TANGENTEN

TIDSSKRIFT FOR MATEMATIKK I GRUNNSKOLEN

NR. 1 1994 5. ÅRGANG

$$121 = \frac{22 \cdot 22}{1+2+1}$$
$$1331 = \frac{22 \cdot 22 \cdot 22}{1+3+3+1}$$
$$14641 = \frac{22 \cdot 22 \cdot 22 \cdot 22}{1+4+6+4+1}$$

Av innholdet:

KIM- kvalitet i matematikkundervisning, Hvordan forstår elevene desimaltall?, Prosess og produkt, Frå klasserommet: Fram for tal og teljing, Moro med matematikk: Kaprekars konstant, Tallkuriositeter, *System,* Eksperimenter med periferivinkler, Matematikk og desentralisert lærerutdanning, Hovedfag i matematikk didaktikk

RETURADRESSE:
CASPAR-TANGENTEN
Boks 2966 - 5030 LANDÅS

BLAD I POSTAB.

Innhold

Gard Brekke
KIM-Kvalitet i matematikkundervisning s. 4

Trygve Breiteig
Hvordan forstår elevene desimaltall? s. 9

Svein H. Torkildsen
Prosess og produkt s. 17

Magne Holmin
Frå klasserommet: Fram for tal og teljing s. 24

Svein Olai Høyland
Moro med matematikk: Kaprekars konstant s. 29

Ole Einar Torkildsen og Christoph Kirfel
Flere tallkuriositeter s. 33

Thorkild Thorkildsen
System *s. 35*

Christoph Kirfel
Eksperimenter med periferivinkler s. 37

Jon Henjum
Matematikk og desentralisert lærarutdanning s. 41

Nyheter s. 45

MASTER TRYKK OG KOPI A.S

TANGENTEN
TIDSSKRIFT FOR MATEMATIKK I GRUNNSKOLEN

Tidsskrift for matematikkundervisning
Utgitt av Caspar forlag og kursvirksomhet

Redaksjonsgruppe: Chr. Kirfel, Aasmund Kvamme, Ole Einar Torkildsen

Ansvarlig redaktør:
Stieg Mellin-Olsen
Abonnenter: Inger-Margrethe Revheim
Logo: Jørn Arnold Jensen

ADRESSE TIL REDAKSJON, ABONNEMENT OG DISTRIBUSJON:
Caspar, boks 2966,
5030 Landås
Tlf. 55 28 92 60, fax 55 28 89 98

Abonnentspriser:

Ordinært 150 kr
Studenter 100 kr
Klassesett 90 kr pr sett
(min 15 studenter)

Utgivelsesdatoer:
1.2, 1.4, 1.9 og 11.11
ISSN 0802-8192

Har du fornyet abonnentet? Gruppe 1 som skal ha nr. 1,2,3 og 4 får tilsendt dette nummeret, selv om de ikke har betalt. Så stopper vi eventuelt bladet.

Er det mulig?

Redaktøren får et brev fra en lærerstudent. Matematikkpedagogene skriver fint og vakkert om hvordan en kan fornye matematikkundervisningen. Så kommer studenten ut, enten i praksis eller som fersking i skolen. Her blir hun overtatt av øvingslærere eller kollegaer. Det er mye snakk om prøver, eksamener, pensum og ikke minst, en kan ikke fornye undervisningen i alle fag. Så får heller matematikkfaget vente.
Hvordan er det mulig, spør lærerstudenten, å forandre på matematikkundervisningen når så mye er så fastlåst som det er ute i skolen?
Svaret vi kan gi er banalt, og er helt sikkert ikke det som forventes. Ingen ting er mulig før noen prøver. Først når en prøver seg frem får en virkelig beskjed om det er så vanskelig å endre og utvikle som en frykter. Det går an å prøve iallfall, vil vi si. Og noen av oss bærer fortsatt i oss litt av dikterens visjon, om at - i denne verden er ikke noe umulig.
TANGENTEN kan hjelpe til på sin måte. I dette nummeret rapporterer lærere fra klasserommet. Noen viser vei, og vi er glade for at vi kan bringe erfaringene deres til torgs. Vi kommer tilbake med mer i seinere numre. Vi oppfordrer også leserne til å sende oss tekster om erfaringer fra klasserommet eller med enkeltelever. Det behøver ikke være store artikler - enkeltobservasjoner av elever holder lenge.
Ellers dreier mye seg om desimaltall denne gangen. To av våre fremste matematikkpedagoger, Gard Brekke og Trygve Breiteig, spiller på TANGENTENs bane, og forteller om et stort nasjonalt diagnostiseringsprosjekt, og om diagnostisering i praksis. De to gjør her nettopp det matematikkpedagoger skal gjøre, vise vei på en tydelig og konkret måte. De kan ikke prøve ut for oss. Det må vi gjøre selv.

Gard Brekke

KIM - Kvalitet i matematikkundervisning

Gard Brekke, førsteamanuensis ved Telemarklærerhøgskole, er en av våre fremste matematikkpedagoger. Han er faglig leder for matematikkbiten i TIMSS, det store vurderingsprosjektet som ble presentert i TANGENTEN nr. 2 1993. Her redegjør han for et annet omfattende nasjonalt prosjekt, KIM, som han har tatt initiativ til sammen med professor Gunnar Gjone ved Universitetet i Oslo. Dette prosjektet som dreier seg om diagnostisering av matematikkunnskaper, skal tilby lærere det første diagnostiseringsredskapet - om desimaltall - til høsten.

1. Prosjektmål

Prosjektet har fleire mål av ulike slag. Nokre mål vil ha delmål som kan nåast relativt snart, medan andre vil vere avhengig av omfattande innsats med basis i forsking og utvikling slik at dei første delmåla vil nåast noko seinare. Hovudmåla kan formulerast i følgjande punkt:

i) Prosjektet har som mål å utvikle ein integrert prøve- og etterutdanningspakke som kan brukast av lærarar som ein del av deira eigen vurderingspraksis.

ii) Prosjektet skal utvikle ei samling av testinstrument av diagnostisk karakter som kan danne eit godt utgangspunkt for konkrete undervisnigstiltak innafor ulike deler av faget.

iii) Prosjektet skal kartleggje haldningar og førestellingar elevar har til matematikk og undervisninga i faget.

iv) Prosjektet har som mål å rapportere heile spekteret av elevprestasjonar innafor ulike område av faget, ikkje berre rapportere om minimum kompetanse.

v) Prosjektet har som mål å kartleggje elevprestasjonar i høve til eit breitt spekter læringsmål som er spesifiserte i gjeldande læreplan .

Kommentarar til måla:

i) Dette punktet heng nøye saman med dei andre måla. Siktemålet er å utvikle instrument som er slik at resultata kan brukast på skulenivå og skal gje direkte informasjon som er viktig for undervisning.

ii) Prosjektet tek sikte på å kombinere ønskje om å kartleggje ulike aspekt av elevane sin kompetanse i matematikk med ønskje om å kunne bruke instrumenta i diagnostisk hensikt. Det diagnostiske perspektivet set krav til at instrumenta er konstruert slik at dei avdekkjer tankar og idear elevane har utvikla i høve til fundamentale omgrep i faget. Siktemålet er her å utvikle ein "bank" av gode diagnostiske oppgåver som den einskilde lærar skal kunna bruke som utgangspunkt for undervisning i eit spesifikt omgrep. Prosjektet siktar mot å utvikle undervisningsmateriell med siktemål å nå ein syntese mellom dette og det diagnostiske vurderingsmaterialet.

iii) Det er velkjent at metalæring og metakunnskapar er avgjerande faktorar som positive drivkrefter for læring men også som hindring for at læring skjer. Prosjektet utvikla instrument som skal kartleggje elevane sitt syn på nytten av å lære matematikk både for seg sjølv og for samfunnet, kva syn dei har på faget slik det trer fram i skulen og kva syn dei har på undervisning i faget.

iv) Ein viktig del av prosjektet er å finne fram til gode normer for prestasjonar innafor det vide spekteret av kompetanse i faget. Slike normer tillet samanlikningar både med omsyn på utvikling av fakta, ferdigheiter, omgrep og generelle strategiar mellom ulike alderstrinn i skulen og mellom ulike undergrupper av elevar. Normene vil også tene til å vurdere utviklingstendensar over tid.

v) For å nå dette delmålet må ein ta i bruk variert testinstrument for å skaffe informasjon om elevane sine fundamentale omgrep i faget, dei fakta og ferdigheiter dei har utvikla og dei generelle strategiar dei nyttar når dei løyser problem av ulike slag.

2. Organisering - Gjennomføring

Prosjektet har eit langsiktig perspektiv. Det tek sikte på å systematisk byggje opp eit system av testar som både kan danne grunnlag for undervisningsaktivitetar i klasserommet og som kan danne basis for ei nasjonal kartlegging i faget. Einskilde område av faget vil verta teke opp etter tur og kvart slikt område vil mål for utvikling, gjennomføring og opplæring verta beskrive med underpunkt inkludert start- og avslutningstidspunkt.

Alternative vurderingsformer i matematikk

Vår forståing av kva det vil seie å ha utvikla kompetanse i matematikk endrar seg, noko som resulterer i at ein endrar fokusering og prioritering i læreplanen. Generelt hevdar ein at utvikling av vurderings-instrument til å fange opp viktige sider ved kompetansen ikkje har halde tritt med endringar i den faglege fokuseringa. Behovet for endring i vurderingsprosedyrer er naudsynt for å avgjere om elevar blir utdanna til å møte endringar i samfunnet. Dette krev at elevane sine tankeprosessar så vel som kunnskapar om fakta, bruk av ferdigheiter og forståing av matematiske omgrep må vurderast. Me veit at tradisjonell vurdering ikkje fortel oss alt me ønskjer å vite om elevane, og at standardiserte, skriftlege prøver berre kan vurdere ei avgrensa mengd av ferdigheiter. Difor har det i den seinare tida vore lagt ned mykje arbeid i å finne fram til alternative former for vurdering av desse.

I diskusjonar av mål og prioriteringar i matematikk vert det stadig meir fokusert på at ein i undervisninga må sikte mot å utvikle fleksibilitet og den sida av kompetansen ein kallar generelle strategiar. Skal dei kvalitetar ein her siktar mot bli ein realitet i undervisninga i faget må dei oppvurderast ved at dei blir gjenstand for kartlegging. Oppmerksomheita må også rettast mot å kartleggje i kva grad elevane er i stand til å planleggje, ta avgjerder og å løyse problem. På mange måtar er dette like viktig som å undersøkje om dei er i stand til å reprodusere deler av eit matematisk innhald som har vorte tilbydd dei i ei stilisert form.

Dersom ein ønskjer å kartleggje individuelle elevar, for eksempel i høve til å dokumentere utvikling av kunnskap og evne til problemløysing, så vil den nyttigaste kjelda til informasjon vere problemløysingsaktivitetar der elevane samstundes lærer og dokumenterer si læring. Når aktivitetar bidreg samstundes til læring og kartlegging må våre tradisjonelle oppfatningar av reliabilitet reviderast og utvidast.

Arbeidet med dei problemstillingar som er nemnde ovafor har internasjonalt fått nemninga "Alternative Assessment in Mathematics". Å følgje denne utviklinga på nært hald vil vere ei viktig side av prosjektet, og eit viktig bidrag til å byggje opp ei miljø rundt vurdering i faget. Å gjennomføre kartlegging på dette området vil liggje lengre fram i tida enn å arbeide med kartlegging av fakta, ferdigheiter og omgrep som elevane har.

Det er naturleg at dei element som er nemnt ovafor ikkje har klare avslutningspunkt, men vil vere element av prosjektet så lenge det varer. Det vil likevel vere naturleg å gje rapportar også på desse felta med jamne mellomrom.

Val av det første område i utviklinga
Me ønskjer å starte arbeidet med desimaltal. Dette fagområdet vil omfatte både korleis elevane forstår desimaltala, kva tankar og omgrep er knytte til talsymbola, og korleis dei meistrar dei fire rekneartane når desimaltal er involvert. Dette er eit sentralt felt i skulematematikken som organiserer store deler av tal og talrekning rundt seg. Barn byggjer vanlegvis si forståing av dei fire rekneartane frå erfaringar med små heile tal. Desse operasjonane er vanlegvis introdusert ved hjelp av enkle tankemodellar som ikkje på ein enkel måte let seg generalisere til desimaltal, og som difor ofte fører til at misoppfatningar oppstår. For eksempel om ein berre vert undervist om multiplikasjon som gjentatt addisjon med like store addendar vil ein utvikle ein snever tankemodell for kva multiplikasjon eigentleg er, og vil vanskeleg vere i stand til å estimere resultatet av $0{,}62 \cdot 0{,}31$. Mange elevar vil tru fast på at multiplikasjon alltid gjev eit større svar enn utgangspunktet fordi all deira erfaring vil tilseie dette. Tilsvarande vil elevar som berre møter delingsdivisjon vere ute av stand til å knyta meining til 12:0,4.

