Redaktørskifte

Det har vært valgkamp og valg, ny regjering er på plass, og for matematikkfaget er det mye som skjer. Eksamensordningene er i støpeskjea, og noen av endringene ser ut til å gå i feil retning. «Avskiltingen» av lærere blir kanskje stoppet, men risikerer vi at KFK-ordningen også forsvinner? «Firerkravet» for opptak til lærerutdanningene kan bli fjernet, men hva blir det erstattet av? Hovedsaken er fortsatt innføringen av fagfornyelsen. Rundt om på skolene utvikles ny praksis, hvor det som var bra med LK06 suppleres med nye, gode ideer. I årene som kommer vil vi gradvis se effektene av fagfornyelsen – på godt og vondt. Det kan for eksempel se ut til at fagfornyelsen utløser storstilt overgang fra papirbøker til digitale ressurser, til dels på økonomisk grunnlag. Det er mye Tangenten må følge med på.

Samtidig har jeg overtatt som Tangentens redaktør. Redaktørskifte skjer ikke så ofte – på de 31 årene bladet har eksistert, har det bare vært fem redaktører: Stieg Mellin-Olsen, Ole Einar Torkildsen, Christoph Kirfel, Toril Eskeland Rangnes og Rune Herheim. De fem har gjort en formidabel innsats, så det blir en spennende utfordring å fylle disse skoene. Heldigvis er det stor kontinuitet i redaksjonen, så det er ingen fare for at Tangenten ikke blir til å kjenne igjen.

Bladet skal være møtested for matematikkinteresserte lærere, lærerstudenter, lærerutdannere og forskere. I 31 år har bladet inneholdt artikler fra alle disse gruppene. De fleste har gode grunner til *ikke* å skrive i Tangenten – både arbeids- og fritida er travel. Derfor oppfordrer jeg leserne til å være ambassadører: anbefal kolleger og bekjente å skrive i Tangenten når de har gjort noe interessant i klasserommet eller har gode ideer som andre bør høre. Og tips redaksjonen! Og ikke minst: tenk over en gang til om ikke du også har en liten artikkel på lur.

I denne utgaven feirer vi Holmboeprisvinneren 2021, Ludvig Vea, som underviser matematikk på yrkesfag i videregående skole. Vi har utfordret ham til å fortelle om hva han brenner for, og det er blant annet at eksamen på yrkesfag bør være praktisk og yrkesrettet. Vi har gitt den samme utfordringen til de som fikk hederlig omtale; Ezzat m.fl. skriver om flerspråklighet og Eskeland om algebraisk tenkning på småtrinnet. Vi har i tillegg artikler om mange temaer, knyttet til ulike trinn i skolen, som vi håper er til inspirasjon i førjulstria. Jeg ønsker oss alle et godt nytt år uten antydning til koronarøde nivåer!

Munthe-Kaas

Holmboeprisen 2020–2021

Den 22. april 2021 ble Holmboeprisen delt ut for syttende gang. Årets prisseremoni var noe annerledes enn vanlig, idet prisen ble tildelt til både årets og fjorårets prisvinnere, siden det ikke ble noen prisutdelingsseremoni i 2020 på grunn av covid-19-pandemien. Seremonien ble organisert med begrenset fysisk deltagelse i foredragssalen på Det Norske Videnskaps-Akademi (DNVA) og ble direkte overført på nettsidene til DNVA. Det var kunnskaps- og integreringsministeren, Guri Melby, som overrakte prisen og talte til prisvinnerne, Anne Seland (2020), Flekkefjord vgs., og Ludvig Vea (2021), Åkrehamn vgs., etter en kort innledning av akademiets preses, Hans Petter Graver, og Matematikkrådets leder, Antonella Zanna Munthe-Kaas.

Det ble gitt hederlig omtale både i 2020 og 2021. Det var Ellen Egeland Flø, ved Mailand vgs., som fikk hederlig omtale for 2020 (se Tangenten 1/2021), og Marianne Cecilie Eskeland, Slemmestad barneskole, og lærerne i prosjektet Fleksibel opplæring (NAFO – Nasjonalt senter for flerkulturell opplæring), OsloMet, som fikk hederlig omtale i 2021 (se artikler i dette bladet).

En ting som er felles for Anne Seland og Ludvig Vea, er et brennende engasjement for matematikkundervisning og for at elevene skal lykkes. For omtale av Anne Seland, se Tangenten 1/2021.

Antonella Zanna Munthe-Kaas
Leder, Norsk matematikkråd
antonella.zanna@uib.no

Ludvig Vea har en bakgrunn som tømrer og byggmester. Etter å ha tatt videreutdanning i matematikk og naturfag er det i dag disse fagene han underviser i. Kombinasjonen fagmann og matematikklærer har vært vesentlig for Vea, men også for skolen, gjennom at han har vist hvilke muligheter som ligger i å yrkesrette realfagene.

Vea er spesielt flink til å knytte kompetansemålene i matematikk til det praktiske arbeidet i verkstedet og på byggeplassene, slik at elevene ser helheten i yrkesopplæringen. Han blir gjerne sitert på at «Livet består ikke av enkeltfag».

Mange av elevene som tar yrkesrettet videregående utdanning, sliter med ikke bare matematikk, men også språk. Mange har opplevd matematikk som veldig abstrakt og fjernt på ungdomskolen. Gjennom et treårig prosjekt på byggfag (2014–17) utviklet Vea og to andre matematikklærere en gjennomgående yrkesrettet og tverrfaglig matematikkundervisning på byggfag, som har resultert i en markant økning i gjennomsnittskarakter i matematikk, inkludert på eksamen. Bruk av muntlig praktisk vurderingsform er en viktig del av dette, mener Vea selv. Elever som strever med å skrive, får ofte ikke vist hva de egentlig kan i faget. Med denne vurderingsformen får de ikke bare vist at de kan regne, men de kan på en helt annen måte begrunne tankegangen sin, forklare hvorfor, og vise evne til å løse utfordringer. Elevene på yrkesfag skal, kort sagt, lære et yrke. Da er det viktigst at elevene lærer å forstå hvordan og når de skal bruke matematikk innenfor fagområdet sitt.

Vea har engasjert seg på flere måter. Vea var medlem av læreplangruppa til fagfornyelsen i bygg- og anleggsteknikk vg1 og konsulent for læreplangruppa i naturfag på området yrkesretting, og engasjerte seg sterkt i hvilken eksamensform som er mest hensiktsmessig i matematikk på yrkesfag.

Vea er den første matematikklæreren i en yrkesrettet utdanning (bygg) som mottar Holmboeprisen, noe som har vekket landsomfattende interesse om matematikk på yrkesfag på lokal radio og tv, og ikke minst hos en fagpresse utenfor den vanlige matematiske rekkevidden, f. eks. retten.no og byggmester.as.

Vea

Yrkesretting

Jeg var i utgangspunktet byggmester og byggingeniør og har videreutdannet meg til programfaglærer og matematikk- og naturfaglærer. I vår var jeg den heldige vinner av Holmboeprisen, og Tangenten har bedt meg skrive om hva jeg brenner for i matematikkfaget.

Det var en stor ære å få denne prisen. Det at vår måte å formidle matematikk på ble verdsatt, satte jeg stor pris på. Undervisningen min handler som regel om å ta utgangspunkt i en faglig praktisk utfordring, der eleven lærer å anvende den matematikken som trengs for å løse oppgaven. Her vil jeg skrive om å skape trygge læringsarenaer, om vurdering for læring, om yrkesretting og ikke minst om hvordan eksamensordningen må stemme overens med alt dette.

Elevene som begynner på yrkesfag, har ofte sine styrker i å løse praktiske oppgaver, mer enn i det teoretiske. Mange er trøtte av teoriundervisning. Noen sliter med en eller annen form for lese- og skrivevansker, konsentrasjonsproblemer, ADHD, ADD, og noen er kommet på kant med loven. I tillegg er det ofte flere med innvandrerbakgrunn med liten norsk språkforståelse. Mange er trøtte av å mislykkes i skolen.

Ludvig Vea
Åkrehamn vidaregåande skule
ludvig.vea@skole.rogfk.no

Jeg bruker mye tid på å skape trygge læringsarenaer for elevene.

Skape trygge læringsarenaer

Flere av elevene føler at toget har gått, og at de stod igjen. Mange sier at de har opplevd en undervisning der elevene blir vist et eksempel på en oppgavetype, for så å skulle regne en

mengde oppgaver. Når majoriteten av elevene er ferdige, gjennomgår læreren løsningsforslagene.

Noen av elevene sier at dette er en av årsakene til at de følte seg mislykket og mistet interessen for faget. «De datt av.» Jeg har aldri møtt late elever, men mange er frustrerte og resignerte. Jeg har opplevd at elever jukser på kartleggingsprøver for å slippe å vise sine svakheter. Oppgaven min er å la dem oppleve mestring.

Gi elevene tid

Det er viktig å være tålmodig og gi elevene tid. Jeg hadde en elev som møtte til alle matematikktimene i et helt år, uten å gjøre matematikk. For denne eleven var skolen den beste plassen han kunne være akkurat da. Dette var en elev som hadde opplevd mye i livet og manglet tillit til alt som hadde med skole å gjøre. Eleven hadde bare negative erfaringer med skole. Det tok lang tid for denne eleven før han stolte på noen i skolesystemet. Eleven fikk den tiden han trengte.

En annen elev sier: «Jeg har alltid slitt med matte. Jeg klarte meg nokså bra på barneskolen, men videre fra det så har jeg vært i det laveste sjiktet. Så matte har hindret meg i å gjøre mye av det jeg har hatt lyst til. Det som var så fint med matematikkundervisningen her på Bygg med Ludvig, det var at han gikk aldri videre med ei oppgave før han var sikker på at hver av elevene hadde fått det med seg. Og det tror jeg var med på å redde meg, da. For jeg har jo alltid følt at matten har sprunget fra meg. Så har jeg sittet der som et spørsmålstegn, og så har vi gått videre til neste oppgave, når jeg nettopp har begynt.»

Vi møter elevene der de er, og vi ser etter styrker, ikke svakheter. En tidligere avdelingsleder sa en gang at «Vi må se hele mennesket». Han var opptatt av livet til ungdommene, ikke bare fagkarakteren. Han sa dette til oss i en situasjon der en elev stod i fare for å stryke, i et enkelt fellesfag. Det var en elev som kunne det praktiske faget og var flink til å jobbe, men i et av teorifagene lyktes ikke denne eleven. Det var da jeg tenkte at det er ikke elevene som trenger å forandres, det er innholdet i og formidlingen av fagene.

Trygg i høyden

Vi må bygge sikre stillas rundt eleven, så blir det trygt å gå i høyden. Jeg har sett mange elever som lykkes i skole og arbeid, med de rette stillasene rundt seg. Jeg har merket at mange av de som sliter i matematikk, har vansker med å hente informasjon ut fra et skriftlig dokument, og noen har ikke lært seg skikkelig norsk ennå. Når vi visualiserer oppgavene i verksted, er de lettere å forstå for elevene.

Mange er veldig ustrukturerte i matematikkarbeidet, de skriver kanskje et svar uten å vise utregning, det er manglende enheter, ingen skisse å vise til, manglende formel o.l. Det første jeg lærer elevene, er å få struktur i oppgaveløsningen; det hjelper mange. Noen har sine styrker i praksis, og noen er mer teoretiske, de fleste er gode til noe.

Vi lærer elevene å bruke matematikkunnskapen, og vi øver dem til kritisk tenkning. En fagarbeider har bruk for å anvende sin matematiske kompetanse på byggeplass, og dette må vi lære dem i praksis. Når elevene får tid til å tenke, reflektere, resonnere matematisk, stille spørsmål og oppleve at faget er relevant, fører det til kreativitet og skapertrang hos elevene.

Vurdering for læring

Vi jobber etter prinsippene i vurdering for læring. Vår vurderingspraksis har læring som mål. Vurdering har stor innvirkning på elevenes læring. Når målet for opplæringen er tydelig, hjelper det elevene til å se meningen, og det motiverer elevene til å nå målet både for økta og faget. Når jeg gir framovermelding til elevene, er det viktig å være ærlig og konkret, det forstår elevene.

Læringspyramiden viser at når elevene får praktisere og dele sin kunnskap med andre, da sitter kunnskapen bedre. Jeg blir glad når alle får starten med seg, den er viktig. Jeg legger vekt på en tydelig start, der setter vi mål for opplæringa og økta. Senere deler vi læringsutbyttet, ofte før vi avslutter økta eller ved avslutning av et prosjekt. Dette er en god arena for elevene, hvor de får vist hva de har lært.

Sjekk av læringsutbytte skjer ved at det blir stilt spørsmål som er rettet mot temaet. Elevene får mulighet til å diskutere seg fram til en løsning, og det blir trukket en heldig elev som får dele med resten av klassen. Dette gjentar seg til alle har bidratt. Hvis en elev ikke greier å løse oppgaven alene, løser vi den sammen, det gir mestringsfølelse.

Denne måten å gjennomføre opplæringen på krever at det er et trygt klassemiljø. I starten av skoleåret arbeider vi mye for å skape trygge klassemiljø, og vi har søkelys på at det å gjøre feil er en viktig del av opplæringen.

Dette er vurdering for læring i praksis, elevene forstår hva de skal lære, og hvorfor. De for-

står hva de har lært, og vi er sammen om veiledning for neste steg. Elevene lærer fag, de lærer matematikk, og de lærer hva de skal bruke den til. I yrkesfag er det viktig at elevene lærer å vurdere seg selv, spesielt med tanke på kvaliteten på arbeidet de utfører.

Yrkesretting

Jeg har tro på yrkesretting av matematikk. Det var en krevende prosess i starten, da jeg som programfaglærer og to matematikklærere inngikk samarbeid for å yrkesrette matematikken. Det krevde tålmodighet, toleranse og vilje til å holde ut. Vi brukte mye tid til evaluering og planlegging hver uke mens samarbeidet pågikk. Nå yrkesretter vi det vi får til, på alle fem studieretningene på skolen vår.

Når vi planlegger matematikkundervisningen vår, tar vi gjerne utgangspunkt i et prosjekt på verkstedet. Så det som skjer på verkstedet, har betydning for oss som driver matematikkundervisning. Når vi starter om høsten, har vi byggeoppdragene klare. Det er progresjon gjennom hele skoleåret, elevene skal lære både å regne og bygge for å mestre oppgavene. Delmålene er tydelige hele veien. Sluttkompetansen kan være å bygge et hus eller en garasje og kunne bruke den matematikken som kreves for å gjøre det.

Det er ikke tilfeldig hvilke byggeoppdrag vi velger. Oppdragene må oppfylle mange kriterier:

- De må være godkjent, kunden må vise byggetillatelse der det er nødvendig.
- Har vi gode byggeoppdrag, så har vi som regel gode praktiske matematikkoppdrag.
- Vi knytter læreplanmål til prosjektene der vi kan.
- Vi etablerer ungdomsbedrift, det ivaretar at vi driver på lovlig vis, og at elevene lærer om inntekter og utgifter.
- Programfagene og matematikk samarbeider tett. For meg er det like naturlig å bygge som det er å lære elevene matematikk. Det går ikke an å skille fagene fra hverandre.

Vi har flyttet matematikken inn på verksted og ut på arbeidsplassen, det er der den beste læringen foregår. Det er der elevene har bruk for matematikken, og da blir det viktig for dem å lære den. En elev sier: «Du regner det ut først, og så ser du at det du har regnet, det skjer i virkeligheten òg. Du får et resultat på papiret, og så går du ut, og så bruker du det resultatet.»

Når elevene ser nytten, gir det lærelyst i matematikkarbeidet. Når regnearbeidet blir praktisk og yrkesrettet, blir forståelsen, interessen og læringsutbyttet større, og det gir gode fagarbeidere. Det var en elev som uttrykte: «Nå lærer vi matematikk uten å merke det.» En annen sa: «Det som fungerte med matten her på Bygg, det var jo at du så hva du kunne bruke den til. Jeg tror det er det jeg har slitt med før. At det var liksom ingen relevans.»

Vi legger til rette for praktiske yrkesrettede prosjekt der matematikken er en naturlig del av opplæringen. Søkelyset er på den matematikken som må mestres når elevene skal løse de praktiske utfordringene i faget. Det er uendelig mye matematikk i et prosjekt som vi har her med å bygge garasje. Vi får dekket alle kompetansemålene våre med et sånt prosjekt som dette.

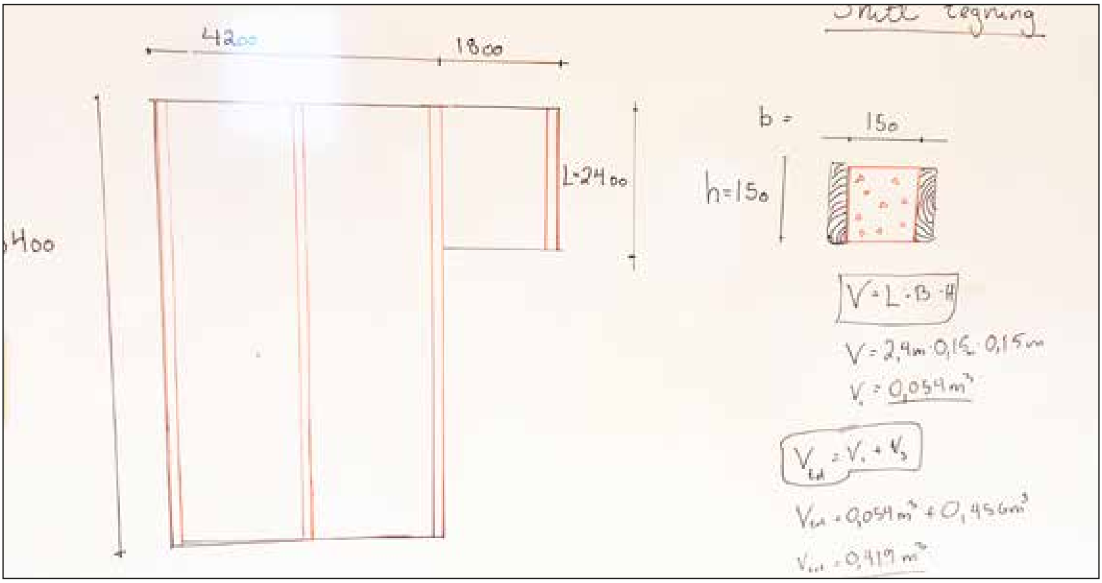
Ut i samfunnet

Matematikk er et verktøyfag som brukes i samfunnet. De fleste fagdisipliner bruker matematikk på en eller annen måte. Vi som er lærere, må ut i samfunnet og engasjere elevene til å delta. Vi må finne praktiske oppgaver der ute, oppgaver som skal løses, og noen å samarbeide med. Vi må lære elevene å se sammenhengen mellom teori og praksis og lære dem å anvende matematikken.

Nå i høst var våre første byggeoppdrag å bygge turbroer for flere turlag i nærområdet til skolen. Dette gjør vi som en dugnad. Elevene lærer seg matematikk, og de lærer å bidra i samfunnet. Med dette enkle byggeoppdraget lærer elevene:

- Å tegne skisser, å målsette skisser
- Om målestokk
- Å bruke verktøy
- Å kunne håndtere måleutstyr, måleenheter
- Omgjøring av enheter
- Om jevn inndeling av terrassebord/toleranser
- Materialutnyttelse
- Pytagoras’ setning
- Kildesortering (naturfag)
- Om pris, lønn, rabatter, merverdiavgift, prisstigning
- Kommunikasjon
- Om samarbeid, undersøke priser, gjøre valg
- Om kunnskap, refleksjon, kritisk tenking og mye mer

Et slikt oppdrag kan alle få til.



Eksamen

Nå har vi fått nye læreplaner. Disse gir muligheter og legger opp til yrkesretting i alle våre fag. Vi må legge opp til en undervisning der vi må komme oss ut av klasserommet. Det er viktig at vi fyller undervisningen med realistiske læringsoppdrag, som gir mestring og som gir lærelyst, vi må fylle fagene med noe interessant, noe som gjør elevene nysgjerrige.

Nå skal det lages eksamener til den nye læreplanen. Det er en stor og utfordrende oppgave. På den ene siden sier læreplanene at vi skal yrkesrette undervisningen, og det mener vi at vi gjør, men på den andre siden skal evalueringen skje med skriftlig, teoretisk prøve som er den samme over hele landet. Dette bryter med prinsippene vi har lyktes så godt med.

Elevene våre, som er praktikere og dyktige håndverkere, får ikke vist seg fram sitt beste i en slik eksamensform. Målet må ikke være eksamen, målet må være å kunne bruke verktøyet matematikk til å levere kvalitet i byggearbeidet. En fagarbeider har bruk for å anvende sin matematiske kompetanse på byggeplass og lærer den best i praksis. Å vise sin kompetanse vil best kunne gjøres i en praktisk muntlig eksamensform. Når elevene får tid til å tenke, reflektere, resonnere matematisk, stille spørsmål og oppleve at faget er relevant, fører det til kreativitet og skapertrang hos elevene.

Hvis eksamener ikke gir rom for at elevene får vist sin kompetanse, slik de best kan det, da er denne form for sluttvurdering urettferdig for disse elevene. Når elevene jobber med praktiske prosjekt har de som regel alltid bruk for matematikken, der får elevene vist sine kunnskaper, de viser refleksjon og de bruker sin kritiske tenkning.

Jeg tenker mest på 1PY. Noen mener at en sentralgitt skriftlig eksamen er det rette, de mener at den gir like vurderingsvilkår for elevene. Jeg kan forstå at T-matematikken blir avsluttet med en sentralgitt eksamen. De som tar den skal ofte studere videre og søke på studier, der en kan forstå at alle skal vurderes ut fra samme mal, som gir like vilkår for å komme inn på studier.

