset er faktorisering, dvs. at regningsarten som inngår, er multiplikasjon. For eksempel står 420 i første linje i andre kolonne, det betyr at i feltene under dette tallet skal det skrives tall som når de multipliseres sammen, gir svaret 420. Husk at også tallet 1 kan inngå i faktoriseringene.

Står det to tall i en rute, er det øverste tallet kodetallet for feltene til høyre og det nedre tallet for feltene under.

Denne oppgaven er hentet fra boka: Johansen, Carl-Otto (1966). *Magiska tal*. Forum. Sverige.

	420	3	392		243	280	2
24				144			
49				63 20			
		210 448					
14			2 3				70
25					54	18	
8				252			
32400							

Ole Einar Torkildsen
Høgskulen i Volda
oet@hivolda.no

Månsson

Logikk i ballhavet

Elever og studenter introduseres ofte til matematiske bevis og bevisføring i euklidsk geometri og tallteori, men det forekommer bevis i alle områder av matematikken. Det er ikke alltid at elever og studenter helt forstår hva som utgjør et matematisk bevis. Har jeg bevist det nå? eller Er dette et tilstrekkelig bevis? er vanlige spørsmål når de arbeider med bevis. En idé for å gi elever og studenter en bedre forståelse for bevis er å gjøre dem kjent med noe som kalles formell logikk. Enkelt uttrykt er formell logikk manipulasjon av strenger av symboler som følge av bestemte regler. I stedet for å forklare i detalj hva formell logikk er, skal vi studere det indirekte og mer konkret gjennom å bruke baller.

Anta at følgende startrekke med baller er gitt:

Foruten fargene har rekkefølgen av ballene også betydning. Videre er også følgende fire regler for hvordan en rekke med baller kan manipuleres gitt:

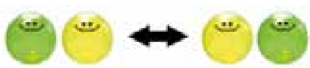
1. Hvis det i din rekke med baller finnes tre gule baller i en uavbrutt rekkefølge, kan du om du vil, bytte ut dem mot en grønn ball:

Du kan gjøre dette byttet uansett hvilke baller som finnes før eller etter de tre gule ballene i rekken. Et tillatt bytte symboliseres altså av en pil. Observer at pilene er ensrettede. Det er altså ikke lov å bytte en grønn ball mot tre gule baller, med mindre det finnes en annen regel som sier at det er tillatt.

2. Hvis du har en rød ball, kan du legge til en gul ball til venstre og en til høyre for den:

3. Hvis du har en grønn ball både til venstre og høyre for en rød ball, kan du fjerne de to grønne ballene:

4. Hvis en gul ball og en grønn ball er ved siden av hverandre, kan du bytte plass på dem:



Her er pilen dobbeltrettet, dvs. at det er tillatt å gjøre byttene i begge retningene.

Anders Månsson
Universitetet i Sørøst-Norge
anders.mansson@usn.no

Gjennom å bruke kun disse fire reglene, går det an å komme fra startrekken til følgende rekke?

Det er naturlig å begynne med å prøve seg frem. Hvis man kommer frem til denne rekken etter en tids prøving, er det et konkret bevis for at det går. Hvis man ikke kommer frem til rekken etter å ha prøvd en stund, er det ikke bevist at det ikke går. For å bevise at det ikke går, holder det vanligvis ikke bare å prøve seg frem (med mindre det f.eks.ikke er åpenbart at det bare finnes et endelig antall mulige ballrekker som kan fås frem). Ofte trenger man å gå utenfor systemet, dvs. se på problemet utenfra, fra et såkalt metaperspektiv.

I dette tilfellet går det an å komme frem til rekken «grønn–rød–grønn» fra startrekken. Beviset for det er vist i figur 1 (sifrene på pilene viser hvilken av de fire reglene som har blitt brukt i hvert trinn).

For noen virker kanskje beviset omstendelig, men tenk på at du i hvert trinn av beviset må holde deg til de fire reglene. Det er i seg selv et viktig poeng at elever og studenter lærer seg å ikke bruke andre regler enn de lovlige.

Anta at du i stedet ønsket å komme frem til følgende rekke:

Faktum er at det ikke går å komme fra startrekken til denne rekken bare gjennom å bruke de fire reglene. Det kan for eksempel bevises på følgende måte:

Tenk at en gul ball representerer tallet 1, en grønn ball representerer tallet 3, en rød ball representerer et likhetstegn, og at det står et plusstegn mellom grønne og gule baller. Da kan de fire reglene ovenfor tolkes på følgende måte (i formell logikk heter det å lage en modell):

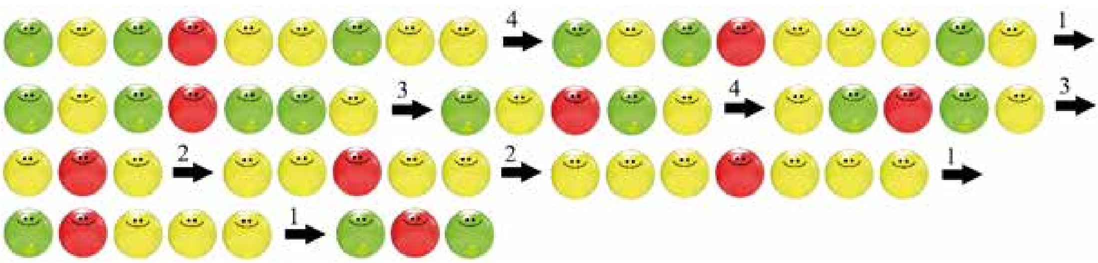
– 1 + 1 + 1 kan byttes ut mot 3.
– Det er lov å addere 1 på begge sider av et likhetstegn.
– Det er lov å subtrahere 3 på begge sider av et likhetstegn.
– 3 + 1 kan byttes ut mot 1 + 3, og vice versa.

Startrekken kan tolkes som

$$3 + 1 + 3 = 1 + 1 + 3 + 1 + 1,$$

som matematisk sett er det samme som 7 = 7. Rekken vi undrer på om vi kan komme frem til, kan tolkes som 1 = 3. Åpenbart går det ikke å komme fra 7 = 7 til 1 = 3 kun gjennom å bruke vanlige matematiske regler. Siden reglene 1 til 4 tolket ovenfor er en del av de vanlige matematiske reglene, betyr det at det heller ikke går å komme fra 7 = 7 til 1 = 3 gjennom å bruke kun disse fire reglene. Derfor går det ikke å komme fra startrekken til rekken «gul–rød–grønn».

Startrekken med baller tilsvarer i matematikken et aksiom, og ballrekkene som kan fås frem gjennom å bruke de fire reglene, tilsvarer i matematikken ulike setninger som kan bevi-

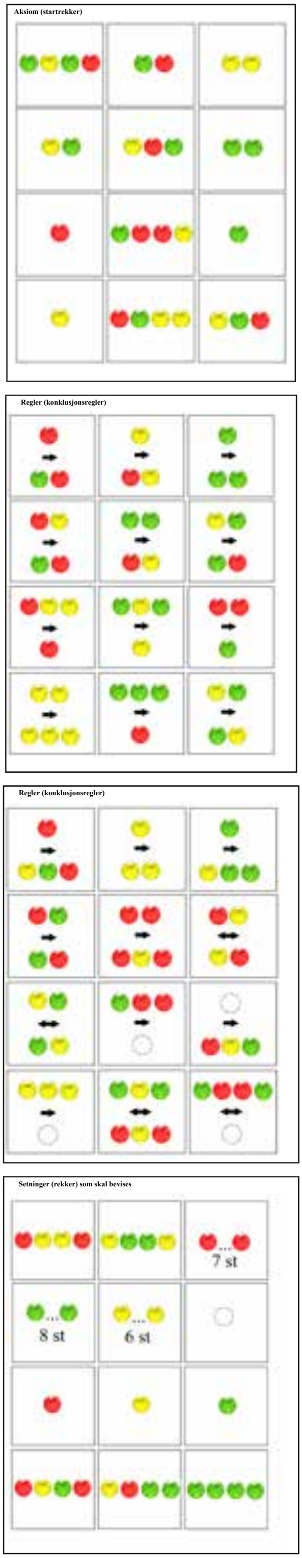


Figur 1

ses ut fra aksiomet. Sluttrekken er den setningen som ønskes bevist. De fire reglene er de logiske konklusjonsreglene som brukes i beviset. Gjennom å velge ulike startrekker, regler og sluttrekker kan elever og studenter trene på matematisk bevisføring. Dette kan skje uten at uønskede intuitive konnotasjoner påvirker dem i bevisføringen, som det er risiko for ellers hvis det brukes et område i matematikken som for eksempel euklidsk geometri.

En måte å gjøre dette på er å velge et tilfeldig antall startrekker, konklusjonsregler og en sluttrekke. For dette formålet har jeg laget et antall kort (se figur 2), som kan skrives ut og klippes ut fra nettstedet www.caspar.no/tangenten.no/2021/mansson.pdf Trekk tilfeldig noen startrekker (f.eks. 1–3 stk.), et antall konklusjonsregler (f.eks. 5 stk.), og én sluttrekke. Deretter ser du om du kan bevise at sluttrekken følger eller ikke følger fra startrekken gitt reglene som ble trukket. Hvis det ikke går an å komme frem til sluttrekken, kan det undersøkes hvor mange eller hvilke regler som må legges til for at det skal gå. Avhengig av hvilke kort som trekkes, kan det være enkelt eller vanskelig å bevise at en bestemt sluttrekke følger eller ikke følger fra en bestemt startrekke.

Som jeg har berørt i en tidligere artikkel (Månsson, 2018), har matematikk og spill en hel del til felles. Det er spesielt tydelig i dette «kortspillet». I praksis er kortene en prototype til et spill som kan utvikles i ulike retninger, for eksempel gjennom å innføre poeng og annet. Bare fantasien setter grensene for hvordan denne ballhavslogikken kan utvikles.



Figur 2: Kopieringsoriginaler

Referanser

Månsson, A. (2018). Brettspill, en ubenyttet ressurs? *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(2), 17–20.

Fosnot-hefter oversatt til norsk

Spill – Utvikling av tidlig tallforståelse

Spill – utvikling av tidlig tallforståelse er et ressurshefte som kan brukes gjennom hele skoleåret. Det består av 24 spill som kan inngå i undervisningsopplegg eller brukes individuelt etter behov. Lek og spill er naturlig del av barns læring og brukes som motivasjon for å utvikle tallforståelse og automatisere tallfakta. Elevene samarbeider i spillene, de må dele strategier med hverandre. For hvert spill gis det oversikt over det aktuelle læringslandskapet og faglige mål. Utdrag fra elevsamtaler viser samspill mellom lærer og elever med muligheter til utvikling. Spillene passer best på første og andre trinn, men kan også brukes for litt eldre elever.

Bearbeidet og tilrettelagt for norsk ved Tore Heggem.

Bjørnestien

Bjørnestien er et brettspill som gir de yngste elevene muligheter til å tenke omkring tall, spesielt kardinalitet og en-til-en-korrespondanse.

Spilleregler

Elevene spiller parvis. Hver spiller velger en sti på spillebrettet (vedlegg A). Spillerne kaster annenhver gang en stor skumgummiterning og legger det tilsvarende antallet bjørner eller brikker på sin sti. Spillerne samarbeider ved at de hjelper hverandre. Spillet fortsetter til begge stiene er fylt med bjørner eller brikker.

Det matematiske landskapet: Hva spillet åpner for, og hvilke muligheter det gir

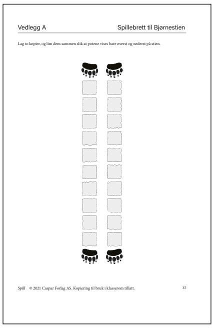
Barn som lærer å telle kan ofte være usikre på hva det tallet de ender opp med egentlig betyr. De kan oppfatte det som navnet på det siste objektet, heller enn antall objekter i mengden. I mange andre lignende spill skal en brikke flyttes langs etter brettet, men dette spillet er laget for at elevene skal se på tallet som et antall, altså kardinaltallet. Antallet som blir trillet på terningen er antall brikker som blir lagt på brettet. Siden brikkene kommer i flere farger, vil det oppstå mengder inni andre mengder av brikker. Det at elevene legger merke til dette kan føre til at de sier ting som «Jeg har tre gule og to grønne». Det å legge merke til denne typen sammenhenger er noe de kan oppfordres til. Legg også merke til hvordan elevene finner ut hvor mange brikker de skal legge ut etter å ha kastet terningen. Teller de antall prikker på terningen, og vet at tallet de ender opp med er det totale antall prikker? Eller kanskje de må plassere en brikke på hver prikk for å bestemme antall brikker? (Dette er grunnen til at spillet blir utført med stor terning.)

Du trenger

Store skumgummiterninger. En til hvert elevpar.

Spillebrettet Bjørnestien (vedlegg A). Ett til hvert elevpar.

Små plastikkbjørner, brikker eller kuber i flere farger.



Caspar Forlag AS · www.caspar.no

Pris 295,–

Bestill hos ordre@fagbokforlaget.no

Fauskanger, Bjuland

Analytisk observasjon av elevers tenkemåter

I denne artikkelen vil vi gi et lite innblikk i litteratur om profesjonell analytisk observasjon (analytisk observasjon, noticing på engelsk). Vi vil også presentere noen eksempler på hvordan etterutdanning kan bidra i utvikling av evnen til analytisk observasjon, det vil si evnen til å observere, analysere og respondere på elevers matematiske tenkemåter (elevers tenkning). Knyttet til et av kjerneelementene i nye læreplaner, utfordres lærere til analytisk observasjon. Når elevene skal «utforme eigne resonnement både for å forstå og for å løyse problem. (…) elevane grunngir framgangsmåtar, resonnement og løysingar og beviser at desse er gyldige» (Utdanningsdirektoratet, 2019), utfordres lærere til å observere, analysere og respondere på elevers tenkning.

Profesjonell analytisk observasjon

Analytisk observasjon er en prosess hvor (matematikk)lærere observerer elevers (matematiske) tenkning og legger planer for hvordan de skal respondere (Sherin et al., 2011). Mason (2011) beskriver analytisk observasjon som en samling av praksiser som har konsekvenser for hva lærere ser og gjør der og da i sin undervisning. Årsaken til at vi har valgt å oversette noticing til profesjonell analytisk observasjon, er at vi vil understreke fokuset på at det er elevers tenkning som observeres, og at denne tenkningen må analyseres av læreren for at vedkommende skal kunne respondere. Observasjon knyttes videre til lærergjerningen, til den profesjonelle lærer, og på norsk kan vi da bruke begrepet profesjonell analytisk observasjon. Analytisk observasjon defineres på ulike måter (Miller, 2011), men de fleste definisjoner involverer både å være oppmerksom på og å forstå elevers tenkning (Sherin et al., 2011).

Ball (2011, s. xii) ser på analytisk observasjon som «a practice essential to attending to learners, to the domain for which the teacher is responsible, and to connections between the learners and the domain». Analytisk observasjon er en bevissthet som muliggjør handling (Mason, 2011), og lærere med analytisk observasjon under huden identifiserer raskt situasjoner som krever at de griper inn (Miller, 2011). Analytisk observasjon har konsekvenser for hva lærere observerer, og for hva som ikke observeres, samt for hva de responderer på og ikke. Siden analytisk observasjon kan endre praksis, er det «a key component of teaching expertise

Janne Fauskanger
Universitetet i Stavanger
janne.fauskanger@uis.no

Raymond Bjuland
Universitetet i Stavanger
raymond.bjuland@uis.no

and of mathematics teaching expertise in particular» (Sherin et al., 2011, s. 79).

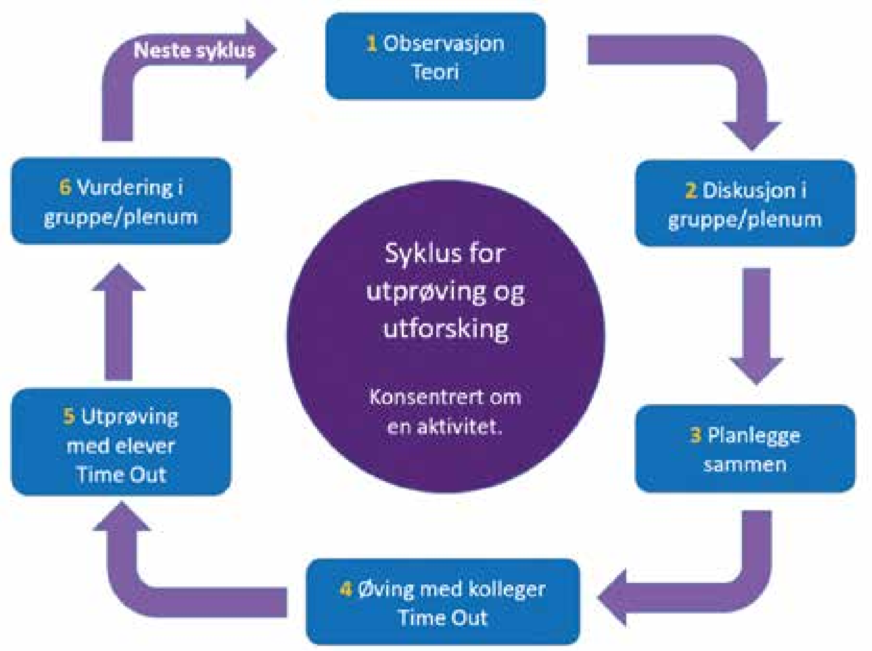
Selv om analytisk observasjon vanligvis ikke utvikles i noe særlig grad i grunnutdanning av lærere (Fennema et al., 1996) og tar årevis å lære (Steinberg et al., 2004), viser studier at læring er mulig i etterutdanning (van Es & Sherin, 2008). Utvikling av egen evne til analytisk observasjon gjennom etterutdanning er altså både viktig og mulig.

