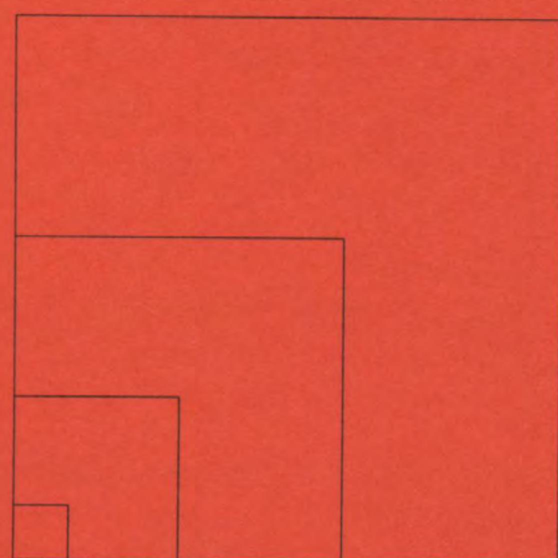
TANGENTEN

TANGENTEN

TIDSSKRIFT FOR MATEMATIKK

NR. 2 1994 5. ÅRGANG



$$(1+2+3+4)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3$$

Av innholdet:

Matematikkundervisning og internasjonalisering - hva er det egentlig som holder på å skje? Når studentene tar tallbegrep og tallsystem for gitt. Geometri i grunnskulen. Utforsking, tal og talmønster. Tallkuriositeter

RETURADRESSE:
CASPAR-TANGENTEN
Boks 2966 - 5030 LANDÅS

Innhold

Forfatteradresser dette nummer

Marit Johnsen Høines og Bjørg Kristin Selvik, Bergen lærerhøgskole, 5030 Landås
Nils Johan Kjøsnes, Trondheim lærerhøgskole, Breidablikkveien, 7000 Trondheim
Ivar Lotsberg, Volda lærerhøgskole, 6700 Volda
Christoph Kirfel, Bergen lærerhøgskolem 5030 Landås
Trygve Breiteig, Kristiansand lærerhøgskole, 4600 Kristiansand

---

MASTER TRYKK OG KOPI A.S

Marit Johnsen Høines og Bjørg Kristin Selvik

Matematikkundervisning og internasjonalisering - hva er det som egentlig er iferd med å skje?

Artikkelen bygger på et foredrag holdt på Nordisk matematikkonferanse i Åbo, Finland i august 1993.

Det skjer ting. "Målrettet satsing" er godord. Myndighetene ønsker å få fart på matematikkundervisningen. Satsingen har en hovedintensjon: "Å heve kunnskapsnivået i skolen". Vi går inn i et stadig tettere internasjonalt samarbeid og skal være konkurransedyktige. Arbeidet skal få direkte virkning i skolen. Det utvikles planer og tester. Vi er med i TIMSS[1] og har fått KIM.[2] Det har vært en markert økning i antall hovedfags- og doktorgradsarbeider de senere år. Det er sannsynlig at vi vil få en storstilt etterutdanning av lærere. Lite vet vi, men ett tror vi helt sikkert: vi vil få en anderledes mønsterplan i matematikk om ganske få år.
Tiden er preget av krisestemning, men også optimisme: "Nå skal vi ordne opp!" Tiden er preget av usikkerhet og uro: "Hva er det egentlig som er i ferd med å skje?"
Lærere utsettes for negativ påvirkning i denne perioden: De får signaler om at kvaliteten er dårlig, deres fagkompetanse trekkes i tvil. Samfunnet krever strengere styring med arbeidstiden og med undervisningen. De utsettes for mistillit fra offentligheten. Til tider understrekes mistilliten av fagmiljøene. Lærere får inntrykk av at det skal foregå endringer, men hvordan og hvilken rolle de selv skal spille i denne endringsprosessen er uklar. Reformdiskusjonene foregår over hodet på lærerne.

Tradisjonen utvikles gjennom en interaksjon mellom internasjonale strømninger og aktuelle motkulturer.
Et kjennetegn ved miljøene våre er at vi er og har vært rettet utover mot internasjonale fagmiljø. "På godt og vondt", vil mange si. "Det starter i Amerika, kommer til Sverige og da kommer det selvsagt til Norge". Internasjonale strømninger eller bølger betraktes ofte som noe vi **må** være med på enten vi vil eller ei.
Den moderne matematikken på 70-tallet er et tydelig eksempel på en slik bølge. Mengdelære-terminologien oversvømte lærebøker, lærere og elever. Vi opplevde det som om matematikkundervisningen fikk ny giv. Læreplaner ble endret. Vi fikk nye lærebøker. Nytt strukturert konkretiseringsmateriell ble produsert og kjøpt inn til skolene. Lærerne måtte gå på kurs. Selv foreldrene gikk på kurs. Vi fikk nytt språk i matetmatikktimene. Det hele så ut til å bli

[1] Third International Mathematics and Science Study (TANGENTEN nr.2 1993)

[2] Kvalitet i matematikkundervisningen. (TANGENTEN nr.1 1994)

strømlinjeformet. Matematikkundervisningen skulle bli ensartet, fra klasserom til klasserom, fra skole til skole, fra bygd til by, fra land til land. Optimismen og investeringslysten var stor. Vi var mange som trodde at vi på denne måten fikk lært så mange som mulig matematikk! Åpnet vi øyne og ører, fant vi tegn på at at miljøet ikke var så ensartet og strømlinjeformet som det kunne gi inntrykk av. Vi husker Magnhild, den vanlige norske læreren som protesterte: "Dette gjør jeg ikke. Jeg lærer ikke ungene noe jeg selv ikke forstår og som jeg ikke skjønner vitsen med. Før dere kan overbevise meg om at ungene blir flinkere til å regne vanlige regnestykker, til å arbeide med praktisk regning, så fortsetter jeg å undervise slik jeg har gjort!" "Men du må, Magnhild," sa vi, "lærebøkene er laget slik. Du kan ikke velge dem bort." "Jeg gjør det i alle fall så lite som mulig. Jeg lærer dem de ordene de må kunne for å arbeide i bøkene, men jeg har lagt merke til at jeg slett ikke trenger å si "mengder "og "elementer" når jeg skal hjelpe ungene å løse oppgavene. Jeg kan bruke det gamle språket mitt. Vi kan lage regnefortellinger til tegningene i disse bøkene også! Og hva med de svake elevene? Det er ikke mange som får bruk for alle fremmed-ordene dine. **Du** kan ikke bestemme hvordan jeg skal snakke!"

Visst irriterte vi oss over Magnhild, umulig og bakstreversk var hun. Reaksjonær. Kjerringa mot strømmen. Vi var glade for at kollegene hennes bare så på henne, de sa ingen ting. Vi fortsatte optimistisk kursingen, matematikkundervisningen hadde fått en ny giv. Invendinger fra en del matematikere ble også oversett, "bølgen" var sterk.
All innsats til tross, mengdelærespråket ble aldri den jevne lærers språk. Det er som om den norske lærer ikke lar seg strømlinjeforme, de prostesterer kanskje ikke høylytt slik Magnhild gjorde det. De mumler sine tanker og gjør som de vil. I dag ser vi at vi forårsaket fremmedgjøring- utrygghet- forvirring. Hva om vi hadde væn klokere, litt modigere og hatt respekt for lærerkulturen, den forståelsen og innsikten som fantes her? I ettertid kan vi være glade for at den fantes, som ballast slik at ikke pendelen slo skikkelig ut. Hadde vi hatt respekt for lærerne, ville de kanskje kjørt sin tradisjon fram i et stoltere løp. Vi overså potensialet som bodde i kulturen deres. Den var likevel avgjørende.

Motkultur
70-tallets moderne matematikk brukes som illustrasjon. Vi tar del i de internasjonale strømningene. Fagmiljøer utvikler et stadig tettere internasjonalt kontaktnett. Når vi tar opp i oss (eller kanskje vi har lyst til å si: er med på å utvikle) strømningene, tar miljøene våre på en eller annen måte stilling til dem. Noe kopierer vi, noe omformer vi, noe utvikler vi og noe tar vi avstand fra. Det er vel slik ulike strømninger får sin "nordiske profil", en profil som utvikles gjennom strømningens møte med etablerte motkulturer.
Vi bruker ordet motkultur som betegnelse på kulturer som går i møte med strømningene og som er bestemmende for hvordan den nordiske profilen blir. Det er aktuelt å stille spørsmål ved om vi har motkulturer som er aktive og sterke i møte med dagens internasjonale strømninger.

Når vi iakttar 70-årenes moderne matematikk-invasjon, er vår konklusjon at fagmiljøet sammensatt av læreplanutviklere, lærebokforfattere, fagdidaktikere, lærerutdannere, fagkonsulenter... neppe innehadde sterke motkulturer. Motkulturen fant vi heller hos de vanlige lærerne. Det var deres reaksjon som gjorde at mengdelæreterminologien aldri ble en del av den norske elevens språk. Det var ikke vanskelig for den norske skolen å kvitte seg med trenden, den hadde aldri fått skikkelig fotfeste. Det norske klasserommet viste seg

motstandsdyktig! Vi kan kritisere fagmiljøet for ikke å spille på lag med dem og hjelpe dem til å utvikle en enda sterkere motkultur. En lyttet knapt, hadde liten respekt for verdiene i kulturen.
Når vi iakttar internasjonale strømninger som ser ut til å få betydning for Norge og Norden i årene framover, ser vi det mer aktuelt enn noensinne å spørre: Hva karakteriserer "matematikkundervisningen i norden"? Har vi verdier som det er viktig å ta vare på når vi utvikler vår beredskap? Har vi sterke motkulturer? Vi trenger bevisst forhold til motkulturene, ikke for å isolere oss når det gjelder de internasjonale strømningene, men for å håndtere dem best mulig med respekt for målsettingene i egne miljøer. Noe skal vi ta opp i oss, noe skal vi omforme og skape, noe skal vi avvise.