Det er truleg ikkje mogeleg å unngå at misoppfatningar og delvise omgrep vert danna, dei er berre ein del av barna si normale utvikling. Nye idear vert tolka ut frå eksisterande erfaring, og ugyldige slutningar vert ofte dregne og generaliseringar vert gjorde på gale grunnlag. Vanlege misoppfatningar innafor dette feltet er:

- det lengste talet har alltid størst verdi,
- du kan ikkje dele eit lite tal med eit stort,

- multiplikasjon gjer alltid svaret større.
- ein kan berre dividere med heile tal.
- 3 : 6 og 6 : 3 gjev same svar.
- divisjon gjer alltid svaret mindre.

Slike misoppfatningar, som gjerne kan gje eleven rette svar også i andre tilfelle enn for heile tal, vert ofte tekne med gjennom heile skuletida og seinare i livet, og viser seg å vere så grunnfesta at dei tener som rettesnor framfor det logiske i ein situasjon, som for eksempel når det gjeld å velje rett rekneoperasjon i oppgåva:

> "Kjøttdeig kostar 69,50 kroner kiloen, kor mykje for 0,86 kg"?

Mange vel divisjon som operasjon fordi ein veit at svaret skal verte mindre enn 69,50 kroner. Ein har også funne at elevar trur om ein endrar tala i ei oppgåve så er det ikkje sikkert at rekneoperasjonen ein treng må verte verande den same. Undervisningsmetodar som ein brukar til vanleg som enten prøver å ignorere eller unngå misoppfatningar, (ofte ved å prøve å definere omgrepa nøyaktig og fullstendig ved den første innføringa) har synt seg å vera ineffektive for å vinne bukt med problem av denne typen. På denne måten vert dette arbeidet like mykje sentrert rundt dei fire rekneartane som rundt desimaltala sjølve.

Det er også slik at og undervisninga på dette område strekkjer seg over fleire år. Slik vil det vere naturleg å utvikle test- og undervisningsmateriell med siktemål å dekkje heile dette feltet under eit.
Ein anna hovudgrunn til at dette feltet er valt er at det eksisterer ein relativt stor del av forsking på feltet, slik at starten vil vere enklare enn om ein valde andre område.

Materiellet skal vere slik at det kan byggjast opp testar for ulike klassetrinn.

I 2.3.3.1 følgjer ei detaljert utgreiing for planane med dette feltet. Det er målsetjinga at ein kan starte på neste felt i januar 1994, utan at det aktuelle feltet er fastlagd enno, og at ein der vil følgje det same mønsteret som i 2.3.3.1. Etter som tida går, og avhengig av dei ressursar som blir tildelt prosjektet vil det kunne gå føre seg arbeid på fleire område av faget til same tid, og med ulike klassetrin involvert.

Trygve Breiteig

Hvordan forstår elevene desimaltall?

All tallbehandling med forståelse baserer seg på at vi skjønner tallsystemet vårt og de fire grunnleggende regneoperasjonene med slike tall.

Forskning viser at forståelsen for de grunnleggende egenskapene ved desimaltall og regning med slike slett ikke kommer automatisk og lett. Vi finner karakteristiske trinn i utviklingen og vanlige misoppfatninger. Dette er gjort synlig gjennom forsking der utviklingstrinn og misoppfatninger har fått navn, og der en har forsøkt å forklare disse. Se f.eks Resnick (1989) eller Hart (1984). Slike kartlegginger er grunnleggende når vi skal ta elevene på alvor ved en tilpassset undervisning, der oppdagelse, forståelse og refleksjon vektlegges framfor memorering av metoder.

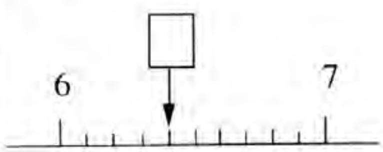
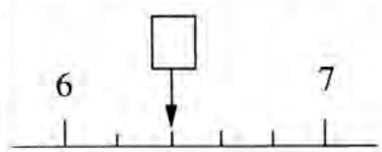
Ved hjelp av diagnostiske oppgaver kan vi analysere elevenes begreper og avdekke misoppfatninger.

Hva er diagnostiske oppgaver?

En diagnostisk undersøkelse skal kartlegge elevenes begreper og forståelse. En slik test må inneholde spørsmål som vanlige elever ofte har problemer med. Vi stiller ikke spørsmål der elevene kan få riktig svar, men med feilaktige begreper. For eksempel kan en elev regne riktig oppgaver av typen 0,64 : 2, selv om han eller hun har den vesentlige misoppfatningen at desimaltall er et tallpar av naturlige tall – de "små og de store" delene. En oppgave som 0,15 : 3 er derimot en diagnostisk oppgave med tanke på dette begrepet. Vi kan finne ut om elevene tenker 15 : 3, og se hvor utbredt svaret 0,5 er. Diagnostiske oppgaver avdekker deres begreper og misoppfatninger.

Det er interessant å bruke diagnostiske oppgaver, fordi det kan lede til en tankemssig konflikt, som elevene får behov for avklare. Problemene feies ikke under teppet, men de brukes konstruktivt. En misoppfatning oppfattes ikke som en bommert eller en feil, men den gir en mulighet for eleven eller klassen til å lære mer og bedre. Gjennom en diskusjon kan elevene bygge opp en riktig begrepsforståelse, for da må de reflektere over begrepene som inngår: Hva *er* kjennemerkene på desimaltall, hva betyr slike tall egentlig?

Hva er divisjon og multiplikasjon med desimaltall? Hva slags situasjoner er det som krever multiplikasjon og hva slags er divisjonsproblemer?

"Vanlig" oppgave	*Diagnostisk oppgave*
0,4 · 0,3	0,4 · 0,2
Hvilket tall er størst av 0,45 0,68 0,31	Hvilket tall er størst av 0,274 0,6 0,85
Legg 0,1 til 4,5	Legg 0,1 til 4,563
Les av og skriv riktig tall i ruta 	Les av og skriv riktig tall i ruta 
Lag en regnefortelling til 18 : 3 = 6	Lag en regnefortelling til 13 : 3,25 = 4
Hvilket regnestykke passer her: *Bananene koster 13 kr per kg. Hvor mye kan Eva kjøpe for 39 kr?* 39 : 13 13 · 39 13 : 39 39 – 13	Hvilket regnestykke passer her: *Bananene koster 13,50 kr per kg. Hvor mye kan Eva kjøpe for 10,50 kr?* 10,50 : 13,50 10,50 · 13,50 13,50 : 10,50 13,50 – 10,50

Er misoppfatninger om desimaltall utbredt?

Følgende eksempler viser typiske oppgaver der misoppfatninger er blitt påvist i utstrakt grad. Prosentsatsene refererer seg til andelen av de ulike svarene gitt av en gruppe på 130 elever i 7-8. klasse i Agder og Telemark, se Breiteig og Brekke (1993):

Oppgave	*Svar*	*Prosent*
Skriv svaret på 0,12 : 2	0,06	36
	0,6	52
Skriv svaret på 0,6 : 0,2	3	21
	0,3	54
	0,4	10
Hvilket svar er størst av	38 : 0,17	46
38 · 0,17 og 38 : 0,17	38 · 0,17	45
Ei eske med 25 halsbånd veier 3 kg.	3 : 25	35
Hvordan finner vi hva ett halsbånd veier?	25 : 3	42
	25 · 3	9
	Både 3 : 25 og 25 : 3	9
Bananer koster 13,50 kr per kg. Hvor mye	10,50 : 13,50	13
kan Anne kjøpe for 10,50 kr?	13,50 : 10,50	38
	13,50 – 10,50	17
	13,50 · 10,50	8
Hvilket tall er størst av	0,236	31
0,236 0,4 0,65	0,4	21
	0,65	47
Hvor mange tall fins det mellom 0,63 og	uendelig mange	12
0,64 ?	ingen	45
	1, 2, ..., 9	17
	10	11
1 kg pølser koster kr 49,50. Hvordan	49,50 · 1,7	81
finner vi prisen på 1,7 kg?	49,50 : 1,7	12
1 kg kjøttdeig koster kr 65,50. Hvordan	65,50 · 0,76	35
finner vi prisen på 0,76 kg?	65,50 : 0,76	42
Skriv som desimaltall $\frac{3}{10}$	0,3	20
	3,10	55

Forklaringsmodeller

Forskning har påvist at elevenes misoppfatninger ikke er tilfeldige. De bygger på et rasjonelt utgangspunkt. Ofte *overgeneraliserer* elevene tidligere kunnskaper til nye områder der disse kunnskapene ikke uten videre gjelder. Dette gjelder for eksempel ved misoppfatninger som "multiplikasjon gjør større" eller "det finnes ingen tall mellom 0,53 og 0,54". Eller det gjelder oppfatningen "jo flere desimaler, jo mindre tall", jamfør "jo flere siffer foran komma, jo større tall". Ord og termer som brukes i dagligtalen kan skape og forsterke utbredte misoppfatninger, slik som ordet å *multiplisere* (bli mange) og *gange* som antyder at det vokser, mens *dele* antyder det motsatte. Vi leser også i dagligtalen et tall av typen 0,364 som "null komma trehundre og sekstifire", noe som antyder at vi skulle ha 3 hundre og ikke 3 tideler. Et videre årsak til misoppfatninger er at mange elever ikke skiller mellom begrepet multiplikasjon og algoritmen, – deres erfaringer med multiplikasjon har omtrent alltid vært i forbindelse med bruk av algoritmen. Misoppfatninger kan være resultat av en sammenhengende og konsistent tanke, og de viser svært ofte elevenes anstrengelser for å få meining og sammenheng i det de lærer og får det til å "passe inn".

Begrepet desimaltall

Når det gjelder *begrepet* desimaltall, finner vi som nevnt misoppfatninger som henger sammen med tidligere kunnskaper om *naturlige tall*. Et desimaltall oppfattes som et *par* av naturlige tall.

0,236 er større enn 0,64

Rekka 0,3 0,5 0,7 ... fortsettes med ... 0,9 0,11 0,13

0,8 : 0,2 = 0,4

Det fins ingen desimaltall mellom 0,64 og 0,65

Vi adderer 0,1 til 0,354. Svaret blir 0,355

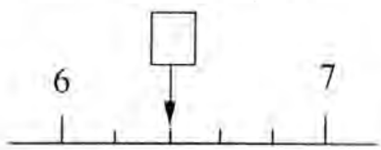
4 : 24 har ikke noe svar. Det er ikke mulig å dividere et tall på et større

Når vi multipliserer, blir svaret større. Når vi dividerer, blir svaret mindre.

Den samme oppfatningen kan komme fram når elevene skal lage en regnefortelling som passer for eksempel til stykket 4,6 + 5,3 = 9,9:

Eva har 4 tegneblokker og 6 ark. Til fødselsdagen får hun 5 tegneblokker og 3 ark. Da har Eva 9 tegneblokker og 9 ark.

Den kommer også fram ved avlesinger av typen:



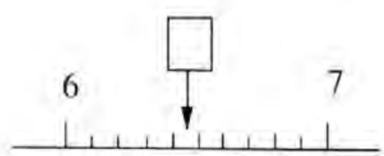
Dette punktet er 6,2

Vi finner videre misoppfatninger som synes å ha en rot i at kunnskaper om *brøk* blandes inn:

8,7 betyr åtte og en sjudel

0,4 er større enn 0,64. Jo flere siffer bak komma, jo mindre er tallet.

Dette tallet er $6{,}4\frac{1}{2}$



Brøken $\frac{3}{10}$ skrevet som desimaltall blir 3,10

Regning med desimaltall

Når det gjelder *operasjoner* med desimaltall, ser vi at elever ofte oppfatter matematikk som et "lukket spill" med sine *egne spilleregler,* uavhengig av livet omkring, adskilt fra dagliglivet, uavhengig av deres egen fornuft. Det vesentlige blir da manipulering med selve symbolene, og konteksten er klasserommet.