I denne artikkelen inkluderer analytisk observasjon: a) hvordan elevers tenkning ivaretas av deltakerne i læringssyklusene i MAM (se under), b) resonnering omkring elevers tenkning, og c) å bruke observasjoner av elevers tenkning til å foreta bevisste valg i undervisningen (f.eks. van Es, 2011). Når lærere skal utvikle evnen til analytisk observasjon, fremhever van Es (2011) at det er viktig å fokusere både på hva som observeres, og hvordan. Hva lærere observerer, handler om hvem de observerer (hele klassen, enkeltelever eller læreren), og innholdet i det som observeres (undervisningsmetoder, elevers oppførsel eller deres matematiske tenkning). Hvordan lærere observerer, knyttes til hvorvidt de evaluerer eller fortolker. van Es (2011) deler lavere nivåer av analytisk observasjon inn i basis (generelle kommentarer knyttet til klassen eller undervisningen som helhet) og blandet (fortsatt generelt, men begynner å observere enkeltelevers matematiske tenkning). Videre deles høyere nivåer av analytisk observasjon inn i fokusert (fokuserer på enkeltelevers matematiske tenkning og tolker tenkningen) og utvidet (fokuserer på forholdet mellom undervisning og elevers matematiske tenkning). Dette viser at deskriptive, generelle og evaluerende kommentarer knyttes til et lavere nivå av analytisk observasjon enn om de fortolker elevers tenkning og diskuterer hvordan dette knyttes til lærerens undervisning (enten den som er gjennomført, eller hvordan fremtidig undervisning kan gjennomføres for å bygge på elevers tenkning). For nærmere beskrivelse av disse nivåene, se van Es (2011) eller Fauskanger og Bjuland (2021a; 2021b).

MAM-prosjektet

I etterutdannings- og forskningsprosjektet Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning (MAM)[1] ved Matematikksenteret vektlegges det blant annet at elever er opptatt av å skape mening, og at de bør få like muligheter til å lære viktige matematiske ideer og tenkemåter. Dette er viktige prinsipper i ambisiøs matematikkundervisning (Lampert et al., 2013). MAM har som målsetting å sette ambisiøse mål for elevenes læring samt å utvikle evnen til å bygge på elevers tenkning i undervisningen. Matematikklærere utfordres til å engasjere seg i elevens tenkning, stille spørsmål, observere og vurdere elevenes resonnement, språk og argumentasjon og bygge på dette i undervisningen. Slik undervisning forutsetter at lærerne behersker analytisk observasjon, og i prosjektet øver en på analytisk observasjon i sykluser med utprøving og utforsking (læringssykluser, se figur 1). Hver syklus består av seks trinn.

Trinn 1 er en forberedelse før samlingen der lærerne leser en eller flere utvalgte artikler og ser en film om gjennomføringen av en bestemt undervisningsaktivitet. På samlingen er det lærerutdanneren som leder en diskusjon av filmen og artiklene (trinn 2). På trinn 3 planlegger lærere sammen en undervisningsaktivitet for elever med veiledning fra lærerutdanneren, mens i trinn 4 gjennomfører en av lærerne en øving med de andre lærerne og lærerutdanneren som elever. Her kan alle deltakerne be om time-out, enten for å stille spørsmål eller for å komme med alternative innspill til hva læreren kan si eller gjøre. Trinn 5 er en utprøving av undervisningsaktiviteten med elever, med den samme læreren som i øvingen. Her kan også alle be om time-out. I det siste trinnet, refleksjonsøkten, analyserer og diskuterer lærergruppen utprøvingen med lærerutdanneren som veileder (trinn 6).



Figur 1: Læringssyklus (fra https://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/mam/hva-er-mam)

Hva og hvordan lærere observerer

Her vil vi løfte frem eksempel på analytisk observasjon på høyt nivå (van Es, 2011) fra 1) time-outs i utprøving (trinn 5), 2) en planleggingsøkt (trinn 3), samt 3) en refleksjonsøkt (trinn 6).

I en tidligere studie har vi belyst hva og hvordan lærere observerer, når de ber om time-out under gjennomføring av en undervisningsaktivitet med elever (Fauskanger & Bjuland, 2021b). Time-outen vi her vil trekke frem, er fra første samling, der undervisningsaktiviteten i læringssyklusen var «å telle i kor» fra tallet 19 med hopp på 19 (19, 38, 57 osv.)[2]. I forkant av denne time-outen har de diskutert addisjonen 190 + 19, der elevene har kommet med flere mulige forslag som er skrevet på tavla. Dette indikerer at elevene er usikre på hva som er riktig. Lærerne og lærerutdanneren observerer at to mulige løsninger får mest støtte fra elevene: 209 og 219. Læreren (L) er usikker på hvordan hun skal fortsette undervisningen, og ønsker derfor å ta en time-out for å invitere de observerende lærerne (OL) eller veilederen (V) til å komme med innspill:

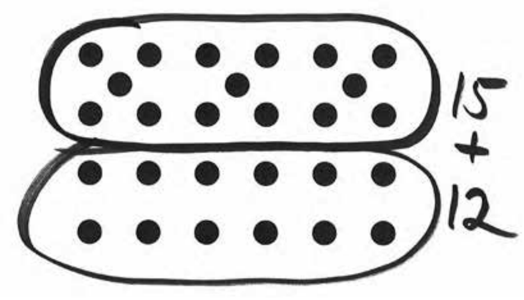
L	Kan jeg ta en liten time-out her? Jeg kjører meg litt fast med hensyn til å … på en måte … ikke sant, hvordan skal jeg ta disse her forslagene videre?
OL1	Det går an å vise visuelt, liksom, hvordan man liksom tok 190, og så la du på en tier og en nier.
OL2	På en tallinje.
L	Ja, på en tallinje for eksempel, ja, det var et godt innspill.

Selv om denne time-outen bare varer i 25 sekunder, viser den viktige sider ved analytisk observasjon knyttet til hva og hvordan lærere observerer. Læreren har observert elevers løsninger som er skrevet på tavla (hva), og at elevene er usikre på hva som er den riktige løsningen. Hennes «hvordan-spørsmål» indikerer at hun ønsker støtte og innspill fra de andre deltakerne til å bidra med forklaringer som kan hjelpe elevene til å forstå hvorfor 209 er riktig. To av lærerne som observerer, gir råd (hvordan) om dette. OL1 foreslår å visualisere addisjonen i to trinn ved å dele opp 19 i 10 + 9 ved å først addere 10 til neste hundrer (190 + 10) og etterpå legge til 9 (190 + 10 + 9) for å komme frem til svaret, som er 209. OL2 følger opp dette forslaget med å foreslå at denne visualiseringen kan illustreres på en tallinje. Læreren uttrykker at hun er fornøyd med disse forslagene, og fortsetter undervisningen med å illustrere (190 + 10 + 9) på en tallinje.

Dette eksemplet illustrerer analytisk observasjon på et høyt nivå, der søkelyset er satt på sammenhengen mellom undervisning og elevers læring (jf. Van Es, 2011). Her synliggjøres en tydelig sammenheng mellom elevenes matematiske tenkning (deres forslag til løsninger) og lærernes strategier for å vise forklaringer som kan hjelpe elevene til å forstå hvorfor en løsning er riktig.

Vi har også undersøkt muligheter for å lære analytisk observasjon, når lærerne sammen planlegger undervisningsaktiviteter for elever med veiledning fra lærerutdanner i trinn 3 (Fauskanger & Bjuland, 2021a). Funn viser at lærernes observasjoner i disse planleggingsøktene i stor grad var knyttet til enten fokusert eller utvidet observasjon. Neste eksempel er fra en planleggingsøkt hvor undervisningsaktiviteten er et kvikkbilde (figur 2). Uten tid til å telle blir elever invitert til å forklare og diskutere hvilken strategi de brukte for å finne antall prikker i kvikkbildet.

Lærerne i denne planleggingsøkten er opptatt av å predikere mulige elevstrategier som kan komme frem i undervisningsøkten. De diskuterer også hvordan mulige elevstrategier skal representeres i kvikkbildet. Tidligere i planleggingsøkten har lærerne diskutert en mulig elevstrategi 15 + 12 (figur 2). Dialogen begynner med at veilederen (V) retter oppmerksomheten mot et kvikkbilde hvor tallet 15 er markert:



Figur 2: Prediksjon av elevstrategien 15 + 12 representert på tavla.

V	Ja, men hvis vi ser på akkurat dette bildet [peker på kvikkbildet der 15 er markert]. Hvis vi [diskuterer] elevene som ser 15 her.
OL2	Men, de ser raskt 12 på alle, ja.
V	Så du tenker at [de ser] 15 pluss 12?
OL2	Ja, det kan de godt gjøre.
V	Ja [skriver +12 på tavla ved siden av 15].
Flere	Ja.
OL4	Da tenker jeg at hvis vi skal, hvis du skal gjøre det, hvis du tar 15, [kan du spørre elevene] «Hvordan kan du se 15 her?»
V	Ja [rammer inn de tre firerne].
OL4	Da blir det jo tre ganger fem eller fem ganger tre, pluss, og da [kan du spørre elevene] «Hvordan kan du se 12 her?»
V	Ja.

Dialogen viser hvordan deltakerne repeterer mulige elevstrategier, og hvordan disse strategiene kan representeres i kvikkbildet. OL2 foreslår at noen elever vil se tre firere som 12, og denne representasjonen er illustrert av veilederen (V) på figur 2. OL4 foreslår også at de kan spørre elevene hvordan de så 15 og 12 i kvikkbildet. Dialogen viser at lærerne sammen med veilederen er opptatt av sammenhengen mellom ulike elevstrategier, samt hvordan disse skal representeres i kvikkbildet.

Det tredje eksemplet er fra en refleksjonsøkt[3] (trinn 6). Aktiviteten i denne læringssyklusen er det samme kvikkbildet som vist over (figur 2). I planleggingsøkten diskuteres mål for økten. Deltakerne bestemmer seg for at målet for elevenes læring skal være distributive egenskaper ved multiplikasjon. De håper at det i undervisningen kommer frem innspill som synliggjør at noen av elevene ser antallet prikker som $3 \cdot 5 + 3 \cdot 4$, mens andre ser det som $3 \cdot 9$ (eller $3 \cdot (5 + 4)$). Disse mulige elevstrategiene vil være viktige for lærerne når de skal diskutere distributivitet. I utprøvingen er dette to av forslagene som elevene kommer med, og i refleksjonsøkten diskuterer lærergruppen utprøvingen med lærerutdanneren. Her diskuteres både elevers tenkning og hvordan de responderte / kunne ha respondert på elevers tenkning.

Lærergruppen diskuterer sammen med veilederen eksemplene de brukte knyttet til distributivitet fra oppsummeringen i undervisningsøkten. På tavla står det følgende under hverandre: $16 \cdot 4 = (10 \cdot 4) + (6 \cdot 4)$ og $32 \cdot 6 = (30 \cdot 6) + (2 \cdot 6)$. Deltakerne diskuterer om de klarte å synliggjøre den distributive lov for multiplikasjon, og en lærer (OL1) innleder diskusjonen ved å si hva vedkommende pleier å gjøre i egen undervisning:

OL1	Hvis du hadde skrevet, eller hvis du hadde satt en pil ned fra 16 og sagt «16 er jo 10 pluss 6». Du skrev det jo der borte [viser til $(10 \cdot 4) + (6 \cdot 4)$], men hvis du hadde satt det i en parentes under 16 der.
V	Nei, jeg ville heller, jeg tror jeg heller bare ville fortsatt, jeg.
OL1	Ja, du ville bare fortsatt?
V	Det er jo det som er hele poenget. For jeg tenkte på det [mens undervisningen pågikk], men gjorde det ikke. Det er det som er greia òg.
OL2	Skrive videre «er lik 10 pluss 16, parentes».
V	10 pluss 6, ja.
OL2	Ja, 10 pluss 6 [læreren som har undervist, skriver $= (10 + 6) \cdot 4$ bak $(10 \cdot 4) + (6 \cdot 4)$].
V	For den savnet jeg. Det er litt dårlig gjort å si det nå, men jeg tenkte at det ikke var noe poeng å si det da [i undervisningen] heller.
Flere	Ja.
OL1	[Går opp til tavla] Ofte så bruker jeg, jeg bruker piler og sånt, og hvis jeg hadde gjort noe sånt [i min undervisning] før jeg går videre hit [peker på $(10 \cdot 4) + (6 \cdot 4)$)]. (…) «16, hva er det for noe da? Det er jo det samme som en tier og 6» [skriver $(10 + 6)$ under 16]. Da hadde du på en måte, da hadde du fått det det [peker på $(10 + 6) \cdot 4$].
V	Men, da kunne du like godt ha skrevet den bortover, da, før den andre [peker på $(10 \cdot 4) + (6 \cdot 4)$ på tavla].
OL1	Ja. Så den siste her, ja [peker på $(10 + 6) \cdot 4$ på tavla].
V	At du kunne tatt den [$(10 + 6) \cdot 4$] i midten der, det kunne vi gjort. I stedet for, jeg skjønner hva du mener med å skrive det under. Men, nå er det jo nettopp den der med bruk av likhetstegnet vi skal vise. (…)
OL1	Ja, for da er du inne i den siste loven [distributivitet].

De to lærerne (OL1 og OL2) er sammen med veilederen særlig aktive i denne delen av refleksjonsøkten. OL1 bringer inn erfaring fra egen undervisning i diskusjonen, og de får på denne måten tydeliggjort om de symbolske matematiske representasjonene skal synliggjøres «bortover», eller om de skal skrives under hverandre. Diskusjonen fortsetter med fokus på hvordan distributivitet synliggjøres i det som står på tavla. Basert på at elevene var opptatt av at 4 skulle stå til slutt ($(10 + 6) \cdot 4$), diskuterer deltakerne videre hvor viktig det vil være å også diskutere kommutativitet med elevene, at $(10 + 6) \cdot 4 = 4 \cdot (10 + 6)$. Veilederen foreslår etter dette utdraget fra refleksjonsøkten at hun heller ville trukket inn et nytt eksempel ($7 \cdot 43$). Hun argumenterer med at det her vil være mer naturlig å sette $43 = 40 + 3$ enn å «dele opp» 7, og dermed omgrupperes (lærerne sier «deles») det andre tallet naturlig i dette eksemplet, noe som vil gi $7 \cdot 43 = 7 \cdot (40 + 3)$. Fra fokusert analytisk observasjon av enkeltelevers matematiske tenkning knyttet til distributivitet og eksemplene $16 \cdot 4$ og $32 \cdot 6$ fra undervisningsøkten viser denne diskusjonen fra refleksjonsøkten at deltakerne fokuserer på forholdet mellom undervisning (at $7 \cdot 43$ vil være et bedre eksempel å bruke enn $16 \cdot 4$ og $32 \cdot 6$) og elevers tenkning fra undervisningen (utvidet analytisk observasjon (van Es, 2011)).

Avrunding

Analytisk observasjon på høyt nivå knyttes til et fokus på sammenhengen mellom elevers matematiske tenkning, undervisning og elevers læring (van Es, 2011). Gjennomgående i MAM-prosjektets læringssykluser er diskusjoner av slike sammenhenger, slik eksemplene ovenfor viser. Eksemplene er representative for alle læringssyklusene, og tyder på at syklusene åpner opp for mulighet til å prøve ut og diskutere, og dermed utvikle profesjonell analytisk observasjon (van Es & Sherin, 2008). Med referanse til predikerte elevstrategier diskuterer deltakerne mulige pedagogiske grep i planleggingsøktene, for eksempel hvordan elevstrategier kan representeres i et kvikkbilde (figur 2). I undervisningsøktene kan deltakerne i time-outs diskutere alternative pedagogiske valg basert på observasjon av elevers tenkning der og da, for eksempel at $190 + 10 + 9$ kan illustreres på en tallinje. I refleksjonsøktene, og med referanse til spesifikke observasjoner fra klasserommet, diskuterer deltakerne observasjonene, og de foreslår alternative pedagogiske valg en kunne gjort i undervisningen. I eksemplet fra refleksjonsøkten ovenfor er det detaljer ved undervisningen som diskuteres, som hvordan en kan få klarere frem både distributive og kommutative egenskaper ved multiplikasjon i undervisningen. Denne pedagogiske diskusjonen tar utgangspunkt i elevers tenkning observert i undervisningen. Diskusjoner som dette tydeliggjør en prosess der deltakerne får anledning til å sette ord på hva en observerer i undervisningen, og sammen med andre får mulighet til å utvikle konkrete strategier for å møte utfordringene i undervisningen. Disse eksemplene viser at lærerne ofte selv har løsningene, når de får mulighet til å observere og tid til refleksjon. Basert på dette vil vi anbefale matematikklærerkollegier som vil utvikle sin kompetanse i analytisk observasjon, til å utforske de etterutdanningsmuligheter som deltakelse i læringssykluser kan gi.

Noter

1 Mer om MAM på https://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/mam

2 Mer om aktiviteten «å telle i kor» her: https://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/mam/aktiviteter-og-filmer-i-mam/telle-i-kor

3 Eksemplet er tidligere publisert i Fauskanger (2020).

Referanser

Ball, D. L. (2011). Foreword. I M. G. Sherin, V. R. Jacobs & R. A. Philipp (red.), *Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes* (pp. xx–xxiv). Routledge.

Fauskanger, J. (2020). Analytisk observasjon av elevers matematiske tenkning. *Utdanning*, (9), 38–41.

Fauskanger, J. & Bjuland, R. (2021a). Learning professional noticing by co-planning mathematics instruction. I G. A. Nortvedt, N. F. Buchholtz, J. Fauskanger, F. Hreinsdóttir, M. Hähkioniemi, B. E. Jesse, J. Kurvits, Y. Liljekvist, M. Misfeldt, M. Naalsund, H. K. Nilsen, P. Portaankorva-Koivisto, G. Pálsdóttir, J. Radisic & A. Werneberg (red.), *Bringing Nordic mathematics education into the future. Papers from NORMA 20. Preceedings of the Ninth Nordic Conference on Mat-*

hematics Education (s. 65–72). Swedish Society for Research in Mathematics Education.

Fauskanger, J. & Bjuland, R. (2021b). Learning to notice learners' mathematical thinking while co-enacting instruction. I M. Qhobela, M. Ntsohi & L. G. Mohafa (red.), *Book of proceedings of the 29th annual conference of the Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education* (s. 57–68). SAARMSTE.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R. & Empson, S. B. (1996). Mathematics instruction and teachers' beliefs: A longitudinal study of using children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 403–434.

Lampert, M., Franke, M. L., Kazemi, E., Ghousseini, H., Turrou, A. C., Beasley, H., . . . Crowe, K. (2013). Keeping it complex: Using rehearsals to support novice teacher learning of ambitious teaching. *Journal of Teacher Education, 64*(3), 226–243.