Hva er så typisk nordisk?
Når vi ser på skole/undervisning i Norge, erfarer vi snart at det er tuftet på et felles nordisk grunnsyn. Vi forsøker å beskrive noen av grunntrekkene:
Grunnskolelærerne i Norden er ofte almennlærere. De underviser i matematikk som ett av sine fag og er i større grad *pedagoger* enn *matematikk-pedagoger*. De underviser barna over flere år. Elevene møter *matematikk-lærere* når de blir eldre. Vi ser svakheter og styrker i dette systemet, vi ville nok ønske oss at lærerne hadde en sterkere matematikk-faglig kompetanse. Men skal vi beskrive de mest grunnleggende trekkene ved skole/undervisning, er det naturlig å se dette fra et "generelt pedagogisk ståsted":
* Enhetsskoletanken er en bærende ide i våre skolesystem. Alle elever skal ha samme skoletilbud, uavhenig av geografiske og sosiale forhold. Vi er kommet langt når det gjelder integrering av funksjonshemmede elever. Vi knytter vår identitet til enhetsskoleprinsippet.
* Vår skole er ingen eliteskole, det er en skole for folket der en vektlegger sosiale verdier sammen med faglige.
* Vi har utviklet skolesystem som gir ansvar og tillit til den enkelte lærer. Hver lærer er i praksis sjef for sin undervisning, i samarbeid med kolleger. I stor grad gjelder dette både ved valg og utforming av metoder og lærestoff.
* Skolene våre er ofte lokalorienterte.
* Skolene våre vektlegger betydning av språklig og kulturell tilhørighet. Vi har tradisjoner som ivaretar tospråklighet og dialekter.
* Vi har en almenndannende skole. Det er viktig for oss at barn går i en skole som er rettet mot hele mennesket og ikke for tidlig er ensidig rettet mot yrkesvalg.
* Vi hevder med rolig sikkerhet at disse områdene er viktige for oss og at vi i internasjonal sammenheng er "kommet langt". Det er trekk som lærere knytter sin identitet til, og som på en måte definerer den helheten som matematikkundervisningen skal inngå i.
Det kan være nødvendig å presisere at vi ikke beskriver situasjonen i norsk eller nordisk skole på denne måten, vi beskriver heller identiteten som ligger i idealene; det er det vi arbeider mot som er uttrykk for våre grunnverdier.
Og nettopp dette er et fellesanliggende i alle de nordiske land: Vi arbeider for at matematikk-faget skal få en plass i helheten. Vi strever med at det har lett for å bli et fag som er isolert til lærebok og matematikktimer, et fag som lærere føler faglig utrygghet i, der de er redde for å gjøre noe feil. Vi arbeider for at elevene skal snakke matematikk, samarbeide, bruke matematikk som redskap i egne liv, for at lærerne skal sette faget inn i sin/skolens helhet. Dette er et fellesanliggende for lærere og for lærerutdanningsmiljøene.

To hovedretninger: Den Danske og Den Svenske

Når vi merker oss fellestrekkene i den nordiske undervisningstradisjonen, nærmer vi oss også ulikhetene innenfor den. Det kan være naturlig å skille mellom den Dansk-Grundtvigske tradisjonen, som Island, Grønland og Færøyene er knyttet opp mot; og den Svenske tradisjonen som har størst innflytelse i Norge og Finland.
I Norge (som i Finland) erfarer vi at de internasjonale strømningene er kommet via Sverige, og de fleste læreverk har vært oversatt fra svensk. Styresmaktene har faglig kontakt når rammevilkår utvikles. Nå aktualiseres dette gjennom arbeid med planutvikling og styringsstruktur.

Samtidig er vi påvirket av danskene. Vi vil kjenne igjen grunntanker i norsk skole når vi studerer den danske skolekulturen der Grundtvigs ideer er bærende.

Trekk ved dansk tradisjon

Fra Grundtvig kan vi hente:
* En helhetlig undervisning; "helhetsskole-tanken" der læreme har frihet til å utvikle sin undervisning knyttet opp mot bærende ideer.
* Språkets betydning, også vektleggingen av det muntlige språket, fortellingen og samtalen.

* Respekt for de unges utvikling som selvstendige, ansvarsbevisste mennesker i et demokratisk samfunn.

Matematikkfagets plass i den Grundtvigske tradisjonen kan i utgangspunktet synes som et paradoks. Det kan imidlertid i seg selv være eksempel på hvordan kulturer utvikles gjennom kulturbrytninger.
Grundtvig så ikke noe positivt i arbeid med matematikk for unge mennesker.[3] Han snakket om at barn skulle få være barn, han tok avstand fra ensidig kunnkapsformidling, og det var da ingen tvil om at han mente at matematikk var skadelig. "Åndsfortærende, drepende er ikke blott matematikken og gramatikken, men alt betydelig hodebry for mennesket i barnealderen, før hjernen med det øvrige legemet er helt utviklet. Ved å ville innplante alderdommens orden, stillhet, betenksomhet og klokskap i barna, innpoder vi dem kun døden i alderdommens svakhet, både på sjel og legeme; hos mange av dem tilintetgjør vi aldeles livskraften, så de alt som halvvoksne drænge hensvinner som skygger, og hos dem alle arbeider vi på å nedbryte menneskenaturen ved å trosse dens lover."

Samtidig som vi vet at Grundtvig avviste faget, ser det for oss ut til at matematikkfaget lever i Grundtvigs ånd, i Danmark.
Det er nærliggende å anta at det er en nødvendig følge av en sterk grunnlagskultur. Dersom de grunnleggende ideene danner en sterk motkultur, har det gitt matematikkpedagoger en mulighet: å utvikle faget som et "folkelig" fag. Vi kan anta at det har vært den naturlige og aktuelle veien fordi matematikkpedagogene har vært en del av denne kulturen.
Vi finner trekk som bekrefter dette. I Danmark har man tradisjon for tverrfaglighet. Våren 1993 utga Den Danske Matematiklærerforeningen arbeidsmaterialet "Matematik over alle grænser". De sentrerte arbeidet om uke 12. Ved de aller fleste skolene i Danmark arbeidet de

[3] Fra Ording-Boyesen, Pedagogikkens historie, Cappelen 1968

denne uka med tverrfaglig matematikkprosjekt. Aviser og Danmarks Radio fulgte opp. Det ble sendt inn arbeider, konkurranser ble avvikklet.
Gunhild Nissen, prof. i historie, var initiativtaker til et stort forskningsprosjekt: Matematik og Demokrati; og derigjennom også til et nordiske nettverket. Det er et tverrfaglig prosjekt med humanistisk profil. Bent Christiansen, Tage Werner (Danmarks Lærerhøjskole) er på hver sine måter forsvarsadvokater for barnet i matematikken, for det hele mennesket i matematikken. Danskene har en sterk matematikklærerforening som står vakt om tradisjonens idealer.
Sommerkursene har ide, form og innhold - inspirert fra Englands ATM. Matematiklærerforeningen har gjort dem til en kjerne i sitt arbeide.
Den danske tradisjonen vektlegger matematikk som opplevelsesfag, de vektlegger prosesser. Det er lett å gi et forenklet bilde, på mange måter et glansbilde av det danske miljøet og tradisjonen. Vi møter selvsagt danske lærere som bor i den tradisjonelle matematikklærebok-tradisjonen. Læreren som er usikker i faget og som er redd for å gjøre noe galt, som lærer barn å reprodusere algoritmer, er også dansk. I tillegg har hun dårlig samvittighet for at hun ikke er trygg nok til å arbeide tverrfaglig slik hun vet at dansk skole venter av henne. Også hun presses av foreldre som ønsker gode eksamensresultater av sine barn - i en arbeidsledighetstid - som deltagere i et europeisk samfunn. Også hun får høre, og lese, at kvaliteten er lav i dansk skole og at danske lærere holder et lavt nivå. I matematikk. Men hun har en matematikklærer-forening.
De bærende ideene og fagmiljøene settes på prøve: Utfordringene ligger i å bygge opp og ta vare på motkulturer som medspillere for den vanlige læreren.

Trekk ved den svenske tradisjonen
Svenskene har i stor grad bygget opp sitt fagmiljø gjennom å være åpne for impulser utenfra. Formuleringen: "Fra Amerika via Sverige til oss", kan være en korrekt beskrivelse, inspirasjon er tidligere i stor grad hentet fra USA. Vi karakteriserer den svenske tradisjonen ved å velge noen nøkkelord:
* Utadvendt mot internasjonale miljøer, særlig USA / * Grundig og systematisk
* Metodisk vektlegging: "man gör så här" / * Autoritær / * Effektiv / * Praktisk
* Respekt for matematikk som vitenskapsfag, i naturvitenskaplig retning / * Redskapsfag
* Teknologisk

Aksepteres disse ordene som beskrivelse av deler av den svenske tradisjonen, er det rimelig at den moderne matematikken ble innført slik den ble på 70-tallet. Det ble gjort grundig og skikkelig. Lærebøkene måtte inneha mengdelæreterminologi som forklaringsspråk, lærerne måtte gå på kurs, "de fikk lære hur man gör det", og de ga i alle fall inntrykk av at de gjorde som de ble bedt om.
I klasseromsforskning har Sverige på mange måter vært et foregangsland. Da Viggo Kilborn på 70-tallet fikk kjennskap til den amerikansk-inspirerte forskningen om matematikkundervisning, startet han sammen med Bengt Johansson et motprosjekt: PUMP. Det var viktig for dem at det ikke bare ble en analyse av sosiale aspekter , men at matematikken og matematikk-pedagogen var premissleverandør for analysene. Med svensk grundighet undersøkte de bl.a. barns strategier når de regnet de fire regningsarter. Samtidig som de kartla barns mangfoldige tenkesett, utviklet de matrisene for de fire regningsarter, noe som ga en metodisk innsikt i de sammensatte operasjonene. Gjennom dette prosjektet banet de vei for en kvalitativ forskningstradisjon der en har lært om elevers tenkesett, elevers algoritmer. Samtidig som en fikk utviklet strukturer og metoder, fikk en syn for verdien av mangfoldet.

Resultatene fra prosjektet fikk konsekvenser i utforming av lærebøker. Slik satte det sine spor i klasseromsarbeid. (2 x 4+7= var regnestykker som "alla barn" måtte gjøre, som følge av Kilborns og Johanssons arbeider.)