5,25 • 3,28 = 17,22

Din fortelling:
Arne hadde et regnestykke som var slik: 5,25 : 3,28 =
Hjelp Arne å finne svaret av stykket

Eller vi kan se på denne:

Sett ring rundt svaret på oppgaven: 6,45 · 2,4

0,1548 1,548 15,48 154,8 1548

Noen velger her 1,548, åpenbart fordi det har *tre* desimaler, som er summen av antallet desimaler i faktorene. Elevene er opptatt med selve tallsymbolene, og det overskygger relasjoner mellom tallene og meiningen de står for.

Elever kan tro at det er umulig å dividere et tall på et større, og de kan bytte om dividend og divisor i en divisjonsoppgave. Mange tror at multiplikasjon gjør større, og deres kjennskap til *ulike* situasjoner som gir multiplikasjon og som gir divisjon, er vanligvis liten: Multiplikasjon er for mange utelukkende like grupper og gjentatt addisjon (ikke forstørrelse med en faktor, ikke en rate eller liknende) og divisjon betyr for mange bare det å dele likt (ikke måle, finne delen av eller liknende). Når så tallene er slik at de ikke passer for en delingsdivisjon, hvordan løser elevene det dilemmaet? Da er det ikke uvanlig å bytte operasjon:

4 : 0,5

Mor har 4 Brus. Men jeg skal
ha halvparten av dem

eller bytte om på rekkefølgen:

17 : 4,25 = 4

Per Lise og Line og Hans fikk 17 kg bananer.
De delte Bananene likt Da fikk de 4,25
kg hver

Elevene kan vise en stor grad av oppfinnsomhet for å finne situasjoner som kan modelleres med delingsdivisjon:

Frank spilte 4 hele kamper og 22,5 minutter
i en annen kamp. Han fikk til sammen 17
poeng på spillebørsen Han fikk 4 i snitt

$\boxed{4 : 0,5}$

4 dusin egg skall deles på
et halvt 'dusin personer

Elevenes motvilje mot å dividere et tall på et større tall kan vise seg slik:

$\boxed{4 : 24}$

Det er 24 elever i Jorunns klasse og sa
skulle de deles i 4 grupper

Hjelpetiltak

Forskningen gir også noen konsekvenser, noen vink om hjelpetiltak for å komme over begrepsmessige terskler ved desimaltall og regning med desimaltall. Se Greer (1992). Med korte stikkord kan vi uttrykke følgende råd:

- Bruk diagnostiske oppgaver, som kan avdekke misoppfatninger og framkalle tankemessig konflikt. Drøft elevenes løsninger med dem.
- Bruk realistiske, vanskelige tall – rutinemessig. Å bruke urealistisk lette tall for å få en "snill" utregning har effekter som ikke er ønskelige. Elevene kan da ta et "fint svar" som et tegn på riktig framgangsmåte. Får de vanskelige tall, tror de at deres løsningsstrategi er feil. Den gamle hypotesen om at elevene i starten må ha enkle tall for å greie å

konsentrere seg om prinsippet og regelen – blir ikke bekreftet gjennom forskning. Her kan vi igjen vise til Greer.

- Elevene trenger å møte et breiere spektrum av ulike situasjoner som kan modelleres ved multiplikasjon og med divisjon – enn det som tradisjonelt er tilfelle.
- Bruk utforsking og problemløsing ved introduksjon av regneoperasjonene for naturlige tall og ved utvidelsene utover de naturlige tall, til desimaltall og brøk.
- Bruk varierte oppgaver. Flertrinnsoppgaver skjærer straks bort overfladiske løsningsstrategier. Inkluder også problemer gitt med utilstrekkelig eller overflødig informasjon.
- Legg vekt på modellering ut fra realistiske situasjoner, framfor "lette, kvasirealistiske situasjoner".

Referanser

Breiteig T (red) (1986) *Desimaltall.* Skriftserien, Kristiansand lærerhøgskole 1986:4

Breiteig, T og Brekke, G (1993) *Ansvar for egen læring i matematikk.* Samlerapport fra Program for utdanningsforskning, Norsk Forskningsråd.

Greer, B (1992) Multiplications and divisions as models of situations. I Grouws, D (red): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* National Council of Teachers of Mathematics, 276-295.

Hart, K (red) (1981) Children's understanding of mathematics: 11 – 16. John Murray.

Resnick, L B (1989) Conceptual bases of arithmetical errors: the case of decimal fractions. I *Journal for Research in Mathematical Education*, **20**, 1, 8-27.

Swan, M (1982) *The meaning and use of decimals.* Shell Centre for Mathematical Education.

Oppgave

Test en gruppe eller en klasse elever med tanke på noen få av de mest utbredte misoppfatninger om desimaltall.

Prøv så et undervisningsopplegg på 1-2 timer der du vektlegger ett tiltak for å utvikle et korrigert begrep og redusere misoppfatninger som er påvist. Hvilket tiltak vil du bruke?

Prøv etterpå en tilsvarende test. Vurder effekten av undervisningen, og drøft hvor "fast" slike misoppfatninger kan ha festet seg hos elever.

Svein H. Torkildsen

Prosess og produkt

Etter mange år med matematikkundervisning, ser jeg stadig klarere at elevene må ha tid og ro for å sortere tankene sine. Det er så lett å la seg stresse når eleven sitter fast. Vi må videre - finne fram til svaret så vi kan få gjort fler oppgaver. Mer enn en gang har jeg tydd til de enkle og raske løsningene: Gjør slik eller slik, så får du svaret. Eller kanskje jeg har stilt noen sterkt ledende spørsmål - liksom lagt løsningen i munnen på eleven og innbilt meg at "nå har han det".

Jeg skulle ha ei gruppe elever i matematikk valgfag, en time pr uke. Elevene hadde ulike behov og interesser, så det falt naturlig at de ikke arbeidet med det samme. Men alle skulle få arbeide mest mulig på egen hånd. Jeg var fast bestemt på å forklare minst mulig og gi færrest mulig svar. Kunne jeg få elevene til å etterprøve egne resonnement og begrunne dem? Da måtte jeg satse mer på kritiske spørsmål og oppmuntringer. Gruppa som gjennomførte en fartskontroll, bestod av fire gutter i 9. klasse. De har vært trygt plassert i "G-sekken".

Idé og plan

Utgangspunktet var en vag idé: Elevene kunne tenke seg å gjøre noe de måtte bruke datamaskiner på. Jeg foreslo en fartskontroll på Oddernesbroa, få minutters gange fra skolen. Elevene startet opp med å diskutere hvordan det kunne gjennomføres. Etter en tids rådslagning kom de fram til at de ville måle tiden bilene brukte på en bestemt avstand, f. eks. 100 meter. Da måtte de ha måleband, stoppeklokke og noteringsskjema klar til neste time. "Er det mer vi kan observere når vi først er ute?" - spør jeg. "Vi kan se om det er menn eller damer som kjører", foreslår Morgan. "Da trenger vi ett skjema til", mener Geir. To av elevene gjør klar skjema mens de to andre drar til Oddernesbroa for å se hvor det er best å plassere seg.

Neste uke går timen med til oppmåling (100 m), observasjoner og notater. De har på forhånd avtalt hvem som skal gjøre hva.

Hodet mot veggen?

Hvilken bil har kjørt seinest? Den som brukte 8,71 sekunder. - Hvor fort har den kjørt? Det vet vi ikke. - Kan vi finne det ut? Jaaa... 100/8,71. - Hva finner du da? Farten. - Hvor stor blir den? 11,49 (med lommeregner) - Han kjørte ikke 11,49 kilometer i timen! Morgan finner det urimelig. Bilen kjørte ikke så seint. - 8,71/100 blir foreslått. Hvor mye er det? 87,1 lyder svaret. Blir svaret 87,1 hvis vi deler 8,71 på 100? Lang pause. Nei, det blir 0,0871. Hva står det tallet for? Ny pause. Det er bare tull. Vi må ta 100/8,71.

Strategien er velkjent: Gjett en operasjon med de tallene som foreligger. Se på lærerens reaksjon. Er ikke responsen positiv, prøv noe annet. Tanken kobles ut. Jo fler forslag, jo større sjanse er det til å treffe riktig operasjon med riktige tall..Oppmerksomheten konsentreres om andre forhold enn den indre logikk i det en holder på med. Det viser denne lille samtalen: Hvordan tenkte du da du fikk 8,71/100 til å bli 87,1? Det kunne passe som farten på en bil.

Jeg prøver å holde meg "nøytral" til alle forslag, prøver å tvinge dem til å tenke gjennom forslagene sine og begrunne dem. Dere mener altså at vi må ta 100/8,71. Det blir 11,49. Hva finner dere da?

Tungsinnet er ved å ta overhånd. Alle fire venter at en av de andre skal komme med det gode forslaget. Nå må det dyttes på litt: Gå sammen to og to. Sett ned på papiret det dere vet. Lag en tekst som viser hva dere finner ut. Det duger ikke med et regnestykke og et svar. Vi må vite hva vi driver med. Gruppene blir overlatt til seg selv en stund mens jeg hjelper noen elever som er i gang med andre aktiviteter.

Det løsner

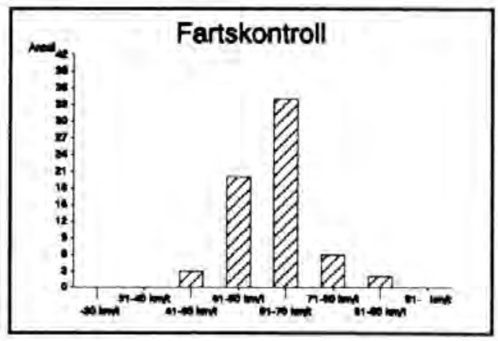
Når jeg ser til "UP-gruppa" igjen, har de kommet til at bilen kjørte 11,5 m på ett sekund (100 m : 8,71). Det er alle fire sikre på, og de kan gi en grei begrunnelse. Kan vi bruke den opplysningen til noe? Lang pause. Vi kan finne ut hvor langt han kjører på ett minutt. Javel - finn det ut og skriv det ned. Resultatet blir etter hvert som kopien av arbeidsboka viser. Det kostet en snau skoletimes diskusjon.

Neste uke finner de hastigheten til den bilen som kjørte raskest, 4,16 sekunder. De går først gjennom sitt eget resonnement fra forrige time, og finner fort at den bilen kjørte 86,2 km/t.

Datamaskinen overtar

Jeg har laget et regneark som kan beregne fart og lage en klasseinndelt frekvenstabell:

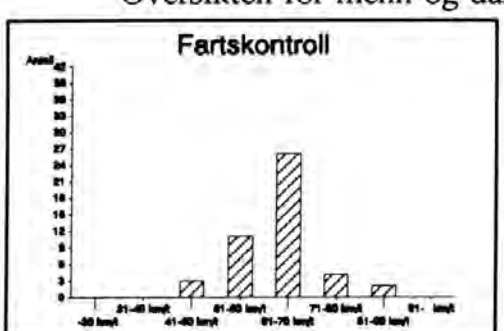
	A	B	C	D	E	F	G
1	FARTSKONTROLL						
2	Tidsmåling over			m i	sone med		km/t
3			(Fyll ut C2)			(Fyll ut F2)	
4	Nr.	Tid i sek.	Fart i km/t		OVERSIKT		ANTALL
5	1		[C2]/B5*3,6		-30 km/t		
6	2		[C2]/B6*3,6		31-40 km/t		
7	osv.		osv.		osv.		



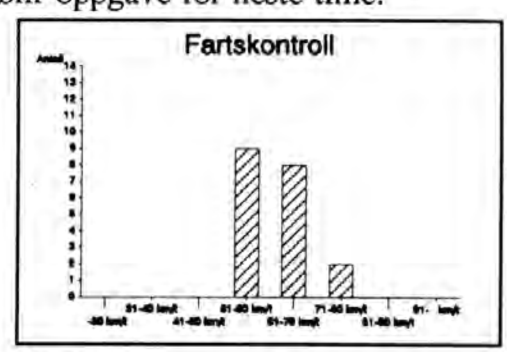
Elevene sammenlikner først formelen i celle C5 med sin egen utregning. C2/B5 tar de raskt. Det svarer til deres egen 100/8,7. Men 3,6? Om litt kommer det: Vi ganget med 60 to ganger. Det er 3600. Så delte vi med 1000 for å finne kilometer. Det blir 3,6, så det er igrunnen det samme som vi gjorde.

Alle data settes inn i kolonne B. Datamaskinen beregner hastighet for alle bilene i kolonne C, lager klassedelt frekvenstabell i kolonne G (formler utelatt i tabellen) og sørger for grafisk framstilling ved hjelp av en ferdig laget makro.