Mason, J. (2011). Noticing. Roots and branches. I M. G. Sherin, V. R. Jacobs & R. A. Philipp (red.), *Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes* (s. 35–50). Routledge.

Miller, K. F. (2011). Situation awareness in teaching. What educators can learn from video-based research in other fields. I M. G. Sherin, V. R. Jacobs & R. A. Philipp (red.), *Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes* (s. 51–65). Routledge.

Sherin, M. G., Russ, R. S. & Colestock, A. A. (2011). Assessing mathematics teachers' in-the-moment noticing. I M. G. Sherin, V. R. Jacobs & R. A. Philipp (red.), *Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes* (s. 79–94). Routledge.

Steinberg, R. M., Empson, S. B. & Carpenter, T. P. (2004). Inquiry into children's mathematical thinking as a means to teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*(3), 237–267.

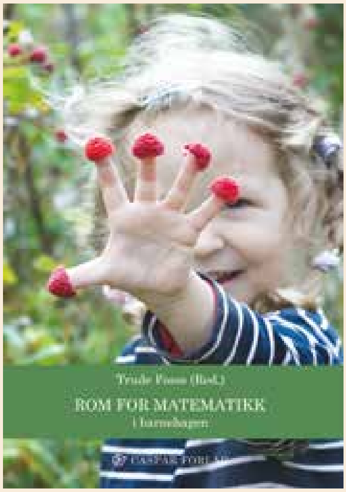
Utdanningsdirektoratet (2019). *Læreplan i matematikk for 1.–10. trinn*. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

van Es, E. A. & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' «learning to notice» in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education, 24*(2), 244–276.

van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. I M. G. Sherin, V. R. Jacobs & R. A. Philipp (red.), *Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes* (s. 134–151). Routledge.

Trude Fosse (Red.)

Rom for matematikk



Rom for matematikk – i barnehagen retter seg mot arbeid med matematikk i barnehagelærerutdanningen. Forfatterne viser ulike matematikkdidaktiske innfallsvinkler til fagområdet matematikk og barn. Fagstoffet blir presentert med nærhet til praksisfeltet samtidig som det blir satt inn i faglige og historiske sammenhenger. Boka utfordrer og bevisstgjør leserne til å se muligheter i barns matematiske verden.

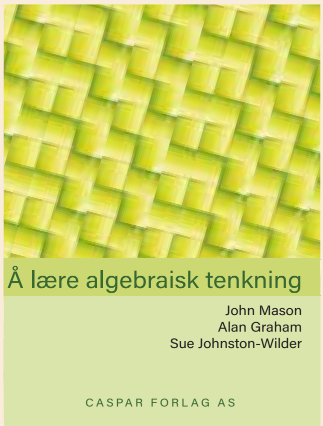
Magni Hope Lossius: *Bildenes betydning – for små barn*
Gert Monstad Hana: *Varians og invarians*
Leif Bjørn Skorpen: *Utforskande tenking og samtale*
Line I. Rønning Føsker: *Grip rommet!*
Vigdis Flottorp og Torgunn Wøien: *Barns klassifisering og pedagogens muligheter*
Elena Bøhler: *Matematikk i barnehagen: en historie*

ISBN 978-82-93598-06-0

184 sider · 430,–

Bestill på ordre@fagbokforlaget.no

Å lære algebraisk tenkning



John Mason, Alan Graham, Sue Johnston-Wilder
Oversatt av Johan Lie

Algebra har alltid representert et vannskille for elever som lærer matematikk. Denne boka vil gjøre deg i stand til å tenke på deg selv som en som lærer algebra på en ny måte. Du vil bli bedre på å undervise algebra, overvinne vanskeligheter, og bygge på ferdigheter som alle elever har. Boka er skrevet for lærere som arbeider med elever i alderen 7–16 år, og inneholder mengder av oppgaver som kan omarbeides til bruk i din egen undervisning. Oppgavene diskuterer prinsipper som lærere har funnet nyttige når de har forberedt og gjennomført undervisning.

ISBN 978-82-90898-56-9

375 sider · 525,–

Bestill på ordre@fagbokforlaget.no

Caspar Forlag AS · www.caspar.no

Fadum, Sundtjønn

Statistikk med Padlet

Vi i lærerutdanningen i matematikk på OsloMet ble plutselig undervisere på nett i flere perioder i 2020 og 2021. Matematikkundervisning i lærerutdanningen inneholder utforskende aktiviteter (ofte med konkreter), samarbeid og faglige diskusjoner i små og store grupper. Hvordan kan alt dette ivaretas i Zoom-undervisning? Vi har, som andre også rapporterer, hatt litt utfordringer med 'svarte skjermer' og manglende studentdeltakelse i hel klasse, og prøvde ulike digitale verktøy for å gjennomføre gruppearbeid og øke studentaktiviteten. I denne artikkelen beskriver vi noen, i våre øyne, vellykkede opplegg for lærerstudenter som også kan være til inspirasjon for lærere i grunnskole og videregående skole. Det er slett ikke alle opplegg vi har hatt, som har fungert, men slik er det med alt, tenker vi.

Et hjelpemiddel vi har blitt glad i, er skytjenesten Padlet (se www.padlet.com). Det er en digital oppslagstavle hvor man kan samle ressurser, innspill og ideer. Den er tilgjengelig på alle enheter og gjør det enkelt å dele ut lenker, fagstoff og oppgaver som studentene skal arbeide med. Deltakere kan blant annet legge inn tekst, bilder og filer. De kan også sette reaksjoner (hjerte, tommel opp / tommel ned) og kommentere hverandres innlegg. Lærere velger selv om tavlen skal være tilgjengelig kun for de som får lenke eller QR-kode til tavlen, eller om den skal være åpen for alle å delta i.

I artikkelen viser vi to opplegg med ulike formål som kan være relevante for flere enn lærerutdanningen. Dette er gjennomført i Zoom, i klasser på rundt 35 studenter:

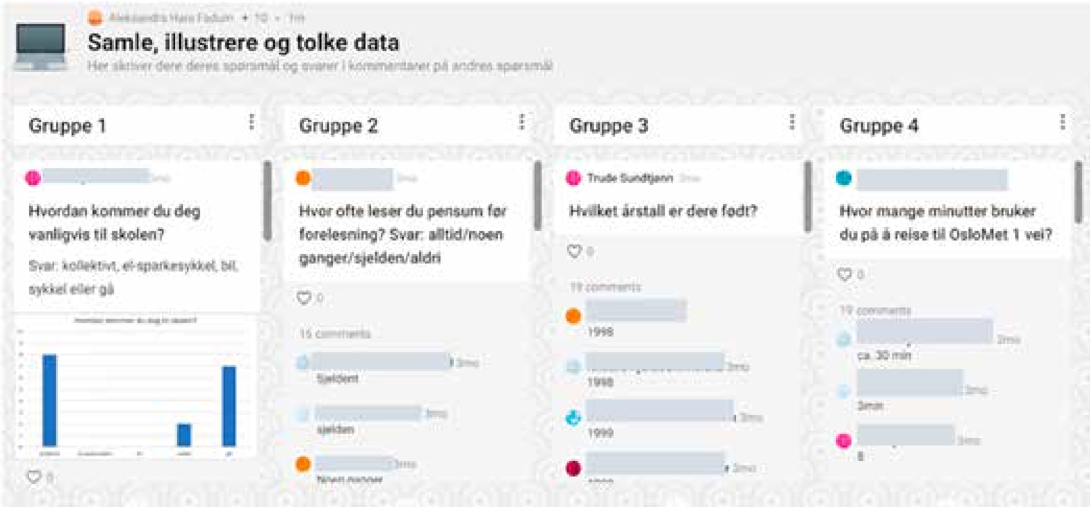
- en praktisk økt hvor studentene skulle gjennomføre en liten statistisk undersøkelse i egen klasse hvor studentene formulerte spørsmål, samlet inn data og presenterte resultatene;
- en teoretisk økt hvor studentene samarbeidet for å forstå en fagtekst, i dette tilfellet en matematikkdidaktisk artikkel om forståelse av statistiske diagrammer.

Aleksandra Hara Fadum
OsloMet – storbyuniversitetet
aleksandra.hara.fadum@oslomet.no

Trude Sundtjønn
OsloMet – storbyuniversitetet
trude.sundtjonn@oslomet.no

Selvvalgt spørreundersøkelse og grafisk fremstilling av innsamlede data

Kompetansemål i matematikk etter 7. trinn presiserer at matematikkundervisningen bør tilrettelegge for at elevene skal kunne «logge, sortere, presentere og lese data i tabeller og diagrammer og begrunne valget av framstilling» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Det er viktig at



Figur 1: Innsamlingsfasen av datainnsamlingen.

lærerstudenter selv opplever hele prosessen med å formulere spørsmål, samle og organisere data selv, og formidle til andre det som ble funnet ut, fordi flere studier viser at det øker forståelse av diagrammer og statistiske prosesser (for eksempel Friel et al., 2001).

I den digitale Zoom-undervisningen ble studentene delt i tilfeldige grupper på fire personer og satt i break-out-rooms. Gruppene fikk i oppgave å finne et spørsmål de ville stille de andre i klassen. Hver gruppe skrev spørsmålet inn i Padlet, og studentene svarte individuelt på de andre gruppenes spørsmål. Siden Padlet oppdateres i sanntid, kunne studentene følge med på alle gruppenes datainnsamling og videre behandling. De kunne dermed bli inspirert til både spørsmål og ulike måter å fremstille svarene grafisk på. Padlet har ulike oppsett, og her har vi valgt oppsettet «shelf», hvor man kan stable innhold i bestemte kolonner. Figur 1 viser arbeidet til noen av studentene underveis i timen.

Studentene ble engasjerte i oppgaven og kom opp med mange ulike spørsmål. Gruppene undersøkte klassiske temaer (for eksempel hvilken årstid liker du best?), men også temaer som handlet om koronasituasjonen og digital undervisning (for eksempel når du har digital undervisning, hvor befinner du deg (hjemme hos foreldre, egen leilighet, kollektiv, studentbolig, på skolen osv.)?) I tillegg klarte en gruppe å gjennomføre en anonymisert undersøkelse om forberedelsen til eksamen (figur 2).

Figur 2: Anonym datainnsamling ved hjelp av tommel opp / tommel ned.

Disse oversiktene ga oss mulighet til å diskutere hvordan ulike typer data kan behandles, og hvilke utfordringer både vi og elever kan møte når de gjennomfører statistiske undersøkelser. Vi vil nå presentere noen eksempler på det vi fremhevet i vår undervisning. Vi brukte blant annet studentenes data for å illustrere forskjeller mellom kvantitative og kvalitative data i statistikk:

Kvalitative data (data i form av tekst)

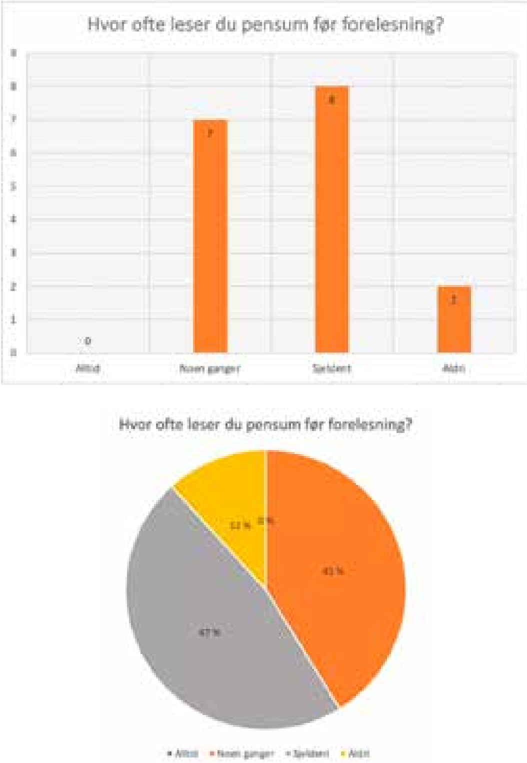
- Hvilken årstid liker du best?
- Hvilken høytid liker du best?
- Hva er favorittdyret ditt?
- Hvordan kommer du deg vanligvis til skolen?
- Hvor ofte leser du pensum før forelesning?
- Er du ferdig med arbeidskrav 3?
- Har du skilte foreldre?

Kvantitative data (data som tallfestes)

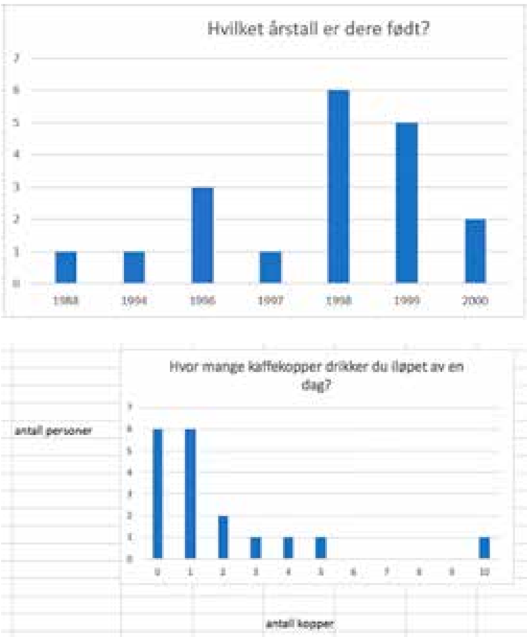
- Hvilket årstall er dere født?
- Hvor mange minutter bruker du på å reise til OsloMet én vei?
- Ca. hvor mange minutter om dagen er du aktiv nå for tida? (for eksempel gå en tur, løpetur, styrketrening, yoga osv.)
- Hvor mange kopper kaffe drikker du i løpet av dagen?

Studentenes valg av ulike typer diagrammer ble brukt til å diskutere hva som var passende diagrammer for deres data, hva ulike diagrammer fremhevet, og diagrammenes styrker og svakheter.

For eksempel hadde en gruppe laget to ulike fremstillinger for å illustrere deres data om hvor ofte studentene leste pensum før forelesning (figur 3). I løpet av diskusjonen la studentene merke til at søylediagrammet viste hvor mange som hadde svart i hver kategori, og at det var enkelt å se at ingen svarte at de alltid leste før forelesning. Sektordiagrammet viste bedre forholdet mellom kategoriene, men det ble mer usynlig at ingen svarte at de alltid leste før forelesning.

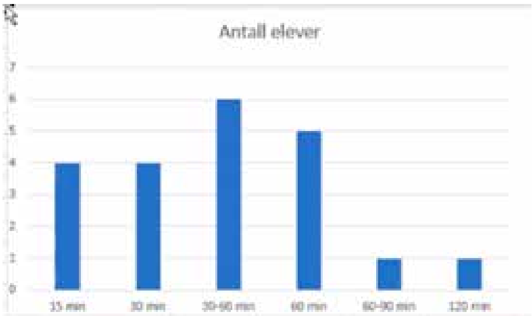


Figur 3: To ulike diagrammer fra samme datainnsamling.

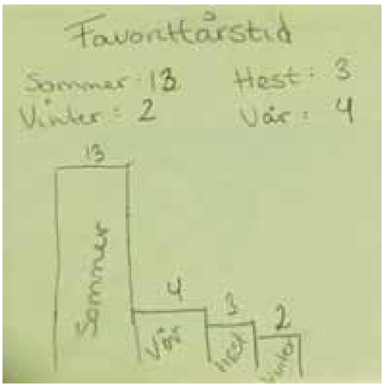


Figur 4: To søylediagrammer fra nokså like spørsmålstyper.

Søylediagrammene på figur 4 var interessante å diskutere. Vi la blant annet merke til at søylediagrammet til høyre tydelig viser at en student drikker mye mer kaffe (10 kopper) enn de andre studentene. I motsetning til diagrammetfor fødselsår, hvor det tok tid før vi merket at en student er mye eldre (1988) enn resten av dem som har svart (1994–2000).



Figur 5: Ca. hvor mange minutter om dagen er du aktiv nå for tida? (For eksempel gå en tur, løpetur, styrketrening, yoga osv.)



Figur 6: Hvilken årstid liker du best?

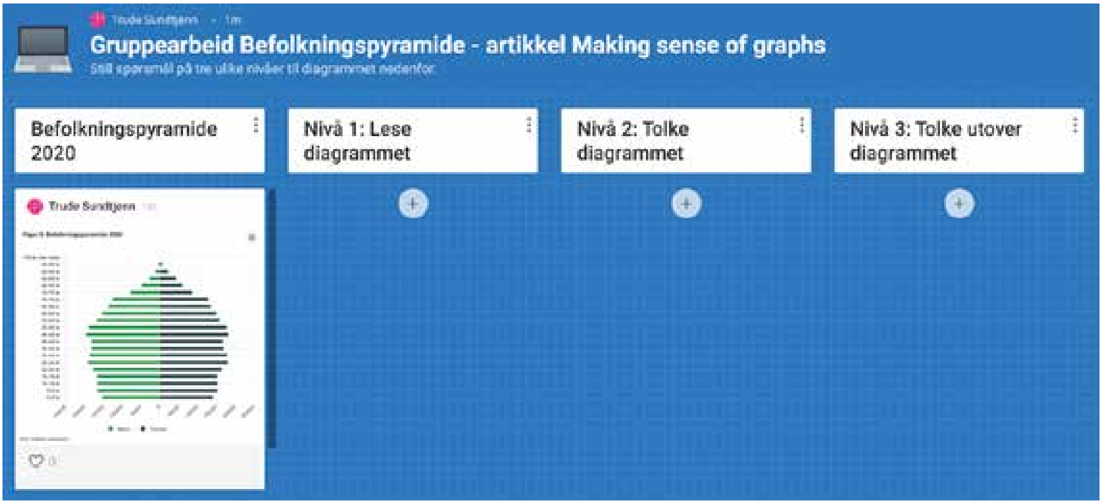
Figur 5 og 6 viser to ulike fremstillinger av kvalitative og kvantitative data og er interessante eksempler hvor spørsmålene ikke har oppgitte svaralternativer. Det medførte at studentene fikk mange ulike svar som måtte sorteres i ettertid. Dette gjaldt spesielt i spørsmålet om aktivitet på figur 5. Vi diskuterte hva som er annerledes få inn svar når man ikke hadde svaralternativer, slik at dataene måtte grupperes i ettertid (figur 5). Vi diskuterte både hvilke kategorier dataene bør deles inn i, og om det var forskjell på søylediagram og histogram. Et histogram skiller seg fra et søylediagram med at det er arealet, ikke høyden av søylen, som sier noe om mengden. Vi merket at studentene ikke skilte mellom histogram og søylediagram når de skulle fremstille statistiske diagrammer. Ingen av gruppene valgte å bruke histogram, selv om de hadde samlet inn data som var egnet til dette. For eksempel kunne studentene ha vurdert histogram på spørsmål 5, i stedet for søylediagram. På figur 6 har studentene samlet inn kvalitative data, som ikke passer så godt å lage histogram av.