Svenskene ble med på en undersøkelse der det viste seg at svenske barn hadde svake matematikk-ferdigheter. Selvsagt var det våre svenske kolleger som klarte å utnytte denne hendelsen til sin fordel slik at staten satset millionbeløp på å ruste opp den svenske skolematematikken. De lyktes i å utvikle et etterutdanningsapparat slik at de nådde alle lærere i Sverige! Satsningen ga inspirasjon til hele fagmiljøet; fra elever til lærere og til "spesialistene". Til og med Svensk TV ble tatt i bruk. Problemløsning, vardagsmatematik, småstegsmetoden[4] er noen av temaene som ble vektlagt i denne perioden.
Og det kan være karakteristisk
- at småstegsmetoden fikk gjennomslag i Sverige. (Umulig i Danmark?)
- at problemløsing fikk sine klare definisjoner og metoder,
- at vardagsmatematik ble et sentralt og på mange måter "nytt" begrep.
(I Danmark antar vi at disse begrepene fant plass i et fagsyn som allerede var gjennomsyret av tverrfaglighet og "matematikk som prosess og opplevelse" .)
Når vi tar med en beskrivelse av trekk ved den svenske og danske tradisjonen, er det fordi vi ser det som vesentlige trekk ved den nordiske. Vi er en del av den svenske og også den danske tradisjonen. Samtidig som vi skal se ulikhetene skal vi se vi likhetene og fellestrekkene, gjenkjenningen blir av betydning

Lærerkultur og spesialistkultur.
Det er et trekk særlig ved det svenske miljøet at en har utviklet en markert spesialistkultur. Spesialistene er på mange måter et resultat av den svenske statens satsing på matematikkundervisning. Som bærende elementer har de tidsskriftet Nämnaren og hvert andre år arrangeres Biennalen. Det har vært et storstilt etterutdanningsprogram i Sverige som har hatt bruk for spesialistene. Miljøet er blitt stimulert på alle nivåer.

Som kursholder i Sverige fant vi to lærertyper særlig synlige:

Holdningstype A
Vi møtte lærere på kurs som ville vite hvordan de skulle undervise. De lot seg tidvis fascinere av problemløsingsoppgaver, men var mest opptatt av å bli vist den mest avanserte løsningen på den letteste måten, og de ville vite hvordan de så skulle undervise for at elevene skulle bruke den. De lot seg fascinere av barns ulike tenkesett, men så først at de kunne takle dette dersom de fikk en oversikt over alle mulige tenkesett..... da kunne man lage oppskrifter. De ønsket spesialister som gikk inn i rollen og sa: "Gör så här!" De ville være flinke elever som

4

Småstegsmetoden legger vekt på langsom og systematisk progresjon. En bygger opp steg for steg, kontrollerer at delferdighetene sitter før en arbeider seg videre. Metoden blir kritisert fordi en ikke vektlegger betydningen av at elever ser helheter og sammenhenger i det de arbeider seg fram mot. En annen kritikk legges i at metoden legger til grunn at alle elevene trenger de samme stegene (og ofte til samme tid). En del svenske og også norske læreverk bygger på småstegsmetoden.

gjorde det de ble bedt om. Spesialistene hadde autoriet. Disse lærerne gir bilde av en sårbar kultur, det vil være lett å styre dem inn i en del nye bølger.

Holdningstype B

Vi møtte også lærere som på kursdager hadde økter der de fortalte hverandre om sine prosjekt og om erfaringer. Vi minnes særlig en gruppe på ca. 20 lærere. Alle fortalte om sin erfaring med "vardagsmatematik". To høgstadielærere var tilstede, for å lære av praksis på lavere trinn. "Spesialister " hadde ikke talerett. Dette var sterke svenske lærere som hadde forankring i et generelt læringssyn. De praktiserte den almenndannende skolen, de møtte den integrerte eleven, de arbeidet med språkutvikling og kommunikasjon; innen for slike rammer ønsket de at matematikkfaget skulle få sin plass. De beskrev aktiviteter og prosjekter de hadde prøvd ut eller som de planla. Strukturen og metodikken var tydelig. De hadde beredskap til å være kritiske til spesialisters budskap. De fortalte om hvordan de brukte sine lærebøker uten å følge dem. De synliggjorde et potensiale. Spørsmålet vil være: Er dette en sterk del av den svenske lærerkulturen; sterk nok til å fungere som ėt slags mellomledd ?

Når vi snakker om motkultur i Sverige, er det naturlig å betrakte spesialistkulturen. De internasjonale strømningene vil først møte denne. Det har vel også vist seg at de trendene den tar opp i seg videreføres til det svenske klasserommet. Dersom klasserommene befolkes av lærere med holdning A, "er videreføringen uproblematisk", motkulturene på lærernivå blir utydelige (i alle fall dersom spesialistene er villige til å fortelle hur man gör).
Spesialistkulturen i Sverige har sterke forbindelser til statens styrende organer. Dette vil, etter som vi ser det, bety at det er vanskelig for Staten å gjennomføre reformer uten at en spiller på lag med miljøet. Det er miljøet som legger det hele tilrette for skolen, man har erfaring og kompetanse på slik tilrettelegging. Det kan synes som om spesialistkulturen har stor makt i Sverige.
Dersom klasserommene befolkes av lærere med holdning B, vil bildet forandre seg noe. Den sterkeste motkulturen kan da ligge i lærermiljøet. En kan være avhengig av om spesialistkulturen har hatt evne til å ta opp i seg diskusjonene og verdiene som ligger i lærerkulturen. De nordiske grunnverdiene ligger i lærernes daglige utvikling av læringsmiljø.
Det kan synes som om kommunikasjonen mellom miljøene er av avgjørende betydning og da gjennom at spesialistene evner å ta opp i seg verdiene i lærernes grunnlagskultur. Derigjennom er de med på å skape bærekraftige motkulturer, samtidig som de tilfører lærermiljøene kunnskaper fra de internasjonale fagmiljøene

Vi ser at situasjonen i Sverige ikke lett lar seg overføre til det norske miljøet. Aktiviteten er ikke så stor hos oss, vi har ikke hatt slik satsing over tid. Spesialistmiljøet er ikke så stort og er ikke like synlig. Vi finner heller ikke at holdning A og B er like beskrivende for norske lærere. Vi tror at mange lærere kjenner seg igjen i Magnhild: de gjør som de selv mener er riktig. Vi tror også det er riktig at mange lærere er utålmodige på matematikkfagets vegne. "Det har skjedd så store endringer innenfor de andre fagene, nå er det matematikk sin tur!" Og så har det da også skjedd gradvise endringer i M87- tradisjon. Mange lærere sliter med utrygghet i matematikkfaget. De er redde for å gjøre noe galt. Redde for å miste kontrollen. Her er behov for støtte gjennom etterutdanning..... kanskje beveger vi oss inn i en sårbar tid...... der spesialister kan inspirere til holdning A eller holdning B... Hva betyr det å støtte Magnhild denne gangen?

Om noen utviklingstrekk i Storbritania

Det er naturlig for oss å iaktta hvordan de internasjonale strømningene får konsekvenser i Storbritania. Fagmiljøene i Norden har nær kontakt med engelske miljøer, vi vet at strømningene får konsekvenser hos oss.

Vurderingssystemet har fått et sterkt grep på undervisningen i de engelske skolene. Utvikling av assesments er blitt en industri, elevene testes som sju-, elleve- og seksten-åringer. De skolene som får lav skår får problemer fordi foreldrene velger "gode skoler" for sine barn. Det blir f.eks. sentralt for lærere å lære femåringer å lese og regne, skolen vil få et bra resultat ved testingen av syvåringene. Lærerne har ikke reelle valg.

Matematikktestene som utvikles skal teste langt mer enn regneferdighet. De skal teste elevers evne til problemløsing, til undersøkende aktiviteter, til samarbeid; ja selv "childrens awareness" utvikles det "assessments" for. Slik ivaretar en "alle" aspekter ved National Curriculum. Dette er en måte å styre den engelske skolen på. Spesialistene har sitt marked og sitt sterke styringsinstrument. Testene kan i seg selv være opplegg for omfattende undervisningssituasjoner. Det er ingen tvil om at det ligger mye god matematikk og metodikk i disse testene. Spesialistene ser dem som et ledd i etterutdanningen av lærere.

I tillegg til dette kommer inspektører på besøk for å observere om undervisningen er i henhold til offentlige krav. (Kan dette bli realisert i Norden? Hvordan henger det sammen med avisdebatter om lærerkvalitet og kvalitetssikring i skolen?)

En har utviklet en differensiering der elevene inndeles i tre nivåer. Undervisningsmateriale og tester er organisert i forhold til dette. (Vi hadde en lignende kursplandeling i norsk ungdomsskole på 60-tallet)

Marylin Nickson[5] beskriver hvordan dette systemet fremmer skjevheter: Elever som først er plassert på et nivå, vil vanskelig få mulighet til å klatre oppover. Oppgaver og lærestoff blir holdt borte fra dem. Lærerne utvikler en kommunikasjon med dem som synes bestemt av nivået de er plassert på. Jenter blir sjelden plassert på det høyeste nivået. (Er slike former for differensiering uaktuelle hos oss?)

"Men hvordan er dette mulig?" vi stiller spørsmålet til Marylin Nickson. "Reagerer ikke lærerne? Reagerer ikke foreldrene?" "Jeg har respekt for engelsklærerne," sier hun. "De satte grenser, aksepterte ikke systemet. Men slik har det ikke utviklet seg innenfor matematikk-faget, her ser det ut for at man innretter seg."

Det er grunn til å tro at mange lærere som underviser i matematikk også i England kjenner seg usikre i faget. "De gjør slik de har lært at de skal gjøre". Kan det være en årsak til at miljøet fungerer svakt som motkultur?

Lærerutdanningen legges om i Storbritania, den teoretiske delen av utdanningen minskes, lærerne skal i stor grad utdannes i praksisfeltet. Det åpnes for ufaglærte i skolen. Er det slik man utsletter motkulturene, ved å redusere lærere til postbud mellom spesialister og elever? Spesialistene ser ut til å innrette seg. De velger å "slåss innenfra", som de sier, de innretter seg etter de politiske realitetene. De ser ingen andre muligheter.

5

Marilyn Nickson er forsker ved Cambridge University Examination Syndicate. Hun arbeider i et prosjekt der en analyserer vurderingsarbeid i matematikk. Her viser vi til en forelesning hun hadde på Bergen lærerhøgskole i juni -93.