Oversikten for menn og damer blir oppgave for neste time:



Menn



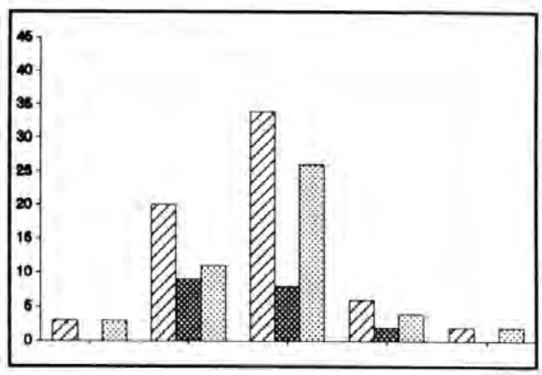
Damer

Men elevene stusser over resultatet. Her må være noe som ikke stemmer. Det ser jo ut som det er nesten like mange damer som menn i gruppen 61-70 km/t. Hvorfor ser det slik ut? Det var jo ikke like mange. Pause. Det er ikke samme tall der (peker på y-aksen).

Vi burde hatt alt i sammen, og ikke hver for seg, mener Terje. Her må jeg hjelpe dem videre: Det kan dessverre ikke "programmet" vårt hjelpe oss med. Men vi kan klare det hvis vi setter de tre frekvenstabellene vi har inn i et nytt regneark:

	A	B	C	D
1		Alle	Damer	Menn
2	41-50	3	0	3
3	51-60	20	9	11
4	61-70	34	8	26
5	71-80	6	2	4
6	81-90	2	0	2
7	SUM	65	19	46

Dette oppsettet gir denne grafiske framstillingen:



Men elevene er enda ikke fornøyd. Det er liksom noe som ikke stemmer her heller. Hva er dere misfornøyd med? Det ser ut som det er nesten ingen damer som kjører mellom 60 og 70 km/t. Det virker som mennene kjører så mye fortere. Her er det nok intuisjonen som taler, og elevene har vanskelig å få gitt nøyaktig uttrykk for hva som er "feil". Det nærmeste de kommer er: Det blir sånn fordi det er så mange fler menn enn damer.

Nå må jeg ta føringen: Hvor stor del av damene kjørte mellom 60 og 70 km/t? Svaret kommer ikke straks, men det kommer: Litt mindre enn halvdelen. Hvor stor del av mennene kjørte mellom 60 og 70 km/t? Litt over halvparten. Da var det jo ikke så stor forskjell likevel, men det ser ikke slik ut på søylene.

Tiden er inne for en liten repetisjon av "relativ frekvens". Det blir behov for å utvide regnearket:

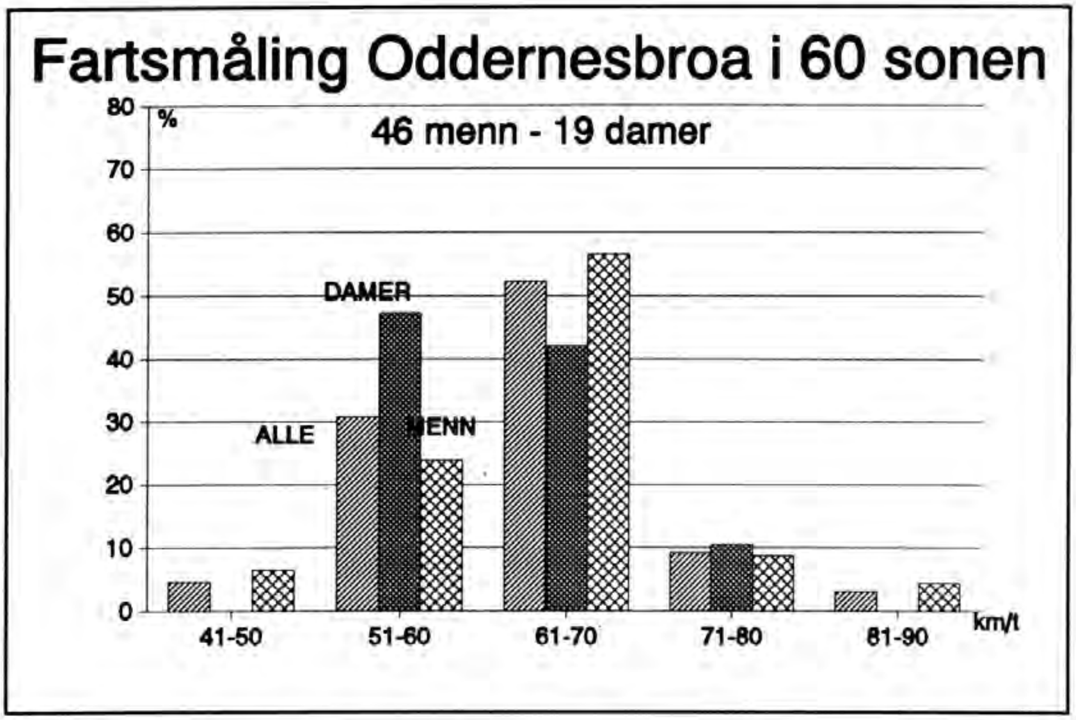
	A	B	C	D	E	F	G
1		Alle	Damer	Menn	Alle	Damer	Menn
2	41-50	3	0	3	B2/[B7]	C2/[C7]	D2/[D7]
3	51-60	20	9	11	osv.	osv.	osv.
4	61-70	34	8	26			
5	71-80	6	2	4			
6	81-90	2	0	2			
7	SUM	65	19	46			

Elevene er etter hvert blitt fortrolige med å lage formler og kopiere dem. Det tar ikke lang tid før de 15 verdiene er på plass i tabellen. Ny opptegning av søyler gikk på et blunk, og denne gangen så resultatet bedre ut. Men elevene likte ikke at verdiene på y-aksen nå lå mellom 0 og 1. Vi skulle heller hatt prosent, foreslo Terje. Hvordan får vi det til? Vi må gange med 100. Det er snart gjort å rette opp i de tre formlene i linje 2 og så kopiere på nytt.

Dermed gjenstår bare ny opptegning og plassering av nødvendig informasjon. Det endelige produkt gav seg ikke selv. Overskrifter, linjer ut fra prosentverdiene og andre opplysninger kom først på plass etter kritiske vurderinger og mye prøving og feiling. Men etter hvert fikk de godt grep på det å utnytte regnearket til grafisk framstilling.

Produktet

De fire guttene var tydelig tilfredse der de stod med det ferdige produktet. Selv om neste time var begynt, måtte de ta seg tid til å betrakte verket. Frikvarteret hadde gått med til utskrift og kopiering av den grafiske framstillingen som også ble hengt opp på oppslagstavla:



En innvending

Da elevenes arbeid fikk sin plass på oppslagstavlene, fikk jeg mer enn én henvendelse (også fra kolleger): Svein, det er noe galt her! Å? Det er bare menn som har kjørt over 80 km/t. Da skulle jo de to søylene være like høye. Eller som en så treffende sa det: Prosent er prosent - uansett. Slik førte elevenes arbeid til diskusjoner om prosentbegrepet - i tillegg til den uunngåelige vurdering av kjørestilen hos menn og damer.

Sitter noe igjen?

Nok ei uke er gått, og det er nå omtrent to måneder siden elevene kavet med å beregne bilenes fart. Før vi tar fatt på en ny utfordring, spør jeg hva de syntes var vanskeligst i det arbeidet de hadde gjort. Svaret kom kjapt: Å finne ut hvor fort bilene kjørte. Husker dere hvordan dere gjorde det? Nei. Kunne dere finne farten til en bil som bruker 5 sekunder på 100 meter? Jeg husker det ikke. Men jeg tror nok jeg skal få det til, for det går jo an å tenke det, svarer John Ola. Og det stemte. Denne gangen gikk det bare ca. tre minutter før resonnementene var rekonstruert og presentert med tre hjelpemidler: Hode tavle og kritt.

Refleksjoner

Elevene hadde beregnet farten for to biler. Normalt regner vi det for lite øving på et så sammensatt problem. Likevel gikk det bra da de prøvde seg igjen etter to måneder. Men elevene hadde fått god tid - over en time. Og underveis måtte de klargjøre begreper om vei, fart og tid for seg. Kan den lange og tunge prosessen utvikle begrep som kan erstatte eller gi støtte til hukommelsen? John Ola innrømmet at han ikke husket. I alle fall gjorde han det ikke sånn uten videre.

Hva om jeg hadde valgt en annen innfallsvinkel: Gitt elevene oppskriften på hvordan de kan finne farten i km/t ut fra tiden bilen bruker på en bestemt avstand, og så latt dem regne ut farten på 15 biler hver. Det ville tatt omtrent samme tid. Ville det gitt samme erfaring og samme kunnskap?

Arbeidet med den grafiske framstillingen var også en interessant prosess. Dette arbeidet er som regel så tidkrevende at vi på forhånd må gi nøyaktige opplysninger om enheter på aksene osv. Men når elevene får bruke datamaskin til arbeidet, gjør det ikke noe om fremstillingen ikke straks svarer helt til forventningen. Det er fort gjort å endre oppsett og lage ny opptegning. Det kan brukes mer energi til vurdering og tolking. Ønsket om å forbedre produktet kan lett settes om i praksis.

Magne Holmin

Magne Holmin er lærar ved Vikebygd skule i Volda. Han har vore lærar på alle steg i grunnskulen, i Kenya og fagrettleiar i matematikk i Volda kommune. I TANGENTEN sin konkurranse for skuleklassar har Holmin sine klassar sendt inn svar tre gongar.

Frå klasserommet:

Fram for tal og teljing

Stor takk til den store inspiratoren, TANGENTEN, for at eg får nyte privilegiet, å få låne andres øyre og berre røle ei stund om eigne suksessar.

I ei slik skrivande stund vågar du å tru på det du har halde på med som lærar, for mitt vedkomande i nokså mange år no, faktisk på alle klassesteg i grunnskulen.

Eg vel temaet tal og talkjensle utifrå den grunnhaldninga at viktigare enn rekning er ei grunnleggjande oppleving av tala våre, forhold mellom tal og talsystem. Skulen brukar alt for liten tid til rett og slett tal og teljing. Vi reknar i staden. Til og med når litt måleteknikk og teikning kan gje ein sikrare kommunikasjon, må vi lage reknestykke! (Eit klassisk døme er skuleoppgåva om tapetsering av romet til Kari.)

God talkjensle byggjer du best med allsidig bruk av teljing (dernest måling, som er beslekta med teljing). Eksakt utrekning av ein sluttverdi er ofte både usikker og begrensa i sin informasjonsverdi i motsetnad til ei suksessiv tilnærming, der ein i fleire forsøk "tel" seg fram til eit resultat og kanskje opplever interessante mellomsvar. Dette er aktuelt på alle klassenivå, men tradisjonen vår er svært konsentrert om "rett og galt" svar!
(Klassisk døme er klassefesten, kor mykje å betale for kvar elev? Du skal alltid finne eitt svar på den oppgåva!)

Førskule og grunnskule i same tradisjon

Telje- og peikebøkene i førskulen skal byggje opp antalsbegrep, men eg meiner vi klarer oss betre utan bøker. Desse bøkene manglar ofte den grunnleggjande prosessen som kjem først, sortering og ordning, sjølve grunnlaget for planlegging.

Eg har prøvd å styre unna for mange bøker. I første klasse skal elevane til dømes setje pilar, skrive strekar eller tal for ballar og sauer i fine bøker med fargetrykk. Etter kvart får vi kritiske og resonnerande elevar som spør kvifor og korleis dette skal gjerast. Diverre kallar vi ofte desse elevane umodne eller "mindre skuleflinke". Men eg har ofte sett at desse problema er lærebokproduserte. Mange born treng ein logisk motivasjon for å fungere, difor må tal og antal koplast med hensikt.