Jeg har mottatt en pris fordi elevene lykkes med vår praktiske tilnærming til matematikkfaget. Nå er det mulig vi ikke kan fortsette med denne formen for undervisning. Udirs sentralgitte eksamener vil styre alle i samme teoretiske spor. Jeg mener at sentralgitte eksamener kun er et måleverktøy for å sammenligne hvem som skårer best, etter en gitt mal. Denne malen er skriftlig, og elevene våre kan lett bli tapere.

Det er blitt så mange elever i videregående skole som ikke greier å gjennomføre det teoretiske skoleløpet, at regjeringen har lansert enda en reform i den videregående skolen, med det forklarende navnet «Fullføringsreformen»: «Regjeringen vil fjerne hindringer, snublesteiner og begrensninger slik at det blir tydelig at utdanningssystemets oppgave, er å gi ungdom og voksne det tilbudet de trenger for å fullføre og bestå med studie eller yrkeskompetanse.» En skriftlig sentralgitt eksamen kan lett bli en slik snublestein for våre elever.

Vi har mange eksempler på ungdom som har funnet motivasjon og gjennomført utdanningsløpet, fordi vi har yrkesrettet matematikken. Nå må vi bruke de nye læreplanene slik de var tenkt. På de ti årene jeg har undervist i praktisk matematikk, kan jeg telle slutterne på én hånd.

I læreplanen står det at «Matematikk P skal forberede elevane på eit samfunn og arbeidsliv i utvikling gjennom praktisk bruk av matematikk.» Sentralgitte skriftlige eksamener fører til at det er en liten gruppe som sitter og tolker læreplanverket og setter standarden for hvordan eksamen skal se ut. Lærerne rundt om i landet sitter og venter på et eksempelsett, som de kan undervise etter. Det er sånn det fungerer. Jeg er også i denne gruppen, men jeg vet jo ikke om det blir noe bedre av den grunn.

Yrkesretting kan ikke bare gjøres på et papir! Dersom vi endrer vår undervisningspraksis og vår eksamensform mener jeg at vi uten å senke krav til kompetanse og kvalitet vil kunne få flere til å fullføre på kortere tid.

Jeg håper prisen jeg fikk, kan være med på å løfte yrkesfagene og vise at når elevene lærer å anvende matematikken i sine fag, lykkes flere med å gjennomføre utdanningsløpet.

Magisk begynneropplæring

Jeg blir ofte spurt om hvorfor jeg ikke jobber på ungdomstrinnet siden jeg er så opptatt av matematikkundervisning. Men jeg tenker helt motsatt av de som spør meg om dette. Det er avgjørende at elevene får en god start, at de forstår matematikken og har glede av å jobbe med faget. Vi som jobber med de yngste elevene kan gi barna et godt grunnlag for å få til matematikken senere i skoleløpet. Jeg jobber for at elevene skal bli glade i matematikk og like matematikken for matematikkens skyld. Da kan de føle glede over å oppdage noe eller finne en ny løsning på en oppgave.

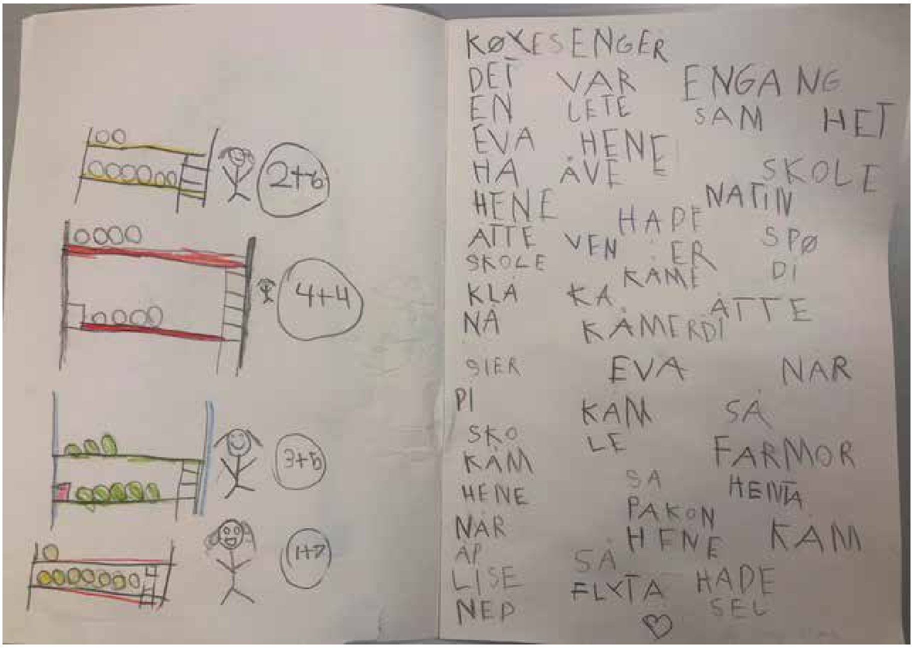
Det er viktig å leke med matematikk i timene og høre spennende historier. Jeg bruker mye tid i 1. klasse til å jobbe med begreper. Nå har vi jobbet med dobling, og da har jeg tatt frem den magiske doblingskrukken. Den virker faktisk, og står på et trygt sted i skapet i klasserommet så den ikke skal bli borte. Hvis noen elever får tak i den, så har vi kanskje en dag klasserommet fullt av legoklosser eller hva de nå får tak i som kan puttes i krukken.

Elevene må få undre seg og jobbe utforskende helt fra først skoledag. Som lærere må vi utnytte og bygge videre på barns naturlige tendens til undring.

Marianne Eskeland
Slemmestad barneskole
eskelandm@gmail.com

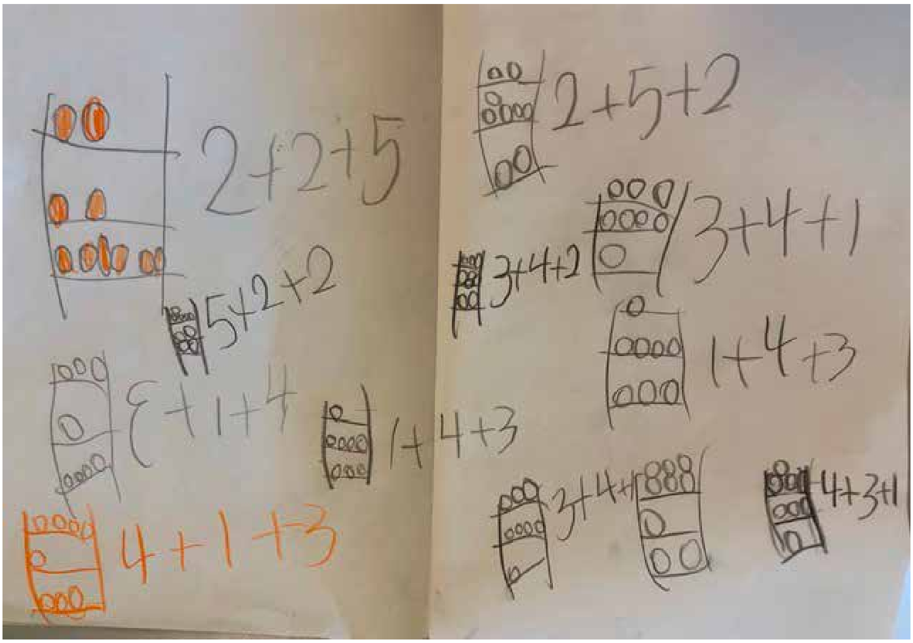
Figur 1: Doblingskrukken

Når vi jobber med 8-venner, kan vi utforske dette med en historie om åtte barn som plasserer seg i de to etasjene i køyesengen (se figur 2) hver gang barnevakten går for å hente noe. Hver gang tror hun at hun har mistet et barn, men så

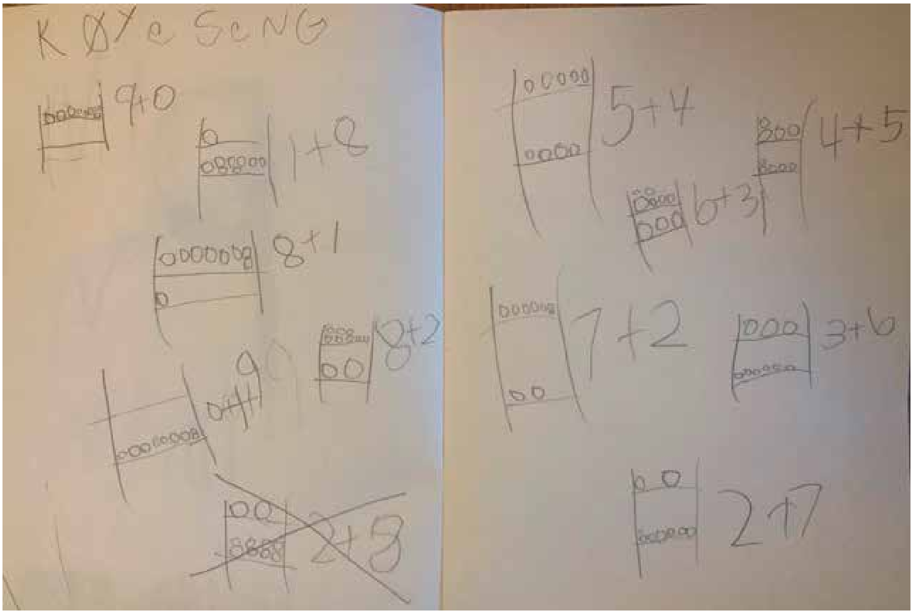


Figur 2: Toetasjers køyeseng

har de bare flyttet på seg. 4 + 4 blir jo like mye som 3 + 5. Denne historien kan elevene dikte videre på slik at de selv oppdager alle 8-vennene og senere andre tallvenner. Hva hvis det var ni barn? Magiske øyeblikk oppstår når en elev foreslår at sengen kanskje kan ha tre etasjer (se



Figur 3: Treetasjers køyeseng



Figur 4: Toetasjers køyeseng – systematisk

figur 3 forrige side). Da har vi en ny oppgave vi kan utforske neste uke, og det mest fantastiske med det er at ideen til oppgaven kommer fra en elev som bare har gått noen måneder på skolen. Skolen skal ikke være et sted der elevene bare må svare på masse spørsmål de ikke har stilt selv. De må få undre seg og formulere problemstillinger og hypoteser helt fra 1. klasse. Les mer om køyesengkonteksten i Fosnot (2017).

Elevene kan tidlig bli vant til å formulere hypoteser, forklare hva de har tenkt og begrunne om løsningene deres stemmer. Ved å gjøre det til en naturlig del av matematikktimene å formulere hypoteser vil elevene få større medvirkning i matematikktimene, og de får en grunnleggende forståelse for vitenskapelige arbeidsmetoder som de vil kunne ha glede av i mange sammenhenger.

Når elevene jobber, går jeg rundt i klasserommet og tar bilder av tegningene og notatene deres og konkreter de har jobbet med. Jeg har koblet telefonen min og nettbrettet sammen slik at det er enkelt å få opp bildene på smart-tavlen. Så velger jeg ut forskjellige løsninger som elevene får forklare og diskutere sammen. Målet er at elevene skal ha størstedelen av snakke-tiden i samlingene, og at vi skal få til en samtale i gruppa og ikke mellom lærer og enkeltelever. Elevene og deres måte å tenke på skal fremheves, ikke læreren (figur 4).

Jeg er veldig opptatt av algebra og algebraisk tenkning. Jeg mener at ved å jobbe med utgangspunkt i algebraisk tenkning er det lettere å få søkelys på matematikken og ikke bare regning og prosedyrer. Algebraisk tenkning er en måte å forholde seg til og jobbe med matematikken på der vi ser etter sammenhenger mellom størrelser og mønster i hvordan størrelser endrer seg. Vi generaliserer, formulerer hypoteser og forklarer sammenhengene vi oppdager. Vi jobber med oppgaver der vi kan bruke bokstaver, men det er ikke nødvendig. Elevene kan generalisere ved å bruke eksempler og forklare med ord og tegninger. Algebraisk tenkning kan flettes inn i alle emner vi jobber med og berike undervisningen. Jeg tror at elever som får jobbe med algebra på barnetrinnet vil ha større mulighet for å lykkes med algebra når de begynner på ungdomstrinnet. Jeg blir ekstra motivert når jeg finner nye innfallsvinkler til oppgaver ved å inkludere algebraisk tenkning. Algebraisk tenkning beriker matematikken og hjelper oss med å se sammenhenger.

Det er viktig å spre «nye» tanker om hva som er god matematikkundervisning og hva som er mulig å få til når man jobber med de yngste barna. Jeg mener matematikk er det faget som har endret seg mest de siste årene, men mange lærere er fortsatt preget av den undervisningen de selv har blitt utsatt for på skolen. Det er en stor jobb å hjelpe lærerne i gang med å undervise slik at elevenes undring og måter å tenke på står i fokus. Jeg er lærerspesialist i matematikk på skolen min, og ressursen brukes både til utviklingstid med lærerne og veiledning av lærere. Jeg opplever at det er nyttig å være med lærerne i klasserommet. Da kan jeg modellere undervisning, og vi kan diskutere hvordan læreren kan jobbe videre med emnet. Jeg har også i samarbeid med lærerne på skolen laget en matematikkplan der vi har fastlagt en felles standard for matematikkundervisningen på skolen. Da vet lærerne hva de kan bygge videre på når de overtar en klasse. I tillegg har jeg nå en 20 % stilling som veileder i begynneropplæring i matematikk i Asker kommune. Lærere som er interessert i veiledning tar kontakt, og jeg blir gjerne med inn i klasserommet deres. Min erfaring er at det er lurt å starte med å veilede de lærerne som er mest interessert. Dersom veiledningen gir dem en god opplevelse vil dette kunne spre seg videre til andre.

Referanse

Fosnot, C. T. (2017). *Køyesenger. Tidlig tallforståelse*. Caspar Forlag.

Ezzat, Sium, Ahmed, Ayoub, Teklemichael, Al-Ani

Tospråklig opplæring

Vi, seks nettlærere i Fleksibel opplæring ved Nasjonalt senter for flerkulturell opplæring, har fått hederlig omtale av Holmboeprisen for det arbeidet vi gjør ved å gi tospråklige elever matematikkopplæring på 8. og 9. trinns nivå. I den forbindelsen ble vi utfordret til å skrive en artikkel om hvordan vi jobber som tospråklige nettlærere i matematikk, og hva vi brenner for når det gjelder matematikkundervisning.

Sanaa Ezzat
OsloMet – storbyuniversitetet
sanaa@oslomet.no

John Sium
OsloMet – storbyuniversitetet
johnsi@oslomet.no

Sid Omar Mohamud Ahmed
OsloMet – storbyuniversitetet
sidoma@oslomet.no

Amer Zeiad Ayoub
OsloMet – storbyuniversitetet
amerzeia@oslomet.no

Eden Tewelde Teklemichael
OsloMet – storbyuniversitetet
edentewe@oslomet.no

Gada Omar Abdulkareem Al-Ani
OsloMet – storbyuniversitetet
gadaomar@oslomet.no

Tospråklig opplæring i matematikk har sin begrunnelse i opplæringsloven: «Elevar i grunnskolen med anna morsmål enn norsk og samisk har rett til særskild norskopplæring til dei har tilstrekkeleg dugleik i norsk til å følgje den vanlege opplæringa i skolen. Om nødvendig har slike elevar også rett til morsmålsopplæring, tospråkleg fagopplæring eller begge delar» (§ 2-8).

Mange av elevene som har krav på tospråklig fagopplæring, er nyankomne til Norge. En hovedutfordring for elevene er at de skal lære seg et nytt språk parallelt med å utvikle seg faglig i matematikk. For mange kan det være vanskelig å lære matematikk på et språk de enda ikke kan godt nok. Tospråklig opplæring i matematikk har derfor som mål at elevene skal utvikle seg videre i matematikk på et språk de behersker.

Tospråklig fagopplæring i matematikk innebærer undervisning på norsk og elevens morsmål eller et annet språk som eleven behersker godt. Det er læreplanen i matematikk som er utgangspunktet for den tospråklige matematikkundervisningen. Tospråklig undervisning skal hjelpe elevens faglige utvikling[1].

Teoretisk bakgrunn for tospråklig opplæring

Ifølge Cummins (1984) må flerspråklige personers ferdigheter sees i sammenheng med hverandre. Elevenes kompetanse for eksempel i arabisk er ikke adskilt fra deres ferdigheter i norsk. Mye av kompetansen tospråklige elever har, kan overføres til det nye språket. Dette gjelder for eksempel begrepskunnskap. Flerspråklige elever kan ha nytte av å overføre disse kunnskapene når de lærer norsk. Derfor satser vi på tospråklig opplæring i matematikk, hvor elevenes erfaring og kunnskap på morsmål blir tatt hensyn til og brukt som utgangspunkt for å bygge opp videre matematikkunnskaper på norsk.

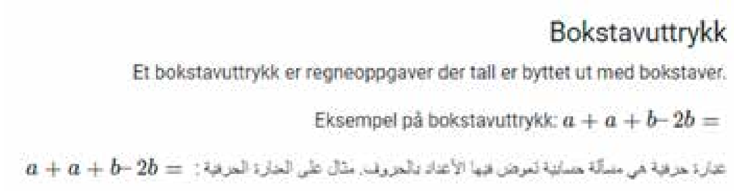
Figur 1: Tospråklige filmer om algebra.

Fleksibel opplæring

Fleksibel opplæring (FO) er et tilbud ved Nasjonalt senter for flerkulturell opplæring (NAFO) som tilbyr nettbasert tospråklig fagopplæring i matematikk og naturfag (https://nafo.oslomet.no/om-nafo/fleksibel-opplaering/). Dette tilbudet er til skoler som ikke har tospråklige faglærere, og skal ikke være et tilbud til skoler som har mulighet til å ansette tospråklige faglærere. Målgruppen for Fleksibel opplæring er elever med arabisk, somali eller tigrinja som morsmål som har behov for tospråklig fagopplæring. Deltakerne i FO er elever fra ungdomsskole og videregående opplæring med vedtak om særskilt språkopplæring og deltakere i voksenopplæringen. Vi underviser på nett i matematikk og naturfag på arabisk, somali og tigrinja kombinert med norsk.

Fleksibel opplæring er ett av flere fjernundervisningstilbud som ligger på den nasjonale plattformen Digilær. På Digilær har vi laget mange fagressurser på norsk, arabisk, somali og tigrinja som kan brukes av både elever og lærere. Det tospråklige matematikkinnholdet er korte undervisningsvideoer, ordlister med viktige faglige begreper, faglige tekster og oppgaver. Tospråklig matematikkopplæring i Fleksibel opplæring er en kombinasjon av bruk av tospråklig faginnhold på Digilær og tospråklig sanntidsundervisning.

En av ressursene på plattformen er filmer som introduserer tema, forklarer begreper og viser matematiske utregningsmetoder. Disse filmene er laget på norsk, arabisk, tigrinja og somali. Elevene kan se filmen både på morsmålet og på norsk og sammenligne dem. Dette er en stor fordel for elevene slik at de kan gå fra et faginnhold på morsmål til norsk. Slik kan de få et bedre utbytte av matematikkundervisningen som de får på norsk i den ordinære opplæringen.



Figur 2: Et eksempel som viser hvordan fagord er definert på to språk.

I matematikk er det mange fagbegreper som kan være vanskelige å forstå. Derfor er tospråklige matematikkordlister en annen sentral ressurs i Fleksibel opplæring. Ordlistene er laget av Matematikksenteret og er oversatt av oss. Ordlistene består av definisjoner av sentrale matematikkbegreper med illustrasjoner. Hver uke blir det valgt ut fem ord fra ordlista som vi kaller fokusord, og som er sentralt for at elevene skal forstå faginnholdet i det temaet som tas opp i sanntidsundervisningen. Ordene blir brukt som et bindeledd mellom opplæringen i klasserommet og den tospråklige opplæringen på nett. Vår erfaring er at tospråklige ordforklaringer letter innlæringen av matematikkfaget.

Undervisningsstrategier

En stor andel av våre elever er nyankomne elever som ikke behersker norsk godt. Flere av elevene har liten eller ingen skolebakgrunn. Noen elever mangler også begrepsforståelse. En stor del av eksemplene og illustrasjonene i matematikklærebøker kan være vanskelige å forstå fordi deltakerne ikke har kjennskap til disse eksemplene og illustrasjonene fra før. Matematikkfaget har også utviklet seg til å bli et mer tekstlig fag, noe som kan være vanskelig om man har svake leseferdigheter på norsk.

La oss se nærmere på et eksempel på hvordan vi jobber med algebra i tospråklig matematikkopplæring på nett. Nettlærerne oppfordrer alltid deltakerne til å se på de fem fokusordene som blir sendt til dem på forhånd, og som vi kommer til å fokusere på i løpet av en bestemt uke. Disse ordene kan være fagord som for eksempel algebra, bokstavuttrykk, talluttrykk, variabel og verdi. Elevene kan se på disse ordene og ordenes definisjoner både på norsk og på morsmål.

I tillegg oppfordres elevene til å se på noen bestemte filmer som ligger på plattformen. Disse filmene er laget ut fra elevforutsetningene og er tilpasset våre målgrupper. Deltakerne kan lære litt om temaet i matematikk fra filmen. Samtidig kan deltakerne bli mer motivert til å lære mer i sanntidsøktene. Da kommer elevene litt forberedt i timen.

Nettläreren starter vanligvis ukas undervisning med en introduksjonstime som for eksempel «Hva er algebra?». I dette tilfellet blir fagordene i fokusord og førfaglige ord som knyttes til temaet algebra, forklart godt på morsmålet og norsk. Deltakerne sliter ikke bare med fagordene og førfagordene som de møter når de lærer om temaet. Det kommer også flere tverrfaglige ord som for eksempel «deretter» og «vanligvis» og faste uttrykk som for eksempel «hører sammen». Betydningen av slike ord og uttrykk blir forklart godt på morsmålet av nettlærerne.