Noen utviklingstrekk hos oss som aktualiserer problemstillingene om motkulturer

Vi har vært sammen med norske lærere som har arbeidet med en type tester fra England. De fant arbeidet spennende og lærerrikt. Til spørsmål om hvordan de ville reagert dersom de fikk dette som obligatorisk testmateriale, så de uforstående på oss og mente at det umulig kan la seg gjennomføre i Norge! De ville ikke finne seg i det!

Den norske og britiske skolekulturen er svært ulik. Vi tror neppe at vi vil få "engelske tilstander", men vi finner trekk vi mener truer den norske skolekulturen.
"Kunnskapsnivået er for lavt. Undervisningssektoren skal rustes opp gjennom at man stiller strengere krav. Vi må stille strengere krav til lærere og elever."

Vi kjenner igjen formuleringene fra den politiske debatten. Kvalitetssikring, et begrep hentet fra næringslivet, brukes nå om skole/undervisning. For at begrepet skal kunne brukes, må man enes om hva god kvalitet er. Man må i tillegg finne metoder for å sikre seg at god kvalitet oppnås. Man må finne måleinstrumenter. Prinsippet om målstyring er vedtatt som styringsform for undervisningssektoren, det synes å være tverrpolitisk enighet om prinsippet. Læreplanene omarbeides slik at de kan fungere som et styringsverktøy. Mål formuleres slik at en kan kontollere om målene oppnås. Planene blir mer detaljerte slik at lærerne vet hva de skal gjøre. M-87 formulerer overordnede mål som lærerne skal styre etter. Den gir skolene og lærerne frihet til å gjøre stoffutvalg og velge metoder. Planen signaliserer tillit. (I Grundtvigs ånd?) Nå ser man denne planen utilstrekkelig.

Vi ser konturene av en hard skolepolitisk bølge som preges av styring og kontroll, av at man fremelsker puggeskole og poengjag. "Vi må bare innse at vi har lagt for stor vekt på leken i vår skole til fordel for kunnskapsutvikling," sa Kaci Kullmann Five da hun startet valgkampen. "I et europeisk samarbeid må vi innse at dette ikke holder. Vi kan ikke sløse vekk evnene til barn og unge." Hun lovet at dersom hun blir statsminister ville hun "satse på skolen".[6] Skolealderen er senket til seks år. Vi var mange som trodde dette skulle bli et pedagogisk tilbud for alle seksåringene, og at 7-åringene fremdeles skulle være førsteklassinger. Det ser ut til at vi er blitt lurt. Politikerne ser ut til å oppfatte 6-åringene som førsteklassinger og handler mot fagorganisasjoners og fagmiljøers uttalelser. Lærere og førskolelærere ønsker ikke seksåringer som skolebarn, det ønsker imidlertid politikerne. Hva blir matematikk for 6-åringer? Hvem bestemmer det? I Reform 94 ser vi at valgfagene i videregående skole reduseres. Teorifagene "styrkes" for alle elevene. Politikerne "satser på skolen".
I vanlig samfunnsdebatt kan vi finne ytringer som :
Vi burde ha en differensiert skole. I Tyskland har de skoler for spesielt begavede barn. Hvorfor ikke hos oss? Har vi råd til å skusle bort disse ressursene? Stadig flere foreldre velger privatskoler for sine barn.
Mistilliten som signaliseres til skolens og lærernes praksis og kompetanse har mange språk og kommer fra ulike hold.

Samtidig ser mange fagmiljø, på spesialistnivå, muligheter i den politiske satsingen. Nye planer og nytt undervisningsmateriell utvikles. Behovet for etterutdanning forsterkes. Tester, eksamener og evaluering skal utvikles og gjennomføres. Ressursene som satses kan brukes

---

[6] Kaci Kullmann Five, Høyres statsministerkandidat. Juli -93. NRK- Dagsrevyen.

til å utvikle matematikkundervisningen. Det stimuleres til nye forskningsprosjekt og til ny produksjon av materiell. Miljø ser mulighetene både til å få finansiert prosjekter, vinne ny kompetanse og innsikt og til å påvirke den faglige utviklingen.

I denne sammenhengen ser vi det omfattende TIMSS - prosjektet. TIMSS er blitt et satsningsområde i Norden, og denne gangen er et riktig å si: Særlig i Norge. I matematikk-miljøet har vi aldri tidligere opplevd så stor økonomisk satsing. I tillegg til at norske barn blir med i en verdenomfattende matematikkundersøkelse, og at vi tar del i lærebok og læreplananalyser, vil en vesentlig virkning være at en stimulerer fagmiljøene. Hovedfag- og doktorgradsprogrammer blir finansiert innenfor denne rammen. Det er tale om oppdragsforsk-ning.

TIMSS er et internasjonalt prosjekt. En enes om oppgaver til tester, når det gjelder innhold og form som kan brukes i alle 50 deltagerlandene. En del av arbeidet ligger nettopp her: å bli enige om hvilke emner og oppgavetyper som skal brukes.
For å illustrere diskusjoner som må tas kan vi nevne problematikken omkring multiple choise / åpne oppgaver. Vi kjenner til at multiple choise (m.c.) -oppgaver er en del av den amerikanske testtradisjonen. Vi er også kjent med at et er noe de fleste av våre kolleger i USA mener er problematisk. Det synes derfor paradoksalt at et internasjonalt prosjekt skal innføre større grad av slike oppgaver i våre nordiske klasserom.
I et slikt samarbeid blir det hele tiden snakk om kompromiss - vi må være fornøyde når våre folk har fått gjennom at det skal brukes åpne oppgaver, selv om m.c.-oppgavene er i flertall. Svein Lie, en av prosjektlederne i Norge sier: "Tidligere tester er blitt kritisert for å bare inneholde flervalgsoppgaver, <u>en oppgaveform som f.eks. brukes svært sjelden i norsk skole.</u> (Vår understrekning.) Selv om flervalgsformen fortsatt vil være den viktigste, så vil TIMSS-testene også inneholde en god del åpne oppgaver, der elevene selv må formulere svaret og i noen grad også vise fremgangsmåten." Videre sier han: "det er ikke bare rett/galt svar som skal registreres, men også mest mulig om hvilken metode elevene har brukt." For oss ser det ut som at man i liten grad kan greie dette, når flervalgsoppgavene vil være de viktigste!
Vi stiller oss kritiske både til at elevene skal bli presentert for en oppgaveform som de er ukjent med og bli målt etter arbeid med dem, og til hvordan slike oppgaver kan gi informasjon som kan stimulere utviklingen i matematikkundervisningen.
På samme måten stiller vi oss skeptiske til at innholdet i testene skal bestemmes som resultat av kompromiss mellom flere land. Dersom et emne vi synes er viktig er uønsket av f. eks. Portugal, velger man det bort. Man finner emner som alle kan enes om.
Testene utvikles slik at det blir 45-minutters tester avholdt i ulike klasser. Testene vil forligge i ulike versjoner, en klasse vil bare bruke en versjon. Vi går ut fra at vi, i tillegg til m.c. oppgavene, vil finne mange gode oppgaver. Kvaliteten i dette arbeidet har vi ingen grunn til å stille oss skeptiske til.

Vi er imidlertid urolige for konsekvensene av undersøkelsen.
Vil lærere stimuleres til å arbeide med de aspektene som undersøkelsen arbeider med?
Vil lærere stresse felter som undersøkelsen viser at er en svakhet hos norske elever?
Vil undersøkelsene bli fulgt opp med undervisningsmateriell i nettopp disse emnene?
Vil det være innenfor disse emnene vi i ettertid finner språk om kvalitet i matematikkund-ervisningen?

Hvilken effekt vil det ha at nettopp disse feltene stimuleres med doktorgrad og hovedfags-arbeider..... til utvikling av fremtidens spesialister?
Det uroer oss at undersøkelsene ikke blir utviklet som en konsekvens av en norsk kvalitetsdebatt, men som kompromiss i internasjonalt samarbeid.

Jerimy Kilpatrik [7] kjenner TIMSS arbeidet dels fra innsiden. Da vi møtte ham for to år siden, kunne han fortelle oss at han delte vår bekymring. Han kunne ikke forstå at de nordiske landene ville være med i TIMSS. "De kvalitetene dere etterstreber og som dere ligger så langt framme i forhold til, vil aldri få plass i en slik undersøkelse. Undersøkelsen vil i seg selv være et tilbakeskritt i det jeg oppfatter er den matematikkpedagogiske diskusjonen i Norden. Dere vil få prøvd andre ting, bli sammenlignet med andre skolesystemer som vektlegger anderledes."
Kilpatrik har vært gjesteprofessor i Göteborg høsten 1993, like før han reiste konfronterte vi ham med utsagnet. Han sa at han fremdeles hadde den samme oppfatningen, "jeg er bare enda mer overbevist om at dere ikke burde være med," sa han.
Samtidig som TIMSS er under arbeid, kan vi lese i Tangentens siste nummer at KIM er under utarbeidelse. Det er naturlig å se KIM i sammenheng med TIMSS, både fordi de samme fagmiljøene er involverte og fordi begge prosjektene er initiert fra Departementets side. Prosjektet er iverksatt for at sentrale myndigheter skal få oversikt over situasjonen i norsk skole. Målet er å heve nivået i matematikkundervisningen. Det skal utvikles undervisningsmateriell. Vi har grunn til å tro at materiellet vil være inspirert av materiell utarbeidet i England. Vi har ikke grunn til å tro noe annet enn at dette vil være av høy kvalitet.
Det er grunn til å stille oss kritisk til hvilken diskusjon man legger til grunn for utvalg av emner. Selvsagt er alle klar over styrings-effekten : det som blir målt får fokus, dette blir det arbeidet med. Det som ikke blir målt, blir det arbeidet mindre med. Det kan være rimelig at vi får medieoppslag som følge av arbeidet og derved en "offentlig debatt". Vil denne form for styring og kontroll gi tilbakeslag for arbeidet som har begynt å gro i M87-diskusjonens fotspor. Går en inn i en utvikling der læreres grobunn blir oversett? Den nye mønnsterplanen vil utvikles i dialog med arbeidet som gjøres. Vi har hørt den omtalt som Læreplan -97.