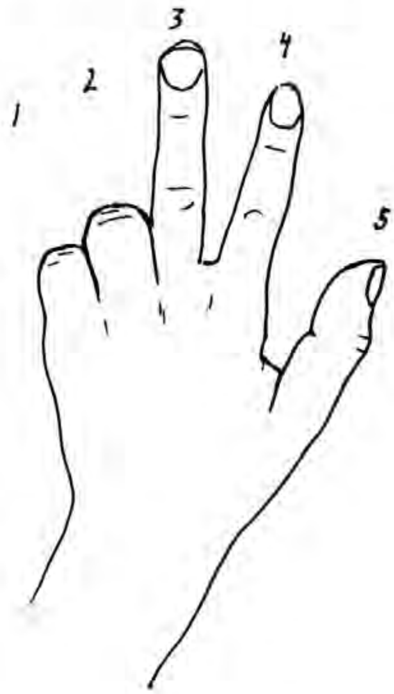
Dette er mykje lettare å få til utan oppgåvebøker. Skuledagen kryr av små høvelege prosjekt. 25 elevar i klassen! Korleis er det med gutar og jenter? Ein kan stille mange formelle spørsmål, men viktigare er dei mange prosessane med kopling og teljing, gjerne gjennom spel og leik der ein brukar dette talmaterialet. Etterpå sit ein kanskje att med 2 gode talbegrep, 13 jenter og 12 gutar (eller ei annan fordeling). No først får formaliseringa meining, til dømes:

$13 + 12 = 25$
$13 - 12$
$13 > 12$
13 i høve til 12 (13/12)
par og odde

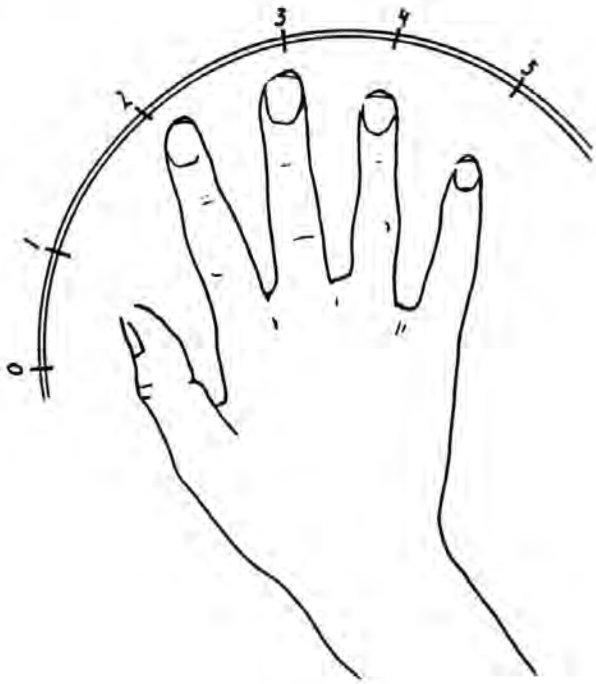
Formalisert drill eller automatisering frå 1.klasse har eg redusert til under det halve målt i sidetal i bøkene, for somme elevar ("mindre skuleflinke") enno meir redusert. Gevinsten er frigjort tid til allsidig opplevingsaktivitetar (lærarrettleiingane er fulle av idear).

Å byggje huset på fjell!

Det er gode, grunnleggjande kunnskapar som frigjer skapande anlegg hos oss. Eg vil ikkje hoppe over fingerteljing på veg til talstrålen. Fingrane er eit eksklusivt læremiddel som borna kan vekse med. Framlengs og baklengs teljing. Oppbygging av tal, (+1)funksjonen. Kor langt frå 0 til 5, 1 til 5 (måling)? Sjå tekst til figur 1 og figur 2. Eit tips: 2 barnehender kjem fint innanfor ramma på OH-projektoren og gjev spennande skuggebilde av fingrane frå 0 til 10, evt. 1 til 10. Teiknar ein konturen av fingrane på transparanten, kan ein skrive på dei etterpå!



Figur 1
Kardinaltala 1 til 5. Viser 2 i høve til 3 , 2 i høve til 5, pluss og minus, par og odde og mykje meir.



Figur 2
Måltal (inkluderer usikkerhet). Viser til dømes at 2 1/2 er midt mellom 0 og 5 og at 3 er midt mellom 1 og 5. Viktig distinksjon.

Tal, talfavorittar og knaggar

Framleis er haudrekning eit framskote mål i Mønsterplanen. Den avgrensa tidsramma matematikkfaget har, tvingar oss til å prioritere, saman med foreldra. Haudrekning har ei høg stjerne utanfor skulen, etter mi røynsle, og må prioriterast.

Fellesoppgåver i haudrekning i samla klasse høyrest skremmande ut, men røynslene mine er motsette. Dei "plagsame" kløpparane må nemleg gjere greie for resonnementet og kva for knaggar dei brukte på vegen. Knaggane er det eg kallar talfavorittar (ʳalfavorittar). Dei blir eit felleseige for klassa forutan dei som elevane utviklar personleg. Ei rask liste med favorittar frå 1.klasse og oppover kan sjå slik ut:
0, 1, 2, 5, 10, 12, 13, 15, 20, 21, 24, 25, 36, 49, 50, 60, 75.

Dersom borna har eit aktivt forhold til desse tala, skal ikkje assosiasjonane utebli. Til dømes:

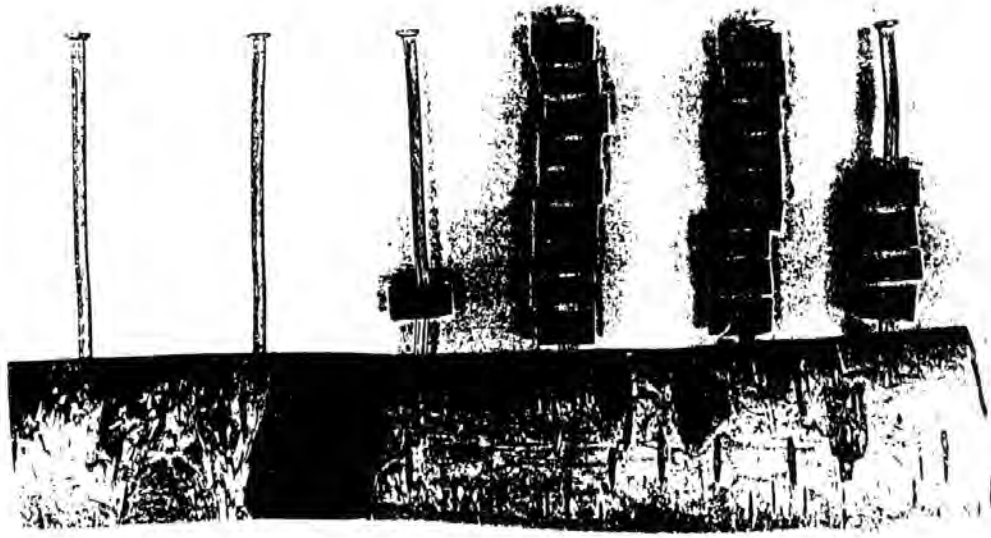
10	assosierast	til	2 x 5
15	"	"	1 1/2 og 1,5
21	"	"	3 veker og 3 x 7
24	"	"	2 x 12 timar
25	"	"	5 x 5 og 1/4 av 100
50	"	"	100 : 2
49	"	"	det kvadratet som er nær 50

Seinare blir 0,7 og 1,4 assosiert med 50 og 200 %, to finurlege, gode knaggar når vi forminskar og forstørrer.
60 og den fantastiske oppløysinga må vi ta med tidleg, 1x60, 2x30, 3x20, 4x15, 5x12 og 6x10.

Frå 3.klasse får dessutan elevane trygge forhold til rekkjene 2x og 1/2 x, dobling og halvering av alle tal, par eller odde. (Seinare brukar vi dette til gonging og deling av alle tal med 5, ref. 5 = 10/2 og 1/5 = 2/10.)
Doblingsrekkja frå 2 til 32 og trekanttala opp til 10 eller 15 har eg også tatt i 3.klasse då dei er så fine å illustrere (musikk og kombinatorikk).
Kvadrattala opp til 144 har vi også hatt mykje glede av, gode knaggar.
Eg prioriterer altså desse knaggane før den tradisjonelle gonge-tabellen og overslagsrekning framfor eksakte svar. Etter kvart utviklar elevane ei god kjensle av kor langt overslaget ligg over eller under rett svar, utifrå dei tilnærmingane til knaggane vi har gjort. Forståing av usikkerhet og overslagsbegrepet utviklast godt gjennom allsidige vege- og måleøvingar.

Takk for følgjet i denne vandringa i plantefelt og småskog. Vi hamna i 3./4. klasse med vyar oppover i klassane. Eg ønskjer å trekkje denne prioriteringa langt oppover i klassane, og i gode stunder er eg heilt trygg på å vere innanfor Mønsterplanen. Likevel treng vi ei oppmuntring av og til:

> Mora som kom og sa, takk for at du har lært Pål å spele kort. Vi måtte kjøpe kortstokk og eg spelar casino kvar kveld.
>
> Vesle Silje som ikkje vil gjere rekneleksa, berre turne. Det var då eg gav det uansvarlege rådet, lat ho sleppe å rekne. Og så møter eg jenta att på bokhandelen med kalkulatoren bak disken, arbeidsveka i 8.kl.. Korleis går det med matematikken? "Beste faget mitt", kjem det med eit lurt smil.



Figur 3

1994 ! Ein trekubbe og 6 stk. 4" spikar. 0-kostnads-læremiddel for alle talsystem. Klipp så mange "bites" du vil med rosesaksa av den gamle hageslangen.

Svein Olai Høyland

Moro med matematikk: Kaprekars konstant

Talet 6174 har ein heilt spesiell eigenskap. Om du først ordnar sifra i fallande rekkefølgje og deretter i stigande rekkefølgje og så subtraherer dei to tala får du:

7641 - 1467 = 6174

Svaret blir talet sjølv! Dette er det einaste firesifra talet som har denne eigenskapen (når ein ser bort frå 0000).

Vidare vil det vere slik at om du startar med eit vilkårleg firesifra tal (ikkje alle sifra like) og gjer same omforminga (ordnar fallande, ordnar stigande, subtraherer), får du eit nytt firesifra tal, som du kan gjenta omforminga på. Etter høgst 7 omformingar kjem du fram til 6174.

Døme: 2412

2412: 4221 - 1224 = 2997
2997: 9972 - 2799 = 7173
7173: 7731 - 1377 = 6354
6354: 6543 - 3456 = 3087
3087: 8730 - 0378 = 8352
8352: 8532 - 2358 = **6174**

For tal under 1000, set du til eit nødvendig antal nullar for å få fire siffer. Dermed skriv vi 0078 i staden for 78.

Talet 6174 er kjent som Kaprekar sin konstant (indisk matematikar). Sjølv vart eg gjort merksam på samanhengen ovanfor av Kjell Bjarne Henden, som eg hadde som lærar i EDB ved Sogndal Gymnas på slutten av 70-talet. Han hadde lese det i marsnummeret av Scientific American frå 1975.

Seinare har eg vist det til barn i 3.-5. klasse. Dei fleste synest det er moro. Enkelte har i følgje foreldra vorte sitjande i timesvis for å prøve å finne tal som det ikkje gjeld for. I samarbeid med Klara Rosendahl synte eg det for 3. klasse ved Søråshøgda skole våren -93. Også her fekk det god mottaking.

Gjennom algoritmen ovanfor kjem vi innom fleire viktige omgrep: Posisjonstalsystem, ordning med omsyn på storleik, algoritmer og ikkje minst subtraksjon.

Dermed er vegen til eit subtraksjonsspel kort. Utstyret er enkelt, berre blyant og papir. To problem må løysast:

1. Finne eit tal å starte med.
2. Passande måte for å gi poeng.

Finne eit tal å starte med.

Det enklaste er å la læraren skrive ei talrekke på tavla. Ein annan måte er å ha 10 lappar. Kvar lapp inneheld eit av sifra 0 til 9. Ved å trekke 4 lappar (med tilbakelegging), vil vi få eit tilfeldig tal. Sjølv er eg svak for følgjande metode:

Kvar spelar vel sitt eige firesifra tal. Dette skriv han ned på eit ark. Arka blir sendt rundt og kvar spelar skriv på sitt tal. Deretter summerer kvar spelar heile talrekka på sitt ark. Får svaret meir enn 4 siffer, tek ein bort det/dei fremste. Dermed vil alle spelarane ha same utgangspunkt.

Døme: 3 spelarar A, B og C som gjer følgjande val:

A: 4312 B: 7217 C: 3122

Arka blir sjåande slik ut:

4312	7217	3122
+ 7217	+ 3122	+ 4312
+ 3122	+ 4312	+ 7217
= 14651	= 14651	= 14651

Felles start for alle blir dermed **4651**. Fordelen med denne metoden er at spelet blir meir variert.

Poengrekning

Poengrekninga kan gjerast på fleire måtar. Ein måte kan vere:

For å få poeng må ein ha gjort alt rett. Spelaren som er først ferdig (og har alt rett) får like mange poeng som der er spelarar. Nummer to får eit poeng mindre, nummer tre får to poeng mindre osv..

La oss sjå på dømet ovanfor. Anta A blir først ferdig, men gjer feil. Deretter blir B ferdig (rett) og til slutt blir C ferdig (rett). Poenga for omgangen blir A: 0, B: 3, C: 2. Eit spel held fram til første spelar når ei viss poenggrense, til dømes 10 poeng.