Vi erfarte at den praktiske økten med Padlet er positiv på to ulike nivåer. Padlet ga studentene mulighet til å samhandle digitalt, følge med på andres arbeid, og det ga dem en viktig opplevelse av å jobbe sammen i et digitalt fellesskap med en matematisk problemstilling. I tillegg fikk studentene arbeide med hele den statistiske prosessen, og vi kunne bruke spørsmålene, de innsamlede dataene og diagrammene videre i undervisningen.

Arbeid med diagramforståelse og ulike typer spørsmål til en befolkningspyramide

Etter en praktisk økt i statistikk hadde vi en teoretisk økt som skulle oppsummere fagdidaktiske perspektiver og noen studier om statistikkundervisninger og diagramforståelse. Det er mange studenter som synes det er vanskelig å lese og forstå teoretiske forskningsartikler, samt å se hvordan de begrepene som artiklene handler om, kan brukes i praksis. Vi merket at dette ikke var enklere når digital undervisning krevde at studentene måtte bruke mer tid til individuelt forarbeid. Her kan innspill fra medstudenter være til støtte og hjelp. Vi viser her hvordan vi har brukt Padlet for å hjelpe studentene til å reflektere i fellesskap over den teksten de har lest, og prøve ut hvordan ideene fra artikler kan brukes i undervisningen.

Før denne timen skulle studentene lese en artikkel om diagramforståelse, Making Sense of Graphs (Friel et al., 2001). Artikkelen beskri-



Figur 7: Oppsett av oppgaven i Padlet.

ver blant annet kompetanser som kan assosieres med diagramforståelse, for eksempel at elever bør lære å lese informasjon ut fra et diagram på tre forskjellige nivåer; lese diagrammet, tolke diagrammet og tolke utover diagrammet.

Studentene ble sendt i break-out-rooms i par for å sammenligne hvordan de hadde forstått begrepet diagramforståelse (vår oversettelse), som artikkelen handler om, og hvordan den kan utvikles hos elever. Deretter jobbet studentene i små grupper hvor de utforsket og prøvde å forstå en befolkningspyramide for 2020 fra Statistisk sentralbyrå (SSB, 2020). Hver gruppe måtte skrive spørsmål knyttet til de tre ulike nivåene av diagramforståelse og svare på de andres spørsmål. Vi brukte tavlen «shelf» for å strukturere svarene (figur 8). Studentene diskuterte først svarene i smågruppene før de skrev inn i Padlet (figur 8).

Det er tidskrevende for læreren å besøke alle gruppene i løpet av en digital økt. Og det er vanskelig å se hvilke grupper som trenger besøk i motsetning til i et fysisk klasserom, hvor en har oversikt over gruppene. En fordel med Padlet er at vi som lærere kan følge med på det alle studentene skriver, kommentere innspillene og se hvordan begreper blir brukt. Vi kan ut fra dette gå inn i break-out-rommene og veilede etter behov.

Siden studentene i Padlet i sanntid kan se hva andre grupper skriver, kan grupper som sitter fast, se på andre innspill og diskutere hva andre

Figur 8: Noen studentsvar på oppgaven fra Padlet.

studenter har gjort. Studentene kan også sammenligne sine refleksjoner med andres innspill.

De diskuterte først svarene i smågruppene før de skrev inn i Padlet. I dette tilfellet erstatter Padlet plenumsdiskusjonen. Alle i klassen fikk oversikten over spørsmålene som ble stilt til diagrammet på tre ulike nivåer. Studentene kunne sammenligne sine spørsmål til befolkningspyramiden med andres spørsmål, og diskutere seg frem til felles forståelse av begrepene i artikkelen på gruppen.

Oppsummering

Selv om vi ikke kunne være fysisk sammen i et klasserom i disse digitale øktene, fikk studentene gjennom undervisningen med Padlet erfare hvordan de kunne formulere statistiske spørsmål og samle data. Studentene fikk et eierskap til undersøkelsene som de planla og gjennomførte selv, og kunne være med og diskutere hva de innsamlede dataene viste, og hvorfor svarene ble slik som de ble. På den måten fikk de mulighet til å konstruere sin egen kunnskap om statistiske prosesser.

Det var også en variasjon i arbeidsformer som studentene satte pris på. Klassene jobbet aktivt i små grupper for å formulere spørsmål og analysere data og i plenum når de svarte på hverandres spørsmål. Gjennom Padlet så studentene konkrete resultater av sitt samarbeid. Som lærere fikk vi underveis i prosessen innsikt i hva gruppene jobbet med, og hvordan de jobbet. Vi kunne gi fortløpende skriftlige tilbakemeldinger, eller diskutere innspill i felles klasse etterpå. I digital undervisning erstatter Padlet en tavle i klasserommet, hvor alle kan være med og skrive og vise frem sitt arbeid. Vi tror at Padlet også er mulig å bruke i fysisk klasseromsundervisning, for å samle inn innspill og ulike løsningsforslag.

Digital undervisning er krevende for både lærere og studenter. Vi opplevde at aktive undervisningsformer hvor studentene fikk konkrete oppgaver og jobbet i små grupper, økte studentenes engasjement og reduserte antall «svarte skjermer» i Zoom-timene. Studentene har gitt tilbakemeldinger på at de ikke følte seg motiverte til å studere når de satt på hvert sitt «hjemmekontor» i stedet for et klasserom. Ved å bruke Padlet fikk studentene samhandlingsmuligheter i sanntid, og de fikk studere i et fellesskap.

Referanser

Friel, S. N., Curcio, F. R. & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124–158.

SSB (2020). *Slik ser befolkningen i Norge ut*. https://www.ssb.no/befolkning/artikler-og-publikasjoner/slik-ser-befolkningen-i-norge-ut

Utdanningsdirektoratet (2020). *Kompetansemal og vurdering.* https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv17

Berg

Analog programmering

Innledning

I denne artikkelen vil jeg undersøke hvilke fordeler elever og lærere opplever ved å inkludere analog programmering i opplæringen av programmering innenfor matematikk. Analog programmering betyr at en programmerer uten datamaskin. Datamaterialet mitt er hentet fra intervju med en lærer og spørreundersøkelse i en gruppe på 8. trinn der elevene i forkant hadde arbeidet på denne måten. I undervisningsopplegget hadde de fått innføring i for-løkker og brukt det til å forme geometriske figurer ved tekstbasert programmering.

Programmering er inkludert i fagfornyelsen i matematikk fra 1. til 10. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2019a). Deler av argumentasjonen for programmeringens plass er at programmering trener elevene på algoritmisk tenkning[1], som blant annet innebærer å analysere informasjon, lage regler og steg-for-steg-fremgangsmåter, og bryte problemer ned i mindre deler (Utdanningsdirektoratet, 2019b). Et annet argument for programmeringens plass i fagfornyelsen er dens overførbarhet til andre kognitive ferdigheter som problemløsing, resonnering, kreativitet og matematiske ferdigheter (Scherer et al., 2018). Sist, men ikke minst har ferdigheter innenfor programmering en nytteverdi i seg selv. For å fungere i dagens samfunn omgir vi oss med ulike elementer som er programmert. Vi trenger kunnskap om programmering både for å forstå hvordan disse fungerer, og for å videreutvikle teknologi i fremtiden.

Det finnes ulike tilnærminger til hvordan programmering kan implementeres i skolen, både digitalt og analogt. Analog programmering refererer til «unplugged programming» (Humble et al., 2019a; 2019b), som i korte trekk går ut på å lage en fremgangsmåte eller løse et problem uten å bruke digitale hjelpemidler. Analog programmering finnes i mange ulike former, det kan være å styre en brikke ved hjelp av koder på et brettspill, programmere medelever til å utføre spesifikke oppgaver, eller pusle et puslespill uten at en selv ser puslespillet (Aranda & Ferguson, 2018).

Internasjonal forskning som undersøker hvordan lærere og elever i ungdomsskolen oppfatter analog programmering (Bell & Vahrenhold, 2018; Cortina, 2015; Humble et al., 2019a),

Tonje Karoliussen Berg
Universitetet i Sørøst-Norge
tonje.k.berg@usn.no

Dette er en fagfellevurdert artikkel på nivå 1. Tangenten er et sted der læreres og forskeres perspektiv på matematikkundervisning møtes og derfor har vi med praksisrelaterte forskningsartikler. Les mer i retningslinjene: www.caspar.no/nivaa1

indikerer at både elever og lærere ser fordeler ved analog programmering. Tilnærmingen gir mulighet til å trene algoritmisk tenkning (Bell & Vahrenhold, 2018; Cortina, 2015; Humble et al., 2019a), og den kan gi økt motivasjon for programmering (Bell & Vahrenhold, 2018; Alamer et al., 2015). I Norge er det gjort studier knyttet til læreres og elevers oppfatning av programmering knyttet til digitale plattformer, som Scratch (Giannakos et al., 2013). Det samme er imidlertid ikke gjort for analog programmering, og det er derfor interessant å undersøke om lærere og elever innenfor det norske skolesystemet har samme oppfatning knyttet til analog programmerings mulige fordeler som internasjonale studier indikerer.

I denne artikkelen undersøker jeg elevers og læreres oppfatninger rundt bruk av analog programmering i ungdomsskolen. Læreres og elevers oppfatning er viktig for å danne et bilde av hvordan de oppfatter eksisterende opplæring innenfor programmering, samt hvilken opplæring de tror er fordelaktig i norsk skole. Dette kan gi grunnlag for å utvikle didaktiske metoder til bruk i opplæringen. Jeg søker svar på følgende problemstilling: Hvilke fordeler erfares ved bruk av analog programmering i undervisning på 8. trinn?

Teori

I det følgende viser jeg til forskning som belyser læreres og elevers oppfatning av fordeler ved analog programmering, og som samtidig legger vekt på læringsstiler, algoritmisk tenkning og motivasjon og mestring. Jeg ser på forskning som kan gi innsikt i analog programmerings betydning for (1) bruk av ulike læringsstiler i undervisningen om programmering, (2) utvikling av algoritmisk tenkning og (3) påvirkning på motivasjon og mestring blant elever. I tillegg knyttes relevant teori til de tre kategoriene.

I en svensk studie viser Humble et al. (2019a) at lærere i etterutdanning var positive til analog programmering i sin undervisning. Majoriteten av lærerne mente det var hensiktsmessig å bruke analog programmering som introduksjon og i kombinasjon med andre typer programmeringsaktiviteter. Samtidig viste lærerne usikkerhet knyttet til når denne formen for programmering kan brukes. Mange mente at det var mest aktuelt på lavere klassetrinn og for elever med begrenset kunnskap om programmering. Atlas et al. (2017) bekrefter disse funnene.

Læringsstiler

Et argument for at analog programmering bør inkluderes i undervisningen, er at arbeidsformen bidrar til at ulike læringsstiler blir benyttet. Noen elever lærer best gjennom hva de hører (auditivt), andre ved å berøre og arbeide med konkreter (taktile). Noen husker best det de selv har sett (visuelle), mens andre har behov for fysisk aktivitet og egne praktiske erfaringer (kinestetiske) (Maugesten & Olafsen, 2017). Maugesten og Olafsen argumenterer for at en gjennom bruk av ulike læringsstiler kan få muligheter til å oppfylle kravene om tilpasset opplæring. Også Cortina (2015) fremhever at analog programmering kan bidra til at undervisningen treffer andre elever enn det digital programmering gjør. Ved å bruke analog programmering i undervisningen kan man tilpasse opplæringen gjennom taktile, auditive, visuelle og kinestetiske arbeidsformer. Noen forskere, for eksempel Bell og Vahrenhold (2018), bekrefter disse fordelene med analog programmering, og argumenterer for at opplæringen innenfor programmering bør inkludere både analog og digital programmering, samt at en kan trekke paralleller mellom disse. Ifølge Bell og Vahrenhold (2018) gjør analog programmering det mulig å også jobbe med programmering uten at elevene har tekniske ferdigheter innenfor programmering.

Algoritmisk tenkning

Algoritmisk tenkning går blant annet ut på å identifisere og forstå et problem, kunne lage og implementere en algoritme for å løse problemet, samt kunne evaluere om løsningen er optimal med tanke på problemet (Thomas et al., 2017). Det er enighet om at mange av ferdighetene innenfor algoritmisk tenkning kan trenes opp ved hjelp av arbeid med analog programmering (Bell & Vahrenhold, 2018; Cortina, 2015). Bell og Vahrenhold (2018) skriver at analog programmering i forkant av digital programmering er et lovende pedagogisk grep for å utvikle algoritmisk tenkning hos elever. Det kan hjelpe elever til å tenke nøye gjennom kodene de bruker, og hva de ulike kodene gjør, før de anvender koder på datamaskin. Dette kan gå tapt dersom man begynner direkte på den digitale programmeringen, fremholder Bell og Vahrenhold (2018). Humble et al. (2019) fant at lærere uttrykker tro på at analog programmering trener elevene på å vise og forklare en tenkt prosess, bryte ned et problem i mindre delproblemer og forklare og strukturere et matematisk konsept om til en kode. Aranda og Ferguson (2018) viser også til at datamaskinen i noen tilfeller kan bli en distraksjon underveis i læringen. Hvilke aspekter innenfor algoritmisk tenkning som trenes ved analog programmering, vil være avhengig av hvilken type oppgaver man jobber med, men en stor del av analoge programmeringsoppgaver er knyttet til problemløsing (Cortina, 2015). Analog tilnærming har med stor suksess blitt brukt i tilknytning til innlæring av spesifikke programmeringskonsept, for eksempel innlæring av løkker (Bell & Vahrenhold, 2018).

Motivasjon og mestring

Teoretisk kan en skille mellom indre og ytre motivasjon. I denne artikkelen vil jeg kun gå inn i indre motivasjon fordi jeg er ute etter hvorvidt oppgaven i seg selv kan skape motivasjon for elevene. For å oppnå indre motivasjon må elever og lærere oppleve oppgaven som interessant og morsom. Elever som er indre motivert, setter i gang med oppgaver på egen hånd, foretrekker utfordrende oppgaver, stiller spørsmål, er utholdende, gjør mer enn det som kreves, og opplever glede ved å løse oppgaver (Wæge & Nosrati, 2018). Fordi «elevenes indre motivasjon har en tendens til å minke med økende alder i skolen generelt og i matematikk spesielt» (Wæge & Nosrati, 2018, s. 21), er det viktig å fokusere på oppgaver innenfor programmering som er motiverende, også på høyere klassetrinn. Indre motivasjon kan påvirkes av elevenes opplevelse av mestring, og analog programmering kan spille en sentral rolle. Mestring innenfor matematikk innebærer blant annet å mestre en matematikkoppgave, kunne stille matematiske spørsmål, forklare og forstå løsningsstrategier, argumentere, resonnere og forklare og bruke matematiske begreper (Wæge & Nosrati, 2018). En forutsetning for elevenes opplevelse av mestring er at de blir utfordret på et optimalt nivå. Utfordringer som er for vanskelige, kan føre til frustrasjon, mens for enkle oppgaver kan føre til kjedsomhet (Wæge & Nosrati, 2018). Hvorvidt elevene opplever mestring knyttet til arbeidet med oppgaven, er avgjørende for om den analoge programmeringsaktiviteten fører til motivasjon for oppgaven og i beste fall motivasjon for programmering generelt.

Bell og Vahrenhold (2018) og Alamer et al. (2015) fremhever at analog programmering kan skape engasjement og øke motivasjon for programmering generelt både hos lærere og elever. Bell og Vahrenhold (2018) og Cortina (2015) har i sine studier funnet at om undervisningen inneholder både analog og digital programmering, kan flere elevers motivasjonen for programmering øke enn om man utelukkende bruker digital programmering. Dette samsvarer med Alamer et al. (2015) sine funn, der jenter i ungdomsskole og videregående skole opplevde analog programmering som motiverende og morsomt.

Metode

Forskningsdesign

Innsamlingen av data er gjort hjelp av kvalitative undersøkelser. Jeg ønsket å samle mye informasjon om lærerens oppfatning knyttet til analog programmering, og gjorde derfor et semistrukturert intervju med læreren. Intervjuet varte i 30 minutter, der jeg som intervjuer tok notater underveis i samtalen. Det var ikke mulig å gjennomføre observasjon siden skolen var nedstengt som følge av covid-19. Av tidsmessige årsaker ble det valgt en anonym spørreundersøkelse for å hente inn informasjon fra elevene. De svarte på et digitalt spørreskjema, der to av spørsmålene var fritekstsvar, resten var avkrysningsspørsmål. Denne undersøkelsen ble gjennomført i etterkant av tredje og fjerde undervisningsøkt.

Avkrysningsspørsmålene innebar at elevene tok stilling til ulike påstander som var formulert både positivt og negativt ladet. Påstandene handlet i stor grad om hvordan elevene oppfattet den analoge delen av undervisningsopplegget, hvilket læringsutbytte de hadde, og hvordan den analoge delen forberedte dem på den digitale programmeringsøkten. Noen av spørsmålene handlet direkte om hvordan de oppfattet analog programmerings virkning på deres motivasjon, læringsstil og arbeid med algoritmisk tenkning. Avkrysningsskjema ga rom for ulike synspunkter knyttet til analog programmering ved at elevene svarte på spørsmålene «Hva var bra med undervisningsopplegget du akkurat gjennomførte? Hvorfor?». Spørreskjemaet erstattet begrepet analog programmering med «programmering for hånd», fordi læreren brukte denne betegnelsen da hun beskrev analog programmering. Alle elevene svarte på begge skjemaene.