I Danmark har de fått ny utdanningsminister. Ole Haahr[8] kunne på Biennalen i Göteborg fortelle at de har fått en minister som er imot ekstern evaluering i grunnskolen. Selv niendeklasse -eksamen ønsker han skal være skolens og lærernes ansvar. Det korresponderer med filosofien i M87 - en mener det er viktig for utvikling av fagmiljøer, for kompetanse-oppbygging. Det korresponerer med et Grundvigsk syn. Ministeren møtte motstand i det politiske miljøet, han måtte godta et kompromiss: avgangseksamen lages og administreres fra sentralt hold, gjennom fagmiljøet. Danmark er med i TIMSS, den danske matematikklærerfor-eningen har fungert som korrektiv og pressgruppe. Ole Haahr signaliserer at: "Vi er med, men det er ikke en stor sak hos oss og vi tror ikke det vil få noen særlig betydning." Vi ser konturer av en sterk motkultur i Danmark.

[7] J.Kilpatrik er professor ved University of Georgia, USA

[8] O.Haahr spiller en sentral rolle når det gjelder utvikling av eksamensoppgavene i Danmark

Så iaktar vi at lærere i Norge knapt vet at "noe er på gang". Lærere vil være lettest å styre når de ikke vet hva som skjer, og når en i tillegg til det har sterke styringsmekanismer for hånden, ser det ut til at alt ligger til rette.
Kan vi stole på Magnhild og kollegene hennes denne gangen. ... og er det mulig å støtte dem til utvikling?
I Danmark har de en sterk matematikklærerforening. Island stifet sin forening våren 1993, nå i januar kom Sverige etter. Det kan synes som om tiden er inne til å starte en norsk matematikklærerforening . Et miljø for den vanlige norske grunnskolelærer som underviser i matematikk. Et miljø som fremmer faglig utvikling, som blir en drivkraft. Et miljø som sentrale myndigheter ikke kan overse. Matematikklærere skal kjenne til hva som skjer.
Vi trenger å utvikle bevisste motkulturer som blir bestemmende for hvordan den norske profilen på de internasjonale strømningene blir.

Matematikk for lærere I og II

Trygve Breiteig og Rolf Venheim har gitt ut en ny utgave av lærebokverket Matematikk for lærere på TANO forlag. TANGENTEN hadde planlagt å komme med en fyldig anmeldelse av verket i dette nummeret.
På grunn av inntrufne omstendigheter må denne utsettes til neste nummer. Redaktøren beklager dette, ettersom dette verket er det mest omfattende som er produsert for grunnutdanning i matematikk i norsk lærerutdanning.

Nils Kjøsnes

Når studentene tar tallbegrep og tallsystem for gitt

BAKGRUNN OG HENSIKT MED DETTE "LARS - OPPLEGGET"

De første årene som lærer på lærerskolen opplevde jeg at studentene i liten grad "tente" på de metodiske problemene vi tok opp fordi de virket så enkle og opplagte. Derfor var jeg på leting etter situasjoner som kunne tenne studentene også på enkle matematikkproblemer i metodisk sammenheng.

Dette var særlig aktuelt i forbindelse med innføring av tallbegrepet og titallsystemet og også i vesentlig grad i forbindelse med de fire regneartene med naturlige tall fordi studentene her "kan" stoffet så alt for godt.

Bakgrunnen for å kjøre et opplegg som dette er å presse studentene til å måtte tenke på detaljer som de ellers ikke tenker på fordi så mye er automatisert.

Opplegget med "Lars" er først og fremst et opplegg hvor studentene forhåpentligvis skal oppleve en "simulering" av den prosessen som gjelder

- innføring av tallbegrepet i grunnskolen
- innføring av titallsystemet og kunnskaper om titallsystemet.

Jeg har hatt flere delmål med mine opplegg i denne sammenhengen. Her noen av de listet opp i tilfeldig rekkefølge.

-la studentene oppleve hva det vil si å arbeide med ukjente symboler.

-la studentene få oppleve verdien av å få ting konkretisert.

-la studentene få oppleve hvor sakte ting må skje når ingen ferdigheter er automatisert.

-la studentene få oppleve hvor lett det er å bli "overkjørt" av verbale forklaringer fra en lærer.

-la studentene få oppleve hvor fort sliten en blir når en må tenke på alle detaljer i en regneprosess.

-at selvfølgeligheter kan være et relativt begrep.

-ta utgangspunkt i studentenes problemer og opplevelser i den simulerte prosessen og jevnføre det med den tilsvarende situasjonen i "vanlig metodikk".

-la studentene få "gjøre og oppleve" metodikken.

-la studentene få "oppleve" den matematiske verden til en regnesvak elev.

-skape gode holdninger til å undervise faget matematikk

I det opplegget som jeg har skrevet ut, har jeg hatt simulering av innføring av tallbegrepet og innføring i og kunnskap om titallsystemet som siktepunkt.

I mitt videre opplegg (som jeg ikke her har skrevet ut i detalj) overfor lærerstudentene lar jeg bare han Lars sette seg på "skolebenken" og lar kjøpmannen spille rollen som lærer.

Han Lars får da oppleve add/sub gjennom f.eks.å

- -slå sammen eller dele opp mengder
- -telle seg fram eller hoppe på tallinje
- -bruke kuleramme
- -regne mekanisk ved hjelp av tabell

Tilsvarende opplegg kan gjøres for multiplikasjon og divisjon.

Jeg avslutter alltid dette opplegget med at studentene får innføring i tallsystemer generelt. Vi jevnfører da femtallsystemet med det han Lars har vært i gjennom. Jeg er veldig "forsiktig" med at studentene ikke bør kunne dette med tallsystemer **før** han Lars setter i gang. Det tror jeg ville minske effekten av mitt opplegg.

I forbindelse med at jeg har hatt undervisning for studenter på spesial pedagogisk linje har jeg "omkonstruert" han Lars til å bli en elev som f.eks. ikke kan rekkefølgen av tallene. Denne eleven har de så fått "spille" i forbindelse med regneoppgaver. Dette har ført studentene inn i uforutsette problemer og gitt relativt "sterke" opplevelser.

EN SAMTALE MELLOM EN MATEMATIKKLÆRER OG EN KLASSE MED LÆRERHØGSKOLESTUDENTER.

L: Betyr at læreren snakker

S: Betyr en vilkårlig av studentene

S1, S2, S3 osv : Betyr henvisning til ulike studenter i en sekvens av opplegget.

S1 er ikke samme student gjennom hele opplegget. Tilsvarende for S2, S3 osv.

L: Vi tenker oss en person som bor alene på ei øde øy. Han kan **ingen ting** om tall, men han snakker godt norsk. La oss kalle han Lars. Lars bor ikke helt alene, fordi han har en hund der. Hunden heter Flink.

Hver mandag drar Lars inn til kjøpmannen på fastlandet for å kjøpe de varene han trenger fram til **neste** mandag. Her er det en god gammeldags butikk hvor kjøpmannen står bak disken og hvor Lars står på andre siden og forlanger sine varer.

S: Ja men hvordan kan han forlange sine varer når han ikke kan noe om tall?

L: Ja hvordan tror dere det kan gjøres ?

S1: Han kan jo f.eks. si at han skal ha like mange epler som det er dager i uken.

S2: Nei det kan han jo ikke fordi han kunne jo ikke noe om tall.
S3: Kan han ukedagene lærer ?
L: Ja Lars kan ukedagene og dessuten har han en stor kalender oppslått ved siden av kjøkkenbenken sin som hjelper han.
S: Han kan jo si at han skal ha eple hver dag og så **regne** opp ukedagene.
S2: Ja men jeg sa jo at han ikke kunne noe om tall.
S: Men han kunne jo norsk.
L: Jeg kan fortelle hva som skjedde en mandag da Lars kom på butikken. Kjøpmannen hadde laget ei fin utstilling og pyntet opp både på disken og ellers i butikken. Så kommer Lars inn, lener seg over disken og i det han sier :"Jeg skal ha " så banker han i disken -bank-bank-bank "brød". Kjøpmannen blir forbannet fordi det meste av den fine utstillinga hans ramler ned på grunn av bankinga til Lars.
S: Ja men hvordan kunne han vite at han akkurat skulle banke tre ganger?
S: Jo han kunne jo tenke inni seg at tirsdag morgen, fredag morgen og lørdag kveld starter jeg på et **nytt** brød.

L: Kjøpmannen tok Lars med inn på sitt kontor og sa til han at slik kunne han ikke fortsette å banke på disken. De måtte heller finne på noe annet. Hva slags "avtale" kan dere tenke dere at Lars og kjøpmannen burde inngå?
S1: Hvis han skal ha fire brød så kan han da vel si "fire brød"
S2: Men vet han hva fire er da ?
S1: Det må han da vel vite.
S3: Jeg ville lært han **tallene** jeg og vært ferdig med problemet.
S4: Er det ikke det kjøpmannen skal prøve på nå da?
L: Jeg gjentar spørsmålet mitt: Hva slags avtale vil dere foreslå at kjøpmannen og han Lars bør inngå?
S5: Kjøpmannen kan komme med ett brød i gangen og så kan han Lars si stopp når det er nok.
S6: Lars kan holde i været like mange fingre som han skal ha brød.
S7: Han kan si brød-brød-brød-brød.
S2: Men han har jo ikke tallbegrep ?
S8: Men han kan jo tenke inni seg hvor mange han skal ha.

L: Kjøpmannen og Lars ble enige om noen lyder eller ord som det var lett å huske meningen med og som Lars kunne bruke når han senere kom til butikken for å handle.
Har dere et forslag på en lyd (ord) som Lars kan bruke hvis han skal kjøpe så mange (II) melkekartonger?
(Mellom oss sagt to melkekartonger).

S1: Han kan si melk-melk.
L: Ja det er forsåvidt greitt det, men det ville jo blitt tungvint eller kanskje latterlig hvis han skulle kjøpe ganske mange av et slag. Han ville jo komme til å stå der og nærmest stamme.
S2: Han kunne si en og så en til.
L: Har dere ikke et godt ord som Lars lett setter i forbindelse med så mange (xx)? Se på hverandre.
S1: Ører.
S2: Øyne.
S3: Hender eller føtter.
L: Har dere et godt forslag for så mange (x) ?
S4: Nese.
S5: Munn eller hode.
L: Hvilket ord foreslår dere at Lars bør huske for så mange (xxxxx) ?
S1: Fingrer.
S2: Tær.
S3: Det kan jo bety ti også det.
S4: Fingre på en hånd.
S5: Kan han ikke bare si hånd da ?