Som vi ser, må ein rekne rett for å få poeng. Deretter må ein vere rask. For å vektlegge rett rekning, kan ein starte på eit høgare tal for den som blir først ferdig. Vi kan til dømes la spelaren som blir først ferdig, få poeng som svarar til summen av antal spelarar og antal omformingar. Di høgare tal ein startar på, di viktigare er det å rekne rett.

Om nokon skulle meine at dette blir for mykje konkuranse, kan grunnideen nyttast i samband med gruppearbeid. Til dømes kan heile klassen samarbeide om å finne ut kor mange tal mellom 6100 og 6299 som treng 7 omformingar for å kome fram til 6174. Her er det berre fantasien som set grenser for interessante oppgåver.

Kor mange omformingar er nødvendig?

Om vi set til eit nødvendig antal nullar for tal mindre enn 1000, vil der vere 9990 firesiftra tal der ikkje alle sifra er like. Vi undersøker kor mange tal vi kjem fram til 6174 ved ei omforming, to omformingar o.s.v.. Resultatet framstiller vi i tabellen under.

Omformingar	0	1	2	3	4	5	6	7
Antal Tal	1	383	576	2400	1272	1518	1656	2184

Variasjonar

For å variere spelet, kan vi rekne i andre talsystem og med færre eller fleire enn fire siffer. For tosifra tal, er spelet berre definert når grunntalet er 2 (konstanten er 01). For tresifra tal, finst der tilsvarande konstantar når grunntalet er jamnt (Med grunnal 10, blir konstanten 495). Med tre siffer blir midterste siffer i svaret alltid ein mindre enn grunntalet. Når elevane oppdagar dette, vil dei slurve med låninga, slik at denne varianten berre må brukast for å oppdage denne samanhengen.

For 4 eller 5 siffer og grunntal frå 2 til 20, vil spelet **berre** vere definert for kombinasjonane i tabellen under. Vi har og tatt med konstanten og det maksimale antal omformingar som er nødvendig før vi kjem fram.

Antall siffer	Grunntal	Konstant	Maksimale Omformingar
4	5	3 0 3 2	4
4	10	6 1 7 4	7
5	3	2 0 2 1 1	5
5	15	(10) 4 (14) 9 5	13

Dataversjon

Eit firma i Bergen utviklar ein dataversjon av spelet. Interesserte kan ta kontakt med:

PDB A/S
Bredsgården 2E, Bryggen
5003 Bergen
telefon: 55 32 89 60

Det er spesielt ein annan ting som kan få det til å gå rundt for mannfolk. Ein ypparleg lærar eg hadde i "matte" oppe i Sandane fortalde om det på realskulen. 2-pier, det er formelen for å finna lengda på ein sirkel, sa han. Tenk på to pier, så går det rundt. Sjølv ein undermåls elev må kunna læra ein så godt illustrert matematikk.
- Det er fullt lovleg å tenkja på to pier, kom han bort til meg og sa, men berre i dette reknestykket. Fine familiar i Bergen har pier, og på ein stor båt er det mange.
UTDRAG AV REISESKILDRING FRA "RICHARD WITH" AV JOHANNES HELLAND, OS OG FUSAPOSTEN 12.1. 1994

Ole Einar Torkildsen og Christoph Kirfel

Flere tallkuriositeter

I denne lille artikkelen ønsker vi å fortsette ideen fra det forrige nummeret av Tangenten hvor vi presenterte et tallmønster som kan være en liten innspirasjon eller en liten nøtt for lærere eller elever. Før vi presenterer tallmønsteret er det kanskje lurt å repetere "Pascals trekant" som sikkert noen av dere husker.

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Talltrekanten er laget slik at det alltid står ettall i den ytterste søylen helt til venstre og på skrålinjen helt til høyre. Et vilkårlig tall inni trekanten beregnes ved å legge sammen tallet rett over og det tallet som står i etasjen over men ett hakk til venstre. Tallene fra denne trekanten har mange forskjellige anvendelser og Pascals trekant kan regnes som et av de viktigste verktøyene i matematikken. Denne trekanten er spesiet nyttig når vi skal beregne potenser av en sum. F. eks. så er:

$$(x+y)^4 = 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 y + 6 \cdot x^2 y^2 + 4 \cdot x y^3 + 1 \cdot y^4.$$

Her er tallene 1,4,6,4 og 1 hentet fra linje fem i trekanten. Dette gir oss en rask måte å beregne potenser på. Kjenner vi f. eks. potensene til 2, altså

$$1 = 2^0,\ 2 = 2^1,\ = 2^2,\ 8 = 2^3,\ 16 = 2^4,\ 32 = 2^5$$

osv. så er det nå ingen sak å beregne potensene til 3 vha. Pascals trekant. Vi har nemlig

$$\begin{aligned}
3^2 &= (2+1)^2 = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\\
3^3 &= (2+1)^3 = 1\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\\
3^4 &= (2+1)^4 = 1\cdot 2^4 + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\\
3^5 &= (2+1)^5 = 1\cdot 2^5 + 5\cdot 2^4 + 10\cdot 2^3 + 10\cdot 2^2 + 5\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0
\end{aligned}$$

osv. Tallmønsteret som Ole Einar Torkildsen har observert har noe til felles med Pascals trekant. Her kommer det:

$$\begin{aligned}
121 &= \frac{22\cdot 22}{1+2+1}\\
1331 &= \frac{22\cdot 22\cdot 22}{1+3+3+1}\\
14641 &= \frac{22\cdot 22\cdot 22\cdot 22}{1+4+6+4+1}
\end{aligned}$$

Er det mulig å fortsette mønsteret? Når stopper det eventuelt opp? Ser du sammenhengen med Pascals trekant?

Et lite hint til de som står helt fast: Nevnerne i tallmønsteret er alltid summen over en hel rekke i Pascals trekant. Nå er jo tallene i en gitt rekke i trekanten alltid summen av to nabotall i rekken ovenfor. Hvert tall i rekken ovenfor inngår altså to ganger når vi skal legge sammen alle tall i en gitt linje i trekanten med ett unntak og det er det ettallet ytterst til venstre som bare inngår en gang. Til gjengjeld harvi fått et helt nytt tall med i rekken som ikke er sum av elementer i rekken ovenfor og det er ettallet ytterst til høyre. Konklusjonen blir at rekkesummen må bli nøyaktig dobbelt så stor som rekkesummen i den forrige rekken. Siden den første rekken bare består av et ettall får vi intet annet enn potensene av to som rekkesum. Regnestykket til høyre reduseres da til å finne potensene til 11.

Prøv å lage liknende tallmønster selv ved hjelp av potensene til 101 eller 1001 eller helt andre tall. Lykke til med den videre utforskning av tallmønsteret!

Thorkild Thorkildsen

System

Den virkelige matematikken er i bruk utenfor klasserommene. Matematikken er i kraftfull bruk, knyttet til kropp og sjel, overalt hvor folk er i arbeid. Kjære leser, bruk øynene og tankene dine neste gang du ser folk i arbeid utenfor skolen. Snekkeren Thorkild Thorkildsen viser oss hvordan. Fortellingen hans sto som baksidetekst i *Klassekampen,* og vi takker avis og forfatter for tillatelse til å gjengi den.

VI ER sammen om det kamerater, sa Vladi.
Vi andre lente oss mot rekkverket og så utover byen.
På folkeskolen fikk Ragnar Olsen navnet Vladi fordi han løp gode nok sekstimetere og ligna på Vladimir Kutz, russeren som komkurrerte med Zatopek, Vitrinen og Ernst Kruska Larsen på langdistansene den gangen.
Under Cuba-krisa var Vladi på rekruttskolen og lå i NATO-beredskap på Evjemoen. Siden hadde han ikke løpt stort, men han respekterte Russland selv om Vladimir Kuta forlengst var død og Sovjetsystemet hadde gått dukken.
Nå satt Vladi med en kalkulator i snøværet og regna ut hvor mange hammerslag vi ville trenge til det nye dekkebordet.
Dekkebord brukes i systemforskaling. Forskaling er å lage former til betong. Betong er en blanding av sementpulver, sand, vann og småstein. Herda betong tåler trykk , armert betong tåler strekk. Betongvegger er stående betong med rom på hver side. Et betongdekke er hengende betong med golv oppå og tak under.
Egenvekta på betong er 2,2. Vanlige betongdekker i boligblokker og kontorbygg veier et halvt tonn pr. kvadratmeter.
Dekkeforskaling er å lage midlertidige golv med ekstra bjelker og stolper som skal bære vekta av betongen til den herder og kan bære seg sjøl. Da tar du ned forskalinga og går videre.
Dekkebord er dekkeforskaling i svære sammenhengende konstruksjoner. De lages av aluminiumsdragere, skråstag og stillbare metallbein, ser ut omtrent som helikopterplattformer og bukseres på plass med kran.
Når et betongdekke er støpt og har grovherda, jekkes dekkebordet litt ned, trilles ut på rullebukker og heises vekk med krana.

Av og til må dekkebordet ganske langt ut på kanten før ddet er mulig å huke fast krankrokene. Når et dekkebord ruller for langt ut, for eksempel fra femte etasje, flyter bordet ut i lufta som en skada jumbojet og tar korteste vei ned.

Ragnar Vladi Olsen satt med lillefingeren ut av et hull i votten og prøvde å treffe tastene på lommekalkulatoren. Vi andre sto ved rekkverket og kikka ned på dekkebordet som lå som et flyvrak fem etasjer under oss.

-Hundreogti kvadratmeters dekke, sa Vladi. -Finerplatene er tre meter ganger to femogtjue. Det gir søtten plater på dekkebordet. Bjelkelaget skal ligge med maks førti centimeter mellom bjelkene ...

- Der kommer purken, sa Frank læregutten. Det var han som hadde vært for ivrig da vi skulle trille ut dekkebordet.

Under oss kom politibilen kjørende inn fra gata. Formannen og byggelederen tok imot dem. Politifolka kom ut av bilen og ble stående og se på det havarerte dekkebordet i snøværet.

-Etter forskriftene skal det være ti centimeter mellom spikeren i dekkebordplatene, sa Vladi. -Det blir hundreognitti spiker i plata. Noe over tre tusen i bordet. Åtte slag på spikeren gir ...

-Åtte slag på spikeren!?

Frank som var ung og rask, snudde seg og så på Vladi:

-Hvem faen er det som trenger åtte slag på spikeren?

-Fordi du må bruke snodd spiker, svarte Vladi. - Det er den eneste som gir godt nok feste for platene. Å slå tretoms snodd spiker gjennom en toogtjue millimeters spesialherda finerplate og to tommer ned i bjelken under, tar gjennomsnittlig åtte hammerslag. Bare prøv.

-Helvete heller.

-Inklusive feilslag. Et slag er et slag, selvom du bommer.

-Right, sa Otto Bokser'n. - Jeg husker en gang ... .

-Tre tusen spiker i bordet er bortimot femogtjuetusen hammerslag, fortsatte Vladi.

-Med den samme armen hele tida. Det blir som å hinke maraton.

-Eller å bokse tolv runder med en arm, sa Otto.

-Skal jeg snekre hele det jævla bordet aleine? sa Frank læregutten.

-Det er lagets ansvar, sa Vladi.

Vi kunne se at formannen vinka opp til oss nede fra fortauet.

-De vil at vi skal komma ned, sa Vladi.

-Blir det spørsmål, var vi sammen om det.

****

Christoph Kirfel

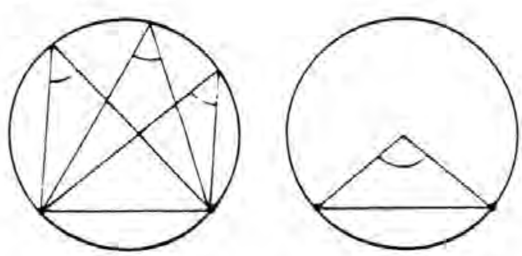
Eksperimenter med periferivinkler

Christoph Kirfel har skrevet en rekke artikler om eksperimentell matematikkundervisning for TANGENTEN. Her følger eksperimenter med periferivinkler. Kirfel publiserer disse og andre artikler om eksperimenter i bokform til høsten.

En *periferivinkel* er en vinkel hvis topp ligger på en sirkelperiferi, mens en *sentralvinkel* har toppunktet sitt i sirkelens sentrum. Periferivinkelsatsen forteller oss nå følgende.