Jeg ville legge til rette for at informanten fritt kunne gi uttrykk for sine tanker knyttet til analog programmering og startet derfor Intervjuguiden med åpne spørsmål. Den ble også brukt som et veiledende dokument underveis i intervjuet. Noen av oppfølgingsspørsmålene ble direkte knyttet til kategoriene læringsstiler, motivasjon og algoritmisk tenkning. Disse spørsmålene ble stilt i etterkant av at læreren hadde nevnt fordeler ved disse. Det kan være en svakhet at det ikke ble gjort opptak av intervjuet, men bare dokumentert ved notater underveis. Føring av notater kan gjøre flyten i intervjuet dårligere (Thagaard, 2010). Samtidig kan informanter bli påvirket av ikke-menneskelige faktorer, som lydopptaker, og bli mer bevisst på hvordan de ordlegger seg (Brinkmann & Kvale, 2015). I denne studien vurderte jeg det som viktigere at informanten formulerte seg fritt, enn å bygge analyser på informantens ordrette formuleringer.

Bakgrunn for undersøkelsene

Undervisningsopplegget ble gjennomført i en klasse med 21 elever. Klassens matematikklærer gjennomførte undervisning med implementering av for-løkker som mål. For-løkker er en operasjon der en gjentar en kommando et gitt antall ganger (Bueie, 2019). Denne typen løkker er hjelp til å refaktorere en kode. Det innebærer å omstrukturere en kode for å gjøre den enklere, noe som gjør det lettere å vedlikeholde og videreutvikle koden. Elevene skulle refaktorere koder av geometriske figurer. De hadde kunnskap om programmering, de hadde blant annet formet geometriske figurer ved tekstbasert koding, og jobbet litt med hvis-setninger. De hadde også tidligere arbeidet med analog programmering. Undervisningsopplegget ble gjennomført som fjernundervisning med tidsbruk som vist i Tabell 1.

Undervisningsøkt	Tid	Opplegg
1. time	30 minutter	Introduksjonsvideo av for-løkker
2. time	60 minutter	Analogt undervisningopplegg
3. time	60 minutter	Fortsettelse av analogt undervisningsopplegg. Oppsummering
4. time	60 minutter	Digitalt undervisningsopplegg

Tabell 1: Tidsbruk i undervisningsopplegget.

Første undervisningsøkt introduserte for-løkker ved hjelp av hverdagslige eksempler (se figur 1) og Python-kode. Det analoge undervisningsopplegget gjennomførte elevene i digitale par der de tolket en utdelt pseudokode. En pseudokode er en uformell og hverdagslig kode av en algoritme (Dvergsdal, 2019). Ved hjelp av hvis-setninger og for-løkker gir pseudokoden en oppskrift på hvordan elevene skal bygge et tårn av multilinks (se figur 2).

Som et forsøk på å kompensere for hjelpen læreren ville gitt i klasserommet, så elevene videoer med løsningsforslag underveis. I fjerde undervisningsøkt arbeidet de med å lage geometriske figurer digitalt via tekstbasert programmering for så å refaktorere dem ved hjelp av for-løkker (se figur 3).

```
GJENTA 52 ganger
    GJENTA 5 ganger
        —> spise frokost kl 07.30
    GJENTA 2 ganger
        —> spise frokost kl 09.00
```

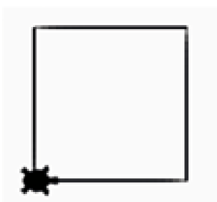
Figur 1: Ett av de hverdagslige eksemplene som ble vist til elevene ved introduksjonen av for-løkker.

```
FOR I IN RANGE (0,3):
    IF blå>=4:
        bygg(blå)
    ELIF rosa>=2:
        bygg(rosa)
    ELSE:
        stoppbygging()
```

Figur 2: Elevene fikk et visst antall multilinks og bygget det blå tårnet ved å følge pseudokoden til høyre.

```
#vi importerer skilpaddepakken i python
from turtle import *

#vi får frem skilpadden i figuren
shape("turtle")
#kjører en forløkke for å lage en firkant
for i in range(0,4):
    forward(150)
    left(90)
```



Figur 3: Til venstre er koden for et kvadrat, laget ved en for-løkke. Til høyre er figuren koden lager.

Bearbeiding av data

Notatene fra intervjuet med læreren ble renskrevet rett etter innsamling for å få med detaljer. For å analysere dataene fra spørreskjemaene ble det laget tabeller for hvert spørsmål der prosentandelen med de ulike svarene kom opp. Disse tabellene gir et helhetsinntrykk av hvordan klassen oppfatter analog programmering. Samtidig ble enkeltbesvarelser gjennomgått for å se hvordan de ulike svarene samsvarte med hverandre.

Sortering av data og drøfting av resultat ble systematisert ved bruk av kategoriene læringsstiler, algoritmisk tenkning og motivasjon. Disse kategoriene var ikke fastlåste, men fungerte som et utgangspunkt for drøftingen. Funn som ikke ble dekket av disse kategoriene, ble også brukt i drøftingen. Presentasjon og drøfting av resultater tok i stor grad for seg dataene fra første avkrysningsskjema med elevene, samt intervju med læreren. Disse dataene viste seg mest relevante for å svare på problemstillingen. Der data fra spørreundersøkelsen etter den digitale økten er brukt, er dette oppgitt.

Resultater og diskusjon

I denne delen redegjør jeg for og drøfter hvilke fordeler elevene og læreren ser ved analog programmering etter endt undervisningsopplegg. Resultatene sammenliknes med tidligere forskning, og jeg tar utgangspunkt i kategoriene: læringsstiler, algoritmisk tenkning og motivasjon og mestring. Hver kategori er strukturert slik at lærerens syn blir presentert før elevenes.

Bruk av ulike læringsstiler

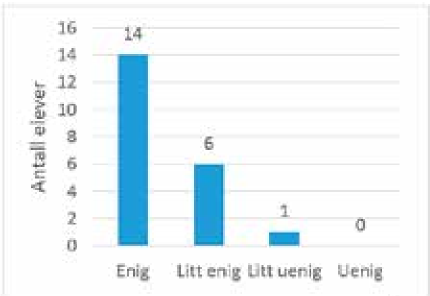
Læreren sier at analog programmering kan skape variasjon i matematikkundervisningen, og at det gir henne muligheter til å treffe flere elever med sitt undervisningsopplegg. Videre sier læreren at hun tror dette undervisningsopplegget i stor grad kan treffe elever med taktil læringsstil på en hensiktsmessig måte, og at dette gjelder analog programmering generelt. Lærerens oppfatninger kan sees i lys av

Maugesten og Olafsens (2017) oppfordring om å etterstrebe en undervisning som inkluderer ulike læringsstiler for å tilpasse undervisningen til enkeltelever. Samtidig gir læreren uttrykk for at hun har erfart at det er hensiktsmessig å la innføringen av et emne være analogt, slik at elevene får tid til å forstå et tema innenfor programmering på en mer hverdagslig og helhetlig måte, før de begynner arbeidet digitalt. Læreren fremhever at dette vil gagne elever med lite mestring innenfor programmering. Dette kan sees i sammenheng med tidligere funn om at analog programmering kan bidra til at elever med lite tekniske ferdigheter i programmering likevel kan trene på å mestre aspekter innenfor programmering (Bell & Vahrenhold, 2018). Dette kan sees på som en form for tilpasset opplæring der en benytter seg av flere ulike læringsstiler. Læreren beskriver at hun vil bruke analog programmering som en integrert del av programmeringsopplæringen, hun vil veksle mellom å jobbe digitalt og analogt.

Læreren reflekterer også over hvorvidt analog programmering er aktuelt for å oppnå bruk av ulike læringsstiler i undervisningen i ungdomsskolen fremover. Elevene blir flinkere på det tekniske innenfor programmering, og hun tror det er mulig at analog programmering derfor vil utebli. Dette kan tolkes som at læreren har en forståelse av at analog programmering er aktuelt innenfor den grunnleggende opplæringen av programmering, noe som samsvarer med tidligere forskning (Humble et al., 2019a). Dette kan også tyde på at hun ikke synes fordelene ved analog programmering knyttet til variasjon av læringsstiler i undervisningen er så hensiktsmessig som først antatt. Læreren utelukker ikke at variasjon av læringsstilene også kan oppnås ved digital programmering.

Elevene underbygger at analog programmering kan skape variasjon i matematikkundervisningen ved at 20 elever bekrefter at de er enig eller litt enig i at oppgaven med programmering for hånd var en annerledes time enn vanlige matematikktimer (se figur 4). Når en elev skriver at «det var gøyere enn vanlig matte», kan det tyde på at det for denne eleven også skapte motivasjon. Det fremgår ikke hva eleven legger i «vanlig matte». Det kan være timer preget av stor variasjon i aktiviteter samt bruk av mange ulike læringsstiler.

Halvparten av elevene ville gått rett på programmering på data, uten å ha oppgaven med programmering for hånd først, mens den andre halvparten ville gjennomført det analoge opplegget også sett i etterkant. Denne tilbakemeldingen forteller at elevene foretrekker ulike fremgangsmåter, og kanskje at de også har ulike læringsstiler. De ulike svarene kan tyde på at man treffer flere ved å benytte seg av analoge undervisningsopplegg enn om man kun velger de digitale.



Figur 4: Elevsvar på påstanden «Oppgaven med programmering for hånd var en annerledes time enn vanlige matematikktimer».

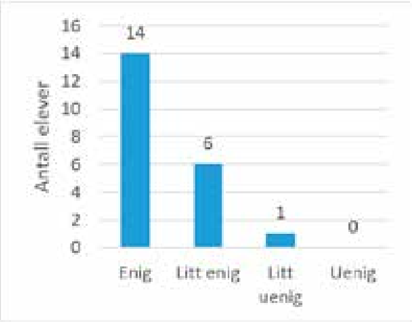
Utvikle algoritmisk tenkning

Læreren trekker frem at man gjennom det analoge undervisningsopplegget trener på leseferdigheter, og innenfor programmering uttrykker hun at dette handler om evnen til å lese en kode. Hun opplever at elevene blir «tvunget» til å bearbeide selve koden grundigere når de gjennomfører en analog programmeringsøkt enn en digital. Hun underbygger dette ved at elevene selv må komme frem til hva resultatet av en kode er, mens de ved digital programmering kan teste ut koden i større grad underveis i prosessen. Lesing av koden sammenlikner hun med lesing av en bruksanvisning, som kan relateres til en algoritme. Det dreier seg om å lese en algoritme, forstå den og forutse hva den vil utrette, noe som er en tydelig del av ferdighetene innenfor algoritmisk tenkning. Dette kan sees i lys av Bell og Vahrenholds (2018) funn, der de tydeliggjør hvilket lovende pedagogisk grep det er å bearbeide kode på en grundig måte i opplæringen av programmering. I tillegg forteller læreren at det «gikk opp et lys» for mange elever underveis i undervisningsopplegget. Læreren uttrykker at hun tror denne grundige forståelsen handler om at de må bruke konkreter til å lage noe fysisk ut av en kode, noe også Bell & Vahrenhold (2018) understreker.

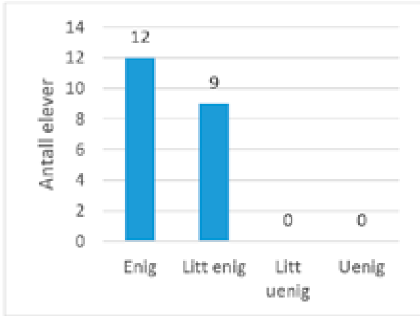
I forlengelse av dette redegjør læreren for hvordan opplegget også trener på teknisk koding ved at elevene ser en ferdig kode og tolker den gjentatte ganger. Teknisk koding kan i dette undervisningsopplegget forstås som hvordan man lager en for-løkke ved programmeringsspråket Python. Hun sier elevene i stor grad forsto hvordan intervallene en for-løkke avgrenser, fungerer, og at de forsto og kunne forestille seg at variabelen i løkken alltid legger på én hver gang den kjører. Læreren tror at elevene i større grad bruker for-løkker og variabler uten nødvendigvis å forstå logikken som ligger bak, ved digital programmering enn ved analog programmering. Denne forståelsen samsvarer med at analog programmering bidrar til innlæring av spesifikke programmeringskonsepter (Bell & Vahrenhold, 2018), som i dette tilfellet er for-løkker.

Senere i intervjuet trekker læreren også inn begrepet algoritmisk tenkning som en fordel ved det analoge undervisningsopplegget. Algoritmisk tenkning konkretiserer hun ved å trekke frem ferdigheter som at elevene trener på å bryte ned problemer i mindre biter, for så å forstå hvert delproblem – dette kalles dekomposisjon. Lærerens oppfatning av at analog programmering kan bidra til dekomposisjon, samsvarer med funnene til Humble et al. (2019a), som sier at analog programmering kan føre til at elevene må dele opp problemer i mindre delproblemer før de kan løse dem. Dekomposisjonen gjøres i undervisningsopplegget ved at elevene skal forstå ulike deler av koder før den til slutt forstår hele programmet. Læreren trekker også frem algoritmisk tenkning når det fokuserer på de delene av programmet som er essensielt for å utføre koden, der en fjerner unødvendig informasjon. Hun sier man trener på dette i undervisningsopplegget ved å fjerne overflødig informasjon fra de betingelsene i en hvis-setning som ikke oppfylles.

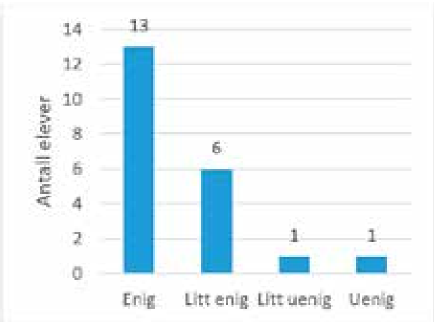
En kan stille spørsmål ved om denne formen for trening på algoritmiske ferdigheter ikke kan oppnås via digital programmering. Læreren som har deltatt i studien, er opptatt av at man jobber med algoritmisk tenkning på en annen måte ved analog programmering enn ved digital programmering. Hun begrunner dette ved å vise til at elevene får bruke mer tid på å forstå prinsippene bak koden, og med at de selv må skape resultatet av koden de tolker. Det står i motsetning til digital programmering, der resultatet av koden kommer opp på en skjerm, uavhengig av om eleven egentlig har forstått hva koden sier. Læreren mener elevene går gjennom en modningsprosess ved at de får bruke mye tid på å tolke koden og bygge den fysisk. Det samme understrekes hos Bell & Vahrenhold (2018), som skriver at analog programmering bidrar til å kunne lese og forstå digital kode, noe som kan tolkes i retning av at datamaskinen kan oppfattes som en distraksjon for elevene, heller enn at den er et nødvendig hjelpemiddel. Læreren sier også at ikke alle elever nødvendigvis har behov for denne formen for undervisning, og hun peker spesielt på elevene som mestrer programmering godt, men hun antyder samtidig at den analoge arbeidsmetoden gjør at flere av elevene i klassen forstår prinsippene bak algoritmisk tenkning. Det er viktig å understreke at det finnes avansert digital programmering som relativt enkelt kan illustreres ved hjelp av konkreter, og gjennom dette bidra til at elevene som mestrer programmering godt, kan ha nytte av analog programmering.



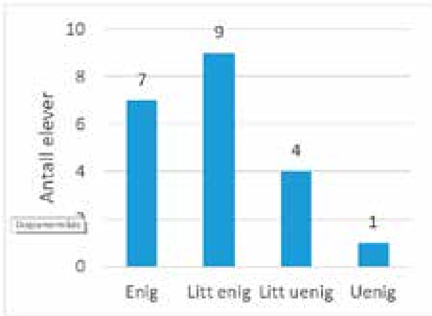
Figur 5: Elevsvar på påstanden «Programmering for hånd gjorde at jeg forsto hvordan for-løkker fungerer».



Figur 7: Elevsvar på påstanden «Programmering for hånd kan være en hjelp til å forstå prinsipper innenfor digital programmering».



Figur 6: Elevsvar på påstanden «Programmering for hånd gjorde at jeg forsto hvordan hvis-setninger fungerer».



Figur 8: Elevsvar på påstanden «Programmeringen for hånd gjorde at jeg forsto programmering på data bedre».

Lærerens oppfatninger av at analog programmering kan bidra til å utvikle algoritmisk tenkning, bekreftes av elevene. Av totalt 21 elever svarer henholdsvis 20 og 19 av disse at de er enig eller litt enig i at programmering for hånd gjorde at de forsto hvordan for-løkker og hvis-setninger fungerer (figur 5 og figur 6). Dette handler om å kunne lese en algoritme og analysere og forutsi hva som skjer når koden kjøres. Etter den analoge økta var alle elevene enige eller litt enige i at programmering for hånd kan være en hjelp til å forstå prinsipper innenfor digital programmering (figur 7). Etter endt digital økt var 16 av 21 elever enige eller litt enige i at programmeringen for hånd gjorde at de forsto programmering på data bedre (figur 8). Dette kan underbygges ved disse skriftlige tilbakemeldingene på det analoge undervisningsopplegget:

> «Det var artig å se hvordan for-løkker fungerte. Jeg lærte mye av å gjøre det for hånd, fordi det var lettere å forstå.»
> «Jeg lærte mer om hvordan programmering fungerer.»

Besvarelsene bekrefter at flertallet i denne elevgruppa tror at undervisningsopplegget førte til at de forsto prinsippene bak for-løkker og hvis-setninger bedre.

Økt motivasjon og mestringsfølelse

Et av de viktigste resultatene den analoge undervisningsøkten gav, var ifølge læreren at elevene fikk motivasjon for programmering i sin helhet da de klarte oppgavene. Begrunnelsen for dette er at aktiviteten var lagt opp slik at de tekniske ferdighetene innenfor programmering ikke er like nødvendige som ved digital programmering. På denne måten kan flere elever ha forutsetninger for å få til oppgaven. Følelsen elevene får ved å løse en oppgave, kan knyttes til begrepet mestring, noe også læreren nevner i denne forbindelse. Den analoge tilnærmingen oppgaven har, kan gagne elevene som ellers opplever liten grad av mestring innenfor matematikk, hevder læreren. Læreren tror at mestringsfølelsen elevene fikk ved den analoge programmeringsøkten, kan ha skapt motivasjon for programmering generelt.