L: Hva med så mange (xxx) ?
S1: Øre-nese eller øyne-munn for eksempel.
S2: Kjøpmannen kan da be han tenke på et tre.
L: Skal det være bjørk eller furu?
Hva er det som minner han Lars mest om så mange (xxx) ?
S: Det er jo ingen ting ved de trærne der som minner han Lars om så mange (xxx). Det må nå være hvis det tilfeldigvis stod akkurat så mange trær utenfor hytta hans.
L: Har dere et godt forslag for å huske så mange (xxxx) ?
S1: Hender og føtter.
S2: Øyne-nese-munn.
L: Det er jo litt tungvint.
S2: Kanskje man heller kunne si ansikt ?

L: Er det noe på den veggen der som kan minne dere om så mange (xxxx)?
S3: Vinduet med sine hjørner eller døra.
S4: Jeg synes litt synd på han Lars jeg. Det må da være vanskeligere å drive å huske disse påfunnene våre. Det må da være lettere å lære seg ordentlige tall med en gang.

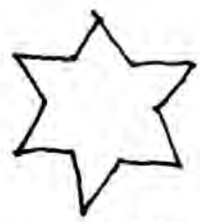
S5: Vindusrute for han kan da være like naturlig som fire er for oss siden begge deler er nytt for han.

L: Nå skal dere få høre hva han Lars og kjøpmannen ble enige om.

Så mange	Da tenker (sier) du
x	munn
xx	øyne
xxx	stjerne
xxxx	rute
xxxxx	hand

S1: Hvorfor stjerne for så mange (xxx) ?

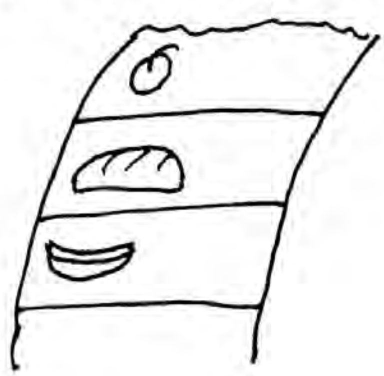
L: Det var fordi kjøpmannen visste at Lars hadde ei julestjerne hengende i vinduet hele året og som så slik ut



S4: Stakkars mann !

L: Mandag om ei uke dukket Lars opp på butikken igjen og stod ved disken og forlangte: rute epler, stjerne brød, munn kaffeposer, hand bananer osv. Alt gikk smertefritt og uten komplikasjoner av noe slag. Ingen ting ramlet ned fra utstillinga på disken.

Så ble Lars syk og sengeliggende. Dette var på vinteren og hunden Flink var trenet opp til å løpe over isen og inn til kjøpmannen alene. Kjøpmannen hadde forutsett at dette kunne hende og hadde inngått avtale med Lars om hva som burde gjøres. Han hadde laget et slags halsband som kunne legges rundt halsen på hunden. På dette halsbandet hadde han limet bilde av de fleste varene som Lars brukte å kjøpe. Her ser dere litt av halsbandet.



Ved siden av bilde på varen skulle Lars skrive ned hvor mye (mange) han ønsket.

Hvilken avtale tror dere Lars og kjøpmannen hadde inngått hvis Lars ønsket å få tilsendt **en** kaffepose.

S1: Da kunne Lars sette ett strek ved siden av bilde på kaffeposen.

L: Hva bør stå ved siden av eplene hvis Lars ønsker to stykker tilsendt ?

S1: Da kan han skrive to streker.

S2: Han kan tegne to øyne.

L: Enn hvis han ønsker fire brød ?

S1: Da kan han tegne fire streker.

S2: Han kan tegne fire ruter (vindusruter).

S3: Det må da holde om han tegner ei rute, for det skal da bety fire.

L: Her ser dere hvilke tegn de hadde blitt enige om:

S1: Er det ikke litt dumt å tegne et øye fra siden da ?

L: Hvordan ville du hatt det da ?

S1: Jeg ville tegnet det forfra slik at begge øynene hadde blitt sett.

L: Hvordan ville dere skrive bestillingen for to melkekartonger ?

S2: Det blir å skrive øyetegnet to ganger.

S3: Nei det må jo holde å skrive øyetegnet **en** gang siden øyetegnet skal bety to. Vi vil jo ikke skrive rute fire ganger heller.

L: Lars liker godt å spise bananer til kvelds når han har sår hals.Han ønsker **en** banan hver kveld hele uka. Hvordan kan han skrive den bestillinga på den lille plassen ved siden av bananbildet på halsbandet ?

S1: Han kan skrive ei rute og ei stjerne

L: Lars ønsker mange karameller når han er syk. Han ønsker seg **en** karamell hver morgen og **en** hver kveld hele uka fram til neste mandag. Hvordan skal han få skrevet det på den lille plassen som er til rådighet på linja ved siden av karamellbildet på halsbandet?

S1: Han kan skrive to ruter og to stjerner ved siden av bildet på karameller.

L: Med de skriveredskapene som Lars bruker er det ikke plass til mer enn høyst tre tegn ved siden av hverandre.

S2: Da kan han tegne ei stjerne inne i hver av rutene.

L: Godt forslag, men den tykke "blyanten" som Lars bruker er for grov til at noe kan skrives **inne** i rutene.
S1: Han kan tegne ei hand og ei hand og ei rute. Da blir det jo ikke flere enn tre tegn ved siden av hverandre.

S2: Men de har jo ikke vedtatt noe tegn for hand.
S1: Såpass må han da vel skjønne !
L: Det er riktig at Lars har lært **navnet** hand og at han vet betydningen av det , men det siste skriftlige tegnet de ble enige om var for rute.
Jeg beklager at jeg har glemt å nevne en sak for dere som kanskje kan hjelpe oss litt. Den butikken Lars besøker er litt spesiell i den forstand at alle varene, store eller små, blir automatisk pakket i **røde poser** med fem stykker i hver pose.
Kan dette hjelpe dere til å finne en lur måte å bestille de fjorten karamellene vi snakket om tidligere.
S: Har han noen **røde** tusjer liggende på hytta også kanskje?
L: Det stemmer.
S1: Han kan tegne ei vanlig(svart) rute og i tillegg tegne to røde prikker.
S2: Jeg ville heller tegne en rød munn og så en rød munn og så ei svart rute. Det blir jo fjorten.
L: Lars liker veldig godt kamferdrops(sugetabletter) når han er syk. Han vil bestille akkurat nok til å dekke behovet for tre stykker per dag i ei uke.
Hvordan foreslår dere at denne bestillingen skal gjøres ?
S: Er kamferdropsene også pakket i røde poser?
L: Selvsagt. Jeg sa jo at det gjaldt alle varer.
S2: Han kan tegne fire røde munner og en svart munn.
S: Det er det jo ikke plass til for det blir jo fem tegn.
S3: Du kunne skrive rødt øye to ganger og så en vanlig munn. Da brukte du bare tre tegn.
S4: En kunne skrive en rød rute og en svart munn.
L: Vi vedtar at en svart munn og ei rød rute er avtalen.
Hvordan kunne bestillinga se ut hvis han Lars ville sikre seg drops i fire uker framover og med tre drops hver dag ?
S: Han kunne ordne seg et tegn for uke og så bruke det.
L: Jeg skylder å gjøre oppmerksom på at det på butikken vår også står noen **grønne** esker og at han Lars har noen grønne tusjer på kjøkkenbenken.
Hva tror dere de grønne eskene inneholder?
S1: Det er to poser nede i hver eske slik at det blir ti ialt.

S2: Jeg tror det er ti av de røde posene. Altså femti tilsammen i hver grønn eske og da kunne denne fire ukers bestillinga av drops skrives som ei grønn eske, fire røde poser og to røde poser og fire enkle drops i tillegg.
S3: Ja hvordan vil du greie dette med bare tre tegn da ?
S2: Jeg kunne skrive et rødt øye inne i ei rød rute.

S: Men det har vi bestemt tidligere at det ikke var mulig siden skrivesakene var for "tykke".
S5: Jeg tror det er fem røde poser i hver grønn eske.
L: Hvordan skulle denne fireukers bestillinga av drops bli i dette tilfellet?
S1: Det måtte bli fire enkle drops, en pose og tre esker.
L: Hvordan skulle bestillinga skrives?
S1: Vi må ha ei svart rute en rød munn og ei grønn stjerne.
L: Hvis kjøpmannen ser en rød munn ved siden av bildet av dropsene, hva henter han da?
S: Da henter han **en** rød pose som det er fem i.
L: Enn hvis det står skrevet ei grønn stjerne?
S: Da henter han **tre** grønne esker hvor det er fem poser i hver eske.
L: Da er vi enige om at denne bestillinga kan skrives slik:

L: Da hunden Flink kom fram til butikken med denne bestillinga, hadde det vært mye regn og vind på turen og de tusjene som Lars brukte var ikke vannfaste slik at bestillinga for drops så slik ut:

Bare gråfargede symboler alt sammen.
Hva burde de ha gjort avtale om for å unngå dette?
S1: De kunne ha bestemt hvor de røde, grønne og svarte tegnene skulle stå.
S2: De kunne ha bestemt en rekkefølge på fargene.
L: Har dere en rekkefølge å foreslå?
S3: Jeg ville startet med de minste først, så tatt posene og tilslutt eskene.
S4: Jeg ville gjort omvendt for da blir det slik som vi er vant til.
L: Jeg kan fortelle at Lars og kjøpmannen ble etter en stund enige om gjøre slik som du (S4) foreslår.