I nettundervisning lærer elevene også om utregningsmetoder. Her benytter nettläreren elevenes forkunnskap som kan bidra i undervisningen. Nettlærerne bruker også enkle eksempler og illustrasjoner som elevene kan forstå. I uttrykket $3a + 2a + 4b$ kan bokstavenes betydning forklares ut fra kontekster som er kjent for elevene.

Elever og stedlige læreres vurderinger

Fleksibel opplæring ble på oppdrag fra Utdanningsdirektoratet evaluert av Rambøll (Haave et al., 2019). Evalueringen viste viktigheten og relevansen av den tospråklige nettundervisningen i Fleksibel opplæring. Gjennom intervjuer med elevene og de stedlige lærerne deres kom det fram at elevene forstår matematikk og naturfag bedre når det blir undervist på deres morsmål. Et av hovedfunnene var at Fleksibel opplæring bidrar til overføring av fagkunnskap og ferdigheter fra morsmål til norsk, og at elevene får spesielt stort utbytte av å lære faglige begreper. Dette gir både bedre norskferdigheter og bedre faglig forståelse i matematikk og naturfag.

Elevene sier at nettlærerne forklarer faglige sammenhenger på ulike måter og gjør faget relevant og forståelig for dem. Det trekkes også fram at nettlærerne gjør så godt de kan for å svare på spørsmål slik at alle kan forstå. En elev (ungdomsskole) forteller det slik:

«Det [fleksibel opplæring] er bra, fordi vi kan forstå opplæringen bedre. Når jeg går i matte i vanlig klasse, er det vanskeligere, for jeg kan matte, men ikke norsk. Det blir mye lettere når jeg har Fleksibel opplæring.» På bakgrunn av Rambølls evaluering bestemte Kunnskapsdepartementet at Fleksibel opplæring skulle bli en varig ordning fra skoleåret 2020/21. I inneværende skoleår er det ca. 120 elever som mottar tospråklig fagopplæring i matematikk på 22 skoler rundt omkring i landet.

Avslutning

For oss er det veldig spennende at vi som tospråklige lærere har mulighet til å hjelpe Hassan eller Fatima til å klare seg i matematikk, og dette kan hjelpe dem videre i utdanningsløpet. Dette inspirerer oss til å jobbe hardt for å hjelpe deltakerne i Fleksibel opplæring. Vi brenner for å lære elevene matematikk, bygge gode relasjoner til dem, motivere dem til å sette seg mål, kjempe for å oppnå dem, og til å tro på seg selv. At vi har mulighet til å bidra i elevenes utvikling i matematikkfaget gjennom tospråklig opplæring er det beste i vårt yrke. Vi ser at tospråklig fagopplæring i matematikk kan ha stor betydning for våre elever, og vi håper derfor at alle elever som har behov for tospråklig fagopplæring i matematikk, kan få et tilbud om det!

Note

1 https://nafo.oslomet.no/grunnskole/saerskilt-sprakopplaering/#Tospraklig_fagopplaering

Nettsider

Digilær: https://digilaer.no/nb/undervisningstilbud/naturfag-og-matematikk

Fleksibel opplæring: https://nafo.oslomet.no/om-nafo/fleksibel-opplaering/

NAFOs nettsted: nafo.oslomet.no

Opplæringsloven: https://lovdata.no/lov/1998-07-17-61/§2-8

Tospråklig fagopplæring: https://nafo.oslomet.no/grunnskole/saerskilt-sprakopplaering/#Tospraklig_fagopplaering

Referanser

Cummins, J. (1984). *Bilingualism and special education: Issues in assessment and pedagogy.* College-Hill Press.

Haave, M. B. N., Hartveit, K. J. L. & Randen, G. (2019): *Evaluering av Fleksibel Opplæring som pilot — Sluttrapport.* Rambøll.

Fiskerstrand

Varierte vurderingsformer?

Når elever skal få standpunktkarakter, er det i § 3-15 i forskrift til opplæringsloven bestemt at den «skal være uttrykk for den samlede kompetansen eleven har», og «eleven skal ha fått anledning til å vise kompetansen sin på flere og varierte måter». Men hvorfor står det *flere og varierte* måter, og hva kan det bety? Å få anledning til å vise kompetansen sin på *flere måter* er en antallsbestemmelse. En eller to anledninger er ikke nok. Læreren opparbeider et bredt grunnlag for å vurdere elevens kompetanse, og *flere* målepunkter vil kunne øke vurderingens pålitelighet. I tillegg må flertallsbestemmelsen være der for å kunne gi elevene varierte måter å vise sin kompetanse på. En eller to anledninger til å vise kompetanse gir ikke rammer for variasjon. Flere anledninger er i og for seg heller ikke nok. Det stilles et tilleggskrav: Elevene skal få anledning til å vise kompetansen sin på *varierte måter*. Men hva menes egentlig med *varierte måter*? Variasjon kan defineres som «veksling eller skiftende form som noe opptrer i» (Nilstun, 2020). Elevene skal altså få anledning til å vise den matematiske kompetansen sin gjennom vurderingssituasjoner som opptrer i ulike former. På hvilken måte skal da vurderingsformene *variere*? Hva betyr dette konkret for vurderingspraksisen? For å svare på dette er det nødvendig å ha språk som beskriver variasjonen og dermed mangfoldet i vurderingsformene. Utgangspunktet er dermed at vurdering i matematikk gjøres ut fra ulike *situasjoner* som alle har en *form*, og elevene skal gjennom denne praksisen få uttrykke sin matematiske kompetanse på flere og varierte *måter*.

Arve Fiskerstrand
Høgskulen i Volda
arve.fiskerstrand@hivolda.no

Samarbeidsprosjekt om vurderingsformer

I samarbeid mellom en videregående skole og en høgskole ble det våren 2021 etablert utviklingsarbeid knyttet til vurdering i matematikk med utgangspunktet i problemstillingen: Hvilke vurderingssituasjoner er i bruk i matematikk? Videre ble det spurt etter hvordan vurderingssituasjonene kan skape språklige rammer for hvordan vurderingsformer varierer. Metodisk ble datamateriale innhentet ved at matematikklærerne ved den videregående skolen ble utfordret til å føre opp ulike vurderingssituasjoner der elevene fikk vise kompetanse. Prosessen ble først gjennomført individuelt og deretter drøftet i gruppe. Figur 1 gir en oversikt over det samlede sluttresultatet bestående av en liste over alle momenter som ble oppfattet som sentrale for å forstå hvordan elevene kunne få vise kompetanse i matematikk på flere og varierte måter. Resultatet viser et stort mangfold av praksis knyttet til vurdering i matematikk. På ulike måter beskrives variasjon i vurderingsformer, og i tillegg er ulike matematiske kompetanser og ferdigheter listet opp for å beskrive variasjon. Resultatet gir et bilde av hvilket språk som benyttes for å beskrive variasjon. Det skilles eksempelvis tydelig mellom skriftlige og muntlige former. I tillegg er variasjonen rikt beskrevet ved en rekke konkrete begreper og situasjoner for vurdering der elevenes kompetanse skal kunne vises gjennom eksempelvis presentasjoner, prøver, innleveringer og samtaler.

1. Muntlig: Svare på spørsmål i time
2. Muntlig: Observere Elev-elev dialog
3. Muntlig: Stille spørsmål til lærer i timen
4. Muntlig: Presentasjon
5. Muntlig: Fagsamtale
6. Skriftlig: Vanlig prøve
7. Skriftlig: Miniprøve
8. Skriftlig: Innleveringer
9. Skriftlig: Observere oppgaveløsning i timen
10. Skriftlig: Vurdere arbeidskapasitet i timene
11. Skriftlig: Vurdere lekser på f. eks. campus (og lignende)
12. Skriftlig: Heldagsprøver
13. Vurdere kreativitet/problemløsning
14. Forklare fagbegrep
15. Vurdere hoderegning/refleksjon
16. Vurdere bruk av standardalgoritmer
17. Skriftlig og muntlig: Forklare fremgangsmøte (kommunikasjon)
18. Gruppearbeid
19. Digitale ferdigheter
20. Programmering
21. Ferdigheter regneark
22. Hjelpe eleven, medelever
23. Lære av egne feil (f. eks. etter en småprøve)
24. Sjekkpunkt (elevene krysser av på en liste om de har oppnådd ulike ferdigheter)
25. Mappevurdering

Figur 1: Variasjon i hvordan man kan vise kompetanse i matematikk.

Språk og dimensjoner for variasjon

De ulike vurderingssituasjonene ble videre analysert med det mål å utvikle språk for hva som faktiske varierte. Hvilke dimensjoner kunne beskrive variasjonen? En systematisk og strukturert koding for å gjenkjenne mønstre og generere dimensjoner (Saldaña, 2021) førte til konklusjonen om at vurderingsformene kan variere i *uttrykk*, *format* og *tid*. Tabell 1 synliggjør for det første at elevene kan få anledning til å *uttrykke* sin kompetanse muntlig, skriftlig og praktisk. For det andre kan *formatet* på det som vurderes, være i form av et produkt, en prosess eller en blanding av begge. Og for det tredje kan *tidsaspektet* i vurderingssituasjonene variere mellom vurderinger av noe i nåtid eller fortid.

Dimensjon	Variasjon
Uttrykk	Muntlig, skriftlig, praktisk
Format	Produkt, prosess
Tid	Nåtid, fortid

Tabell 1: Variasjon i vurderingsformer

Variasjonen beskrives dermed ved tre ulike dimensjoner; elevens uttrykksform, formatet på det som skal vurderes og tidsaspektet for vurderingssituasjonen.

Eksempel på vurderingspraksis

En vurderingspraksis kan tjene som eksempel på variasjon i vurderingsformer. Petter underviser i matematikk på 10. trinn og har gjennom året fulgt elevene gjennom ulike vurderingssituasjoner. Når standpunktkarakteren skal settes, oppsummerer Petter slik: «Vurderingsgrunnlaget for elevenes samlede kompetanse består av ni ulike vurderingssituasjoner. Elevene har fått uttrykke seg på ulike måter, og både formatet på det som ble vurdert, og tidsaspektet på vurderingssituasjonene har variert. Dette har gjort at elevene har fått god anledning til å vise sin samlede kompetanse på flere og varierte måter.»

SKRIFTLIG	Nåtid	Fortid
Produkt	Individuell prøve om lineære funksjoner, med vekt på ulike representasjoner.	
Prosess	Individuell innlevering av løsninger på utforskingsoppgave, knyttet til multiplikasjon og divisjon.	Innlevering av gruppearbeid, knyttet til bevisførsel, med vekt på argumentasjon.

MUNTLIG	Nåtid	Fortid
Produkt	Presentasjon i gruppe om statistikk, med vekt på kritisk tenking.	
Prosess	Avsluttende individuell fagsamtale med eleven, om årets ulike tema i matematikk.	Individuell innlevering av lydfil med elevens egenvurderinger, knyttet til et av årets tema i matematikk.

PRAKTISK	Nåtid	Fortid
Produkt	Problemløsningsoppgave i gruppe ute i skolegården, knyttet til vei/fart/tid.	Individuell innlevering av geometriske modeller, med vekt på ulike dimensjoner og målenheter.
Prosess	Arbeidsøkt i gruppe om geometri, med vekt på vinkel- og gradeforståelse.	

Tabell 2: Variasjon i vurderingsformer – eksempler.

De ni vurderingssituasjonene kan kategoriseres i de ulike dimensjonene som vist i Tabell 2 for å tydeliggjøre variasjonen i *uttrykk*, *format* og *tid*.

En kategorisering ved ulike dimensjoner gir språk for hvordan vurderingssituasjoner kan variere i form. Samtidig forenkler den en kompleks vurderingspraksis på en slik måte at en må åpne for nyanser. En skriftlig prøve bærer preg av å være et produkt til vurdering, men når det i prøven etterspørres løsningsstrategier og matematisk argumentasjon, inneholder den også tydelige elementer av prosess. I en problemløsningsoppgave ute i skolegården som inneholder dialog med lærer, kommer elevene til uttrykk muntlig, men situasjonen kan også kategoriseres som praktisk eller muntlig-praktisk ut fra hvilke rammer og hvilken tilnærming oppgaven har fått. En skriftlig innlevering danner grunnlag for vurdering av noe som er gjort i fortid, men om den leses av medelever og etterfølges av drøfting i en gruppe, så dannes det grunnlag for å kunne vurdere kompetanse også i nåtid.

På samme måte kan de ulike dimensjonene for form med fordel både suppleres og spesifiseres. En alternativ dimensjon kan være *antall*, der det skilles mellom individuelle eller kollektive vurderingssituasjoner. Muntlig, skriftlig og praktisk kan suppleres med å kunne uttrykke seg digitalt. Produkt og prosess kan med fordel spesifiseres i matematiske termer, og ny læreplan i matematikk vektlegger eksempelvis prosesser både i kjerneelementer og kompetansemål gjennom bruk av begreper som utforsking, problemløsning, resonnering og argumentasjon.

Variasjon i tråd med læreplan

I fagfornyelsen legges det føringer for vurderingspraksisen for hvert fag. I matematikk beskrives kjennetegn på måloppnåelse (Utdanningsdirektoratet, 2020). Eleven skal vise kreativitet og refleksjon, utforske og generalisere matematiske strukturer, tolke og løse praktiske problem, vurdere problemløsningsstrategier, og forklare, resonnere og argumentere for fremgangsmåter og løsninger. I selve læreplanen for matematikk gis følgende føringer for standpunktvurderingen:

> Læreren skal planlegge og legge til rette for at elevene får vist kompetansen sin på varierte måter som inkluderer forståelse, refleksjon og kritisk tenkning, i ulike sammenhenger. Læreren skal sette karakter i matematikk basert på kompetansen eleven har vist, både skriftlig, muntlig og digitalt, ved å bruke matematiske uttrykksformer, bruke problemløsingsstrategier og reflektere over og argumentere for løsninger og modeller. (Kunnskapsdepartementet, 2019)

Her tilføres kravet om variasjon i vurderingsformer et argument basert på det matematiske innholdet i det som skal vurderes. Mangfoldet av matematiske kompetanser som elevene skal vise, fordrer at vurderingsformene varierer. De nye føringene for vurderingsarbeidet ser ellers ut til å vektlegge vurderingsformer der elevene gjennom ulike uttrykksformer er i prosesser og utvikling. Det samme kan sies når det i rundskriv om vurdering vektlegges om standpunktkarakteren at «lærerens observasjon av elevene, samtaler og dialog er med på å gi læreren kunnskap om elevens utvikling og kompetanse». (Utdanningsdirektoratet, 2021)

Variasjon for lærelyst

I § 3-3 i forskrift til opplæringsloven er det presisert at et av formålene med vurdering i fag er å bidra til *lærelyst* underveis. Dette kan sees på som en oppfølging av eksempelvis Stortingsmelding 22 «Motivasjon – Mestring – Muligheter» (Meld. St. 22, 2010–11), som understøttet av forskning (Dæhlen et al., 2011; Smith et al., 2005) fastslår *variasjon* som sentralt for elevenes *motivasjon*. Oppsummert kan en da uttrykke et mål om å utvikle og etablere en prosess- og utviklingsorientert vurderingspraksis som i ulike vurderingssituasjoner tar form på varierte måter slik at elevene får oppleve lærelyst og motivasjon og får anledning til å vise sin samlede matematiske kompetanse. Utviklingsarbeidet mellom den videregående skolen og høgskolen synliggjorde et mangfold av vurderingssituasjoner i matematikk, som igjen åpnet opp for at en kunne sette språk på variasjonen i vurderingsformer gjennom dimensjonen *uttrykk*, *format* og *tid*. For matematikklærere vil dette kunne være et nyttig bidrag. Det vil kunne gi språk og bidra til å bedre innholdsforståelsen av egen vurderingspraksis. I tillegg vil dimensjonene kunne utfordre etablert vurderingspraksis og åpne opp for større variasjon i vurderingsformer.

Referanser

Dæhlen, M., Smette, I. & Strandbu, Å. (2011). *Ungdomskoleelevers meninger om skolemotivasjon – En fokusgruppestudie* (NOVA Rapport 4/11). Norsk institutt for forskning om oppvekst, velferd og aldring.

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk MAT01-05. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020*. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Meld. St. 22 (2010–2011). *Motivasjon – Mestring – Muligheter — Ungdomstrinnet*. Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld-st-22-2010--2011/id641251/?ch=1

Nilstun, C. (2020, 15. juni). Variasjon. I *Store norske leksikon*. Hentet 25.03.2021 fra www.snl.no/variasjon

Saldaña, J. (2021). *The coding manual for qualitative researchers* (4. utg.). SAGE.

Smith, C., Dakers, J., Dow, W., Head, G., Sutherland, M., & Irwin, R. (2005). A systematic review of what pupils, aged 11–16, believe impacts on their motivation to learn in the classroom. I *Research evidence in education library*. EPPI-Centre, Social Science Research Unit, Institute of Education, University of London.

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Kjennetegn på måloppnåelse – matematikk 10. trinn*. Hentet 13.10.2021 fra www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/kjennetegn/kjennetegn-pa-maloppnaelse-matematikk-10-trinn/

Utdanningsdirektoratet. (2021). *Individuell vurdering Udir-2-2020*. Hentet 13.10.2021 fra www.udir.no/regelverkstolkninger/ opplaring/Vurdering/udir-2-2020-individuell-vurdering/

Mannsverk

Elevane skal verte gode problemløysarar

Innleiing

Problemløysing vert framheva i LK20, både som ein generell eigenskap, og som ein sentral del av matematikkfaget. Eg har alltid vore glad i å arbeide med problemløysingsoppgåver, då desse ofte er meir samansette og tidkrevjande enn andre oppgåver. Kjensla ved å klare å finne løysinga på eit 'problem' etter at eg verkeleg har grubla og strevd, er heilt fantastisk. Denne kjensla har eg no igjen kjent på, i eit matematikkemne eg har gjennomført som del av grunnskulelærarutdanninga eg er midt inne i.

Eleven sitt grunnlag for å kunne løyse problem på ein god måte vert mellom anna lagt i skulen, der utforsking og problemløysing i LK20 er utheva som eit eige kjerneelement. Her skal elevane arbeide med ulike problemløysingsoppgåver som skal gi dei strategiar og metodar til å løyse problem dei støyter på i kvardagen. Når eg er ferdig utdanna grunnskulelærar om nokre år, er det denne skulen eg skal undervisa matematikk i.

Hausten 2020 skreiv eg ei matematikkdidaktisk forskingsoppgåve som del av utdanninga mi. Med bakgrunn i LK20 si prioritering av problemløysing valde eg å sjå på korleis matematikklærarar på ungdomstrinnet kan leggje til rette for at elevar skal verte gode problemløysarar. I den forbindelse intervjua eg tre ungdomsskulelærarar på tre forskjellige skular for å få deira tankar knytte til problemløysing, og korleis dei vel å leggje opp matematikkundervisninga.

Simen Heggheim Mannsverk
Student, Høgskulen på Vestlandet
hmsimen@gmail.com

Kva er problemløysing?

Problemløysing kan definerast som ein målretta aktivitet, der ein eller fleire person(ar) skal løyse ei ny oppgåve. Løysingsprossesen kan variere frå prøving og feiling til systematisk utvikling og omformulering av problemet (Teigen, 2019).

Ein kan seie at problemløysing i matematikk går ut på å finne ein løysingsmetode og ein strategi for å løyse ukjende problem i ukjende samanhengar. Det skal vere ein situasjon som eleven ikkje har møtt tidlegare, og som hen derfor ikkje har nokon opplagt og bestemt metode for å løyse. Det er ikkje alltid at det er sjølve oppgåva som bestemmer om det er problemløysing, men ofte heller relasjonen mellom problemløysaren og problemet. Ei oppgåve som kan fungere som ei innlæringsoppgåve for éin elev, kan vere ei problemløysingsoppgåve for ein annan elev (Stedøy & Valbekmo, 2018, s. 4–5).

Problemløysing i LK20

Under kjerneelementet «Utforsking og problemløysing» i matematikkdelen av LK20 kan ein lesa:

> Problemløysing i matematikk handlar om at elevane utviklar ein metode for å løyse eit problem dei ikkje kjenner frå før. Algoritmisk tenking er viktig i prosessen med å utvikle strategiar og framgangsmåtar for å løyse problem og inneber å bryte ned eit problem i delproblem som kan løysast systematisk. Vidare inneber det å vurdere om delproblema best kan løysast med eller utan digitale verktøy. Problemløysing handlar òg om å analysere og forme om kjende og ukjende problem, løyse dei og vurdere om løysingane er gyldige. (Kunnskapsdepartementet, 2019)

Dette syner kor viktig og sentralt problemløysing er i LK20. For lærarar vert det viktig å forstå kva problemløysing er, kva for oppgåver som passar til dei ulike gruppene av elevane, og korleis dei skal inspirere, rettleie og motivere elevar til å arbeide med problemløysing (Stedøy & Valbekmo, 2018, s. 3). Målet er at elevane skal verte gode problemløysarar, då kompetanse i å løysa problem vert rekna som noko av det mest sentrale for elevar i framtida (sjå til dømes World Economic Forum, 2016).

Kva kjenneteiknar ein god problemløysar?

Det finst ein del eigenskapar som kjenneteiknar ein god problemløysar. Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina og Bruder (2016) har valt å dele desse eigenskapane inn i fem kategoriar:

Reduksjon handlar om å kunna redusere problemet ned til det essensielle på ein fornuftig måte. Til det vert det ofte nytta visualisering og strukturering i form av informative figurar, tabellar, løysingsgrafar og omgrep.