Dette punktet underbygges av elevenes svar på påstanden om oppgavens vanskelighetsnivå. Til tross for at mange fortalte læreren at de fikk feil på de første oppgavene da de sjekket med løsningsforslaget, syntes kun fem elever at den analoge oppgaven var for vanskelig. Wæge & Nosrati (2018) understreker at en forutsetning for elevenes mestringsfølelse er at oppgavene ikke oppleves for vanskelige slik at det oppstår frustrasjon hos elevene. Spørreundersøkelsen sier ingenting om hvor mange elever som syntes oppgavene var for enkle, men den forteller at ni av elevene syntes oppgaven var kjedelig, noe som kan være en følge av for få utfordringer. Samtidig er det lærerens oppfatning at mange elever fikk feil svar på første oppgave, men etter hvert mestret oppgaven godt. Dette kan bety at oppgaven var passe utfordrende for mange. Skriftlige tilbakemeldinger på opplegget underbygger også dette: «Det var bra at vi fikk bruke mer tid enn vi skulle, det var gøy å få det til», «Det var artig å se hvordan for-løkker fungerte … I tillegg syntes jeg det var gøy, så jeg fikk motivasjon til å fortsette selv når timen var over». Dette tyder på at aktiviteten skaper mestringsfølelse, som også hos noen elever førte til en indre motivasjon, ettersom svarene spesifikt viser at elevene ville fortsette også etter at timen var ferdig. Det er nettopp denne typen motivasjon som knyttes til ulike læringsfremmende initiativer fra elevenes side (Wæge & Nosrati, 2018).

Elevenes respons etter den analoge økta underbygger lærerens oppfatning av at undervisningen førte til høyere motivasjon for programmering generelt. Alle unntatt én svarer at de ønsker å lære mer om programmering. Samtidig svarer 13 elever at programmering for hånd gjorde at de fikk større motivasjon for programmering generelt, noe som er et tydelig flertall. Dette samsvarer med det Alamer et al. (2015) fant i sin studie av jenter på ungdomsskolen og videregående skole. Ni av elevene i min undersøkelse svarte at de syntes programmering for hånd med multilinks var kjedelig. Fem av disse var uenige i at de fikk større motivasjon for programmering generelt ved å programmere analogt, og fire av dem ønsket at aktiviteten skulle vært gjennomført digitalt. Dette kan tolkes på flere måter. Det kan se ut til at noen elever ville programmere digitalt og har høy motivasjon for det, men at de ikke fant motivasjon ved å programmere analogt, slik oppgaven er utformet. Noen opplever kanskje ikke motivasjon innenfor programmering, hverken ved analog eller digital programmering på generell basis. Andre elever kan ha høy motivasjon for å programmere fra før, men de opplevde ikke at denne aktiviteten gav mer motivasjon. Med dette som bakteppe finner jeg at flertallet av svarene fra elevene underbygger lærerens tro på at analog programmering skapte motivasjon for programmering generelt.

En faktor som taler imot at analog programmering skaper motivasjon for programmering, er at elevene ønsker å komme i gang med programmering på data og derfor blir utålmodige. Denne faktoren underbygges av at fire elever gav tilbakemelding om at opplegget ville vært bedre om det hadde vært gjennomført på data. I tillegg til de fire gav én elev følgende tilbakemelding: «Det var bra, men nå har jeg lyst til å prøve på pc.» Spørreundersøkelsen etter den digitale delen tyder på at elevene syntes den digitale delen, i likhet med den analoge delen, førte til mer motivasjon. Det var 19 elever som var enige eller litt enige i at den digitale programmeringen skapte større motivasjon for programmering generelt. Dette tyder på at både den analoge delen og den digitale delen fører til mer motivasjon innenfor programmering, noe som underbygges ved at i underkant av halvparten ville ha droppet den analoge programmeringsdelen, mens resterende ville beholdt den, også i etterkant av det digitale undervisningsopplegget. Om lag halvparten av elevene opplevde, i likhet med læreren, den analoge delen som motiverende. Det optimale er om man ved hjelp av både analoge og digitale arbeidsmetoder kan motivere alle elever i en klasse. Elevenes ulike svar tyder på at analog programmering kan skape motivasjon for programmering, men at man bør jobbe både analogt og digitalt for å nå de ulike elevene.

Konklusjon

I denne studien har jeg kartlagt hvilke fordeler noen elever og én lærer ser ved å introdusere for-løkker ved hjelp av analog programmering på ungdomsskolen. Både elevene og læreren sett under ett viser at de er positive til analog programmering. Læreren gir uttrykk for at analog programmering kan bidra til å trene algoritmisk tenkning, skape motivasjon for programmering generelt samt legge til rette for ulike læringsstiler i undervisningen. Dette bekreftes langt på vei av elevene. At analog programmering ser ut til å påvirke motivasjonen for programmering generelt hos elevene, er i seg selv en grunn til å benytte analog programmering kontinuerlig i ungdomsskolen. Det ser også ut til at både elevene og læreren tror analog programmering har bidratt til at elevene har forstått hva de ulike løkkene utfører, og de gav uttrykk for at de gjennom denne erfaringen hadde et godt utgangspunkt for den digitale programmeringen. Dette betyr ikke at elevenes læringsutbytte ikke kunne vært oppnådd via digitale hjelpemidler. Det bekreftes i denne studien at variert bruk av læringsstiler har betydning, både for motivasjonens del og med hensyn til å tilpasse til ulike individer i klassen.

Funnene som vises i denne studien, er langt på vei de samme tendensene som man ser fra forskning i andre land, noe som tyder på at analog programmering bør inkluderes i ungdomsskolen. Studien gir grunnlag for videre diskusjoner i skole- og lærerutdanning, knyttet til hvordan programmeringskompetanse best kan utvikles. Jeg håper at funnene og undervisningsopplegget kan være til informasjon og inspirasjon for nåværende og fremtidige lærere som skal undervise i programmering i skolen. Det er imidlertid viktig å understreke at denne studien tar utgangspunkt i et lite utvalg informanter, og at det derfor er behov for videre forskning på elevers og læreres oppfatning av fordeler innenfor analog opplæring i programmering i norsk skole.

Note

1 Oversettelse av «Computational thinking»

Referanser

Alamer, R. A., Al-Doweesh, W. A., Al-Khalifa, H. S. & Al-Razgan, M. S. (2015). Programming unplugged: Bridging CS unplugged activities gap for learning key programming concepts. I J. E. Guerrero (red.), *Fifth International Conference on e-Learning* (s. 97–103). IEEE. https://doi.org/10.1109/ECONF.2015.27

Aranda, G. & Ferguson, J.P. (2018). Unplugged programming: The future of teaching computational thinking? *Pedagogika, 68*(3), 279–292. https://doi.org/10.14712/23362189.2018.859

Atlas, J., Bell, T. & Duncan, C. (2017). What do the teachers think? Introducing computational thinking in the primary school curriculum. I *Proceedings of the Nineteenth Australasian Computing Education Conference* (s. 65–74). Association for Computing Machinery. https://doi.org/10.1145/3013499.3013506

Bell T. & Vahrenhold J. (2018). CS unplugged – how is it used, and does it work? I H. J. Böckenhauer, D. Komm & W. Unger (red.), *Adventures between lower bounds and higher altitudes. Lecture notes in computer science, 11011*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98355-4_29

Brinkmann, S. & Kvale, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Gyldendal Norsk Forlag.

Bueie, H. (2019). *Programmering for matematikklærere*. Universitetsforlaget.

Cortina, T. J. (2015). Broadening participation: Reaching a broader population of students through «unplugged» activities. *Communication of the ACM, 58* (3), 25–27. https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/2723671

Dvergsdal, H. (2019, 4. august). Pseudokode. *Store norske leksikon*. https://snl.no/pseudokode

Giannakos, M. N., Jaccheri, L. & Proto, R. (2013). Teaching computer science to young children through creativity: Lessons learned from the case of Norway. I M. van Ekelen & E. Barendsen (red.), *Proceedings of the 3rd Computer Science Education Research Conference on Computer Science Education Research* (s. 103–111). Open Universiteit, Heerlen, Netherlands. https://dl.acm.org/doi/proceedings/10.5555/2541917

Humble, N., Mozelius, P. & Sällvin, L. (2019a). On the role of unplugged programming in K-12 education. I *European Conference on e-Learning 2019*. DOI: https://doi.org/10.34190/EEL.19.049

Humble, N., Mozelius, P. & Sällvin, L. (2019b). *Programmering i matte och teknik*. I Pedagogiska magasinet. http://miun.diva-portal.org/smash/get/diva2:1372308/FULLTEXT01.pdf

Maugesten, M. & Olafsen, A. R. (2017). *Matematikkdidaktikk i klasserommet*. Universitetsforlaget.

Scherer, R., Siddiq, F. & Sánchez Viveros, B. (2018). The cognitive benefits of learning computer programming: A meta-analysis of transfer effects. *Journal of Educational Psychology, 111*(5), 764–792. http://dx.doi.org/10.1037/edu0000314

Thagaard, T. (2010). *System og innlevelse: En innføring i kvalitativ metode* (3. utg.). Fagbokforlaget.

Thomas, J. O., Rankin, Y. & Minor, R. & Sun, L. (2017). Exploring the difficulties African-American middle school girls face enacting computational algorithmic thinking over three years while designing games for social change. *Computer Supported Cooperative Work, 26*, 389–421. https://doi.org/10.1007/s10606-017-9292-y

Utdanningsdirektoratet (2019a). *Kompetansemål og vurdering*. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv16

Utdanningsdirektoratet (2019b). *Algoritmisk tenkning*. https://www.udir.no/kvalitet-og-kompetanse/profesjonsfaglig-digital-kompetanse/algoritmisk-tenkning/

Wæge, K. & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk*. Universitetsforlaget.

MENINGSFULL MATEMATIKK FOR ALLE

– et samspill mellom praksis, forskning og utvikling

Matematikksenteret, NTNU, vil bidra til at matematikkopplæringen tar utgangspunkt i barn og unges tenkning og bygger på deres interesser, bakgrunn, erfaringer og kunnskap. Målet er at barn og unge skal utvikle en matematisk kompetanse som består av fem komponenter.

Matematikksenteret vil arbeide for å fremme en matematikkundervisning i skolen hvor barn og unge blir møtt med høye forventninger. Læreren leder arbeidet mot læringsmålet for timen, og legger til rette for et godt læringsmiljø.

For barnehage vil Matematikksenteret bidra til at personalet inviterer barna til matematisk utforskning gjennom varierte aktiviteter og berikende samtaler.

Vi ønsker at barn og unge får arbeide med kognitivt krevende aktiviteter som fremmer resonnering og forståelse, og de får diskutere forskjellige løsningsstrategier med hverandre. Feil anses som en naturlig del av læringsprosessen. Slik kan barn og unge erfare at matematikk er engasjerende, utfordrende og meningsfullt.

Matematikksenteret sin virksomhet skal være et samspill mellom praksis, forskning og utvikling. Senteret skal utvikle praksis- og forskningsbaserte ressurser og modeller for kompetanseutvikling som våre målgrupper kan benytte, og bli inspirert av.

For å lykkes med dette må Matematikksenteret ha tett kontakt med praksisfeltet. Matematikksenteret skal drive med forsknings- og utviklingsarbeid i tett samarbeid med praksisfeltet. Senteret skal være oppdatert på nasjonal og internasjonal forskning i matematikkdidaktikk, og senterets arbeid skal være forskningsbasert.

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

NTNU

Kompetanseløftet i spesialpedagogikk og inkluderende praksis

Kompetanseløftet skal bidra til at barn og unge får den hjelpen de trenger, når de trenger den. Tiltaket er særlig rette mot ansatte i barnehage, skole og PPT, og målet er å styrke kollektiv kompetanse i barnehager og skoler ut fra lokale behov, gjennom samarbeid med universitet eller høyskole.

Kompetanseløftet i spesialpedagogikk og inkluderende praksis skal bidra til at kommuner og fylkeskommuner etter hvert har den kompetansen de trenger på «vanlige utfordringer». Matematikkvansker er definert som en vanlig utfordring, og felles kompetanseheving for skole og PPT vil være et tiltak for møte denne vanlige utfordringen.

Matematikksenteret har i samarbeid med Statped utviklet kompetanseutviklingspakkene «Matematikkvansker og tilpasset opplæring». Innholdet i pakkene skal øke bevisstheten rundt arbeidsmåter og betydningen dette har for undervisningspraksis, og vil gi skole og PPT et konkret utgangspunkt for kompetanseutvikling og tettere samarbeid. Vi har erfart at samarbeidet mellom skole og PPT fungerer ulikt fra kommune til kommune. Vi ser også hvor viktig det er å få til et tett samarbeid for å styrke laget som jobber rundt barna.

Her finner du kompetansepakkene: www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/matematikkvansker-og-tilpasset-opplæring

Innhold i pakkene

Det er utviklet fire pakker i «Matematikkvansker og tilpasset opplæring», og i hver pakke er det tre til fire moduler.

Digitale kurs i «Matematikkvansker og tilpasset opplæring»

Vil du få flere elever til å mestre og engasjere seg i matematikk? Høsten 2021 tilbyr vi digitale kurs i «Matematikkvansker og tilpasset opplæring».

Vi ønsker at alle elever skal oppleve matematikk som meningsfullt. Å gjøre matematikken meningsfull er å møte elevene der de er, bygge videre på det elevene kan, la elevene oppdage hvordan matematikken henger sammen og erfare hva matematikk kan være i deres liv.

I kursene ser vi nærmere på hva matematikkvansker er, hvordan vurdere eleven, hvordan vi kan følge opp kartlegginger og hva som kjennetegner en inkluderende matematikkundervisning. Ett av kursene er satt av til å se nærmere på intensiv opplæring i matematikk.

Målgruppe for kursene er lærere og ansatte i PPT. Første kurs holdes 15. september.

De digitale kursene består av en forelesning, praktiske oppgaver og diskusjoner i grupper. I hvert kurs vil det bli vist eksempler på innhold som du kan prøve ut ved egen arbeidsplass. Om du velger å ta flere kurs, er det en fordel om du setter av tid mellom kursene til å prøve ut noe av det vi går igjennom på kursene, på din arbeidsplass.

Mer informasjon om de digitale kursene:

www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/matematikkvansker-og-tilpasset-opplæring

Brøk som flervalg – et utgangspunkt for utforsking

Kenguruoppgavene er flervalgsoppgaver med fem svaralternativer. Noen av svaralternativene er valgt ut fra feilsvar vi kan forvente, mens andre er mer eller mindre tilfeldig valgt. Oppgavene er ikke testet ut på elever noe som ofte gjøres for å finne feilsvar ut fra gitte kriterier. Likevel er det fullt mulig å utnytte ressursen som ligger i flervalgsoppgaver til å berike og utvide den matematiske idéen i oppgaven. Det er også mulig for den enkelte lærer å lansere oppgaver uten svaralternativer, eller velge egne feilsvar.

Flervalgsoppgaver har gjennom tidene hatt et noe tvilsomt omdømme fordi det kan være fristende å velge et svaralternativ uten at det ligger særlig tenking bak valget. Flervalgsoppgaver kan fort bli brukt til å gjøre relativt mange oppgaver på kort tid, uten at den som løser oppgaven trenger å engasjere seg dypere i oppgaven enn å finne ut om svaralternativet man har valgt er riktig, eller ikke. Likevel har mange flervalgsoppgaver potensiale til å fungere som utgangspunkt for matematisk tenking og resonnement. Nedenfor følger noen eksempler på hvordan en oppgave som handler om brøkverdier kan brukes i klasserommet.

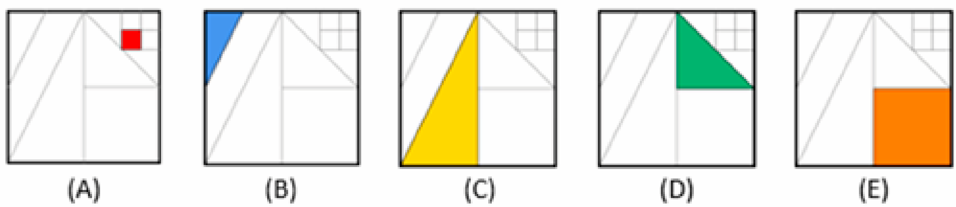
I oppgaven nederst på siden (fra Kengurukonkurransen 2021, Benjamin), skal elevene finne hvilket av de fem svaralternativene som viser et kvadrat der 1/8 av kvadratet er fargelagt. Utgangspunktet er selvsagt å velge riktig svaralternativ, men oppgaven har flere rike muligheter. Etter at elevene har argumentert for sitt valg og funnet riktig svaralternativ, kan en mer utforskende tilnærming til oppgaven starte.

Oppgaven kan utvides og brukes til å arbeide mer utforskende med brøkforståelse, og i denne sammenhengen brøk som del av en hel. Det å oppfordre elevene til å stille spørsmål, ikke bare fokusere på å finne riktig svar, gir et utgangspunkt som kan motivere elevene til å finne og begrunne sine framgangsmåter.

Elevene kan ha behov for litt drahjelp hvis du ønsker at de skal nærme seg oppgaver med en utforskende tilnærming. Lærerens holdning og måter å stille spørsmål på, er avgjørende. Det er fordi det å stille gode utforskende spørsmål ikke er noe elevene kommer på av seg sjøl. Hvis lærer forbereder noen innledende spørsmål, kan disse fungere som modeller for elevene.

10. Bildene nedenfor viser kvadrater som er delt i mindre deler. Alle linjestykkene i bildene går enten fra hjørner eller fra midtpunktet til andre linjestykker.

I hvilket av bildene har vi fargelagt $\frac{1}{8}$ av kvadratet?



Her er tre mulige måter å utvide oppgaven på, og samtidig noen betraktninger om hvordan det kan gjøres:

Brøkverdier og representasjoner

En mulig utvidelse kan rett og slett være å bruke svaralternativene i oppgaven. Hvor stor brøkdel av kvadratet er fargelagt i hvert av de fem svaralternativene? I noen av de fargelagte delene er det kanskje lett å si noe om brøkverdien, mens andre er mer krevende. Her er det viktig at elevene blir vant til at svar eller løsningsforslag skal begrunnes med resonnement og argumentasjon. Ved å gjennomgå ulike forslag til løsninger, kan mange elever få mulighet til å ta del i hverandres begrunnelser, og ikke minst oppmuntres til å stille spørsmål til hverandre.