S4: Men da trenger strengt tatt ikke han Lars å bruke farger lenger når han skriver bestilling.
S5: Men kan virkelig han Lars finne ut hvordan han skal bestille hele åttifire drops når han ikke har særlig tallbegrep. Det må jeg si jeg stiller meg meget tvilende til.
S6: Han kan jo legge kalenderen på kjøkkenbenken og plassere fyrstikker for morgen, middag og kveld i fire uker framover. Så kan han jo pakke fyrstikkene i "poser" fordi det skal jo være like mange i hver pose som det er fingre på venstre handa hans.
S7: Så kan han deretter lage esker på samme måten av poser.
L: Hvordan ville dere skrive ei bestilling som sikret nøyaktig en karamell hver kveld i hele februar måned? Ikke skuddår.
S1: Jeg ville skrive en munn og ei stjerne.
S2: Jo men det kan jo være litt skummelt hvis man ikke lenger bruker fargetusjer.
S3: Man bør trekke de litt vekk fra hverandre så man skjønner at det ikke skal være noen poser.
S4: Man burde hatt noe for null.
L: Jeg kan fortelle at kjøpmannen ba Lars skrive en T, som er første bokstaven i ordet tomt, hvis han ikke skulle ha noe av et vareslag. Da ville han føle seg mere sikker på at Lars ikke hadde glemt å skrive bestilling men at han virkelig mente å ikke ha noe av den varen i dag. Den kan vi kanskje bruke.
S1: Er det bare når vi mangler poser at vi trenger å bruke T eller må vi bruke den på kantene også ?
S2: Hvis vi bare kjøper esker og poser, da må vi jo merke av at vi ikke skal ha noen **enkle**.
S3: Enn om vi bare kjøper poser og enkle da?
S4: Da synes jeg vi burde skrive T på eskeplassen for sikkerhetsskyld.
S9: Enn om han Lars ville bestille et voldsomt stort antall av noe. For eksempel lage seg et lager for å kunne ta **en** karamell hver dag i et helt år?
L: Jeg kan røpe at det på butikken også står kasser på
lageret. Hva tror dere at disse kassene inneholder?
S1: Den inneholder sikkert esker. To esker kanskje?
S2: Jeg tipper at en kasse inneholder fem esker hvis vi skal følge opp det systemet vi har startet på.
L: Vi sier at den butikken pakker varene sine i **handsystemet** siden det pakkes **hand** stykker i hver pose, **hand** poser i hver eske osv.
S3: Burde vi ikke hatt et eget tegn for **hand** også da ?
L: Du får tenke litt på om det er nødvendig.

Jeg kan fortelle at på en butikk litt lenger inne på fastlandet blir også alle varene pakket i poser, esker kasser osv. Forskjellen er at den butikken pakker etter **rutesystemet**.

Hva tror dere er i hver pose, eske eller kasse da?

S: Det er for eksempel fire epler i hver pose og fire poser i hver eske.

L: Hvordan blir bestillinga på åttifire drops på den butikken?

S1: Denne gangen må vi ha fem esker og en pose. Det blir jo åttifire.

L: Riktig. Men hvordan skulle denne bestillinga skrives?

S1: Det blir T på enerplassen siden vi ikke har noen enkle. Så blir det en munn på poseplassen. Så --

S2: Denne gangen burde vi absolutt hatt et tegn for fem så kunne det ha vært brukt på eskeplassen.

S3: Vi kan skrive rute og munn for eskene, så munn for posen og T til slutt. Altså: □ ◡ ◡ T

S4: Nei, dette tror jeg kan misforstås.

S5: Kanskje vi kan lage en kasse? Er det lov det i rutesystemet?

L: Bare gjør helt **tilsvarende** pakking som på den første butikken.

S6: Jeg tror jeg har det. De fem eskene danner en kasse med fire esker og så blir det ei eske til overs.

S7: Da må jo bestillinga kunne skrives:

munn,munn, munn og T tilslutt.

L: Hvordan blir nå bestillinga på **en** sugetablett per dag i hele februar?

S1: Det må bli ei eske og tre poser og ingen enkle.

L: Hvordan skrives bestillinga?

S2: Rute og stjerne og T. Nei jeg mener munn,stjerne,T.

L: Neste gang skal vi la kjøpmannen lære han Lars å legge sammen, trekke fra, gange og dele med de "tallene" de har blitt enige om.

Ivar Lotsberg

Ivar Lotsberg er høgskulelektor på Volda lærarhøgskule. Han har lang røynsle som lærarutdannar. Dei siste åra har han innan matematikkfaget spesielt interessert seg for geometridelen.

Geometri i grunnskulen

Det inntrykket eg sit att med etter å ha sett "utviklinga" av geometrien i norsk skule slik denne kjem til synes i fagplanar for realskule, ungdomsskule og grunnskule frå 1950 til i dag, er at den teoretiske lærebygningen frå Euklid er sterkt redusert, og delvis erstatta med eksperiment og praktiske bruksmåtar. Men dette ser ut til å skje utan nokon heilskapeleg plan. (Lotsberg,1993.)

Geometrien manglar ein klar indre samanheng og struktur. Setningar skal takast med, men provføring skjer tilfeldig og på slump. Det som er så vesentleg i geometri og i matematikk i det heile, at setningane heng ihop, at det er råd å sjå eit fornuftig mønster i den matematiske veven, dette manglar i høg grad.

Denne oppfatninga vil då lett feste seg: Matematikk går ut på å lære reglar og bruke reglar. Resultatet kan bli at eleven står fast straks han møter eit problem der han manglar ein innlærd regel.

Caspars geometrimateriell

Ei gruppe matematikarar knytte til Bergen Lærarhøgskule har lenge arbeidd med geometriske emne. Sitat frå heftet *Caspars geometrimateriell*, (Red. Stig Mellin-Olsen,1992):

> Det kan synes som et paradoks at et av matematikkens mest spennende og varierte emneområder, geometrien, håndteres så ensformig som det gjøres i skolen. Et annet paradoks er at geometrien, med sin vektlegging på det visuelle, og med de store mulighetene for brobygging mellom elevenes erfaringer og matematikken, faktisk har fått en redusert betydning gjennom de siste tiårene.

Om reduksjonen av geometri dei siste tiåra skriv Mellin-Olsen:

> Enkelte vil kjenne disse reformene (om reformene av matematikkundervisningen på 1950-60 tallet) under navnet "moderne matematikk". På denne tiden vektla trendsetterne blant matematikerne arbeidet med strukturelementet i matematikken. ...
>
> Mange av de matematikerne som arbeidet som trendsettere på denne måten, deltok i arbeidet med matematikkreformene på 1950-60 tallet. De så naturlig nok på den konkrete, visuelle geometrien som et kunnskapsstoff som sto i motsetning til en fremtidsrettet matematikkundervisning. Den mest kjente av dem, franskmannen Jean Dieudonne, sto i fremste linje blant disse med utropet: "Død over geometrien!"

Krinsen omkring Mellin-Olsen vil prøve å "inspirere til en variert og spennende geometriundervisning i grunnskolen."

Caspars geometrimateriell inneheld ei rekkje konkrete oppgåver og tips for ei slik "spennende" geometriundervisning.

Heftet har m.a. med mange **praktiske** aktivitetar. Dette er for så vidt i pakt med mønsterplanen. Men etter mi oppfatning er samanhengen mellom praktiske aktivitetar og teoretisk-systematiske aktivitetar for svakt behandla.

Det er grunn til å framheve verdien av å tileigne seg systematisk, funksjonell kunnskap i matematikk, også i geometri. Altfor mange ulike "spennande" innfall og innspel kan resultere i tilfeldig og fragmentarisk kunnskap, om undervisninga er aldri så praktisk. Skal matematikken bli ein verkeleg reiskap, bør han - i alle høve periodevis - behandlast på eigne premissar.

Nye idear til geometrioppgåver

Når det er sagt, er det all grunn til å la seg inspirere av Mellin-Olsen sine idear og døme på arbeidsoppgåver. Ei oppgåve i heftet (Oppgave 35, side 111) var utgangspunktet for den serien på 18 oppgåver som eg presenterer.

Kjedeleg geometri?

Som Mellin-Olsen ganske riktig framhevar, er det viktig å unngå at matematikken - og ikkje minst geometrien - blir einsformig og kjedeleg. Nokre elevar likar matematikk nærast uansett. Men dei fleste vil i det lange løp finne matematikken kjedeleg dersom han stort sett består i å lære reglar og bruke reglar.

Spel

Som kjent har både unge og eldre glede av ulike former for spel, frå kabal og kryssord til sjakk og dataspel. Det er også utvikla reknespel av ulike slag til bruk i skulen. Eit viktig element i dei fleste spel er at det skjer noko, du kjem fram til eit resultat som oftast umiddelbart syner seg å vere rett. Kabalen eller kryssordet "går opp". Alt heng saman på ein fornuftig og regelmessig måte. I tråd med dette har eg laga serien av geometri-oppgåver. Dei kan oppfattast som spel i den forstand at alle summar stemmer når oppgåva er rett løyst.

Problemløysing

Karakteristisk for dei fleste litt avanserte spel er at det ikkje finst ein bestemt metode som sikkert fører til målet. Du famlar likevel ikkje heilt i blinde. Røynsle og innsikt kan hjelpe eit stykke på veg. Likevel vert det ofte prøving og feiling og grubling som i all verkeleg problemløysing.

Eit problem kan definerast som ein situasjon der målet er klårt, men du manglar ein metode til å nå målet. Det blir då sjølvmotseiande å snakke om ein metode til problemløysing. Når du har **løyst** eit problem, kan du kanskje sjå tilbake på framgangsmåten og kalle det ein metode. Det er berre det at når du har løyst problemet, er det ikkje noko problem lenger!

I staden for å nytte ordet "metode" er det vanleg å snakke om strategiar for problemløysing.

Strategiar

Eit viktig poeng med oppgåvene mine er at du treng innsikt i ei rekkje geometriske setningar for å løyse dei. Strategiane går mellom anna ut på å nytte desse setningane slik at du gradvis nærmar deg målet. På denne måten blir setningane "nyttige".

Intuisjon og prov

I den gamle realskulen skulle alle setningane provast, og inngå i eit samanhangande logisk byggverk. Dei fleste av setningane verkar umiddelbart innlysande, og god geometrisk intuisjon vil vere til stor hjelp der ein ikkje kan eller ikkje hugsar setningane. Men stundom vil intuisjonen vere utilstrekkeleg, og stundom vil han også føre på villspor. Ein får stadig bruk for setningar og prov. Ein kan her få realisert det samspelet som er skildra i *Undervisningsplaner for den høgre almennskolen*, Oslo 1951, side 113:

> Geometrisk dyktighet henger nøye sammen med evnen til å "se". For den begynnende undervisning gir derfor intuisjonen det naturlige utgangspunkt; de geometriske slutninger tjener til å stadfeste,

> kontrollere og korrigere det som er sett umiddelbart, og videre til å utfylle det. Og etterhånden som de geometriske kunnskaper vokser, vil også intuisjonen selv bli skarpere og favne om store områder. Geometriundervisningen har nettopp en vesentlig oppgave i utviklingen av en slik forestillingsevne og fantasi, i oppøvingen av det geometriske "blikk".