Reversibilitet inneber å kunne reversere tankegangen slik at ein kan tenkje baklengs. Dette bør gjerast automatisk for å sjå om dei har gløymt ei viktig opplysning eller mistolka noko.

Å kunne *sjå problemet frå ulike innfallsvinklar* inneber at problemløysaren kjenner att fleire aspekt ved eit gitt problem, og at hen klarar å sjå problemet frå ulike sider. Ein vil altså raskt kjenne att variablar og avhengigheiter, og vere i stand til å vurdere dei.

Å *endre innfallsvinkel* peikar på at problemløysaren må kunne endre meiningar eller føresetnadar for å kome fram til ei løysing. Ein må kunna sjå problemet frå eit anna perspektiv.

Overføring går ut på at problemløysaren klarar å overføre ein velkjend løysingsstrategi/prosedyre frå eitt problem til eit anna. Viktigheita av å kjenne att sjølve matematikken i problemet, uavhengig av situasjon, står sentralt.

«The five practices» – læraren som improviserande dirigent

Gjennom grunnskulelærarutdanninga mi har eg blitt introdusert for boka «5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions» av Margaret S. Smith og Mary Kay Stein (Smith & Stein, 2018). Dei utvikla «The five practices» for å hjelpe lærarar å bruke elevane sine svar til å fremje den matematiske forståinga i klassen som heilskap. Dei tenkjer på desse praksisane som døme på dyktig improvisasjon, og at identifiseringa av dei skal gjere elevsentrert undervisning meir handterbar ved å moderere graden av improvisasjon som krevst av lærarar i løpet av ein time. «The five practices» er:

Å *føresjå* sannsynlege svar frå elevane på utfordrande matematiske oppgåver og spørsmål å stille desse elevane. Dette er eit forsøk på å aktivt sjå føre seg korleis elevane matematisk kan nærme seg oppgåvene dei arbeider med, og vurdere spørsmål som kan stillast til elevar som bruker spesifikke strategiar. Her er det også viktig å utvikle forventningar om korleis elevane kan tolke eit problem, ei rekkje strategiar – både riktige og galne – som dei kan nytte til å takle det, og korleis desse matematiske strategiane kan forhalde seg til dei matematiske omgrepa, representasjonane, prosedyrane og praksisane som læraren ynskjer at elevane lærer. Dette krev at læraren løyser problema på så mange måtar hen kan.

Å *overvaka* elevane sine faktiske svar på oppgåvene (medan elevane arbeider med oppgåvene aleine, i par eller små grupper). Dette går ut på å observere og kontrollere framgangen og kvaliteten på det elevane arbeider med over tid. Ofte gjer lærarane dette ved å bevege seg rundt i klasserommet medan elevane arbeider. Det å forsiktig følgje med på kva elevane arbeider med, gjer det mogleg for læraren å bestemme kva og kven ein skal fokusere på under klassediskusjonen som følgjer. Likevel inneber det å 'overvake' elevane meir enn berre å studera og lytta til elevane. Læraren kan til dømes stille spørsmål som gjer elevane sin tankeprosess synleg, og utfordra elevar til å vurdere aspekt ved oppgåva dei treng å fokusere på.

Å *velja* bestemte elevar som skal presentere sitt matematiske arbeid under den samla klassediskusjonen. Slik sikrar læraren at sentrale matematiske tema og framgangsmåtar vert tatt opp til diskusjon. Me kan seie at dette gir læraren meir kontroll over diskusjonen. Valet av bestemte elevar og deira løysing bør vere knytt opp mot det matematiske målet for timen og læraren si vurdering av korleis kvart bidrag vil bidra til målet.

Å *sekvensere* elevsvara slik at dei vert tekne opp i ei bestemt rekkjefølgje. Ved å velje ei hensiktsmessig rekkjefølgje når elevar skal dele arbeidet sitt, kan læraren maksimere sjansane for å nå dei matematiske måla for diskusjonen. Til dømes kan læraren ynskje å få strategiane som flest elevar nytta, presentert fyrst. Dette kan vere med på å validere arbeidet til majoriteten av elevane og gjere byrjinga på diskusjonen tilgjengeleg for så mange som mogleg.

Å *kopla* saman forskjellige elevsvar og knyte desse svara opp mot viktige matematiske idear. Her er det viktig at læraren hjelper elevane med å sjå samanhengar mellom løysingane deira, og knyter desse opp mot dei matematiske nøkkelideane for den bestemte timen. Læraren kan også hjelpe elevane til å sjå på ulike konsekvensar av ulike tilnærmingar for å løyse problemet, kor nøyaktig og effektivt det er å løyse problema på den og den måten, og kva slags matematiske mønster som er lettast å oppdage.

Ein undervisingtime med problemløysing

For å få eit innblikk i korleis det vert undervist i problemløysing i matematikk, intervjua eg tre matematikklærarar som arbeider på ungdomstrinnet. I denne delen av artikkelen legg eg fram meiningane desse lærarane hadde, og ser dei i forhold til Smith og Stein (2018) sine «five practices», gjennom å sjå på nokre sentrale område dei tre lærarane trekkjer fram knytte til planlegging og gjennomføring av ein time om problemløysing.

Dei tre matematikklærarane eg har intervjua, er frå forskjellige skular. Dette er nok med på å auke truverdet i svara eg fekk, då dei med det ikkje har dei same rammene om undervisninga si. Kriteria for val av informantar var ganske enkle: at lærarane hadde matematikk som fag i utdanninga si, og at dei underviser i matematikk på ungdomstrinnet. Av etiske omsyn vert lærarane refererte til som lærar 1, lærar 2 og lærar 3: Lærar 1 er ein mann i midten av 30-åra, som har arbeidd som lærar på ungdomstrinnet i seks år. Lærar 2 er ein mann i midten av 30-åra, som har arbeidd som lærar på ungdomstrinnet i ni år. Lærar 3 er ei kvinne i starten av 40-åra, som har arbeidd som lærar på både mellomtrinnet og ungdomstrinnet i til saman 15 år.

Førebuing

Det arbeidet lærarane legg ned i førebuingsfasen, er viktig for kvaliteten på timen. Lærar 1 førebur seg slik: «finn/lagar oppgåver som er motiverande og relevante for elevane, men òg på eit nivå som dei kan løyse. Ikkje for vanskelege og ikkje for lette». Lærar 3 fortel: «plar setje meg eit mål for timen og velje oppgåver ut ifrå dette». Dette kan koplast opp mot det Smith og Stein (2018) fortel om viktigheita av å setje mål for timen og det å finne oppgåver som passar til måla.

Dersom oppgåvene er relevante og kan koplast mot noko som er kjent for elevane, vil elevane kanskje ha større motivasjon for å løyse oppgåvene. Det er viktig at oppgåvene ikkje er for lette, då dette kan føre til at elevane ikkje tek i bruk problemløysingmetodar. Dersom oppgåvene er for vanskelege, vil nok mange elevar miste motivasjonen. Her gjeld det altså å finne den 'gylne middelveg', der elevane må tenkje nytt, kreativt og ope, samtidig som løysinga er innanfor rekkevidde.

Lærar 2 fortel at han førebur seg ved å: «løyse oppgåvene på fleire måtar, slik at eg kjenner til ulike måtar å løyse oppgåvene på». Då er lærar 2 godt førebudd på moglege løysingsmetodar som elevane kan ta i bruk. Dette gjer at han kan vere klar til å leie elevane vidare om dei står fast, og stille spørsmål ved strategiane deira. Viktigheita av å føresjå moglege elevsvar vert understreka av Smith og Stein (2018) som ein viktig strategi i læraren sitt arbeid med problemløysing.

I førebuingsfasen er det også viktig å tenkje over kor lang tid elevane skal få når dei arbeider med problemløysingsoppgåver. Alle lærarane er einige i at det er viktig å setje av ein del tid til arbeid med slike oppgåver. Lærar 2 fortel at det er «viktig at elevane alltid har tid til å løyse oppgåvene på den måten dei ynskjer». Sjølv om alle lærarane er einige i at det er viktig å ha nok tid, nemner lærar 1 og lærar 2 tidspresset som møter elevane ved prøvar og eksamenar. Lærar 2 fortset: «Tidsnød er noko dei møter, f.eks. i prøve-/eksamenssamanheng, så det er viktig at elevane er effektive i tillegg.»

Introduksjon

Det er naudsynt å introdusere problemløysingsoppgåvene slik at elevane ikkje er usikre på noko. Lærar 3 plar «gå gjennom oppgåvene fyrst, gå gjennom tips: teikning, bruke likningar, klossar osv.». På denne måten vert elevane klar over kva dei skal gjere, og tankeprosessar vert sette i gang. Lærar 3 utdjupar: «Eg gir altså litt tips, men elevane vel heilt sjølve korleis dei tenkjer …» Lærar 2 gjer det litt på same måten når han «finn liknande oppgåver og syner korleis desse oppgåvene kan løysast på forskjellige måtar …».

I introduksjonen er det også viktig å presisere om det er noko utstyr/hjelpemiddel som skal hjelpe elevane å løyse problema. Lærar 3 nyttar somme gongar «brikker/klossar som visualiserer problemet». Lærar 1 har også nytta dette, til dømes tangram. Lærar 2 skil seg litt frå dei andre då han seier at han av og til «brukar YouTube-videoar for å visualisere oppgåvene litt meir».

Organisering

Ein må ha ein plan for korleis elevane skal organiserast når dei arbeider med problemløysingsoppgåver, og dette heng saman med måla for arbeidet med problemet. Det kan vera reint faglege mål, men òg meir generelle mål knytte til prosess, til dømes knytte til samarbeid, inkludering, moglegheita for val av ulike strategiar osv. Skal elevane jobbe aleine, i par eller i større grupper? Alle lærarane fortel at organiseringa vil variere. Likevel er alle tre særs positive til arbeid i grupper, og prøver å få til dette ofte. «Fordelen med å arbeide to og to eller i større grupper er at elevane kan diskutere seg imellom, og på denne måten komplementere kvarandre. Står elevane fast sjølve, kan dei verte dratt i gang igjen av andre på gruppa», seier lærar 2. Lærar 3 seier: «Det finst mange oppgåver som er fine å ha i grupper.» Ei ulempe ved arbeid i grupper kan vere at ein får «passive tilskodarar», som lærar 1 nemner. Då vil ikkje denne eleven få noko fagleg utbytte av timen.

Lærar 1 fortel at han i likskap med dei andre «også gjennomfører individuelle oppgåver». Lærar 3 grunngir ved å seie: «På tentamen eller på prøvar sit elevane aleine, så det er viktig å teste dette òg.»

Elevarbeid

På spørsmål om kor aktive lærarane er når elevane arbeider med problemløysingsoppgåver, svarar lærar 1: «Prøver å vere minst mogleg aktiv, la elevane tenkje sjølve. Poenget er at elevane skal utforske og prøve sjølve.» Alle lærarane nemner likevel at dei bevegar seg litt rundt i klasserommet, medan elevane arbeider med oppgåvene. Lærar 3 fortel at ho «går rundt, snakkar og diskuterer, høyrer etter korleis elevane tenkjer. Gir tips om elevane står heilt fast». Det same gjer lærar 2 då han seier at han «prøver å gå rundt og sjå på ulike måtar elevane løyser oppgåvene på». Lærar 1 «går litt rundt og rettleiar ved behov». Dette vert trekt fram av Smith og Stein (2018) når dei vektlegg verdien av å overvake elevane medan dei arbeider. Lærarane får observert og kontrollert framgangen og kvaliteten på det elevane arbeider med. Lærarane snakkar, diskuterer og rettleiar ved behov, og er sånn sett klar over at det å 'overvake' er meir enn å berre studera og lytta til elevane.

Det å forsiktig følgje med på kva elevane arbeider med, gjer det også mogleg for lærarar å bestemme kva og kven dei skal fokusere på under klassediskusjonen som følgjer (Smith & Stein, 2018). Lærar 3 fortel : «Tar til meg det dei gjer, og vel nokre av dei elevane eg ynskjer skal få lagt fram sin strategi i den felles samtalen til slutt.» Lærar 1 fokuserer også på dette då han seier: «Prøver også å sjå for meg korleis klassediskusjonen til slutt kan sjå ut, ved å plukke ut (i hovudet) kven som har løyst den og den oppgåva på ein god måte.» Ved å 'velje' slik kan lærarane sikre at matematiske tema og framgangsmåtar vert tekne opp til diskusjon.

Felles oppsummering

Det å ha ein felles gjennomgang der ein koplar saman forskjellige elevsvar og knyter desse svara opp mot viktige matematiske idear, er viktig (Smith & Stein, 2018). Dette støttar lærar 1: «Når det kjem til gjennomgangen, er den svært viktig. Her må eg som lærar prøve å sjå samanhengar mellom elevsvara og knyte dei til viktig matematikk. Lærar 3 er einig: «Det er viktig å ha ein gjennomgang, der elevane ser om dei har tenkt riktig, og der eg som lærar prøver å kople elevsvara opp mot måla for timen.» Lærar 2 meiner òg at «ein liten felles diskusjon er viktig». Alle lærarane plar leggje opp til at somme elevar får leggje fram sine strategiar, og byggjer vidare på dette. Då vert elevane engasjerte og erfarer at dei bidrar.

Utfordringar

Som i alle andre timar vil det vere nokre utfordringar lærarane må vere klar over i problemløysingsøkter. Alle lærarane er einige i at det kan vere ei utfordring å velje oppgåver som passar til *alle* elevane. Lærar 1 peikar på at «elevane er på såpass ulike nivå at det å velje oppgåver som kan passe for alle, er vanskeleg. Ofte føler eg at oppgåvene eg vel, er på eit nivå som dei middels sterke elevane i klassen kan strekkje seg til. Desse oppgåvene kan då verte for vanskelege for dei svakaste elevane og for lette for dei sterkaste elevane».

Lærar 2 meiner det er vanskeleg å rekke innom alle elevane. «Eg rekk ikkje innom alle, men vel då kanskje å fokusere meir på enkeltelevar.» Lærar 3 opplever også andre utfordringar: «det å setje enkeltelevar i gang med tenkjeprosessen, og det å forhindre passive tilskodarar når elevane arbeider i grupper».

Oppsummering

Arbeidet lærarane legg ned i førebuinga, er avgjerande for kvaliteten på timen der problemløysing er i fokus. I førebuinga meiner lærarane at det er viktig å setje mål og velje passande oppgåver. Å spesifisere matematiske mål for timen er viktig for planlegginga og undervisninga. Nøkkelen er å tydeleggjere mål som identifiserer kva elevane skal vete og forstå av matematikk som eit resultat av engasjementet deira kring oppgåvene dei skal jobbe med i timen. Utan eitt eller fleire klare mål for kva elevane skal lære i løpet av timen, kan diskusjonen fort ende utan å markere nokre matematiske idear eller forhold (Smith & Stein, 2018).

Når det/dei matematiske målet/måla for timen er sett(e), kan læraren prøva å finna/laga ei eller fleire problemoppgåve(r) som passar. Det at problema kan løysast på forskjellige måtar, kan vere ein fordel og gjere at fleire elevar kjem fram til ei løysing.

Oppgåvene må vere relevante og motiverande for elevane. Dei må òg gi elevane grunnlag for å bevega seg mellom dei fem kategoriane som Liljedahl et al. (2016) framhevar som eigenskapar som kjenneteiknar ein god problemløysar. Om elevane skal utvikla seg som problemløysarar, må dei få arbeide med alle desse kategoriane. Det krev til dømes at læraren ikkje hjelper til med å redusera problemet til å bli ei oppgåve. Det at lærarane løyser problema sjølve på fleire måtar på førehand, kan bidra til å kunne rettleia elevar som står fast, ved å ta utgangspunkt i strategival dei har gjort utan å gripa til slik reduksjon.

Både lærarane som vart intervjua, og Smith og Stein (2018) understrekar kor viktig det er at læraren går rundt i klasserommet medan elevane arbeider. På denne måten kan hen fanga opp om nokon står fast, diskutera og rettleia. Samtidig kan læraren då gjera seg opp ei meining knytt til kven sine strategiar og løysingar som skal takast opp i plenum i oppsummeringa. Å velja ut elevforslag som elevane presenterer, og så prøve å samanlikne dei ulike elevsvara/-strategiane og kople det opp mot tema i matematikkfaget og målet for timen fell saman med det Smith og Stein (2018) framhevar med punkta *velja*, *sekvensere* og *kopla* i «The five practices».

Slik kan ein altså leggje til rette for at elevane skal verte gode problemløysarar, og for meg som grunnskulelærarstudent er det trygt å sjå at ein finn sams oppfatning om korleis dette kan gjerast både i didaktisk litteratur, i grunnskulelærarutdanninga og hjå matematikklærarar i skulen.

Referansar

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U. & Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. Springer.

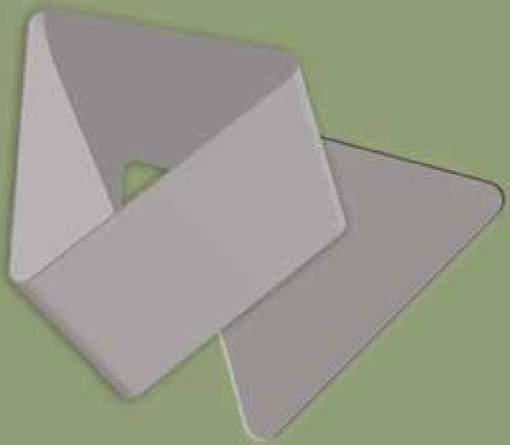
Smith, M.S. & Stein, M.K. (2018). *5 Practices: for Orchestrating Productive Mathematics Discussions* (2. utg.). National Council of Teachers of Mathematics.

Stedøy, I.M. & Valbekmo, I. (2018). *Problemløsning*. Henta frå http://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-11/Probleml%C3%B8sing.pdf

Teigen, K.H. (2019, 20. mai). *Problemløsning*. Henta frå https://snl.no/probleml%C3%B8sning

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk MAT01-05. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020*. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

World Economic Forum. (2016, 19. januar). *The 10 skills you need to thrive in the Fourth Industrial Revolution*. https://www.weforum.org/agenda/2016/01/the-10-skills-you-need-to-thrive-in-the-fourth-industrial-revolution/



Naylor

Pytagoras på stranda

Del 1

Pytagoras satt på stranda. Han var både spent og irritert. I går hadde han oppdaget at kvadrater som er tegnet på sidene til en rettvinklet trekant har en utrolig egenskap: summen av arealene til kvadratene på katetene blir til arealet av kvadratet på hypotenusen. Den enkleste rettvinklede trekanten du kan lage med heltall, er den med sidelengdene 3, 4 og 5. Selvfølgelig er $3^2 + 4^2 = 5^2$. Hipposus, en av hans disipler, påpekte at 5, 12 og 13 er tre heltall som også fullfører likningen. Han bestemte seg for å kalle disse settene med tall for «Tripler».

Han lurte om det fantes flere tripler, kanskje uendelig mange. Kona hans, Teano, hadde foreslått 1, 0 og 1, fordi $1^2 + 0^2 = 1^2$. Da ble han sint og ropte «1 er ikke et tall!» Pytagoras hadde jo noen rare ideer om tall og filosofi. Han kunne blant annet si «Et tall må ha en begynnelse, en slutt og en del i midten! Det første tallet er 3. 1 er ikke et tall, 1 er enheten og 0?! Hvordan kan 0 bli noe i det hele tatt! 0 er *ingenting*!»

Nå satt han på stranda, spent og irritert. Han skrev sitt yndlingstrippel i sanden og på hver side skrev han Hipposus' spennende nye trippel og Teanos unaturlige «trippel» slik som i figur 1.

1	3	5
0	4	12
1	5	13

Figur 1

Han stirret på tallene og lyttet nøye. Kanskje planetene ville synge til han, «sfærenes musikk» som bestandig inspirerte han. Han hørte ingenting annet enn bølgene og skriket til en måke. Måken fløy forbi. Pytagoras ble distrahert av skriket og utviklet første rad i tallene mens han fulgte fuglen (se figur 2).

1	3	5	7	9	11
0	4	12			
1	5	13			

Figur 2

Mike Naylor
Matematikkbølgen
mike@matematikkbolgen.com

Plutselig dukket måken ned i vannet, dukket opp igjen og fortsatte å fly, så dukket den ned igjen, så opp … og ned …

Pytagoras hørte sfærenes musikk og snart fullførte han flere kolonner (figur 3).

1	3	5	7	9	11
0	4	12	24	40	60
1	5	13	25	41	61

Figur 3

Kunne det bli sånn? Han multipliserte, regnet og sjekket tallene – og, ja! Alle fungerte med hans likning. Han fant flere tripler og kunne utvikle mønsteret for å finne uendelig mange tripler.

Kanskje var det ikke akkurat slik det foregikk. Uansett, kjære leser, her kommer en oppgave eller tre …

Hva slags mønstre kan du finne i tallene i disse kolonnene?

Hva blir de neste to kolonnene i Pytagoras sitt mønster?

Hva blir tallene i kolonnene som begynner med 25 og 35?

Kan du finne en formel for å finne tallene i en kolonne som begynner med *n*?

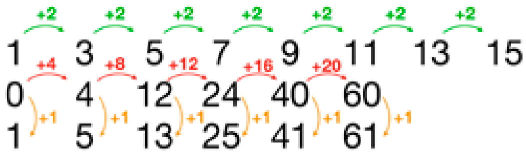
Diskusjon og svarene kommer på neste side.

1	3	5	7	9	11	13	15	...	25	35	...	*n*
0	4	12	24	40	60	___	___		___	___		___
1	5	13	25	41	61	___	___		___	___		___

Figur 4

Del 2

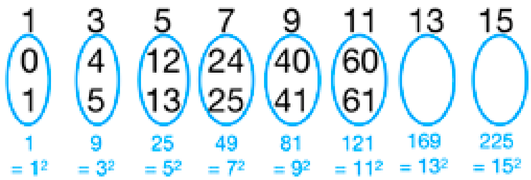
Det fins mange mønstre i tallene. Toppraden er bare oddetall, andre rad øker med +4, +8, +12, +16, osv., og tallene i tredje rad er en flere enn de i andre rad (figur 5). Da er det ikke vanskelig å utvide kolonnene.