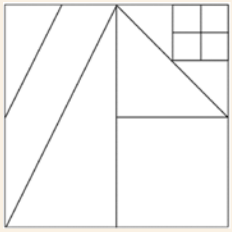
Den matematiske idéen i denne oppgaven kan være å se sammenhengen mellom brøkuttrykk, brøkverdier og representasjoner. Aktuelle spørsmål i en arbeidsprosess kan være:

- Kan vi sortere brøkene etter verdi bare ved å se på bildene?
- Kan vi bestemme brøkverdien til flere av svaralternativene?
- Er det noen av alternativene vi ikke kan si noe om brøkverdien til?
- Er det noen av alternativene som representerer samme brøkverdi?

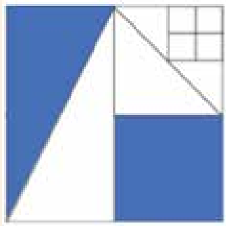
Referansebrøken ½ på ulike måter

Brøkverdien ½ er en sentral referansebrøk som det er viktig å ha en rik og god forståelse av. Dette er en brøkverdi som mange barn kjenner godt fra det virkelige liv, og begrepene halv og halvparten er kjent for yngre barn. I denne oppgaven kan vi utnytte og utfordre denne kjennskapen og kanskje klare å knytte kunnskapen fra hverdagslivet til brøk, slik det blir brukt i skolesammenheng.

Til hjelp kan det være greit å kopiere kvadratet uten farger, slik at en også har mulighet til å prøve seg fram med ulike varianter. Alternativt kan en tegne inn flere hjelpelinjer i kvadratene eller fjerne linjer slik at det er lettere å se brøkdeler representert som deler av hele kvadratet.



I en matematisk samtale, gjerne i hel klasse, kan elever få forklare sine valg og hvordan fargeleggingen representerer brøkverdien ½.

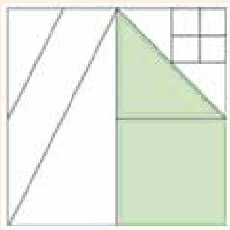


Forklar hvordan du har fargelagt ½. Argumenter for hvorfor dette er riktig.

Kan du greie å fargelegge ½ på ulike måter? Forklar for hverandre.

Verdien ½ kan representeres på ulike måter. Figuren innbyr til flere måter å fargelegge en halv på. En halv kan se forskjellig ut. Det fargelagte feltet trenger heller ikke å henge sammen for at det skal kunne representere halvparten av hele kvadratet.

Brøker og brøkuttrykk, bruk figuren til å lage ulike brøker

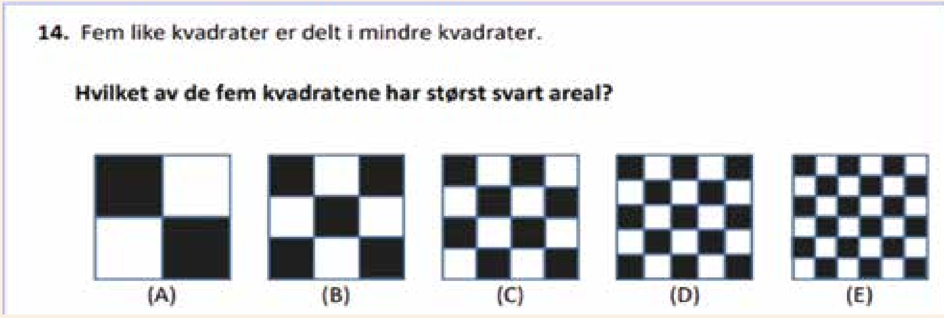


Her oppfordres elevene til å finne brøk-kombinasjoner. Elevene utfordres til å utforske brøker med ulike nevnere for å finne sine brøkuttrykk. De kan også samarbeide om å finne brøkuttrykk til hverandres fargelegginger.

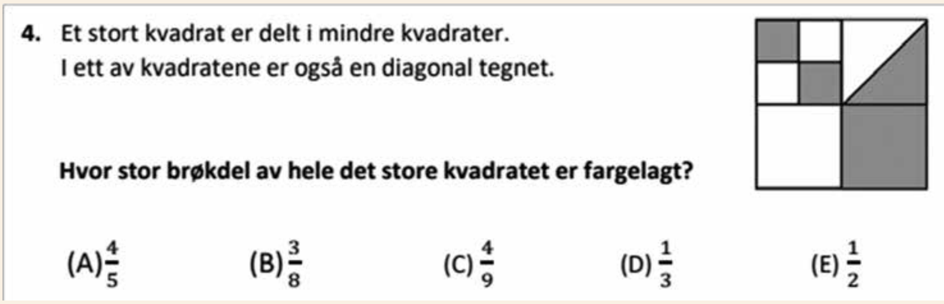
- Hvilke brøkuttrykk lar seg representere?
- Er det noen av brøkuttrykkene som representerer samme brøkverdi?
- Er det brøkuttrykk som er umulig å representere i dette bildet? Hvorfor?
- Kan du lage andre figurer der de samme brøkuttrykkene lar seg representere?

Det å være på jakt etter utvidelsesmuligheter i oppgaver er motiverende, og er med på å gi læreren og elevene en mer utforskende holdning til selve faget. Forskning viser at lærerens holdning til utforskende arbeid er avgjørende for elevenes holdninger til faget. Som lærer handler det om å verdsette gode spørsmål på linje med riktige svar og gode begrunnelser. Det du gjør som lærer har gjerne større påvirkningskraft på elevene enn det du sier.

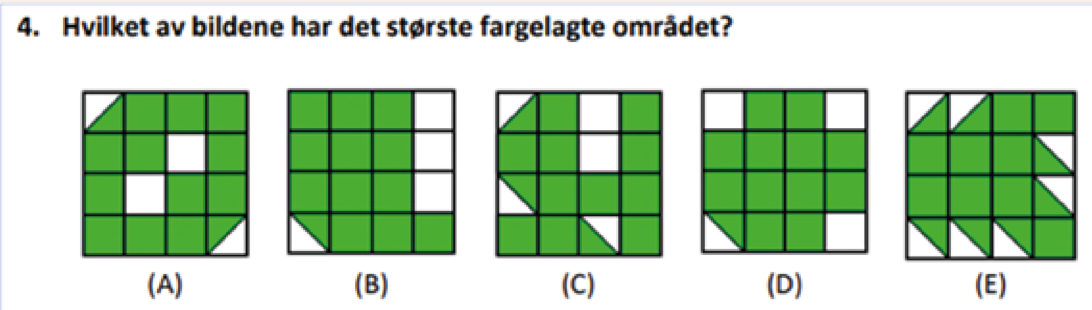
Nedenfor ser du flere kenguruoppgaver som også omhandler brøk og brøkuttrykk. Oppgavene kan brukes på samme måte som eksemplene ovenfor viser. Svaralternativene i B14 - 2019 følger et mønster. Det kan være lett å tro at hver figur har like stort svart areal som hvitt areal, siden det er nokså lett å se i svaralternativ A. Oppgave C4 - 2020 ligner på oppgaven som er brukt som eksempel, men her spørres det etter brøkdelen som er fargelagt. I denne oppgaven er forståelsen av referansebrøken ½ sentral. I oppgave E4 - 2020 skal elevene finne det største arealet, og den er et godt eksempel på at det kan være enklere og mer effektivt å telle opp det området som ikke er fargelagt.



Benjamin 2019, Oppgave 14.



Cadet 2020, Oppgave 4.



Ecolier 2020, Oppgave 4.

Matematikksenteret tilbyr digital kursrekke:

Utforsk matematikk med dynamisk geometri

Den nye læreplanen LK20 vektlegger utforsking i større grad enn tidligere læreplaner. Utforsking inngår i kjerneelementet Utforsking og problemløsing som skal prege all undervisning i matematikk. I tillegg er det et av de mest brukte begrepene i kompetansemålene. Det står for eksempel at elevene skal:

- «utforske, teikne og beskrive geometriske figurar …» (2. trinn)
- «utforske, beskrive og samanlikne eigenskapar ved to- og tredimensjonale figurar ved å bruke vinklar, kantar og hjørne» (4. trinn)
- «utforske og beskrive symmetri i mønster og utføre kongruensavbildingar …» (6. trinn)
- «Utforske eigenskapane ved ulike polygonar og forklare omgrepa formlikskap og kongruens» (9. trinn)

Utforsking er også en del av *Digitale ferdigheter* hvor det står at elevene skal «bruke og velje formålstenlege digitale verktøy som hjelpemiddel for å utforske, løyse og presentere matematiske problem». Læreplanen legger derfor godt til rette for å bruke de dynamiske egenskapene til GeoGebra til utforsking. I denne artikkelen har vi valgt å fokusere på geometri.

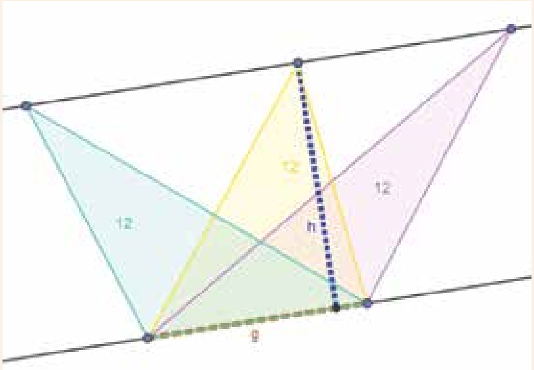
Hva vil det si å utforske med GeoGebra?

I GeoGebra kan elevene lage figurer basert på matematiske egenskaper. Hvis elevene kan endre på egenskapene, har de et godt utgangspunkt for å utforske matematikk. Elevene kan for eksempel lage en trekant med sidene a, b og c, og bruke figuren for å utforske hva som må til for at de kan tegne en trekant. Vi kaller en slik figur dynamisk, i motsetning til en statisk trekant som for eksempel har sidene 4, 6, 9.

Første gang vil elevene bruke en del tid på å lage figuren de trenger. De må bruke flere verktøy, huske å avslutte figuren med Mangekant og aktivere Flytt før de kan bevege figuren. Gjennom bevegelse kan de utforske de matematiske sammenhengene i figuren. Det kan være fristende å lage appleter slik at elevene kan starte å utforske med en gang. Brunström (2015) har imidlertid vist at elever som begynner med blanke ark i GeoGebra, lager hypoteser raskere og er mer utholdende i utforskingsprosessen. Elevene vil også ha stor nytte av varierte erfaringer med GeoGebra i hele skoleløpet, og på eksamen.

Digitale kurs i utforsking med GeoGebra

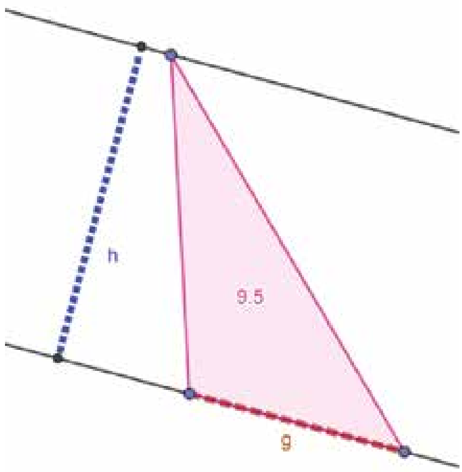
Med dette som utgangspunkt gjennomførte vi en digital GeoGebra-kursrekke for lærere våren 2021. Temaet var dynamisk geometri. Alle kursdagene startet med blanke ark. Lærerne arbeidet med utforskende aktiviteter samtidig som de lærte om verktøyene i GeoGebra. Vi passet på å bruke aktiviteter som var egnet for alle trinn. Elever på barnetrinn kan for eksempel utforske arealet til en trekant med kjent grunnlinje og det tredje hjørnet på en parallell linje (til grunnlinjen), mens elevene på ungdomstrinnet kan kombinere kunnskapen med algebra for å lage trekanter som alltid har et gitt areal.



Figur 1: Trekanter med samme areal.

Vi fikk gode tilbakemeldinger både på GeoGebra-opplæringen og valg av aktiviteter. Flere deltakere har brukt aktivitetene i klasserommet. En av lærerne hadde for eksempel aldri opplevd så stort engasjement for mangekanter som etter å ha testet en av aktivitetene sammen med elevene sine.

På grunn av gode tilbakemeldinger samt ventelister på forrige kursrekke, har vi bestemt oss for å gjennomføre samme kursrekke en gang til med oppstart i midten av september. Kursene starter kl. 14.30 og varer i ca. to timer.



$$A = \frac{g \cdot h}{2} \qquad h = \frac{2 \cdot A}{g} = \frac{2 \cdot 9,5}{g}$$

Figur 2: Trekant med gitt areal.

Mer informasjon: www.matematikksenteret.no/nyheter/vi-tilbyr-flere-digitale-kurs-i-geogebra

Referanse

Brunström, M. (2015). *Matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiske matematikprogram*. Karlstad University Studies.

Tid for konferanser!

Høsten er konferansetid for Matematikksenteret.

NOVEMBERKONFERANSEN 2021 | NY LÆREPLAN – NY PRAKSIS?

Arrangeres på Scandic Lerkendal, Trondheim, 30. november og 1. desember 2021.

Novemberkonferansen er en populær arena for lærere i Norge, og de 500 plassene blir revet bort så og si med en gang. I år er tema ”Hvilken betydning har de nye læreplanene for vår undervisningspraksis i matematikk?” I løpet av de to dagene konferansen pågår kan deltagerne velge mellom 44 verksteder med teoretisk og/eller praktisk innhold, og flere plenumsforedrag.

Plenumsforedragsholdere er:

Reidar Mosvold,
Jo Røislien
Amanda Jansen
Nils Kristian Rossing

Program: www.matematikksenteret.no/konferanser-og-nettverk/novemberkonferansen-2021

«Matematikk i barnehagen»

Arrangeres på Scandic Lerkendal, Trondheim, 2. desember 2021.

Konferansen «Matematikk i barnehagen» skal gi ansatte i barnehagen faglig påfyll, samt inspirere til glede og entusiasme for matematikk i barnehagen.

Bidragsytere er forskere og ansatte i barnehager som deler nyere forskning, kunnskap, aktiviteter, ideer og erfaringer rundt tema. Konferansen består av plenumsforedrag og verksted. Verkstedene er aktivitets- og/eller diskusjonsbaserte.

Program: www.matematikksenteret.no/konferanser-og-nettverk/matematikk-i-barnehagen-2021

Sammen om oppdraget!

Arrangeres på Clarion Hotel & Congress Oslo Airport, 16.–17. november 2021.

«Sammen om oppdraget» er en årlig nettverkssamling for fagmiljøer som arbeider med matematikkvansker. Målet er å utnytte og utvikle kompetansen som finnes i de ulike miljøene. Tema i 2021 er «Kompetanseløft!»

Nettverkssamlingen består av plenumsfordrag, parallelle sesjoner, verksted og gruppearbeid som løfter fram ulike tema om det tverrfaglige samarbeidet mellom aktørene i arbeidet med Kompetanseløftet.

Målgruppe for nettverkssamlingen er: PPT, utviklingsansvarlig kommune/fylkeskommune, Statped, universiteter og høyskoler.

Program: www.matematikksenteret.no/konferanser-og-nettverk/nettverkssamling-om-matematikkvansker-16-17november

Har du elever som vil delta i Abelkonkurransen? Abelkonkurransen er en konkurranse i matematisk problemløsning for elever i videregående skole. Første runde er 11. november 2021.

Abelkonkurransen har blitt arrangert i Norge siden 1993, og flere tusen elever i videregående har vært med. Konkurransen består av problemløsingsoppgaver på et variert nivå.

Abelkonkurransen består av to innledende runder som gjennomføres digitalt ute på skolene, og en finale som holdes ved NTNU i Trondheim. Elever som gjør det godt i Abelkonkurransen kan bli invitert til én eller flere internasjonale konkurranser i matematikk.

Slik foregår Abelkonkurransen

Den første og andre runden i Abelkonkurransen foregår digitalt på skolene. I den første runden får deltagerne 20 oppgaver, hver med fem svaralternativer. Oppgavene skal besvares i løpet av 100 minutter. De 10 prosentene som gjør det best, går videre til andre runde. Her får elevene 10 oppgaver, som også skal besvares i løpet av 100 minutter.

Resultatene fra de innledende rundene summeres, og de beste 20, og ofte noen til, blir invitert til finalen som foregår ved NTNU i Trondheim. Her får deltagerne fire timer på å løse fire oppgaver.

Mer informasjon om registrering av skolekontakt og Abelkonkurransen: www.abelkonkurransen.no

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
Matematisk institutt UiO
Postboks 1053 Blindern
0316 OSLO

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det er en demokratisk rett å få en matematikkundervisning som setter en i stand til å delta aktivt som borger i et demokrati. Derfor vil Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) sette fokus på matematikk for alle.

Styret for LAMIS

Leder
Renate Jensen, Vestland

Barnetrinnet
Henrik Kirkegaard, Møre og Romsdal

Mellomtrinnet
Inger-Lise Risøy, Viken
Svend Eidsten, Viken

Ungdomstrinnet
Kari-Anne Bjørnø Rummelhoff, Viken

Videregående skole
Odd-Bjørn Lunde, Rogaland

Høgskole/universitet
Marianne Maugesten, Viken

Varamedlem (Barnetrinnet)
Hilde Svendsen

Medlemskontingent 2020

450 kr for enkeltmedlem
200 kr for husstandsmedlemmer
300 kr for studenter/pensjonister
975 kr for skoler/institusjoner

Organisasjonssekretær

Elin Unstad, org.sek@lamis.no

Lederen har ordet

Renate Jensen

Kjære LAMIS-kollega.

Vel overstått sommer. Jeg håper alle har fått en velfortjent og god pause og er klare for et nytt skoleår – fremdeles med en usikkerhet knyttet til hvor mye vi kan møtes fysisk.

I LAMIS starter vi optimistisk og har invitert til lokallagssamling med årsmøte den 11. og 12. september. Dette blir en viktig samling fordi det er lenge siden vi har hatt muligheten til å møtes for faglige innlegg, gode samtaler og idemyldring om hvordan få til godt lokallagsarbeid. I tillegg vil vi bruke tid på samlingen på fortsettelsen av arbeidet med å oversette ressursen om FNs bærekraftsmål. Første del av arbeidet er gjennomført sammen med syv av våre lokallag, og i neste nummer av Tangenten vil vi presentere eksempler.