Alle periferivinkler som spenner over samme bue i en sirkel er like store. Dessuten er de nøyaktig halvparten så store som den tilhørende sentralvinkel.

Tegningen under forklarer både begrepene og forholdene på en tilstrekkelig måte.

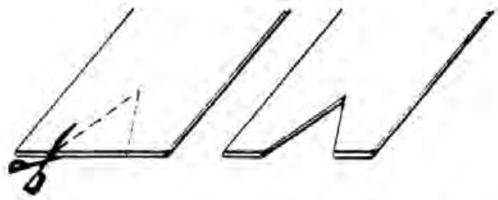


Selve periferivinkelsatsen hører vel helst hjemme i gymnaspensumet. Men her er vi ikke interessert i satsen eller beviset av den. Vi vil snarere beskrive en rekke med "eksperimenter" som egner seg på et mye lavere klassetrinn i skolen. Disse eksperimentene kan allikevel føre frem til den samme innsikt som ligger i selveste periferivinkelsatsen.

Ingredienser:

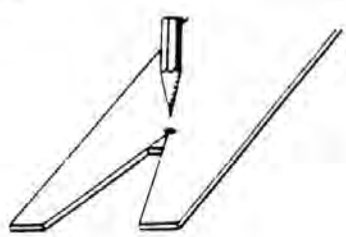
- En stor "arbeidsplate" av tre
- En del spiker (eller nåler) og en hammer
- Litt fantasi og overbærenhet med forfatteren
- Noen store ark (helst miljøpapir)
- Periferivinkelsatsen (kan sløyfes)
- Blyant
- Litt stiv pappkartong og en saks

Legg et stort ark på arbeidsplaten og slå to spikre (avstand omtrent 6cm) gjennom arket inn i platen. Vi kaller spikrene for A og B. Tegn så en vinkel med lange ben på kantongen og klipp den ut.

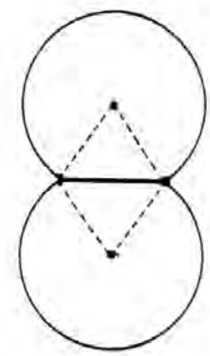


Legg kartongen på arbeidsplaten slik at vinkelbena berører spikerne. Beveg nå kartongen, men pass på at vinkelbena hele tiden er borti spikrene. Følg med kurven som toppunktet tegner.

Det kan være lurt å klippe ut en ny vinkel



der topptrekanten skal stå igjen. Da kan vi stikke et hull gjennom toppunktet og feste blyanten der slik at den kan tegne opp toppunktets vandring over arket. Forsiktig press på blyanten i retning av spikerne garanterer at vinkelbena hele tiden berører spikerne. På den andre siden av spikerne kan vi tegne opp den andre halvpart av kurven som ligger symmetrisk til den første med hensyn til linjen AB. Vi får altså et slags åttetall som kurve. Her er altså alle punkter samlet hvorfra linjestykket $\overline{AB}$ sees under samme vinkel, nemlig den vi klippet ut. Kurven består av to sirkelbuer som har AB som symmetriakse.

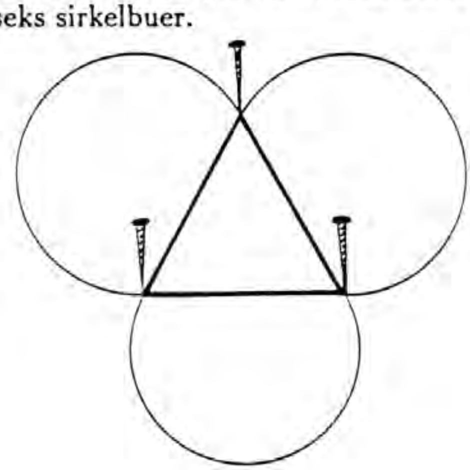


På dette punktet kan vi starte **eksperimenteringen.**

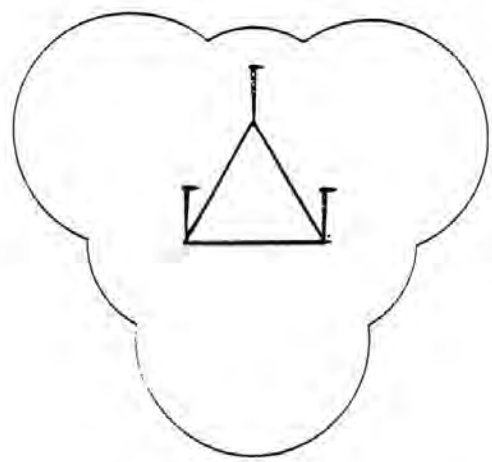
- Vi kan velge en ny avstand mellom spikrene A og B og tegne opp den tilhørende kurven. Hvordan forandrer radiusen til sirkelbuene seg når lengden $|AB|$ vokser?
- Hva skjer om vi velger større vinkler og klipper ut pappskiver ved økende vinkelåpning. La elevene "gjette" på resultatet før de gjennomfører eksperimentet for å skjerpe forestillingskraften.
- Når vinkelåpningen er nøyaktig 90 grader hender det noe spesielt. Kan du finne ut hva det er?
- Vi kan også studere bevegelsen til midtpunktene M_1 og M_2 i sirkelbuene i forhold til hvor stor vinkel

vi valgte. Midtpunktene beveger seg
mot hverandre når vinkelåpning nærmer seg en spesiell verdi. De vil møtes halvveis mellom A og B når vinkelen har denne spesielle åpningen og deretter (altså for større vinkelverdier) skifter de til og med side og vandrer fra hverandre igjen. Kan du finne den spesielle vinkelverdien?

Slår vi tre istedenfor to spikre inn i arbeidsplaten slik at disse danner en trekant og kjører vi så rundt denne med vår pappvinkel slik at vinkelbena forsatt alltid er bort i minst to spikre kan vi oppleve mange spennende overraskelser. Pass på at vinkelbena er lange nok. Selv når vi velger den enkleste av alle mulighetene, en likesidet trekant, kan vinkeltoppens kurve se meget forskjellig ut avhengig av hvilken pappvinkel det er snakk om. Noen ganger vil figuren bare bestå av tre buer. Noen ganger vil figuren bestå av seks sirkelbuer.



- Kan du finne ut for hvilken vinkel det skifter?
- Klarer du å finne ut hvorfor det er slik?
- Hvor ligger sentrene for sirkelbuene og hvor stor er radiene? (Kvalitative betraktninger kan her være vanskelig nok.)
- Klarer du å forutsi hvor overgangen fra den ene sirkelbuen til den andre vil ligge?



Arbeider en til og med med en generell trekant med tre forskjellige vinkler så kan en få et enda større mangfold av kurver for pappvinkelens toppunkt. Den kan ha tre, fire, fem eller seks bestandeler alt etter hvor stor vinkelen er i forhold til trekantvinklene.

- Hold deg til en trekant. For hvilke

vinkler vil kurven få en ny tilleggsbue?

- Hvorfor er det slik?
- Kan du forutsi hvor mange sirkelbuer en slik figur vil få når du bare kjenner vinklene i trekanten og pappvinkelen?
- Hvordan er forholdene når to trekanter er formlike?

Utvider vi til fir-, fem- og sekskanter er variasjonsmulighetene nærmest ubegrenset og alle elever kan få tegne hver sin personlige kurve med utgangspunkt i samme sekskant, bare hver bruker sin private pappvinkel. Bruk gjerne også gjenstander fra hverdagslivet (fyrstykkeske, penalhus) som utgangspunkt for "vinkelfigurer".

Istedenfor å bruke papp der vinkelen er klipt ut kan vi og benytte oss av den motsatte konstruksjon. Klipp ut en ny pappvinkel som på figuren. Rundt toppunktet la vi stå igjen en liten "krans" med et hull til markøren. Her er det lett å tegne toppunktets bane når vi presser vinkelpappen mot spikrene vha. blyanten.

Innleiing

Hausten 1992 starta Sogndal lærarhøgskule desentralisert lærarutdanning i Florø. Det vart teke opp 20 førskulestudentar og 20 allmennstudentar. Det var eit mål at studentane skulle ha noko av undervisinga felles. Førskulestudentane får matematikk som faglegpedagogisk kurs (2 vekttal) og allmennstudentane det obligatoriske grunnkurset Matematikk 1. Med bakgrunn i den skulepolitiske debatten er dette ein spanande organiseringsmodell, og undervisingsarbeidet vert prega av å vera eit utviklingsarbeid. I denne artikkelen vil eg skriva om korleis undervisinga vert organisert og om korleis denne organiseringa kan koplast mot praksisfeltet som nødvendigvis ikkje er den tradisjonelle øvingspraksisen.

Med omsyn til studieorganisering gjorde Høgskulerådet vedtak om kvar matematikkdelen skulle vera plassert i studiet:

Vårsemesteret 93:
Om talomgrepet hjå born og arbeidsformer i matematikk.
12 timar undervising i 40-gruppe.
Vårsemesteret 95:
2 vekttal fellesundervising.
Haustsemesteret 95:
3 vekttal undervising for allmennstudentane.

Observasjonar

I utganspunktet var eg skeptisk til innføringskurset i tallære og arbeidsformer (våren 93), ettersom studiet var spreitt over lang tid. Den pedagogiske grunngjevinga for det korte kurset var at alle studentane det første studieåret skulle ha observasjonspraksis i barnehagen. Med bakgrunn i det korte innføringskurset skulle studentane gje skriftleg tilbakemelding på ein

Jon Henjum

Matematikk og desentralisert lærarutdanning

TANGENTEN vil i tiden fremover presentere matematikkundervisningen ved en del lærerhøgskoler. Vi starter opp med SOGNDAL lærerhøgskole, og ønsker Jon Henjum velkommen som bidragsyter til bladet.

---

observasjon og observasjonane skulle vera eit utgangspunkt for undervising i fagdidaktikk og fagmetodikk. Tilbakemeldingane frå studentane var gode, og skepsisen snudde til optimisme. Her er nokre av observasjonane:

22 MARS 1992

Studenten observerte dette i ei samlingsstund 22 mars 1992. Då kom denne samtalen mellom barnehagessistenten og eitt av borna medan borna ser på kalenderen:

A: Kva dato har me i dag?
B: Det er den 4.
A: Nei
B: Jau, for 2 og 2 er 4
A: Når to total står saman heiter det 22.

EIN, TO, MANGE

Ingen av borna var fylt tre år på denne avdelinga, og borna var på nivået "ein, to, mange" eller "ein, to, tolv, atten".
Ei jente på to og ein vaksen sette ut klossar til eit "liksom-tog". Jenta starta å telja: "1, 2, 3" og korresponderte peikinga med det ho sa. Det er rundt 4 at det vart mange. Då peikar ho på fleire klossar samstundes som ho seier "4".
Ei jente på 2 år leikar med stabelkoppar. Det er 8 koppar i gradert storleik med 4 fargar. Jenta sette koppane opp etter farge. Ho talde koppane slik:
"1, 2", "1, 2" ,"1, 2", "1, 2". Ho talde 1 og 2 som same farge.
Eg prøvde simulera situasjonen seinare for å finna ut korleis jenta tenkte.
Det fekk eg ikkje til.

TRE STEINAR FOR DEKKET

Ein gut i førskulegruppa var ute og "vaska dekk". Eg gjekk bort og spurde kva han gjorde på. Samtalen mellom meg og han vart slik:

Barn: "eg vaskar dekk...... det kostar tre steinar for kvart dekk. Skal du ha to dekk kostar det seks steinar"
Eg: "Eg skal ha tre dekk. Kva kostar det?"
Barn: "Det kostar ni steinar"
Eg: "Nei, forresten, eg må ha fire dekk.

Ein tenkjepause på 4-5 sekund og svaret kjem:
"Då skal du betala 12 steinar," sa han.

YATZY

Det vart spela Yatzy på førskulen. Barnet kasta terningane og fekk fire trearar. Svaret 12 kom nokså fort, og eg spurde om ho kunne telja så fort.

Eg talde ikkje, eg såg at 3 + 3 = 6 og 6 + 6 = 12

Seinare kasta barnet tre firarar og tok fire + fire "til sides" og la fire til.

Svaret vart tolv.

Eg registrerte utanom Yatzy-spelinga at barnet dobla slik:

5 + 5 = 10
10+10 = 20
4 + 4 = 8

Seinare kasta barnet 6 + 6 + 6 + 6 med 24 som svar. Ho kom fram til svaret med å dobla seks og tolv.

Fleire av barna hadde spela ein del Yatzy og dei hadde eit visuelt bilete av ein, to.......seks ut frå kva dei hadde sett på terningen.