Figur 5

For å hoppe frem til kolonnene som begynner med 25 og 35 er det lurt å finne en snarvei, slik at vi ikke trenger å legge til et økende tall om og om igjen.

En måte du kan bruke, er å legge merke til at andre og tredje tall i hver kolonne summeres til et kvadrattall. Dette kvadrattallet er tallet i første rad opphøyd i andre (figur 6).



Figur 6

For å finne tallene i andre og tredje rad, er det bare å ta tallet i første rad i andre potens (f.eks. $15^2 = 225$), dele det på 2 ($225/2 = 112{,}5$). Resultatet er nøyaktig i midten av de to tallene som mangler (112 og 113).

En slik snarvei kan skrives om for å finne en formel til et trippel som begynner med et oddetall, n. De andre to tallene blir $\frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}$ og $\frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}$, som kan skrives $\frac{n^2 \pm 1}{2}$. Kolonnene er fullført i figur 7. NB: Det fins mange andre mønstre og måter som kan brukes for å finne tallene i kolonnene!

En overraskelse

En nydelig opplevelse finnes i kolonnene som begynner med et tall som har 5 som siste siffer. Fra oppgavene ser vi at fire slike tripler er (5, 12, 13), (15, 112, 113), (25, 312, 313) og (35, 612, 613). Alle tallene i disse triplene slutter med 5, 12 og 13. Fortsetter mønsteret?

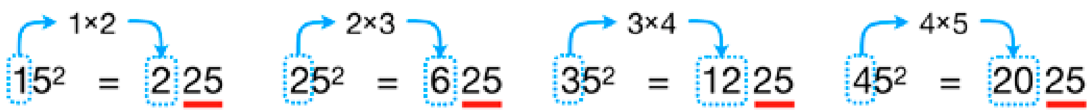
Det er faktisk tilfelle. Alle disse triplene slutter med 5, 12 og 13. I tillegg følger sifrene som er foran 12-er og 13-er sekvensen: 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, … Disse tallene er *trekanttall*. Det er morsomt at trekanttall dukker opp i en oppgave som handler om rettvinklede trekanter.

Et triks

Mens vi bruker formelen for å finne tripler når det første tallet slutter med 5, finner vi et annet mønster som fører til et morsomt regnetriks. Når vi trenger å finne andre potens til et tall som slutter på 5, ser vi at de to siste sifrene i

1	3	5	7	9	11	13	15	…	25	35	…	n
0	4	12	24	40	60	84	112	…	312	612	…	$(n^2 - 1)/2$
1	5	13	25	41	61	85	113	…	313	613	…	$(n^2 + 1)/2$

Figur 7



Figur 8

resultatet bestandig er 25. Sifrene før 25 kan finnes ved å ta første sifferet til tallet vi skal regne med og multiplisere det med *sifferet* +1 (se figur 8).

Vi kan bruke dette mønsteret som et regnetriks. For eksempel: finn 95^2 ved å multiplisere 9 med 10 og få 90, legg så til 25 og få 9025. Da er $95^2 = 9025$.

Et par utvidelser

En liknende metode for å finne enda flere tripler fikk navn etter Platon, som levde 400 f.Kr, altså ca. 100 år etter Pytagoras. Disse triplene heter Pytagoreiske tripler av Platon, vist i figur 9.

Hva slags mønstre kan du finne i tallene i disse kolonnene? Kan du utvide tabellen? I hvilke kolonner finnes det tripler som er et multiplum av Pytagoras sine tripler? Hvilke av kolonnene har helt nye tripler? Kan du finne en formel for å generere Pytagoreiske tripler av Platon? I klasserommet er oppgaven en fin oppfølging til den første oppgaven.

Historien om tripler er ikke helt ferdig: 100 år etter Platon presenterte Euklid en metode for å finne *alle* tripler. De fikk navnet Pytagoreiske tripler av Euklid. Metoden er å velge to heltall, m og n, med $m > n$, og da skape et sett av talltripler slik:

$$(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$$

2	4	6	8	10	12
0	3	8	15	24	35
2	5	10	17	26	37

Figur 9

Med for eksempel $m = 3$ og $n = 2$ får vi (12, 5, 13). Her er det mye å utforske! Kan du verifisere at Euklids formel skaper Pytagoreiske tripler? Hvilke verdier av m og n produserer tripler av Pytagoras? Tripler av Platon? Kan du finne noen tripler av Euklid som Pytagoras og Platon ikke fant?

En nydelig egenskap til triplene er at hvert trippel har minst et tall som er et multiplum av 3, et som er et multiplum av 4, og et som er et multiplum av 5. Kan du bevise det? (NB: elevene svarer av og til at det ikke kan være sant, fordi 13 i (5, 12, 13) ikke er et multiplum av 3, 4 eller 5. Men i (5, 12, 13) fins det et multiplum av 3, 4 og 5, ikke sant?

En fin avslutning

Pytagoras levde ca. 500 f.Kr og fant mange tripler. Platon levde ca. 400 f.Kr. og fant enda flere. Euklid levde ca. 300 f.Kr. og fant alle.

Dette århundret? Tredje, fjerde og femte – 3, 4 og 5. Fins det en bedre måte å avslutte denne historien på?

Intervju med Marit Johnsen-Høines

Caspar Forlag er 40 år

Da Stieg Mellin-Olsen og Marit Johnsen-Høines stiftet Caspar Forlag i 1981, var målsettingen å utvikle litteratur for matematikkundervisning i skole og lærerutdanning. Forlaget skulle bidra til å styrke matematikkdidaktikk som fagområde. Caspar gir ut Tangenten og redaksjonen møter Marit til en samtale der hun utdyper forlagets intensjoner, arbeidsmåter, profil og utvikling.

Kan du fortelle hvordan det hele begynte? Hvordan og hvorfor startet dere Caspar Forlag?

Caspar Forlag utgikk fra matematikkseksjonen ved Bergen Lærerhøgskole (BLH). Matematikk var den gangen ikke obligatorisk i lærerutdanningen. Det ble tilbudt 20 timers fagdidaktiske kurs, og noen steder var det tilbud om halvårskurs som videreutdanning for lærere. Ved hver av de 19 lærerhøgskolene var det tilsatt en, kanskje to, og noen få steder tre lærerutdannere. De var sterke, engasjerte matematikere som til dels hadde lite kunnskap om didaktikk og om matematikk som skolefag. De erkjente behov for innsikt i og diskusjon om skolens praksis, og de ønsket å utvikle faget som lærerutdanningsfag. Caspar ville bygge miljø for å stimulere til faglig utvikling, til utprøving, diskusjon og skriving; et miljø der folk var støttende gjennom å bruke og gi tilbakemeldinger på hverandres tekster, der det var rom for å være kritiske. Det dreide seg om å danne matematikkdidaktisk kultur. Caspar skulle stimulere samarbeid der folk utviklet fag- og skrivefellesskap.

Mellin-Olsen var en etablert, profilert fagdidaktiker, med nasjonalt og internasjonalt nettverk, og hadde publiserte bøker som var mye brukt. Hvilken rolle hadde du i Caspar-samarbeidet?

Stieg Mellin-Olsen var initiativtaker, idéskaper og drivkraft. Jeg var en engasjert grunnskolelærer og videreutdanningsstudent som tok hovedfag knyttet til prosjekter i egen klasse og var timelærer ved BLH. Stieg var «talentspeider», hadde blikk for folks potensiale og var god til å inspirere. Jeg har undret meg over hvorfor han inviterte akkurat meg som Caspar-partner. Han så nok behov for praksis-stemmen. Han var ofte i klasserommet mitt og kanskje viste jeg der tilstrekkelig faglig mot og kreativt engasjement? Stieg fungerte som leder, veileder og mentor i samarbeidet vårt, men etter hvert utviklet jeg vel større myndighet.

Rent praktisk, hvordan utviklet forlaget seg?

Dette var i ei tid da kommunikasjon foregikk ved sprit-stensil, post og telefon, da skrivemaskin med kulehode og rettetast var nyvinning. Publikasjonene forelå først som kompendier. Så ga kolleger og studenter tilbakemeldinger og kompendiene ble til nye og forbedrede kompendier før de til slutt ble bøker. Salget ga økonomi

Paulus Gerdes diskuterer med Stieg Mellin-Olsen og Marit Johnsen Høines i Bergen sentrum i 1986.

til seminarer der lærerutdannere fra hele landet kunne møtes. Allerede det første året ble det avholdt lærebokverksted, et seminar der lærebøkers innhold, form og bruk var tema. Kolleger, lærere og studenter holdt innlegg til diskusjon, og det ble tydelig at møte mellom de ulike deltagergruppene var viktig. Matematikerne ønsket å utvikle litteratur mot en praksisorientert lærerutdanning, de var undersøkende og nysgjerrige på skolens praksis, på hvordan lærere og studenter tenkte om den. De ønsket respons på tekstene de arbeidet med. Lærerne var studenter i videreutdanning, de arbeidet med prosjekter i egen klasse og ønsket inspirasjon og innspill. Seminarene fikk betydning for studentenes utdanning, lærerutdannerne holdt gjesteforelesninger på BLH, studentene ble kjent med fagpersoner i miljøet og med pensumlitteraturen på nye måter. Samspillet preget tekstene som ble delt og publisert. Oppsummert kan man si at Caspar ble utviklet gjennom faglig-sosial praksis, og denne praksisen omfattet også et nordisk og internasjonalt nettverk. Allerede i 1986 arrangerte Caspar det første internasjonale seminaret: *Mathematics and Culture* der mellom andre Paulus Gerdes, Alan Bishop og Celia Hoyles deltok. På den måten fikk Caspars forfattere tilgang til et bredt fagmiljø.

Caspar er kjent for sterke matematikkdidaktiske perspektiv og et ønske om å påvirke lærerutdanning og skole. Kan du si noe om hvordan den faglige profilen utviklet seg?

Caspar-litteraturens grunnleggende diskusjon er utfordrende og kompleks: Det dreier seg om matematikkens innhold, om læring og formidling. Elever skal ikke bare lære for å kunne vise hva de har lært. Det er et mål at de utvikler eierskap til kunnskap, at de kan være undersøkende og utprøvende; forstå sammenhenger, sette språk på dem og handle på bakgrunn av innsikten det gir. Det skal gjelde alle elever. Hvordan utvikles litteratur som kan belyse denne målsettingen? Spørsmålet har hatt betydning for lærerutdannernes praksis og forfatterskap. Matematikkdidaktikk skal belyse hvordan matematikk utvikles og forstås, kommuniseres og brukes.

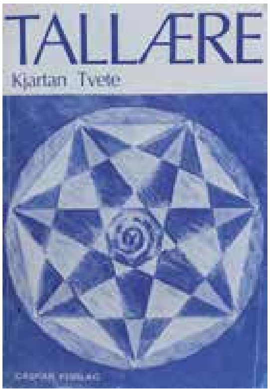
Mellin-Olsen snakket om elevers *fornuftsgrunnlag for læring,* og fremholdt at elevene har grunner for om de vil lære, hva de vil lære og hvordan de vil lære. Lærere kan invitere, de kan vise fram kunnskapen, de kan formidle hvorfor og hvordan de mener den er viktig, men det er elevene som avgjør om de går inn i feltet. Mellin-Olsen skisserte to typer fornuftsgrunnlag. Instrumentelt fornuftsgrunnlag dreier seg om at eleven vil lære matematikk med tanke på karakterer og eksamen. Det er et instrument for å lykkes i skole og utdanning. Sosialt fornuftsgrunnlag dreier seg om at faget i seg oppleves interessant og meningsfullt. Det kan være fordi matematikk kan beskrive aktuelle samfunnsmessige sammenhenger, fordi den gir innsikt som er nødvendig å ha for eksempel knyttet til økonomi, energiproduksjon og miljø, eller fordi det er engasjerende å se sammenhenger mellom geometri, kunst og arkitektur. Fornuftsgrunnlaget har betydning for hvordan elever går inn i matematisk aktivitet, det har betydning for hva de lærer og hvordan de lærer og for hvilken undervisning de ønsker. Elever med overveiende instrumentelt fornuftsgrunnlag vil søke effektive metoder, de er på jakt etter rette svar og vil gjerne gjøre seg fort ferdige. De ønsker at læreren skal gi tydelige forklaringer som beskriver metoder de skal bruke. Sosialt fornuftsgrunnlag rommer ønsker om å utforske, forstå og å stille nye spørsmål. Elevene kan ønske å finne noe ut selv, eller være i samspill med medelever og lærer. De kan være mer opptatt av å forstå matematiske sammenhenger enn å komme raskt fram til riktige svar. Det dreier seg ikke om at noen elever har instrumentell og andre har sosial tilnærming. De fleste vil ha elementer av begge, med mer vekt på det ene eller det andre, vektleggingen vil være situasjonsavhengig. Samtidig som fornuftsgrunnlaget vises gjennom elevens egne tilnærminger, motivasjon og handlinger, dannes det gjennom sosiale prosesser. Det vil være av betydning at skolen støtter utvikling av sosialt fornuftsgrunnlag fordi det kan gi elevene grunnlag til å oppleve matematikken som meningsfull og stimulere til at de vil undersøke og se sammenhenger.

Mellin-Olsen introduserte denne type begreper for å diskutere og forstå skolens praksis, få innsikt i samspill mellom læring og undervisning, og for bedre å forstå studenters læring. Studenter, også lærere i videreutdanning, møter studiet med eget fornuftsgrunnlag. De utfordres til få innsikt i egen læringshistorie og til å ta del i dannende prosesser for fortsettende læring for å bli gode matematikklærere. Mens dette for noen kan oppleves befriende og motiverende, kan det for andre føles vanskelig og konfliktfylt. Noen studenter har kanskje lykkes i skolen nettopp ved å få matematikken til på raskest mulig måte. De ønsker kanskje å bli læreren som gir klare beskrivelser av hvordan elever skal løse oppgaver. Studenter skal støttes når de utvikler fornuftsgrunnlag for læring av matematikk og didaktikk, som studenter og lærere. Caspar skal møte dem med litteratur som bevisstgjør, utfordrer og støtter prosessene.

Du gir eksempel på begreper som betegner Caspars grunnleggende perspektiv, men Caspars publikasjoner kan imidlertid fremstå som ulike? Noen er mest matematikkfaglige, andre har fokus på skole og barnehage og didaktiske perspektiver? Hvordan blir de grunnleggende perspektivene tydelige i de matematikkfaglige utgivelsene?

Jeg oppfatter at forfatterne bryter med matematikkens tradisjonelle læreboksjanger. De skaper rom og ro til være i matematiske områder, studentene inviteres til å dvele ved og utforske matematiske sammenhenger. Matematikk formidles på måter som kan gjøre den tilgjengelig og engasjerende, for å stimulere innsikt, fantasi og kreativitet slik at det får betydning for studentene i deres arbeid med elever. Dette framstår som felles målsettinger for Kjartan Tvete, Reinert Rinvold, Knut Ole Lysø, Gert

Monstad Haga og Christoph Kirfels forfatterskap. De utvikler selvsagt forskjellige profiler som følge av faglige og didaktiske valg.



Når Tvete inviterer studenter inn i tallenes verden, knytter han for eksempel tallteoretisk kunnskap til tallenes historie og mytologi og formidler tallærens utvikling fram til vår digitale tid. Han leder studentene inn i geometriske situasjoner og problemer, stimulerer til aktiv eksperimentering og utforskning som grunnlag for å bruke nye begreper og sammenhenger. Gjennom fokus på jordmåling, brukes matematikk til å undersøke geometri og natur. Rinvold utvikler et originalt visuelt formidlingsperspektiv når han skriver om tallteori, lineæralgebra, avbildninger og symmetri. Gjennom språklige, visuelle geometriske og konkrete tilnærminger utleder han begrep, sammenhenger og strukturer. Lysø fremhever hvordan kunnskaper i statistikk og sannsynlighetsregning gir redskap til å kommunisere og forstå lokale og samfunnsmessige problemfelt. Han varierer mellom å beskrive statistiske begrep, legge til rette for å utforske begrep og bearbeide data, og vise hvordan samtaler fungerer til å forstå begreper, begrepenes bruksområder og avgrensninger. Han retter seg også inn mot studentenes læring gjennom aktiviteter som er aktuelle for elever. Kirfel formidler matematikk når han designer praktiske eksperiment. Han viser hvordan elever (og studenter) utvikler matematisk innsikt gjennom eksperimentets prosesser og resultater. Hana legger vekt på at elever skal få muligheter til å ta del i matematiske prosesser, til å lage eksempel, definere, resonnere, lage notasjoner, modellerere og stille matematiske spørsmål. Læreres meta-matematiske innsikt gir grunnlag for slik undervisning. Han leder leserne til å ta del i matematiske tankeganger og prosesser, å erfare matematisk aktivitet, og få meta-perspektiv på egen og andres læring.

Deler av Caspars litteratur har matematikkfaglig tyngde, og det er viktig i et fagdidaktisk perspektiv. Det er også tydelig at forfatterne, gjennom formidlingsform tar opp i seg og utvikler Caspars faglige didaktiske profil.

Så skrev du Begynneropplæringen, ei bok som viste nye perspektiv og som ble viktig for lærere og lærerutdanning i Norge og Norden. Hva var det du fikk til?

Konkretisering av barns matematikk slik den finnes i deres daglige liv, hvordan det er del av deres virksomheter, hvordan de utvikler og bruker språk, ser sammenhenger og finner løsninger, var nytt i 1980-årene. Perspektivet møtte i utgangspunktet motstand, men jeg fikk stor støtte i fagmiljøet og fikk mot til å arbeide med stoffet fra kompendier til bok. Det viste seg at tiden var moden, men også at boka var forut for sin tid. Jeg oppfatter at jeg lyktes med å formidle elevenes uformelle matematikk gjennom språket deres, som grunnlag for læring. Jeg tror det hadde betydning at teorien ikke ble lagt inn som isolert supplement, men at teorispråket hadde praksisspråket i seg. Teorien skulle være til hjelp for å få øye på barnas matematikk. Det viktigste var kanskje at lærere og studenter kjente seg igjen i eksemplene, de fikk øye på barns matematikk i miljøet omkring seg. Jeg tror også at boka rokket ved skolematematikkens autoritet. Det ble interessant at elever tenkte og uttrykte seg på uformelle måter.

I dag er perspektivene om sammenhenger mellom språk og læring anerkjente. Samfunnet utvikles, og tiden stiller nye utfordringer. Samtidig som litteratur skal være aktuell i tiden, skal den peke framover. Det er nødvendig å utvikle matematikkdidaktisk litteratur i et multikulturelt, flerspråklig og multimodalt Norge. Dette utviklingsbehovet var sentralt når Begynneropplæringen ble brukt som grunnlag for å lage to nye bøker som utvider det språklige og kritiske perspektivet. Den ene er rettet mot grunnskolen, den andre mot barnehagen, men begge tar opp i seg multikulturelle og digitale perspektiver på matematikklæring.

Samtidig som de enkelte publikasjonene er selvstendige, pleier du å si at det er sammenhenger mellom dem. Kan du utdype det?

I innledningen til boken *Kunnskapsformidling, virksomhetsteoretiske perspektiv* problematiserte Mellin-Olsen hvordan vi tenker om at elever har eller ikke har en kunnskap. Tenker vi at de har kunnskaper fordi de svarer riktig på skoleoppgaver? Har det betydning om de kan bruke dem i situasjoner utenfor skolen, til å løse egne problemer? Opplever elevene selv betydningen av å ha kunnskaper? Han inviterte leserne til å leite etter betingelser for at elever griper fatt i kunnskapen og gjør den til sin egen ved å ta kontroll over den. Han arbeidet med virksomhetsteoretiske perspektiv og utviklet kontrollbegrepet som redskap til å forstå prosesser der elever har eller tar kontroll over kunnskap, og til hvordan en fristiller elever til å ta kontroll. Kunnskaper skal fungere som redskap for elevene i deres liv slik at de kan fungere i samfunnet, og for å kunne påvirke og utvikle samfunnet. Han fremhevet at det er gjennom elevenes virksomheter læreren får øye på elevenes potensiale for læring. Mellin-Olsen hentet inspirasjon fra samtaler med studenter, brukte deres eksempler når han belyste folks bruk av kunnskaper i sine aktiviteter, når han undersøkte og utviklet teoretiske perspektiver. Han var aktivt lyttende, opptatt av hva studentene kunne og så deres potensiale. Han mente at det var viktig ikke å undervurdere dem, men invitere inn til utfordrende tekster. Boken om kunnskapsformidling viser det.

Mellin-Olsens beskrivelser av folks eiendomsforhold til kunnskap og til hvordan kunnskapen fremtrer gjennom bruk, har paralleller til bøkene mine om begynneropplæringen. Felles perspektiver viser seg også i Geir Bottens bok, *Matematikk med mening – mening for alle*, når han diskuterer hvilken betydning det har for elevers læring at de opplever faget engasjerende og meningsfylt. Det dreier seg ikke bare om at det gjøres praktisk og relevant, men også om hvordan matematiske aktivitet kan pirre nysgjerrighet og utfordre kreativitet og skapertrang. Han fremholder at engasjement i læreprosessene er vesentlig for å lykkes. Gjennom eksempler viser han hvordan dette er viktig for alle elever, uansett bakgrunn og forutsetninger. I et kritisk perspektiv viser han hvordan arbeidsmåter reflekterer holdninger, fagsyn og læringssyn, og hvordan elevers holdninger til matematikk og læring også må ses i sammenheng med holdninger som finnes i samfunnet. Når Botten legger vekt på språk og kommunikasjon i læringssituasjoner formidler han innsikt i matematikkens språk, hvordan begreper og sammenhenger språksettes og kommuniseres av matematikere, i skole og samfunn, av barn og unge.