Ta kontakt med leder@lamis.no hvis du ønsker å engasjere deg i lokallagsarbeid eller har gode ideer til arbeid LAMIS bør engasjere seg i dette skoleåret. På vår nettside finner du oversikt over våre lokallag. Det å være med i et lokallagsstyre gir gode kontakter og muligheter for faglig og didaktisk påfyll gjennom lokallagskvelder og deltagelse på LAMIS sin sommerkonferanse og nasjonale samlinger.

Vi planlegger også for en gjennomføring av UngeAbel med fysisk semifinale og finale på Gardermoen i april 2022. Allerede i november starter de innledende rundene av konkurransen. Vi håper at mange elever på 9. trinn vil få muligheten til å delta i to runder med oppgaver som inviterer til samarbeid, problemløsing og gode matematikksamtaler der de får bruke begreper og mange representasjoner.

Viktige datoer dette skoleåret er:

2.–26.11.2021: 1. runde gjennomføres nasjonalt

4.–28.01.2022: 2. runde gjennomføres nasjonalt

26.–28.04.2022: Semifinale og finale

Vi arbeider nå med å dele informasjon om denne konkurransen, og håper at våre medlemmer og andre lesere av Tangenten vil hjelpe oss med å få skoler i hele Norge til å melde seg på. Les mer om UngeAbel på våre hjemmesider www.lamis.no. Der finner dere også en flott bank med oppgaver fra tidligere år og en inspirasjonsøkt laget av Marianne Maugesten om hvordan forberede for, organisere og veilede elevene i arbeidet med problemløsingsoppgaver. Dette er en av fire inspirasjonsøkter vi har laget til skolestart. Dere kan lese mer om øktene på side 69. Vi håper disse blir brukt gjennom hele året. Kjerneelementene, utforskende spørsmål og aktive elever er sentralt i alle de fire øktene.

Tidligere år har vi hatt god oppslutning og flotte tilbakemeldinger på fagdager vi har arrangert rundt om i landet. Disse er gratis å delta på, og vi inviterer både medlemmer og andre matematikkinteresserte lærere. Den første fagdagen dette skoleåret blir på Gardermoen den 25. oktober. Temaet er utforskende matematikkundervisning, utematematikk og konkreter som støttemodeller til matematiske representasjoner. Foredragsholdere blir Anne Gunn Svorkmo og Stian Tømmerdal fra Matematikksenteret. For påmelding, følg med på hjemmesiden vår. Bli gjerne også med i vår facebookgruppe LAMIS.

Til slutt vil jeg ønske dere lykke til med nytt og spennende skoleår!

Årets finale i UngeAbel

LAMIS' sentralstyre

Finalen gikk av stabelen den 22. april. Den gikk på planlagt dato, men ble gjennomført digitalt via Zoom. Lagene, juryen, publikum og arrangører koblet seg alle opp, og arrangementet gikk knirkefritt.

Kristian Ranestad (professor i Matematikk ved UiO) ledet de tre finalelagene gjennom fem oppgaver.

Det var spennende helt til siste oppgave og førsteplassen gikk til Year 9 at Birralee International School Trøndelag. De skal representere Norge i den nordiske finalen i september.

Vinnerklassen fra Birralee Internation School med lærer Pedro Santos.

Laget fra Skøyenåsen ungdomsskole underveis i finalen.

Laget fra Frakkagjerd ungdomsskole underveis i finalen.

På andreplass kom klasse 9C ved Skøyenåsen skole i Oslo, og 9B ved Frakkagjerd ungdomsskole i Rogaland ble nummer tre.

Det er også kåret vinner av beste fordypningsoppgave. Denne ble i år delt i i to mellom Frakkagjerd ungdomsskole og Birralee International School. I vanlige år er en del av fordypningsoppgaven å presentere muntlig for de andre lagene på Gardermoen. Denne våren leverte lagene en film. Det er ikke tvil om at den digitale kompetansen hos både lærere og elever er styrket.

Kunnskapsminister Gury Melby sto for premieseremonien. Hun innledet med en tale til alle elever som har deltatt i konkurransen. Vi har derfor her valgt å ta med hele talen hennes, slik at også de elevene og lærerne som ikke var med i den digitale sendingen har muligheten til å lese denne.

Foto: Marte Garmann/Kunnskapsdepartementet

Kunnskaps- og integreringsminister Guri Melby.

Kjære alle sammen!

Nå vet jeg dere har jobba hardt. Derfor vil jeg aller først gratulere dere alle sammen med innsatsen. Alle lagene som er her i dag har vært gjennom en lang reise for å komme hit. Sammen med klassen har dere klart dere gjennom to innledende runder og blitt fylkesvinnere. Dere har levert fordypningsoppgave og kommet hit for å delta i den nasjonale semifinalen og finalen. Det er rett og slett en imponerende reise, og en imponerende innsats! Uansett hvordan det har gått i finalen vil jeg at dere skal vite at vi er stolte av dere. Og at dere har all grunn til å være stolte av dere selv.

Jeg snakker med mange elever, og har kontakt med mange skoler. Ofte tenker jeg da at det kommer til å gå bra med det norske samfunnet. Grunnen til at jeg tenker det, er at dere som går på skolen nå, får de riktige forutsetningene til å kunne løse krevende utfordringer i fremtiden, samtidig som dere tar vare på hverandre. I disse tider er det særlig viktig. Jeg vet det har vært en tøff vinter. Til tross for omstendighetene, har dere gjennomført oppgaven med glans. Det er inspirerende å være vitne til så mye kreativitet, lagspill - og evne til få til noe sammen.

Som kunnskapsminister er det litt viktig for meg å si at oppgavene i UngeAbel er i tråd med fagfornyelsen. Elevene får arbeide med kjerneelementer som kommunikasjon, problemløsing, argumentasjon og resonnering. I tillegg erfarer elevene samarbeid og refleksjon over egen læring. I etterkant av konkurransen er alle oppgaver tilgjengelig for alle skoler både på hjemmesiden til LAMIS som dere kjenner, og i fagbladet Tangenten, der man i hvert nummer presenterer en oppgave - og løsning på denne. UngeAbel er derfor en ressurs for lærere i arbeidet med å innføre de nye lærerplanene.

Noe av det flotteste med Unge Abel er at det bidrar til at flere oppdager magien ved matematikken. Det er gøy at så mange deltar og at det blir stadig flere klasser – fra hele landet. Og vi trenger flere som strekker seg, og utforsker magien videre. Historien er full av unge, geniale matematikere.

Niels Henrik Abel, som jo Abelprisen og UngeAbel er oppkalt etter, gjorde sitt viktigste arbeid da han var 22 år. Da løste han et 300 år gammelt matematisk problem. Einstein var i midten av 20-årene da han formulerte sin berømte ligning $E = mc^2$. Marie Curie var like gammel da hun var med på å oppdage grunnstoffet polonium.

Nå sier jeg ikke dette fordi vi forventer at dere skal bli mattegenier før fylte 30 alle sammen. Poenget er at også dere kan være med på å finne svaret på uløste gåter.

Matematikk er et av fundamentene for samfunnet vårt. Det var med realfagene vi åpnet gruvene på Kongsberg, og skapte industrieventyret som ble starten på det moderne Norge.

Realfagene bidro til at vi kunne gå fra å være et fattig land i utkanten av Europa, til å bli et velferdssamfunn med gode muligheter for alle.

Fortiden vår er bygget på realfagene. Og det er også ved hjelp av dem at vi skal bygge fremtiden vår. Realfagene vil spille en av hovedrollene når vi skal løse vår tids utfordringer:

Hvordan vi kan produsere mer klimavennlig energi, hvordan vi skal finne løsningen på kreftgåten, hvordan vi skal unngå den neste pandemien.

For å lykkes med det er vi er helt avhengige av dere. Vi trenger unge mennesker som brenner for realfagene.

Jeg skal derfor avslutte med en enkel oppfordring:

Fortsett å være nysgjerrige, la dere ikke stoppe, utforsk og let etter løsninger - sammen. Dere har vist at dere kan!

Dere har faktisk muligheten til å gjøre en forskjell. Bruk den!

Gratulerer og takk for oppmerksomheten.

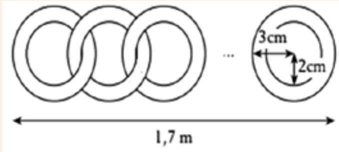
Løsningsforslag til oppgaven «Kjede med ringer»

Marianne Maugsesten, sentralstyremedlem og leder av UngeAbel-juryen

Her kommer løsningsforslag til oppgaven presentert i forrige utgave av bladet. Hele kjedets lengde: 1,7 m = 170 cm. «Tomrommet» på de ringene som er inni kjedet (som har en ring på hver side) er 2 cm (6 cm – 4·1 cm). Tar med hele diameteren på 1. ring, deretter øker lengden på kjedet med kun 4 cm per ring (6 cm – 2 cm). Gjelder også for den siste ringen.

Løsningen blir da: (170 cm – 6 cm)/4 s= 41 ringer. Kjedet har (41 + 1) ringer = 42 ringer totalt.

Alternativt: Kjedet er 2 cm



(første og siste ring legger hver til en cm mer) + x·4 cm = 170 cm.

x·4 = 168 som gir x = 42.

Ny oppgave fra UngeAbel

Marianne Maugesten, sentralstyremedlem og leder av UngeAbel-juryen

Oppgaven som presenteres denne gangen, er fra de innledende rundene (runde 2) i 2019. Oppgaven har flere løsninger, og elevene må resonnere og prøve og feile. Denne oppgaven kan gi gode diskusjoner.

Bunker av euromynt

Kim har 76 én-euro-mynter. Han vil samle alle disse myntene i bunker, og hver bunke får kun lov å inneholde enten fem eller tre mynter. Én mulighet er da å lage 14 bunker med fem mynter i hver, og 2 bunker med tre mynter i hver. (14·5 + 2·3 = 76) Hvilke andre muligheter har Kim?

Digitale inspirasjonsøkter

LAMIS sentralstyre

Vi i LAMIS sentralstyre har i samarbeid med to av våre lokallag og Matematikksenteret laget filmer og materiell som vi ønsker skal inspirere til kreativ og utforskende matematikkundervisning. Den gode læringsdialogen, utforsking og problemløsing er tydelige i alle øktene. Disse motiverende og praksisnære ideene kan brukes ved skolestart, men også gjennom året - og gjerne på lokallagsmøter. Filmene og aktivitetene er tilgjengelig på www.lamis.no.


Inspirasjonsøkt 1 fra Matematikksenteret.

Øktene egner seg godt til å arbeide med på utviklingstid eller sammen med trinnet da de inneholder refleksjonsspørsmål og forslag til hvordan prøve ut oppgaver og aktivitetene.

Den første økten – Hva er egentlig matematikken i en problemløsingsoppgave? – er laget av Matematikksenteret. Det er en film på 22 minutter der vi møter Ingunn og Anne Gunn som viser eksempler på hvordan du kan jobbe med ulike MatteLIST-aktiviteter, og de går inn på din rolle som lærer og veileder. De diskuterer også hvordan problemløsningsaktiviteter bidrar til å berike matematikkundervisningen.

MatteLIST-aktiviteter inviterer elevene til å bruke problemløsningsstrategier, de kan sammenligne og diskutere fremgangsmåter, bruke forskjellige representasjoner, forklare og begrunne, beskrive og argumentere. Og, sist, men ikke minst: Aktivitetene gir rom for å utforske – og å være kreativ! Det er fire MatteLIST-aktiviteter i filmen, og økten fungerer slik at filmen stopper og vi får lenker som tar oss til oppgaver som vi skal prøve ut og diskutere.

Denne filmen passer for alle trinn, og egner seg godt til en avdelingstid eller til en lokallagskveld. Det å bruke tid etter filmen til å bli kjent med Læreplankartet og de ulike oppgavene anbefales!

Økt nummer to er laget av lokallaget vårt på Sunnmøre – samme lokallag som hadde


Inspirasjonsøkt 2 fra LAMIS Sunnmøre.

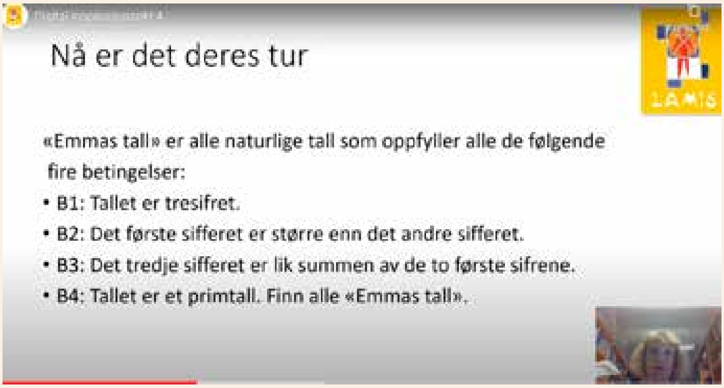
Inspirasjonsøkt 3 fra LAMIS Oslo.

ansvar for å digitalisere Matematikkdagsheftene til LAMIS. I denne filmen får dere ideer til hvordan hente frem elevene sine forkunnskaper gjennom ulike aktiviteter ute. Aktivitetene er hentet fra LAMIS sin digitale oppgavebank, og er for elever på småtrinnet - men ved å endre tallområde osv, passer dette for elever på alle trinn. Alle elever liker lek og spill! Takk til Hanne og Henrik.

Det andre lokallaget vi utfordret var LAMIS Oslo. I denne økten treffer vi Anders Baumberger og elever på mellomtrinnet. Elevene deltok på sommerskole de de fikk en rekke utforskende oppgaver og spørsmål. Økten starter med en inspirasjonsfilm og deretter blir de ulike oppgavene beskrevet med tips til hvordan man kan tilpasse til muligheter på egen skole og hvordan differensiere. Aktivitetene legger opp til samarbeid og matematiske samtaler.

Marianne Maugesten som er leder av juryen i UngeAbel og sitter i LAMIS sentralstyre presenterer i den fjerde økten en oppgave fra UngeAbel-konkurransen. Hun utfordrer oss på å løse oppgaven og gir også et løsningsforslag og ideer til refleksjonsspørsmål. UngeAbel er en konkurranse for elever på 9. trinn, men oppgavene kan brukes på hele ungdomstrinnet og gjerne også med elever på mellomtrinnet. Problemløsingsoppgavene innbyr til samtale, utforsking og samarbeid. På LAMIS sin hjemmeside finner dere oppgaver fra tidligere år – både innledende runder og semifinale/finaleoppgaver i tillegg til fordypningsoppgaver.

Lykke til med skolestart og vi håper øktene inspirerer! Del gjerne med kollegaer og matematikkvenner.



Inspirasjonsøkt 4 fra Sentralstyret.

Spill høsten inn

Henrik Kirkegaard, sentralstyremedlem og medlem av LAMIS Sunnmøre

Høsten er i anmarsj, og dagene blir kortere og kortere. Sommeren er for lengst glemt; men det er bestemt ikke noe å grue seg for. Høsten med sine lange mørke kvelder er for meg levende lys på bordet, varm kakao og spill.

Hvis du søker på nettet med ordene «matematikk spill barn», får du stort sett bare opp elektroniske spill. Det er for så vidt greit; men det er de gode «analoge» spillene som trener tallforståelse, strategier og den logiske tenking som vi har lyst å lære elevene. Forhåpentlig vil de spille disse spillene hjemme også.

Spiller du på en PC eller et nettbrett, vil spillet alltid regne ut poeng og kåre en vinner. Spiller du med terninger eller kort må du selv regne ut poeng, legge sammen og kåre en vinner. Våre elever har alt for lite tallferdighetstrening i hverdagen hjemme.

Hvor finner du så disse spillene som elevene bør prøve?

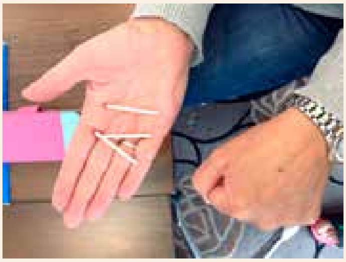
Jo, dem finner du i *Oppgavebanken* på lamis.no. Nå går det dessverre ikke an å søke direkte på «spill»; men søk på «tall» og «sannsynlighet» eller bla litt. De påfølgende spillene fant jeg ved å bla litt: Kortspill, gode venner, snu tre, tiervenner, siffer blir tall, plass til alle, terningspillet 100/10000, plump, Juniper Green, nim, klunse, klovnespill; men det er mange, mange flere å finne.

Spill er noe elevene liker. Alle klasser bør alltid ha terninger og kortstokker liggende i klasserommet. Det er obligatorisk utstyr på lik linje som hullemaskin, sakser og limstifter. Ligger de i et felles lærerskap er det aldri noen som finner dem igjen.

I klassen bør du faktisk spille en gang i uken. Ikke nødvendigvis en hel skoletime, for da går en del av elevene lei. Nei, bruk spillene når elevene trenger en pause, etter hvert som de blir ferdige med å spise lunsj, det siste kvarteret mandager og fredager, når du trenger å endre fokus hos elevene eller noe helt annet. Det viktigste er at elevene jevnlig spiller 10-15 minutter om gangen.

Klunse er et av spillene i Oppgavebanken. Det kan spilles fra 1. klasse til langt opp i videregående. I utgangspunktet handler det om å knytte mengder til tallbegrepet. Jo eldre elevene blir, jo mer overtar strategi- og sannsynlighetsdelen i spillet.

Klunse er et spill hvor tre eller fire deltakere spiller med fyrstikker.



Det er ganske enkelt og du trenger bare 3 fyrstikker per deltaker.

I hver omgang legger deltakerne enten 3, 2, 1 eller 0 fyrstikker i den ene hånden, som knyttes og legges frem på bordet. Den andre hånden gjemmes bak ryggen eller under bordet.

Etter tur gjetter deltakerne nå hvor mange fyrstikker det er til sammen i de hendene som ligger fremme på bordet.

Når et tall er nevnt kan ikke det tallet velges av de andre deltakerne.

Gjettes det riktig fra én av deltakerne, legger han/hun en fyrstikk bort, og det er nå én fyrstikk mindre med i spillet.

Er det ingen av deltakerne som gjetter det riktige antallet, legges ingen fyrstikker bort og man begynner på en ny omgang.

Det byttes på å gjette først.

Den som sitter igjen med den siste fyrstikken har tapt spillet.

Prøv da vel! Du vil hurtig finne ut at spill og den nye læreplanen passer som hånd i hanske.