Eg registrerte at ein del barn talde augo på terningane, og at dette vart 1-1 øving for dei.

TRE DOKKER RUNDT EIT BORD

Dette hende ein dag dei "store" borna leika fritt og dei minste sov. Det var to gutar og ei jente som leika.

Ei av jentene kledde på ei dokke og freista setja dokka attmed eit bord. Dokka var for **lita** og bordet for **stort,** så dette gjekk litt "skeivt". Jenta fekk hjelp og problemet vart løyst ved at dokka vart plassert ståande attmed bordet. **Straks** etterpå kom dei to andre og plasserte kvar sine dokker til liks med den andre jenta.

Bordet til dokkene skulle dekkjast. Alle tre henta både **fat, koppar og skeier** så det vart litt rot. Etterkvart som dei dekte bordet, fann dei ut kva som var **for mykje** som vart plassert til sides på bordet. Dei enda med eit fat, ei skei og ein kopp til kvar av dei tre dokkene.

Studentane har gjennom eigne og andre sine observasjonar fått innsikt i korleis borna tenkjer, og dei har kunnskap i matematikk før dei tek til på skulen. Det vert då viktig å vita **kva** kunnskap borna har, og at studentane får kunnskap om kva kunnskap borna har. Eg trur at dette er eit forsømt emne i lærarutdanninga, og det må vera eit mål for matematikkundervisinga av studentane og visa korleis denne kunnskapen kan nyttast til å heva matematikkkunnskapen til borna. Dette er i tråd med M87 som seier noko om lærestoff og progresjon. På side 194 kan ein lesa: *Barn som begynner på skolen, har alt fått visse matematiske kunnskapar og omgrep. Dei har ofte vanskar med å setje ord på det dei veit, og kjenner lite til samanhengar. Det vert ei oppgåve for skolen å ta vare på og systematisere den matematiske kunnskapen elevene alt har.* Den kombinerte utdanninga gjev høve til å sjå barnet som del av førskulealder og skulealder, og sjå dette som ein heilskap framfor det tradisjonnelle og ofte dramatiske skiljet i arbeidsform og innhald. Som tilsett i høgskulesystemet oppfattar eg det som ei klar kompetanseheving av eiga undervising å få vera med og undervisa studentar som tek utgangspunkt i observasjonar av barn og kopla dette til didaktikk og metodikkundervising. Eg vil ikkje kommentera i detalj korleis obsevasjonane kan brukast i undervisinga, men gje nokre stikkord.

22 mars 1992	Matematikk og kommunikasjon.
Ein, to, mange	Utvikling av talomgrepet.

Tre steinar for dekket	Multiplikasjon og addisjon.
Yatzy	Strategi for "addisjonstabellen".
Tre dokker rundt eit bord	Leik som grunnlag for læring.

Fagplanarbeid

Det var rammeplan for allmennlærarutdanning som var utgangspunkt for arbeidet med fagplanarbeidet. Då departementet sa ja til desentralisert fellesundervising i Florø, gjorde dei dette utan at det var laga rammeplan for matematikk i førskulelærarutdanninga. Seinare har det vore laga utkast til rammeplan i matematikk på førskulelærarlina med plass til 2 vekttal. Dette høver godt med vår "forkanttenking," og me håpar at fleire brikker fell på plass når stortingsmeldinga om 6-åringen kjem. Difor har det ikkje vore skrive ein endeleg fagplan, fordi vi ønskjer laga han så nær opp til den framtidige organiseringa av barnehage/skule som mogeleg. Dette gjer at me arbeider med planlegging av matematikkundervising med tanke på born i aldersgruppa 3-10 år, og at det ikkje er skilnad i fagleg innhald på dei to vekttala med fellesundervising for førskule- og allmennstudentar. Den sentrale faglege delen i kurset vil vera tallære,fagdidaktikk og fagmetodikk. Konsekvensen av ei slik organisering er at grunnkurset Matematikk 1 vert delt i to modular for allmennstudentane :

Matematikk 1A 2 vekttal
Fellesundervising med førskulestudentane
Matematikk 1B 3 vekttal
Resten av Matematikk 1

Evaluering i Matematikk 1 ved Sogndal lærarhøgskule vert bestemt ut frå denne vektinga:

Gruppearbeid 1	vekt 1
Gruppearbeid 2	vekt 1
Individuell skr prøve	vekt 3

Med utgangspunkt i denne vektinga og at studentane bør ha ein felles prøve i fellesstoffet, er det naturleg med denne vektinga:

Matematikk 1A	
Individuell felles skr prøve	vekt 1
Gruppearbeid	vekt 1
Matematikk 1B	
Individuell skr prøve	vekt 2
Gruppearbeid	vekt 1

Allmennstudentane får då få 2 skriftlege prøvar, men ein endeleg karakter i Matematikk 1 avhengig av vektinga ovanfor. Det kan verka noko rart å tenkja evaluering før fagplanane er vedtekne, men det har ei prinsipiell side som er vesentleg:

Studentane skal evaluerast med ein lik prøve i fellesstoffet.
Allmennstudentane på den desentraliserte undervisinga skal ha ei evalueringsform som ikkje vik for mykje av frå dei andre studentane ved SLH.

Organisering av undervising i matematikk 1A

Studentane vil få undervising dels i 40-gruppe, 20-gruppe eller rettleiingleiing i mindre grupper. Gruppene er alltid samansett av førskule- og allmennstudentar. Delar av undervisinga vert knytt opp mot praktisk arbeid med målgruppa, borna. Dette er ikkje tenkt lagt til praksisperioden, men mot besøksbarnehagar og besøksskular som er opne for undervisingsopplegg på lærarutdanninga sine premissar.

Eg har god røynsle frå denne typen undervising på halvårseininga "Overgangen barnehage skule" og naturfag på førskulelærarlina. Tidsramma for undervisinga, som eg vel å kalla laborativ undervising, kan variera frå ein skuletime til ein heil dag. Studentane får rettleiing før dei prøver ut opplegget, og den praktiske gjennomføringa vert drøfta dels i gruppe og dels i plenum. Døme på tidlegare oppgåver:

1. Geitekillingen som kunne telja til ti.
   Dramatisering med matematikk som delmål.
2. Kva veit førskuleborn om multiplikasjon?
3. Hovudemnet målingar i 1. klasse.
   Praktiske elevaktivitetar.

I Florø har skulesjefen organisert ei **nettverksgruppe** av førskulelærarar og 1.klasselærarar som arbeider med pedagogiske problemstillingar for 6-åringar og 1. klassingar. Eg har gitt dagskurs i matematikk og fått positive tilbakemeldingar frå kursdeltakarane om at dei ønskjer å vera "vertar" for studentane for utprøving av idear. Siktemålet med nettverksgruppa er samarbeid i overgangen skule-barnehage og eg trur at dette seinare vil gå over i ein diskusjon om 4-9 års pedagogikk til liks med den desentraliserte lærarutdanninga. Ved eit samarbeid mellom nettverksgruppa i Florø og lærarutdanninga kan ein kopla den laborative arbeidsforma til studentane mot ei målretta etterutdanning av tilsette i barnehage og skule. Eg kan tenkja meg denne modellen for samarbeid:

1. Felles førelesingar for studentar og deltakarar i nettverksgruppa.
2. Utprøving i barnehagar/skular av konkrete opplegg.
3. Tilbakemelding/oppsummering som ein felles aktivitet mellom studentar og nettverksgruppa.

Oppsummering

Den desentraliserte lærarutdanninga i Florø tek sikte på å gje førskulelærarar og allmennlærarar felles undervising i matematikk med born i aldersgruppa 4 - 9 år som målgruppe. Undervisingsforma er prega av å vera prega av å vera eit utviklingsarbeid med utgangspunkt i observasjonar som grunnlag for didaktikk- og metodikkundervisinga. Delar av undervisinga vert kopla mot ei nettverksgruppe av førskulelærarar og allmennlærarar. Dette er eit direkte resultat av den pedagogiske og samfunnspolitiske debatten om korleis skuledagen skal organiserast, og gir matematikkfaget ein unik sjanse til kompetanseheving hjå både studentar og undervisingspersonale på alle nivå, som vonleg vil utvikla matematikk som undervisingsfag.

Matematikkdidaktikk hovedfag

Nytt studium i Kristiansand

Fra høsten 1994 starter et studietilbud i matematikkdidaktikk i Kristiansand. Det går fram til hovedfag – altså til et *Masters Degree* nivå – og det gis ved den nye Høgskolen i Agder, der Agder distriktshøgskole og Kristiansand lærerhøgskole skal inngå sammen med de øvrige høgskolen i Agder.

Studiets innhold er matematikkfaget sett i en undervisningssammenheng, og det tar opp tema om læring, undervisning og formidling av matematikk på ulike nivåer i skolen, inkludert voksenopplæring og lærerutdanning. Studiet gir en fordypning i fagområdet matematikkdidaktikk.

Dette studiet er et tilbud for studenter som ønsker å styrke sin faglige og fagmetodiske kompetanse i matematikk med tanke på lærerprofesjonen og som ønsker å ta en topputdanning med tanke på videre arbeid med praktisk matematikkundervisning eller utviklingsarbeid i matematikkfaget. Det er aktuelt for lærere og fagveiledere innenfor utdanningssystemet, lærerutdanning inkludert. Studiet vil også gi grunnlag for videre forskning innenfor matematikkens didaktikk.

Målet med utdanningstilbudet er

* å *heve kompetansen* innen matematikkundervisning i undervisningssystemet
* å dyktiggjøre for *praktisk arbeid* og gi et vidt perspektiv på dette arbeidet
* å *utvikle ny kunnskap* om matematikkundervisning, muligheter og rammebetingelser, gjennom forskning
* å *formidle* forskningsresultater gjennom rapporter, seminarer og etterutdanningskurs, samt ved å medvirke til å utvikle materiell som lærebøker, oppgaver og dataprogrammer
* å utnytte en *internasjonal kontaktflate* mot det som skjer innenfor matematikkdidaktikk i internasjonal sammenheng – med tanke på utvikling og forskning
* å ta opp spørsmål som gjelder *matematikkens stilling* og fagplaner i utdanningssystemet

Studiet i matematikkdidaktikk ligger innholdsmessig langs disse hovedlinjene:

* Elevers begrepsutvikling og teorier om læring. Affektive sider og holdninger til matematikk. Problemløsning og utforsking. Klasseromsforskning.
* Matematikkens utvikling og matematikkens historie. Perspektiv på og idekilde for undervisning.
* Matematiske modeller, bruk av matematikk og matematikk som et redskapsfag. Pedagogiske muligheter og konsekvenser av den teknologiske utviklingen.

Interesserte kan vende seg til Styringsgruppa for hovedfag i matematikkdidaktikk, ved høgskoledosent Trygve Breiteig, Kristiansand lærerhøgskole, N-4604 Kristiansand, telefon +47 38 14 94 23, Email: trygveb@klh.no.

Hovedfagsstudiet i Bergen

Bergen lærerhøgskole og Universitetet i Bergen har nå begynt et formelt samarbeid om å utvikle hovedfag i praktisk pedagogikk. Det vil bli mulig å ta matematikk fagdidaktikk som fordypningsenheten innen dette hovedfaget. Går det etter planen vil en kunne starte hovedfagsstudiet høsten 1995.

*****

NOMAD

NOMAD, det nye nordiske forskningstidsskriftet for matematikkundervisning, har kommet med sitt første nummer. Det inneholdt bl.a. artikler av Ole Björkqvist om Social konstruktivism som grund for matematikundervisning, Morten Blomhøj om Modellerings betydning for tilegnelsen av matematiske begreper og Inger Wistedt om Elevers svårigheter att formulera matematiska problem.
Prisen for 1993- og 1994 årgangen, i alt 6 nummer, er noe mer enn for Tangenten, 480 Sv. kr.
Bestilling sendes NOMAD, Box 1010, S-431 26 Mölndal, fax 46 31 773 2080.

*****

Forfatteradresser dette nummer

Gard Brekke, Telemark lærerhøgskole, 3670 Notodden
Trygve Breiteig, Kristiansand lærerhøgskole, 4600 Kristiansand
Svein H. Torkildsen, Samfundets skole, Posebyen, 4602 Kristiansand
Magne Holmin, Vikebygs skule, 6100 Volda
Svein Olai Høyland, Bergen Ingeniørhøgskole, 5000 Bergen
Ole Einar Torkildsen, Institutt for praktisk pedagogikk, Universitetet i Bergen, 5020 Bergen
Christoph Kirfel, Bergen lærerhøgskole
Jon Henjum, Sogndal lærerhøgskole, 5800 Sogndal