Matematikk ble fag i førskolelærerutdanningen og seksåringene begynte på skolen. Det åpnet vel et nytt matematikkdidaktisk felt? Var det viktig for Caspar å påvirke innholdet, å delta i den utdanningspolitiske utviklingen?

Ja, for oss er det viktig å ta del i tidens utvikling, å påvirke den. Vi arbeidet allerede med å se matematikk som del av barns lekende og utforskende aktiviteter og ville hindre at skolematematikkens tradisjoner ble transformert til barnehagen. Læring skulle handle om å legge til rette for, stimulere og støtte utvikling av småbarns matematikk og språk. Når seksåringenes skolestart ble behandlet i Stortinget, ble det vedtatt at barnehagepedagogikk skulle være førende på skolens laveste trinn og det ble stimulert til samarbeid mellom grunnskolelærere og førskolelærere. Barnehagetradisjonen hadde imidlertid liten erfaring med å se matematikken i barns aktiviteter, de hadde ikke tradisjon for å se didaktisk potensiale, til å stimulere barns matematisering. Matematikk i barnehagen ble derfor nybrottsarbeid. Åtte kolleger fra fem høgskoler møttes til jevnlige skriveseminar, uferdige tekster ble delt, diskutert og publisert i artikkelsamlingen *De små teller også*. Tekstene viste veier for å tenke matematikk i barnehage-pedagogisk tradisjon. Det åpnet seg et matematikkdidaktisk felt der Caspars litteratur fikk betydning. Ida Heiberg Solem og Elin Lie Reikerås henter eksempler fra et omfattende materiale når de beskriver hvordan barn aktivt bruker kunnskap, er nysgjerrige og vitebegjærlige, utforsker omgivelsene, tenker, funderer og trekker slutninger. I *Det matematiske barnet* inspirerer de leserne til å få øye på barns matematisering og til å reflektere over egen rolle og matematikkens betydning. I antologien *Rom for matematikk i barnehagen* tilbyr forfatterne ulike tilnærminger. De knytter begrepslæring til romforståelse, klassifisering, varians og invarians, utforskende samtaler og til bruk av billeddokumentasjon i barnehagen. De tilfører også et historisk grunnlag for matematikk i barnehagen. Samtidig som de barnehagedidaktiske publikasjonene bringer ulike perspektiv, har de felles trekk. De plasserer seg i praksisfeltet, knytter teori og praksis sammen og løfter frem sammenhenger mellom språk og matematikk. Dette er tydelige perspektiver i *Barn, matematikk og språk*, der jeg legger Begynneropplæringens perspektiv til grunn for å utvikle språklig kulturelt mangfold i norske og samiske barnehager.

Det er økende fokus på muntlige sider ved matematikkfaget, på matematikksamtaler i klasserom og barnehage. Caspar har gitt ut tre bøker om faglige samtaler. Kan du si litt om hvorfor det er viktig å ha fokus på samtaler?

Hvordan elever og lærere snakker sammen når de arbeider med matematikk har betydning for læringen. Det har betydning for hva de lærer, hvordan de lærer og hvilket forhold de får til kunnskapen. *Matematikksamtaler* og *Læringssamtalen i matematikkfagets praksis I og II* bygger opp under det. De tre bøkene viser hvordan samtaler utvikles på ulike måter i klasserom der elever utvikler regnemetoder, der de undersøker geometriske perspektiver i kunstfaglige aktiviteter, der de lærer matematikk gjennom at den brukes i et tømrerverksted, eller i barnehagens tilrettelegging for utforskende og lekende læring. Bøkene gir innsikt i hvordan samtaler danner rom for læring, de øker bevissthet om hvordan læreres samtalepraksis har betydning for læringskvalitet. Samtidig løfter de samtaleanalyse som grunnlag for innsikt i skolens og barnehagens praksis og egner seg som litteratur i masterutdanningene.

Etter åtte år begynte Caspar Forlag å gi ut Tangenten. Kan du si noe om bakgrunnen for det?

Miljøet savnet et tidsskrift for matematikklærere. I Danmark ga matematikklærerforening ut Matematik, i Sverige var Nämnaren etablert. I 1990 ville Mellin-Olsen lage et blad der lærere fikk ideer og inspirasjon, der de fikk lese om andres erfaringer og var inviterte til å skrive. Innholdet skulle være praksisnært, gi rom for kritiske stemmer og for læreres praksisdiskusjon. Mellin-Olsen var ansvarlig og skrivende redaktør. Han hadde ikke redaksjon å støtte seg til, men hadde støttespillere rundt om i landet. Folk ønsket bladet, de holdt kontakt, bidro med tekster og vervet abonnenter. Tangenten ble brukt som pensum i lærerutdanningene, og artikler om tema som for eksempel spesialpedagogikk ble samlet og publisert som små bøker.

Stieg Mellin-Olsen døde i 1995. Det ble et tomrom, og vi opplevde sorg og savn. Samtidig kjente vi på styrkene som han hadde skapt, gjennom Caspar og Tangenten. Folk i Norge og

Norden sluttet støttende opp om fortsettende prosjekter. Ole Einar Torkildsen tok over som Tangentens redaktør, og etter hvert vokste det frem en større redaksjon.

Matematikk fikk større plass i lærerutdanningen, stadig flere grunnskolelærere var interesserte i faget og så seg selv som matematikklærere. Abonnementstallet økte, og Tangenten ble viktig for flere også gjennom at LAMIS ble stiftet i 1997. Samarbeidet med LAMIS og med Matematikksenteret har ført til at de to organisasjonene har medlemssider i bladet. Tangenten er en suksess, vi har en solid redaksjon som ser muligheter, jakter på nye tekster og gir skrivehjelp. Engasjerte, dyktige redaktører har drevet arbeidet framover; Stieg Mellin-Olsen, Ole Einar Torkildsen, Christoph Kirfel, Toril Eskeland Rangnes, Rune Herheim og i dag sitter Bjørn Smestad ved roret.

Vi har forstått at Caspar i utgangspunktet ble drevet fram gjennom dugnadsarbeid, men at staben etter hvert ble utvidet og ledet mer profesjonelt. I dag samarbeider dere med Fagbokforlaget, er selvstendig søsterforlag og kjøper tjenester til daglig drift hos dem?

Ja, vi har foretatt omorganiseringer og flyttet Caspar Forlags administrasjon til Fagbokforlaget og drar nytte av deres profesjonelle kompetanse i forlagsdrift. Vi erfarer at omlegging er krevende, utfordrende og inspirerende.

Matematikkfaget må ses i sammenheng med samfunnets utvikling, og didaktiske perspektiver skal vise muligheter i et samfunn der lærerutdanning er masterutdanning, og skal være praksis- og forskningsbasert. Skole og barnehage utfordres i et multikulturelt, flerspråklig samfunn som preges av multimodale og digitale arbeidsformer, i et samfunn der unge mennesker engasjerer seg i demokratisk debatt. Det er Caspars oppgave å utvikle litteratur som er plassert i tiden, som utfordrer, påvirker og peker framover. Nye bøker skal utvikles, og vi vil fortsatt invitere til verksteder for nyutgivelser, der lærere og forskeres stemmer møtes.

Vi feirer 40 år. Det er tid for tilbakeblikk, og til å takke alle støttespillere for engasjement, arbeidsinnsats og lojalitet. Caspars logo har hele tiden vært den samme. Den fremstår som tidløs, er i fart og bevegelse framover. Caspar Forlag er til for fagmiljøet, nye og gamle forfattere ønskes med på laget!

Litteratur som er underlag for samtalen:

Botten, G. (2016). *Matematikk med mening – mening for alle*. Caspar Forlag.

Fosse, T. (Red.). (2019). *Rom for matematikk i barnehagen*. Caspar Forlag.

(fortsettes side 41)

Torkildsen

Flisemønster

I denne oppgaven skal du se på et flisemønster i et kvadrat der sidekanten er et oddetall. Se figurene 1–4.

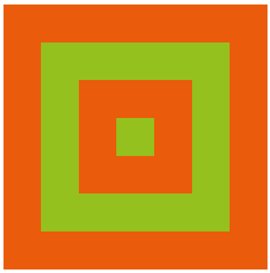
Flisa i midten er grønn, denne er omkranset av røde fliser som igjen er omkranset av grønne fliser, osv. Tabellen på neste side viser hvor mange fliser av hver farge som inngår i de første fire kvadratene.

1. Fyll ut tabellen for figurene 5, 6 og 7. Studer tallene i tabellen og se etter sammenhenger.
2. Hvor mange fliser er det i figur nr. 15?
3. Hvor mange av disse flisene er grønne?
4. Hvor mange er røde?


Figur 1


Figur 2


Figur 3


Figur 4

Ole Einar Torkildsen
Høgskulen i Volda
oet@hivolda.no

Figur nr.	Side	Antall fliser	Økning	Grønne	Økning	Røde	Økning
1	1	1		1		0	
2	3	9	8	1	0	8	8
3	5	25	16	17	16	8	0
4	7	49	24	17	0	24	24
5							
6							
7							

Tabellen inneholder tre kolonner som angir økningen av antall fliser fra en figur til den neste.

5. På grunnlag av de tallene du fant for figur nr. 15, finn tallene for antall fliser i figur nr. 16. Hvor mange av dem er grønne? Røde?
6. Samme spørsmål som over, men nå fra figur 20 til figur 21.
7. Forsøk å beskrive de sammenhengene du oppdager.

(fortsatt fra side 39)

Hana, G. M. (2013). *Matematiske byggesteiner*. Caspar Forlag.

Hana, G. M. (2014). *Matematiske tenkemåter*. Caspar Forlag.

Herheim, R., & Johnsen-Høines, M. (Red.). (2016). *Matematikksamtaler. Undervisning og læring – analytiske perspektiver*. Caspar Forlag.

Johnsen-Høines, M. (Red.). (1996). *De små teller også*. Caspar Forlag.

Johnsen-Høines, M. (2019). *Barn, matematikk og språk. Didaktiske perspektiv i barnehagen*. Caspar Forlag.

Johnsen-Høines, M. (2020). *Begynneropplæringen. Matematikkdidaktikk – barnetrinnet*. Caspar Forlag.

Johnsen-Høines, M., & Alrø, H. (Red.). (2012/2013). *Læringssamtalen i matematikkfagets praksis. Bok I og II*. Caspar Forlag.

Kirfel, C. (1994). *Eksperimentering med matematikk*. Caspar Forlag.

Lysø, K. O. (2014). *Sannsynlighetsregning og statistisk metodelære*. Caspar Forlag.

Lysø, K. O. (2020). *Dybdelæring i statistikk og sannsynlighet*. Caspar Forlag.

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet*. NKI-forlaget.

Mellin-Olsen, S. (1987). *The politics of mathematics education*. D. Reidel Publishing Company.

Mellin-Olsen, S. (1989). *Kunnskapsformidling. Virksomhetsteoretiske perspektiver*. Caspar Forlag.

Mellin-Olsen. S., & Johnsen-Høines, M. (Red.). (1986). *Mathematics and Culture, a seminar report*. Caspar Forlag.

Rinvold, R. (2004). *Visuelle perspektiv: Lineæralgebra*. Caspar Forlag.

Rinvold, R. (2009). *Visuelle perspektiv: Tallteori*. Caspar Forlag.

Rinvold, R. (2009). *Visuelle perspektiv: Avbildninger og symmetri*. Caspar Forlag.

Selvik, B. K. (Red.) (2007–2009). *Matematiske sammenhenger*. Bokserie. Caspar Forlag.

Solem, H. S., & Reikerås, E. K. L. (2017). *Det matematiske barnet*. Caspar Forlag.

Solvang, R., & Mellin-Olsen, S. (1978). *Matematikk fagdidaktikk*. NKI-forlaget.

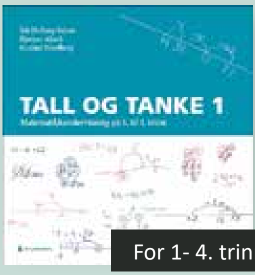
Tvete, K. (1990). *Tallære*. Caspar Forlag.

Tvete, K., & Petersen, V. B. (2014). *I tallenes verden*. Caspar Forlag.

Hvordan inspirere og utfordre elever i matematikk-faget?

Morgendagens lærere i matematikk trenger gode pedagogiske fagbøker. Tall og tanke-bøkene tilrette-legger for variert og utforskende matematikk-undervisning. Serien har en praktisk tilnærming til matematikkfaget med et rikt utvalg av eksempler og oppgaver som kan brukes i klasserommet.

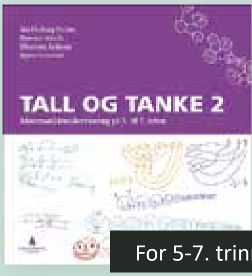
Bestselger!



For 1- 4. trinn

Tall og tanke 1

Bestselger!



For 5-7. trinn

Tall og tanke 2

„Tall og tanke 2 er et ypperlig læreverk som absolutt svarer til denne anmelderens meget høye forventninger. Uten forbehold vil jeg gi denne boka toppkarakter!"
Utdanningsnytt.no

Nyhet!

For 1-7. trinn

Tall og tanke aktivitetsbok

GYLDENDAL

Les mer og bestill gratis vurderingseksemplar her
www.gyldendal.no/matematikk

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

NYTT FRA MATEMATIKKSENTERET

Vi jobber med kompetanseutvikling, forskning, formidling og utvikling av læringsressurser og digitale verktøy, i tett samarbeid med praksisfeltet.

I dette nummeret skriver vi om:

- Kenguru: Ligningssett i kontekst
- Matematikkmaskin
- UH-seminar
- Nytt i AlleTeller!
- MAM i Nærøysund

Vi jobber tett med både praksisfeltet, lærerutdanningene, høgskoler og universitet. Vi har ca. 30 ansatte, hvor de fleste har bakgrunn som lærere fra grunnskolen, videregående skole, lærerutdanning eller som barnehagelærere. Vi forsker på matematikkdidaktikk, og utvikler arbeidsmetoder og læringsressurser.

Besøk våre nettsider:

Matematikksenteret.no
Fagstoff og læringsressurser

MatteLIST.no
Oppgaver og aktiviteter for utforskning og problemløsning

Matamatikk.org
Spill, oppgaver og fakta om matematikk

Alleteller.no
Vurderingsverktøy for talloppfatning og tallforståelse

Realfagsloyper.no
Kompetanseutvikling i realfagene

NTNU

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Ligningssett i kontekst

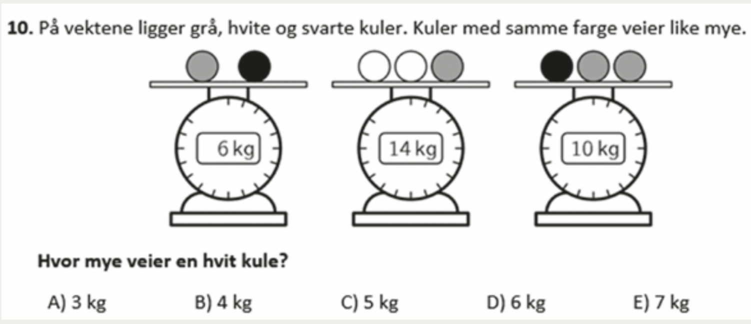
Anne-Gunn Svorkmo, universitetslektor ved Matematikksenteret NTNU

Det finnes likehetstrekk mellom noen av oppgavene i Kengurukonkurransen. I enkelte oppgaver brukes terninger på en eller annen måte, andre har tallkort eller pusselbrikker som et felles element. Oppgaver med skålvekter eller kjøkkenvekter, er likhetstrekket mellom de oppgavene jeg her vil se nærmere på. Hvis kjøkkenvekter er med, spørres det ofte etter verdien til ett av objektene. I skålvektoppgaver handler det om vekter i balanse, vekter som ikke er i balanse eller en blanding av de to. Bak et logisk resonnement som bygger på hvilke objekter som veier like mye, eller hvilke som veier mer eller mindre enn andre, ligger løsningen. Uansett, i denne type oppgaver er det én gylden regel; objekter med samme form eller samme farge, står for samme verdi.

Jeg ønsker å trekke fram noen problemløsningsstrategier jeg mener er spesielle for denne type oppgaver. Strategien «gjett og sjekk» er ikke blant disse, men jeg vil likevel nevne at strategien kan fungere godt på mange av de enkleste oppgavene. Elever som er ukjent med oppgavetypen, men som har brukt «gjett og sjekk» som framgangsmåte i andre sammenhenger, tar ofte denne strategien i bruk. Mange klarer på denne måten å komme fram til riktig løsning. «Prøve og feile» brukt på en systematisk måte, kan også være en effektiv strategi. Strategien er generell og kan brukes på mange typer problemløsningsoppgaver, men er ikke blant de jeg vil kalle spesiell for oppgavetypen jeg har valgt å se nærmere på.

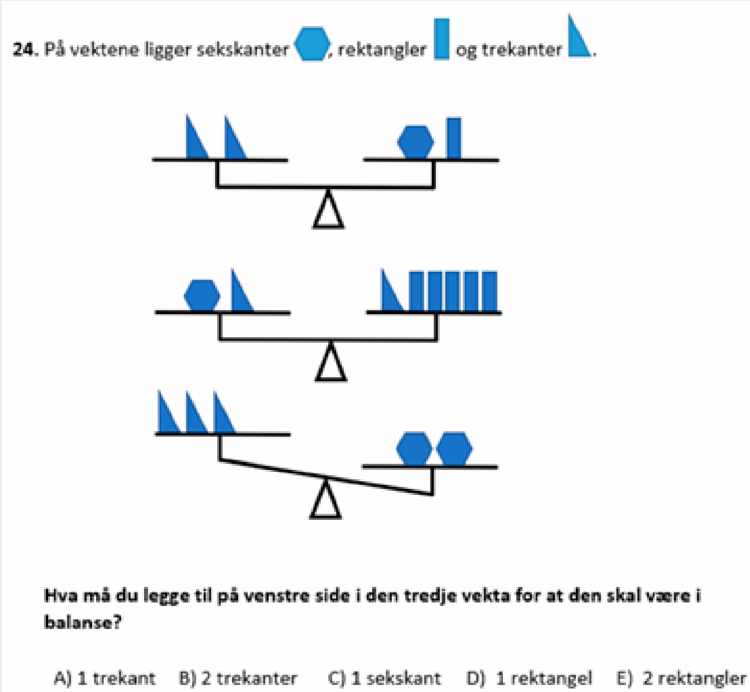
Oppgaver med vekter eller skålvekter er egentlig ligningssett satt inn i en kontekst. Jeg vil vise eksempel på hvordan en av vektoppgavene kan representeres i form av et ligningssett. I denne fagteksten konsentrerer jeg meg mer om problemløsningsstrategier, og min intensjon er at elever fra 4. trinn og oppover kan arbeide med ligningssett i kontekst, uten å vite noe om ligninger. Men når elevene kommer på ungdomstrinnet skal oppøve sin kompetanse i det å *kunne lage, løse og forklare ligningssett knyttet til praktiske situasjoner,* kan erfaringer fra oppgaver de tidligere har arbeidet med å gjøre det enklere å se sammenhengen, og hvordan det kan representeres med ligninger.

I oppgavene nedenfor ligger de fleste opplysningene som trengs for å komme fram til løsningen, i bildene. Elevene må studere bildene for å få tak i informasjon de kan resonnere videre ut ifra. Et innledende spørsmål som kan hjelpe dem med å vite hva de skal se etter i bildene, kan være: Hva er likt, og hva er forskjellig? Ved å undersøke bildene i oppgaven får elevene vite hva som veier det samme, hva som veier mer eller mindre enn noe annet. Deretter må elevene sortere opplysningene de har innhentet; noen kan være viktigere enn andre, mens noen av dem bygger på hverandre. Ofte er det i en opplysning nøkkelen til løsningen ligger, og det er her de spesielle problemløsningsstrategiene kan være nyttige å kjenne til.



Eksempel 1

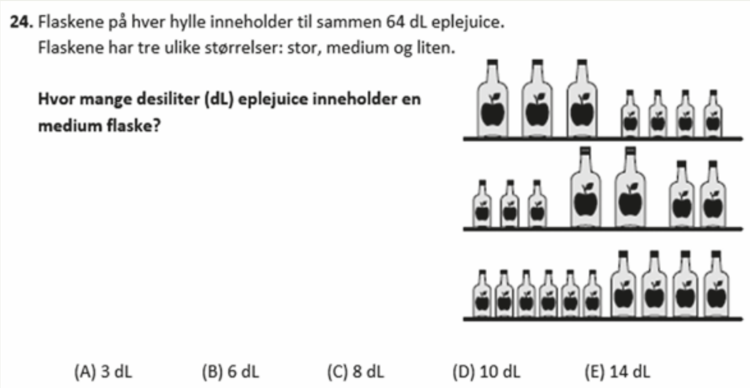
Hvis jeg i oppgaven ovenfor vet hvor mye ei grå kule veier, blir det enkelt å finne ut hvor mye ei hvit kule veier. Denne informasjonen får jeg ved å studere vekta i midten. Jeg må gå via ei grå kule for å finne vekta på ei hvit kule, og ei hvit kule er kun med på det midterste bildet. Den første og siste vekta har noe til felles, og det er at begge vektene inneholder grå og svarte kuler. Forskjellen mellom de to vektene er ei grå kule og differansen er 4 kg, og da må ei grå kule veie 4 kg. Denne informasjonen kan jeg da bruke for å finne ut hvor mye ei hvit kule som ligger på den midterste vekta veier. To hvite kuler veier til sammen 10 kg, altså 5 kg hver. Dette er en framgangsmåte blant flere, og det å finne forskjellen mellom to vekter, er en spesiell problemløsningsstrategi for slike oppgaver. Hvilke to vekter som kan gi nyttig informasjon ved sammenligning, må eleven finne ut av. Det er kun tre kombinasjonsmuligheter når det er tre vekter. Innledningsspørsmålet som jeg nevnte tidligere, hva er likt og hva er forskjellig, kan være til hjelp. Elever som har løst oppgaven i eksempel 1 (opprinnelig er beregnet for elever på 4. og 5. trinn), er kanskje ikke klar over at de har løst et ligningssett med tre ukjente. Oppgaven kan også representeres som et ligningssett med tre ukjente: $x + y = 6$, $2z + x = 14$ og $2x + y = 10$, og løses på samme måte som beskrevet ovenfor.



Eksempel 2

Likevektprinsippet og det å forstå hvorfor det er mulig å subtrahere eller addere samme tall på begge sider av likhetstegnet, blir ofte illustrert ved hjelp av ei skålvekt. De elevene som ikke kjenner til likevektprinsippet og hvordan det kan utnyttes i denne sammenhengen, vil ha problemer med å komme i gang med en slik oppgave. Det gjelder spesielt i oppgaver hvor denne strategien er den mest effektive og kanskje den eneste som kan lede mot en løsning.

Nøkkelen i oppgaven i eksempel 2, slik jeg ser det, ligger i akkurat det å finne objektet som kan fjernes på begge sider av ei av vektene. Jeg studerer de to øverste bildene hvor begge vektene er i balanse, og ser at på den midterste vekta, ligger en trekant både på høyre og venstre side av skålvekta. Likevekta opprettholdes selv om trekanten fjernes på begge sider. Da finner jeg ut at en sekskant veier det samme som fem rektangler. Denne informasjonen kan jeg bruke i den øverste vekta og kan resonnere meg fram til at to trekanter veier det samme som fem rektangler. Halverer jeg antall trekanter og antall rektangler, vet jeg at en trekant veier det samme som tre rektangler. I den nederste vekta hvor vekta ikke er i balanse, kan jeg se at tre trekanter veier mindre enn to sekskanter. Det er fordi tre trekanter veier like mye som ni rektangler mens to sekskanter veier det samme som ti rektangler.



Eksempel 3

Den nederste vekta vil være i balanse dersom jeg legger et rektangel på skåla til venstre.

Oppgaven i eksempel 2 ble plassert sist i oppgavesettet Ecolier i Kengurukonkurransen 2021, fordi den ble vurdert som utfordrende for elever på 4.–5. trinn. Av de elevene som i etterkant av Kengurukonkurransen registrerte sine resultater på våre nettsider, hadde 15 % av elevene på 4. trinn og 25 % av elevene på 5. trinn løst oppgaven riktig.

Ved første øyekast ligner oppgaven i eksempel 3 ikke på en skålvekt-oppgave. Den har en annen kontekst, men har noen matematiske likheter med de to andre oppgavene. Ettersom hver hylle inneholder like mye eplesaft, vil vi også her kunne bruke likevektprinsippet ut fra volum med eplesaft. Av de som har registrert resultatene, hadde 30 % av elevene på 8. trinn valgt riktig svaralternativ. Det er sjelden at så mange har svart riktig på den siste oppgaven i et oppgavesett. Jeg vil tro at flesteparten av elevene løste oppgaven ved hjelp av strategien «gjett og sjekk», og da er den kanskje ikke så vanskelig som vi trodde da oppgavesettet ble laget. Hvordan ville du ha gått fram for å løse oppgaven nedenfor? Hvilken strategi ville du brukt? Løs den gjerne selv før du leser videre.

En måte å løse oppgaven på er å halvere antall flasker på ei av hyllene, og det er bare ei hylle hvor det er mulig hvis ikke jeg skal operere med halve flasker. Dersom jeg tar halvparten av flaskene på den nederste hylla (det vil si tre små flasker og to medium flasker), vet jeg at de inneholder til sammen 32 dl eplesaft. Den samme gruppe flasker står på den midterste hylla, og forskjellen mellom innholdet på de to hyllene er to store flasker som til sammen inneholder 32 dl eplesaft. Når jeg vet at ei stor flaske inneholder 16 dl eplesaft, har jeg funnet opplysningen som vil lede meg mot løsningen av oppgaven.

En dobling av antall flasker vil fungere på samme måte som en halvering, men da er det den midterste hylla jeg må ta utgangspunkt i. Dersom jeg dobler innholdet på denne hylla, får jeg fire store flasker, fire medium og seks små flasker som til sammen vil inneholde 128 dl eplesaft. Forskjellen mellom flasker og mengde saft på den «doble» hylla og innholdet på den nederste hylla, er fire store flasker og til sammen 64 dl eplesaft. Ut fra denne opplysningen finner jeg hvor mye eplesaft det er i ei stor flaske.

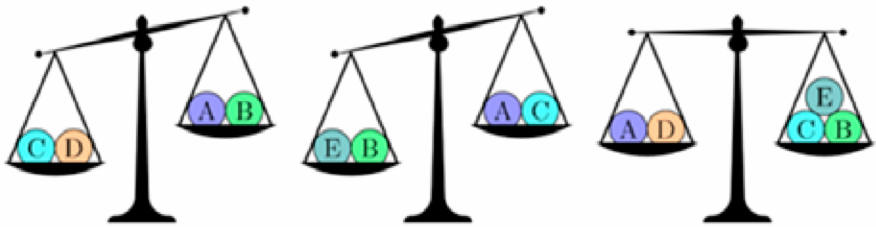
Jeg har vist eksempler på noen strategier jeg mener egner seg godt for problemløsningsoppgaver hvor ligningssett i kontekst er med på en eller annen måte. *Sammenligningsstrategien*, beskrevet i det første eksempelet, går ut på å utnytte at noe er nesten helt likt. Den lille forskjellen det her er snakk om gir viktig informasjon som kan brukes videre i oppgaven. Når elever på ungdomstrinnet skal løse ligningssett, kan det komme til nytte det å trekke ei ligning fra ei anna. Det er også framgangsmåten som bygger på likevektprinsippet hvor det samme objektet kan fjernes fra de to vektene i ei skålvekt. Sammenligner jeg med algebraiske regneuttrykk, gjør jeg det samme når jeg trekker fra like mye på begge sidene av likhetstegnet. *Halvering-dobling strategien* er kanskje den som er minst brukt av de tre blant oppgaver fra Kengururkonkurransen.

Oppgavene ovenfor kan godt løses som ligningssett med tre ukjente. Ved å gjøre oppgaver der dette foregår i en kontekst kan kanskje føre til at overgangen til en ren algebraisk løsning blir mer forståelig for elevene. Oppgavene oppfordrer til logisk tenkning og resonnering og er i så måte en undervisningsressurs for arbeid med matematisk resonnering. Senere, når elever skal arbeide med algebra, så kan slike oppgaver fungere som en brobygger mellom logiske strategier og mer formelle representasjoner. Når elever arbeider med ligningssett i kontekst, må de utforme egne resonnementer ut fra den informasjonen de finner ved å studere bildene i oppgaven. En presentasjon i plenum gjør at elevene må prøve å forstå andre elevers resonnementer for så å sammenligne de med sine egne. Dette er beskrevet i kjerneelementet resonnering og argumentasjon i LK 20; *resonnering handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker.* Videre bør elevene oppfordres til å argumentere for sine resonnement for å bevise at de er riktige.

Resonnementene knyttet til denne type oppgave, kan være både lange og komplekse. Resonnementskompetansen er noe elevene må utvikle over tid.

For å vise mangfoldet blant oppgaver i Kengurukonkurransen, tar jeg med enda en oppgave innenfor samme sjanger (se under). Flere og enklere oppgaver av denne typen finnes på Matematikksenteret.no/kenguru og Matematikk.org/julekalender.

Vi har fem kuler. De veier henholdsvis 30 g, 50 g, 50 g, 50 g og 80 g.



Hvilken kule veier 30 g?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

Matematikksenterets matematikkmaskin

Camilla Normann Justnes, universitetslektor ved Matematikksenteret NTNU

Matematikksenterets barnehageavdeling har i samarbeid med Espira-parken laget filmressurser med en «Matematikkmaskin». Filmene henvender seg til både barn, foreldre og ansatte i barnehage og småtrinn. Med alle filmene følger en veiledning med forslag til spørsmål som stimulerer til undring og utforskning.

Camilla Normann Justnes fra Matematikksenteret og Oda Bjerknes fra Espira-parken har laget filmene om «Matematikksenterets matematikkmaskin».

Film og veiledning med «Matematikksenterets matematikkmaskin» finner du her: https://www.mattelist.no/562

Matematikkmaskinen er ikke en ekte maskin, men er et hjemmelaget leketøy der en sammen med barna kan utforske de ulike reglene maskinen bruker. Barna putter noe inn i maskinen, maskinen bruker en regel, og det kommer ut et resultat. Er det en sammenheng mellom det som barna har puttet inn og det som kommer ut? Hvilken regel kan maskinen ha brukt?

På filmen anvender matematikkmaskinen en rekke ulike regler. Kanskje du kan se filmen og gjette hvilke? (Om du ikke ser filmen kan du lese beskrivelsene her og gjette.)

1. Maskinen får 1 kleshenger og leverer ut 2 kleshengere, maskinen får 2 kleshengere og leverer ut 3 kleshengere, maskinen får 3 kleshengere og leverer ut 4 og så videre. Hva tror du skjer videre? Hva gjør maskinen med det som den får inn?
2. Maskinen får 1 kleshenger og leverer ut 3 kleshengere, maskinen får 3 hengere og leverer ut 5 hengere og så videre. Hva tror du skjer videre? Hva gjør maskinen med det som den får inn?
3. Maskinen får 1 ball og leverer ut 2 baller, maskinen får 2 baller og leverer ut 4 baller, maskinen får 4 baller og leverer ut 8 baller.
4. Maskinen får en plankebit og leverer ut en plankebit som er dobbelt så lang, men har lik høyde og bredde. Hva tror du skjer videre? Hva gjør maskinen med det som den får inn?
5. Maskinen får en halv liter melk og leverer ut en liter melk osv.
6. Maskinen blir brukt i revers. Maskinen får en sjokolade i «ut-luken» og den leverer ut en mindre sjokolade gjennom «inn-luken». Hva tror du skjer videre? Hva gjør maskinen med det som den får inn?

Når barn i barnehagealder leker med en matematikkmaskin (eller en funksjonsmaskin), kan de undre seg sammen over hva maskinen gjør. Arbeidet med matematikkmaskinen kan være en kontekst for å stimulere undring og nysgjerrighet for matematikk. Men maskinen kan også være et utgangspunkt for lek, utforskning og problemløsing med skoleelever. Kanskje elevene kan bytte på å sitte i maskinen og lage regler for de andre elevene? Eldre elever kan bruke matematikkmaskin til å utforske funksjonsbegrepet, slik at arbeidet med funksjoner ikke bare handler om å tegne og tolke grafer, regne ut funksjonsverdier og fylle ut tabeller.

Vil du prøve en matematikkmaskin i din barnehage eller på din skole? Send oss gjerne dine erfaringer, barnas og elevenes forslag til regler maskinen kan bruke o.l. Kanskje blir det flere episoder med matematikkmaskinen?

En fin aktivitet for ungdomstrinnet er «Anne-Maris fantastiske maskin» på https://www.mattelist.no/86.

Andre ressurser om funksjonsmaskiner og funksjoner:
https://www.mattelist.no/86
https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/page/Funksjoner.pdf
https://www.geogebra.org/m/Fj4RrDSH)

UH-seminar om Matematikk i barnehagen

Matematikksenteret arrangerer et årlig seminar for de som underviser i matematikk i barnehagelærerutdanningen. UH-seminaret er en arena å møtes for å diskutere forskjellige tema knyttet til aktuell forskning, undervisning og nye nasjonale retningslinjer.

I 2022 arrangeres UH-seminaret i Trondheim **2. og 3. mars**. Vi gleder oss over å få besøk av Dr. Nora S. Newcombe fra Temple University. Dr. Newcombe er kjent for sin forskning på kognitiv og romlig utvikling for barn fra 2 måneders alder til 10 år. I tillegg til det eksterne bidraget, ber vi UH selv melde inn forskning og saker de ønsker å diskutere.

Sett av datoen – påmelding åpner snart på matematikksenteret.no

Nytt i AlleTeller!

AlleTeller! er et populært digitalt kartleggingsverktøy som brukes av mange kommuner og fylkeskommuner i Norge. Vi har nå gjort en del endringer som bedrer lærerens arbeidsflyt, og gjør det mulig å logge inn med Feide 2.0 (Nye Feide).

AlleTeller! består av tester for kartlegging av barns tallforståelse, og en håndbok med veiledningsmateriell som forklarer hvordan du som lærer kan hjelpe elevene bort fra eventuelle misoppfatninger som testene avslører. Kartleggingsprøvene er tilgjengelig i papirversjon og digitalt (www.alleteller.no).

I den digitale versjonen er det nå mulig å logge inn med Feide 2.0. I tillegg har vi gjort flere endringer som bedrer arbeidsflyten (valgene) i systemet. Det faglige innholdet i kartleggingstestene er det samme som det alltid har vært, der har vi ikke gjort endringer.

Dette er noen av endringene i den digitale versjonen:

MAM i Nærøysund: Matematikkløft med ambisjoner

Lærerne i Nærøysund skal i to år øve på å sette kjerneelementene ut i praksis, gjennom Matematikksenterets MAM-program. Halvveis ut i etterutdanningen ser de allerede en endring i undervisningen – i alle fag.

– På sikt skal alle kommunens lærere og rektorer involveres i MAM, en etterutdanning hvor målet er å utvikle undervisningspraksis og øke elevenes kunnskap, engasjement og motivasjon for matematikk, sier Kirsti Sandnes Fjær, kommunalsjef for oppvekst og familie i Nærøysund kommune.

Kommualsjef Kirsti Sandnes Fjær ønsker å implementere MAM i alle kommunens skoler.

Samarbeidet mellom Nærøysund kommune og Matematikksenteret startet opp i 2020, som en del av DEKOMP (desentralisert kompetanseutvikling). I arbeidet bruker Matematikksenteret kompetanseutviklingsprogrammet «Mestre ambisiøs matematikkundervisning» (MAM), som ivaretar kjerneelementene, og er spesialdesignet for å fremme lærernes læring. MAM kjennetegnes av læringsfellesskap, matematisk samtale og nærhet til det som skjer i klasserommet.

Austafjord er én av skolene i kommunen som får jevnlig veiledning av Matematikksenteret. Rektor Hallvar Rørdal deltar aktivt på alle samlingene, på lik linje med sine lærere.

Rektor Hallvar Rørdal ved Austafjord skole deltar på alle MAM-samlingene sammen med sine lærere.

– Det som skaper varige endringer hos lærere, er at ledere deltar i slike prosesser. Forskningen er tydelig på det. Når jeg deltar, får jeg bli med på faglige diskusjoner og får et innblikk i hvordan lærerne ser på elevenes læring, forklarer Rørdal.

Hans erfaring er at MAM er ulikt mange andre utviklingsprosesser, og at de har mye å vinne på å overføre den grunnleggende tenkinga i programmet til den dagelige driften.

Dette er MAM-programmet

MAM-programmet er designet for å fremme lærernes læring. Prinsipper og praksiser i ambisiøs matematikkundervisning ivaretar kjerneelementene, og kan bidra til dybdelæring. Programmet er forskningsbasert, og knytter teori og praksis tett sammen.

I dag er Matematikksenteret involvert MAM-prosjekter i Nærøysund, Oslo, Asker, Trondheim, Alta og Leka.

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

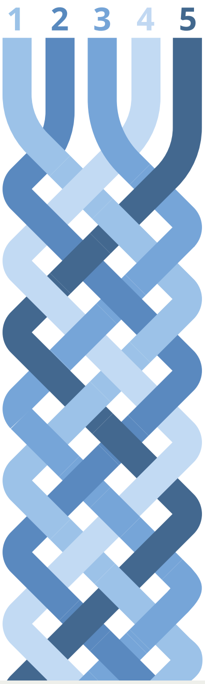
MENINGSFULL MATEMATIKK FOR ALLE

– et samspill mellom praksis, forskning og utvikling

Matematikksenteret skal bidra til at matematikkopplæringen tar utgangspunkt i barn og unges tenkning og bygger på deres interesser, bakgrunn, erfaringer og kunnskap.

Vi ønsker at barn og unge skal arbeide med kognitivt krevende aktiviteter som fremmer resonnering og forståelse, mye samarbeid og høy elevaktivitet. Feil anses som en naturlig del av læringsprosessen. På den måten kan barn og unge erfare at matematikk er engasjerende, utfordrende og meningsfullt.

Målet er at barn og unge skal utvikle en matematisk kompetanse som består av fem komponenter («Trådmodellen»):



Kilder: Trådmodellen. Kilpatrick, Swafford og Findell (2001)

Begrepsmessig forståelse
Bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom matematiske begreper og ideer.

Beregning
Utføre prosedyrer effektivt, nøyaktig og fleksibelt.

Anvendelse
Kunne gjenkjenne og formulere matematiske problemstillinger og utvikle strategier for å løse problemene.

Resonnering
Forklare og begrunne løsningsstrategiene du har brukt for å løse problemet.

Engasjement
Se på matematikk som nyttig og verdifullt, som noe du kan gjøre – dersom du arbeider med det – og er villig til å gjøre arbeidet.

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

NTNU

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
c/o Elin Unstad
Postboks 181
1371 Asker

post@lamis.no • www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det er en demokratisk rett å få en matematikkundervisning som setter en i stand til å delta aktivt som borger i et demokrati. Derfor vil Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) sette fokus på matematikk for alle.

Styret for LAMIS

Leder
Renate Jensen, Vestland

Barnetrinnet
Henrik Kirkegaard, Møre og Romsdal

Mellomtrinnet
Inger-Lise Risøy, Viken
Svend Eidsten, Viken

Ungdomstrinnet
Kari-Anne Bjørnø Rummelhoff, Viken

Videregående skole
Odd-Bjørn Lunde, Rogaland

Høgskole/universitet
Marianne Maugesten, Viken

Varamedlem (Barnetrinnet)
Hilde Svendsen

Medlemskontingent 2021

450 kr for enkeltmedlem
200 kr for husstandsmedlemmer
300 kr for studenter/pensjonister
975 kr for skoler/institusjoner

Organisasjonssekretær

Elin Unstad, org.sek@lamis.no

Lederen har ordet

Renate Jensen

Kjære LAMIS-kollega!

Dette er den første lederen i Tangenten på lenge der jeg kan skrive om planer som vi etter all sannsynlighet kan gjennomføre slik vi ønsker. Det betyr mye for kommende års UngeAbel, sommerkonferansen og muligheten for fagdager. Det vi har erfart de to siste årene, og som vi skal ha med oss i det videre arbeidet, er at digitale lokallagskvelder og digitale møter også fungerer veldig bra og når ut til mange. Vi i sentralstyret sier derfor ja takk til begge deler fremover.

Jeg lager alltid noen stikkord for meg selv for hvert nummer av Tangenten. Hva er viktig å skrive om i lederen her på LAMIS-sidene denne gangen? Det handler om å løfte frem aktiviteter vi holder på med og informere om viktige arrangementer og faglig arbeid. Til dette nummeret av Tangenten har jeg notert

– info fra lokallagssamlingen og årsmøtet i september
– ny nettløsning og start for UngeAbel konkurransen for elever på 9. trinn
– ny eksamensform i matematikk og tilbud om digital kveld med Matematikksenteret

Den første fysiske samlingen på veldig lenge var lokallagssamlingen med årsmøte i september. Les om det faglige programmet og om innspill og planer for lokallagsarbeid fremover på side 55. Vi i sentralstyret er glade for at det på årsmøtet ble vedtatt at det sentralstyret vi har hatt det siste året vil fortsette å jobbe sammen. Tusen takk for tilliten. Vi ser frem til å ta fatt på alle de spennende utfordringene.

Nå nærmer det seg første runde i UngeAbel for elever på 9. trinn. Det siste året har vi i samarbeid med RAVN utviklet en ny nettløsning for konkurransen, og jeg håper denne vil gjøre det oversiktlig og enkelt å melde på elevgrupper, hente ut oppgaver og levere elevene sine løsningsforslag. Oppgavene i UngeAbel inviterer til dialog, kreativitet og utforsking. Vi håper at mange elever over hele landet kommer til å jobbe med den innledende runden i november. En fantastisk nyhet er også at elevene som vant den norske finalen i UngeAbel våren 2021, og som deltok i nordisk finale nå i september, ble vinnere av konkurransen. Vi gratulerer så mye og på side 58 kan dere lese om elevene sin opplevelse av dagene i Stockholm.

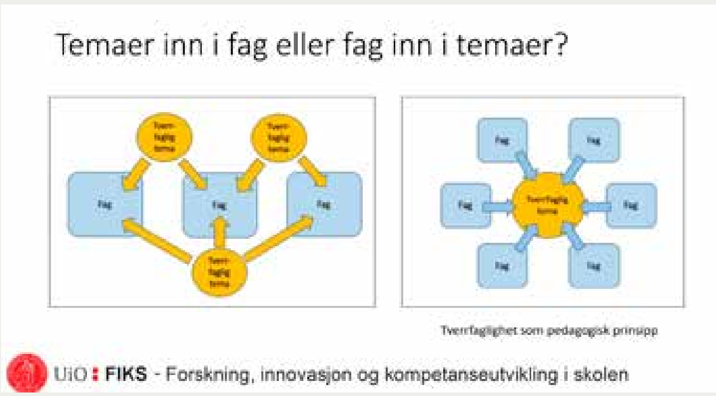
Så litt om ny eksamensordning som har fått mye oppmerksomhet i fagmiljøene - og i pressen. Det er nå bestemt at samtlige eksamener i matematikk, også i praktisk matematikk, skal gjennomføres som todelt eksamen frem til våren 2023. Det er publisert eksempelsett på Udir sine sider, og etter hvert vil det også komme løsningsforslag. Både lærere på ungdomsskolen og i videregående skole er tydelige på at de trenger informasjon og vurderingskriterier til de nye oppgavetypene som nå kommer på eksamen. LAMIS har derfor i samarbeid med Matematikksenteret planlagt for en digital økt den 9. november der vi får informasjon og mulighet til å drøfte elevbesvarelser fra utprøvingen. Vi legger ut informasjon på hjemmeside, fb-gruppe og invitasjon til lokallagene.

På sidene våre i denne utgaven av Tangenten kan dere også lese om digital kveld i regi av Bergen lokallag og dere får som vanlig en ny oppgave fra UngeAbel og en god ide til undervisningen fra vår Oppgavebank. Jeg håper at dette er nyttig lesing.

Kort fra lokallagssamling og årsmøte 2021

I september klarte vi endelig å få til en fysisk lokallagssamling med årsmøte på Hurdalssjøen hotell. Det ble en helg med flotte faglige innlegg, gode diskusjoner, god mat, fine omgivelser og etterlengtet prat og latter.

Vi startet lokallagssamlingen med en økt der Øystein Gilje snakket om *Tverrfaglig vurdering i digitale klasserom – et multimodalt perspektiv på hvordan elever viser kompetanse i matematikk.* Temaet var valgt fordi vi holder på med å oversette en ressurs om FN sine bærekraftsmål, og skulle jobbe med dette på samlingen. Vi fikk mange stopp underveis der vi blant annet fikk snakke om hvordan arbeide tverrfaglig og hvordan identifisere matematikken i arbeidet.



Det andre faglige innlegget var det FN-sambandet som sto for. Anne Cathrine Uteng da Silva forklarte om arbeidet de driver, og hvor viktig det er å få elever involvert og interessert i arbeid med de tre tverrfaglige temaene i LK20. Hun snakket om hvilke utfordringer vi har i verden i dag. Hun brukte også bildet over, som viser situasjonen her i Norge.

Resten av lørdagen arbeidet vi i grupper med innspill på ressursen om bærekraftsmålene. Vi var så heldige at vi hadde med Marianne fra Danmark som setter det lokallagene jobber med i InDesign. Hun gav oss gode råd for det videre arbeidet. Om ikke lenge blir de første eksemplene publisert på LAMIS sin hjemmeside (illustrasjon neste side).

Vi hadde også en økt om lokallagsarbeid. Sammen laget vi en liste over det sentralstyret bør ta tak i fremover og det de enkelte lokallag ønsker å satse på.

Vi i sentralstyret vil blant annet prioritere arbeid med å:

- opprette en Teams-kanal slik at vi enklere kan dele informasjon med lokallagene
- planlegge for en digital kveld om ny eksamensordning i november
- sende ut referat til lokallagene etter sentralstyremøter
- lage en ordning der vi har både lokallag og lokallagspersoner, slik at vi får kontakter over hele landet – og lage nettverk med lokallagsledere
- bruke sponsede innlegg på Facebook for å øke påmelding til for eksempel UngeAbel

Søndag ble det gjennomført årsmøte med et faglig innlegg av Ludvig Vea som er årets vinner av Holmboeprisen. Han fikk prisen for sin evne til å gjøre matematikkundervisningen meningsfull og relevant. Han gav mange eksempler på hvordan han arbeider praktisk med eleven på yrkesfag. Dette var et nyttig innlegg for alle uansett hvilket trinn i skolen vi jobber på. Det handler om elevmedvirkning, motivasjon og mestring. Innlegget hans finner dere på lamis.no.

Kondisjon

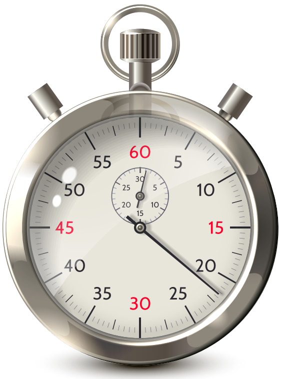
BÆREKRAFTSMÅL 3,
Delmål 3.4

Klassens kondisjonstall

Klassens kondisjonstall undersøkes ved hjelp av Harvard trappetest og Coopers løpetest.

Målet er at dere kan:

- Utforske og bruke formålstjenlige sentralmål i sine egne og andre sine statistiske undersøkelser.
- Logge, sortere, presentere og lese data i tabeller og diagram og grunngi valget av framstilling.
- Samle inn og presentere data i et regneark og lage ulike diagrammer



Fotos: Finn Egede Rasmussen

FN arbeider for at alle barn og voksne i verden skal ha god helse og livskvalitet.

På hjemmesiden:
FNs bærekraftsmål
kan dere lese om FN sine 17 bærekraftsmål. I bærekraftsmål 3, god helse og livskvalitet, står det beskrevet hvordan man arbeider med å utrydde sykdom og skape bedre livskvalitet.

Vi skal nå undersøke hvordan det står til med kondisjonen i klassen og finne deres eget kondisjonstall.

Dere trenger:

Dere kan velge mellom å bruke Harvards trappetest eller Coopers løpetest eller finne opp deres egen test.

Dere skal utforske

Kondisjonstallet for hver elev i klassen.

Beregne klassens samlede kondisjonstall.

Bruke sentrale mål (gjennomsnitt, median og typetall) for å beskriv klassens samlede kondisjonstall.

Er det forskjell på gutter og jenter sitt kondisjonstall?

Er det forskjell på klassens og parallellklassens kondisjonstall?

Hvordan kan du forbedre ditt kondisjonstall?

Flere ideer

Sett inn dataene til klassen i et regneark.

Lag forskjellige diagrammer, som viser klassens kondisjonstall (for eksempel søylediagram, sektordiagram og punktdiagram).

Lag overskrifter til diagrammene.

Skrive en liten artikkel som beskriver dine og klassens resultater.

Matematikk – nå går vi i dypden!

Sommerkonferansekomiteen og sentralstyret

Sommerkonferansen 2020 skulle vært arrangert i Sandefjord, men ble utsatt. Det er derfor utrolig kjekt at vi nå er i gang med planlegging igjen, og kan ønske velkommen til Sandefjord sommeren 2022.

Hold av datoene **5.–7. august 2022**. Konferansen vil bli holdt på Sandefjord Park Hotell.

Det er en spennende tid for fag og læring. Når vi samles i Sandefjord sommeren 2022 er arbeidet med innføring av LK20 fremdeles svært aktuelt. Et viktig mål for læreplanene er å styrke utviklingen av elevenes dybdelæring og forståelse. Verdigrunnlaget skal løftes fram, og det skal være bedre sammenheng i fag og mellom fag.

Det ligger derfor til rette for mange spennende plenumsforedrag og verksteder. Lokallaget i Vestfold jobber sammen med sentralstyret både med det faglige og sosiale programmet. Vi er glade for at både Mona Røsseland og Hanan Abdelrahman har sagt ja til å ha et plenum på konferansen. Vi vil også ha en økt hvor sentralstyret og lokallag vil presentere arbeidet med en tverrfaglig ressurs om FN sine bærekraftsmål. En annen post på programmet som er klar er en presentasjon av realfagskonkurransene Abelkonkurransen, UngeAbel, Kengurukonkurransen og Pangealekene – der deltakerne får teste ut oppgaver.

LAMIS startet i 2019 en ny tradisjon med å invitere studenter til sommerkonferansen. I Drammen fikk noen flotte studenter muligheten til å snakke med lærere og andre som interesserer seg for matematikkfaget. Vi ønsker også til konferansen i Sandefjord å invitere 10 studenter til å søke om å få reise og konferanse dekket. Mer informasjon vil komme på våre hjemmesider etter hvert.

Vil du holde verksted på sommerkonferansen i 2022 i Sandefjord?

Vi vil gjerne invitere personer som har gode ideer til å holde et verksted på sommerkonferansen. Temaet for årets konferanse er Fagfornyelsen, og vi har bestemt at tittelen skal være «Matematikk – Nå går vi i dybden». Tidsrammen for verkstedet bør være ca. 80 minutter, og vi har som mål at de fleste verkstedene skal ha praktiske aktiviteter innbakt. Det er mulig å ha noen verksteder i parken i tilknytning til hotellet. Her håper vi noen av dere som har erfaringer og ideer om uteskolematematikk, melder dere.

Som verkstedsholder får du:

- Dekket reise og opphold
- Mulighet til å dele gode ideer med andre

Dersom du er interessert, sender du en mail til adressa nedenfor med kort beskrivelse av verkstedet, tidsramme og trinn innen 28. januar 2022. Vi gir tilbakemelding senest 15. mars om ditt verksted skal holdes.

Vi håper å høre fra deg!

Reisebrev fra Nordisk finale UngeAbel

Det norske finalelaget fra Birralee International School

Det å få reise til den nordiske finalen var en flott opplevelse for alle i klassen vår; vi dro for å møte nye mennesker, spise mye deilig mat, sosialisere oss og viktigst av alt, gjøre mye matematikk!

Den første dagen spiste vi middag sammen med alle de andre deltakerne, og hadde en intervjuaktivitet der vi stilte hverandre spørsmål for å bli kjent. Spørsmålene handlet hovedsakelig om ting vi klarte å gjøre. En av utfordringene var å plystre en sang, som vår arrangør Svein fremførte. Vi var også på restaurant og fikk servert deilig mat.

Den andre dagen dro vi til Tekniska Museet og besøkte utstillingen Moving to Mars. Det

var mye flott historie og lærerik informasjon. På museet, helt uten tilknytning til utstillingen, var det et arkaderom med forskjellige vanskelige, men underholdende spill.

Vi gjennomførte også et Escaperom senere på kvelden, der vår lærer Mr. Santos også var med. Det var veldig gøy, spesielt siden det var første gang vi var med på dette, og vi klarte å fullføre innenfor tidsbegrensningene som ble satt.

På morgenen den neste dagen, før vi gjorde noen av de mer morsomme aktivitetene, satte vi opp utstillingen vår og presenterte våre funn. Vi var ganske nervøse før vi skulle presentere, men det gikk ganske bra.

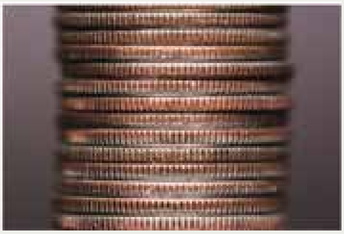
Den siste dagen var mest spennende. Vi våknet tidlig og måtte rydde og pakke sekkene slik at vi kunne sjekke ut av vandrerhjemmet. Vi tok bussen til konkurransen og fikk fem problemer å løse på tid. Etter en spennende økt slo vi Sverige med 1 poeng i en veldig tett kamp, og vant konkurransen for Norge!

Løsningsforslag til forrige oppgave fra UngeAbel

Marianne Maugesten, sentralstyremedlem og leder av UngeAbel-juryen

Bunker av euromynt

Vi kan legge merke til at tre bunker med fem mynter i hver inneholder like mange mynter som fem bunker med tre mynter i hver. ($3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$). Det gjør at vi kan arbeide oss «nedover» fra eksempelet i oppgaven (eventuelt oppover, om det var mulig), i sprang på tre femmere ned og fem treere opp. Det gir fire muligheter i tillegg til eksempelet i oppgaven:



- 11 bunker med fem mynter i hver, og sju bunker med tre mynter i hver. ($11 \cdot 5 + 7 \cdot 3 = 76$).
- Åtte bunker med fem mynter i hver, og 12 bunker med tre mynter i hver. ($8 \cdot 5 + 12 \cdot 3 = 76$).
- Fem bunker med fem mynter i hver, og 17 bunker med tre mynter i hver. ($5 \cdot 5 + 17 \cdot 3 = 76$)
- To bunker med fem mynter i hver, og 22 bunker med tre mynter i hver. ($2 \cdot 5 + 22 \cdot 3 = 76$)

Ny oppgave fra UngeAbel

Gateløpet

Anders, Beate og Christine startet samtidig i et gateløp. Anders (A) løp første halvdel av strekningen med en fart på 16 km/t og siste halvdel med en fart på 8 km/t. Beate (B) løp halvparten av tiden med en fart på 16 km/t og resten av tiden med en fart på 8 km/t. Christine (C) løp med konstant hastighet på 12 km/t. I hvilken rekkefølge kom de i mål?

I tillegg anbefaler vi at du som lærer tenker gjennom hvilke kjernelementer elevene bruker i denne oppgaven.

Digital kveld om problemløsing
Lokallaget i Bergen

De siste årene har lært oss i LAMIS Bergen at digitale lokallagskvelder er mulig – og vi har erfart at vi får mange deltakere. Vi ble derfor veldig glade når vi fikk en henvendelse fra Hanan Abdelrahman hvor hun tilbød seg å lage en kveld om problemløsingsoppgaver og strategier.

Responsen var bedre enn vi hadde våget å håpe på – over hundre meldte seg på – fra Tana i nord til Libanon i sør.

Hanan startet kvelden med å gi en oversikt over gode problemløsingsstrategier/metoder som elevene må bli introdusert for og få muligheten til å arbeide strukturert med. Utforsking og problemløsing er et av kjerneelementene i matematikk, og alle elever skal få muligheten til å arbeide med oppgaver som har flere løsningsforslag eller som kan løses på ulike måter. Underveis fikk hun innspill fra deltakerne med tanker om det å arbeide med problemløsing og gi elevene en rekke verktøy som de øver systematisk på:

- Hvis elevene får noen redskaper som de blir fortrolige med, kan de videreutvikle dem selv.
- Vi må få mer fokus på prosessen.
- Elevene må få tips i starten – ikke løsningsmetoden.
- God og lærerik utforsking krever systematikk.
- Vi må heie på gode feilsvar.
- Elevene må lære å bruke verktøyene på en grunnleggende måte før de er klare for å bruke dem i mer komplekse sammenhenger.

Deretter gav hun oss en åpen oppgave og delte i digitale grupperom.

Hvor mange trær er det i skogen? Det ble gode diskusjoner i gruppene, og mange ulike tilnærminger og forslag til løsninger. Det er jo akkurat dette vi ønsker med elevene våre også – få de til å sette ord på sine ideer og diskutere sammen.

Økten ble avsluttet med noen flere oppgaver fra eksempelsettet til eksamen våren 2022 og fra nasjonal prøve i regning 5. trinn. Vi snakket om hvilke problemløsningsstrategier elevene ville bruke i de ulike oppgavene. Hanan gav oss også en utfordring om å allerede dagen etter gi elevene en problemløsingsoppgave. Det kom mange flotte tilbakemeldinger i chat om at denne kvelden hadde vært veldig nyttig.

Takk til Hanan for en strålende kveld!

HOLMBOEPRISEN

Prisen gis til en lærer eller en gruppe lærere i grunnskole eller videregående skole som har utmerket seg i sitt arbeid med matematikkfaget. Prisen, som er på 100 000 kr, er finansiert av Abelstyret ved det Norske Videnskaps-Akademi, og skal deles likt mellom prisvinneren og skolen som han eller hun kommer fra.

Alle kan nominere kandidater til Holmboeprisen.
Åpning for nominasjoner: 15. oktober 2021

Slik nominerer du:

- GÅ INN PÅ HOLMBOEPRISEN.NO
- KLIKK PÅ "NOMINASJONSSKJEMA"
- FØLG INSTRUKSJONENE FOR UTFYLLING
- SEND SKJEMA innen **15. desember 2021**

NOMINASJON FOR 2022
NORSK MATEMATIKKRÅD

NORSK MATEMATIKKRÅD
V/ ANTONELLA ZANNA
Matematisk institutt, UiB
Postboks 7803
5020 Bergen

eller epost
Antonella.Zanna@uib.no

Tverrfaglige mønsterelever og lærere

Henrik Kirkegaard, sentralstyremedlem og medlem av LAMIS Sunnmøre

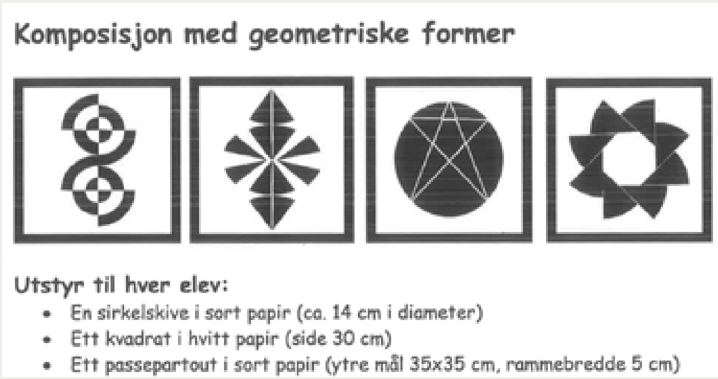
Mange lærere sitter for tiden og grubler over tverrfaglige tema som også inkluderer matematikkundervisningen. Ikke gjør det så vanskelig, start med et tema som elevene liker, som har lav inngangsterskel og som kan utvides i det uendelige.

Hva med å velge MØNSTER? Elevene får brukt sin kreativitet og sine visuelle ferdigheter. Det trenger de.

Jeg tenker at norsk, matematikk, kunst og håndverk, samfunnsfag og KRLE har mange eksempler på bruk av mønstre.


7. Kan du finne noen symmetrilinjer i mønsteret? Tegn de inn på mønsteret ditt.
8. Ser du noen figurer som er rotert?
9. Hvor mye har de rotert? Skriv forklaring.
10. Studer mønsteret ditt på nytt. Velg farger slik at mønsteret blir symmetrisk.
11. Hent et nytt ark hos læreren din. Fargelegg så fint du kan.

Eksempel på hva man finner i oppgavebanken.


Komposisjon med geometriske former

Utstyr til hver elev:

- En sirkelskive i sort papir (ca. 14 cm i diameter)
- Ett kvadrat i hvitt papir (side 30 cm)
- Ett passepartout i sort papir (ytre mål 35x35 cm, rammebredde 5 cm)

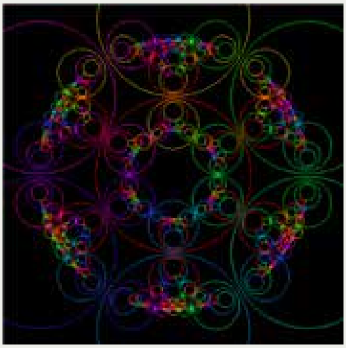
Eksempel på hva man finner i oppgavebanken.

Vi har siden tidenes morgen tegnet mønstre. Det er ikke vanskelig å finne geometriske mønstre i kirker, synagoger og moskeer. Gå på mønsterjakt med elevene dine. De kan ta bilder av mønstre med et nettbrett. Deretter kan de lage en bok, for eksempel i book-creator der de definerer og finner likhetstrekk i de ulike mønstrene.

Når du er i klasserommet er det rike muligheter til å utforske mønster uansett hvilket klassetrinn du jobber på. Et sted å starte er å gå inn på lamis.no – Oppgavebanken og søke på «Plakatdesign», «Komposisjon med geometriske former», «Vi forsker på Mandalamønster», «Tessellering» (jo, det skrives tesselering; men du må søke på tessellering ...) og «Escher i klasserommet». Det er bare å skrive ut og gå i gang. Aktivitetene er for alle klassetrinn.

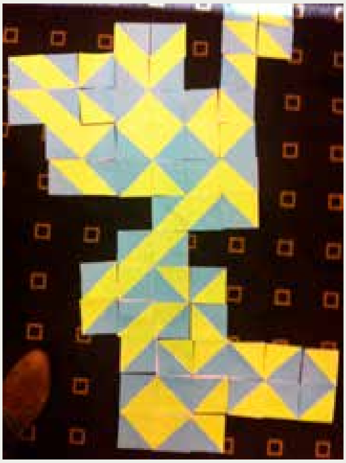
På skolen din finnes det garantert også nedstøvete bøker med mønsterark eller bokser med mønsterbrikker. Ta de med i elevgruppen og prøv ut. La elevene få tid til å bruke sin kreativitet uten at du på forhånd har fortalt dem hva de skal gjøre. Etter hvert tar du en samtale i elevgruppen om de ulike arbeidene, og begynner å stille spørsmålene om geometrien i mønstrene som du vil at elevene jobber med. Er mønsteret symmetrisk? Kan det speiles eller roteres? Forekommer det bare trekanter? Kan mønsteret deles i mindre deler?

Mønstre kan brukes til så mangt. De fleste tenker på konstruksjon av mønstre i 2D. Det går fint an å ha mønstre i 3D. Hva med å lage esker og dekorere dem med mønstre? Og hva



med draker? Du vet sånne man drar etter seg i snor, som forhåpentligvis flyr når det blåser. De er glimrende å lage mønster på. Draker finnes både i 2D og i 3D (sjekk Oppgavebanken).

Tesselering er også interessant. Hvis du ikke har sett tegninger av den nederlandske kunstneren Escher, bør du straks legge et bokmerke på denne siden i Tangenten og søke på nettet. Tesselering er også noe alle får til. Lav inngangsterskel og veldig stor takhøyde. Start med enkle tesseleringer og bygg det ut etter hvert. Det er et glimrende samarbeidsprosjekt. La alle elevene lage samme tesselering og sett det sammen til et flott kunstverk. Søk i Oppgavebanken! På Matematikk.org kan du også søke på tesselering og få gode ideer.



Jeg er ganske sikker på at jeg kunne bruke et helt skoleår på «mønstre» og likevel ikke bli ferdig. Det er helt utrolig så mange kreative oppdagelser og faglige emner du kommer innom, når du jobber med MØNSTER.

Riktig god fornøyelse!