Oppøving av det geometriske blikk er eit sentralt siktemål for dei oppgåvene eg her presenterer.

Geometri på eit kvadrat

Alle oppgåvene tek utgangspunkt i eit kvadrat. Dette kvadratet vert delt opp ved hjelp av rette linjer. Kvadratet vil då bestå av ei samling polygon. Oppgåvene går ut på å bestemme forholdet mellom areala av desse polygona. Det er sjølvsagt tallause måtar å dele eit kvadrat på ved hjelp av rette linjer. Eg har valt ei oppdeling der endepunkta for linjestykka anten er eit hjørne eller midtpunktet på ei side.

Løysinga består altså i å finne høvetal utan nemning for kvart polygon (dvs. eit multiplum av ei arealeining - som kan variere frå oppgåve til oppgåve. Som regel er det minste polygonet arealeining.)

Mine oppgåver er eit meir eller mindre tilfeldig utval av dei som kan lagast utfrå dei gjevne vilkåra. Kven som vil kan komponere andre.

Analyse av oppgåvene

Progresjon

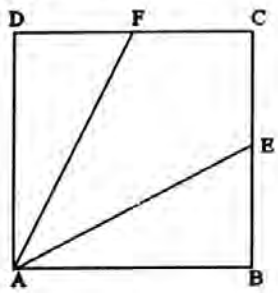
Det kan diskuterast om oppgåvene bør byggjast opp systematisk og etter ein bestemt progresjon. Ei ekte problemoppgåve skal vere einestående. Den strategien du legg opp til, skal i kvart tilfelle bestemmast i høve til oppgåva. Du skal møte oppgåva med friske auge, og arbeide utfrå det du ser. På den andre sida har dei fleste av oss sterkt avgrensa evne til å løyse oppgåver som ligg langt frå vårt erfaringsområde.

Det må difor alltid bli ein balansegang mellom oppgåver som er så lette at dei ikkje representerer noka utfordring, og oppgåver som er så vanskelege at vi blir ståande faste utan å kome vidare.

Vi må også ta omsyn til at elevane har sterkt varierande føresetnader for å løyse problem av dette slaget. Både oppgåvevalet og progresjonen må ta omsyn til det.

Kvar av oppgåvene mine representerer ein heilskap, og kan løysast uavhengig av alle andre. Det er likevel mange oppgåver som har ein del element felles, og desse er stort sett ordna etter stigande vanskegrad.

Oppgåve 1



Denne oppgåva er kanskje for enkel, men ho dannar grunnlaget for den neste.

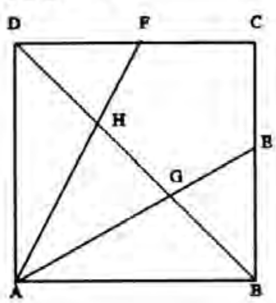
Dreg vi diagonalen AC, blir dette ein symmetriakse. Kvadratet blir delt i 4 like store deler. Det som er interessant å merke seg i denne oppgåva, er at trekantane ABE og AEC er like store, fordi dei begge har halve kvadratsida som grunnline, og heile kvadratsida som høgd.

Problemet med den stumpvinkla trekanten AEC der fotpunktet (B) for høgda (AB) fell utafor grunnlina (EC) blir her synleggjort og løyst. Det er innlysande at kvar av trekantane ABE og AFD utgjer ein firedel av kvadratet. Dei andre to trekantane (som er kongruente) utgjer resten av kvadratet.

Alternativ metode: Trekantane ABE og AFD er kongruente. Kvar av dei utgjer ein firedel av kvadratet. Resten blir då to firedeler.

Forholdet mellom areala blir altså 1:2:1.

Oppgåve 2



Denne oppgåva tek utgangspunkt i den føregåande. Det nye er diagonalen BD. Også denne figuren er symmetrisk om (den uopptrekte) diagonalen AC. Vi har difor to (eller 3) sett med kongruente trekantar.

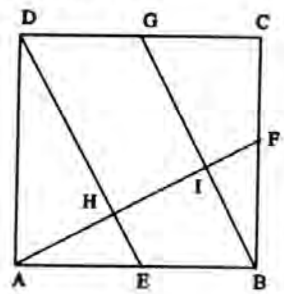
Det ser ut til at diagonalen BD er delt i tre like store deler. Men her bør vi ikkje stole for mykje på intuisjonen. Dette må provast.

Vi ser at trekantane BGE og AGD er formlike. Det lineære høvetalet er 1:2 (Halve kvadratsida : kvadratsida). Då må GD vere dobbelt så lang som BG. Og ettersom DH er like lang som GB, vil kvart av linjestykka BG, GH og HD utgjere ein tredel av diagonalen BD. Og dei tre områda som har eit hjørne i A blir like store.

Høvet mellom areala til BGE og AGD er lik kvadratet av det lineære høvetalet, altså 1:4. Trekanten AGD er - som vi har sett - delt i to like store deler.

Høvet mellom dei seks areala på figuren blir altså: 2:2:2:1:4:1.

Oppgåve 3



Det mest karakteristiske ved denne oppgåva er dei parallelle linjene ED og BG. At desse linjene er parallelle ser vi lett av at firkanten EBGD må vere eit parallellogram: EB og DG er nemleg både parallelle og like lange.

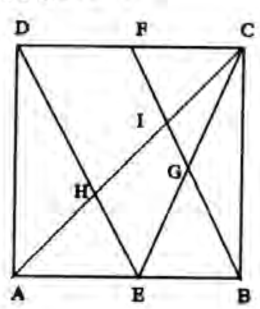
Trekantane AEH og ABI er formlike. Det lineære høvetalet er 1:2. Høvet mellom areala er då 1:4. Trapeset EBIH er altså 3 gonger så stort som trekanten AEH.

Trekantane AEH og BFI er kongruente. (Roter kvadratet 90 grader om midtpunktet.)

Området mellom dei to parallelle linjene ED og BG utgjer halvparten av kvadratet: Halve kvadratsida som grunnlinje og heile kvadratsida som høgd. Her får vi eit godt døme på korleis vi finn arealet av eit parallellogram der "høgda ikkje treffer grunnlinja". Det er nemleg innlysande at den delen av kvadratet som ligg utanom parallellogrammet utgjer halvparten av kvadratet.

Høvet mellom dei seks areala blir: 1:3:1:4:7:4.
Her kan du dele opp kvadratet i trekantar som er kongruente med trekanten AEH. Kva ser du?

Oppgåve 4



Trekantar med sams høgd er ofte eit godt utgangspunkt. Vi ser på dei tre trekant-områda som har eit hjørne i C. Linja BF er delt i tre deler. Vi vil finne høvet mellom delene.

Trekantane EBG og CFG er kongruente. GB er då halvparten av BF.

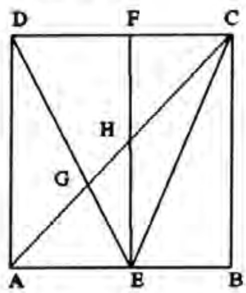
Trekantane CIF og AIB er likeforma. Det lineære høvetalet er 1:2. Dvs. at FI er tredelen av BF. Resten av BF, altså IG, er då seksdelen av BF.
BF er altså delt slik: BG:GI:IF = 3:1:2. Dei same høvetala får vi for dei tilsvarande trekant-område. Den minste trekanten, GCI, fungerer her som arealeining.

Heile trekanten BCF utgjer firedelen av kvadratet. Heile kvadratet vil då innehalde 24 arealeiningar. Resten av oppgåva er no lett. Vi finn fleire sett av kongruente trekantar. Ved samanlikningar og eit par subtraksjonar til slutt, Finn vi at firkanten EGIH = 3 einingar og firkanten HIFD = 6 einingar.

Dei 8 areala får altså høvetala: 2:3:3:3:1:2:6:4.

Oppgåva kan sjølvsagt løysast på andre måtar. T.d. kan vi nytte oss av at ED og BF er parallelle, og dannar fleire sett med formlike trekantar. I det heile skulle denne oppgåva kunne aktivisere både intuisjon og fantasi i tillegg til kjende geometriske slutningar og setningar.

Oppgåve 8

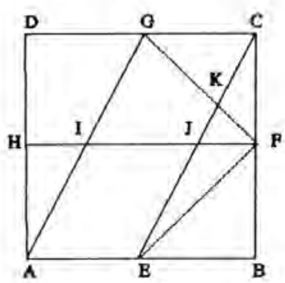


Denne oppgåva har tydelege fellestrekk med oppgåve 4. Vi har tre trekant-område med eitt hjørne i E. Vi kan då prøve å finne høvet mellom delene av diagonalen AC. Ved hjelp av same resonnement som i oppgåve 4 finn vi at HC er halvparten av AC, og AG er tredjeparten av AC. Då blir: AG:GH:HC = 2:1:3, og høvet mellom areala: AEG:GEH:HEC = 2:1:3.

Heile trekanten AEC utgjer firedelen av kvadratet. Heile kvadratet får då høvetalet 24. Resten av brikkene fell no raskt på plass.

Vi får høvetala: 2:1:3:6:3:5:4.

Oppgåve 10



Den som har løyst alle oppgåvene så langt, og spesielt oppgåvene 4 og 8, vil her ha god nytte av erfaringane derifrå. Eit punkt der mange hjørne møtest, er ofte eit fruktbart utgangspunkt. Eit slikt punkt er F. Vi ser at tre trekantar som har grunnlinje langs EC, har sitt toppunkt i F. Vi må då prøve å finne delingsforholda langs denne linja.

Vi ser umiddelbart at EJ utgjer halvparten.

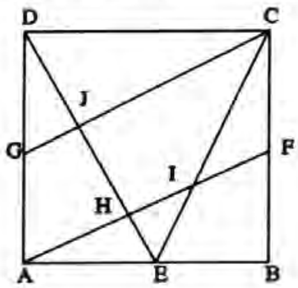
Vidare ser vi at trekantane JFK og CGK er formlike. Det lineære høvetalet må vere 1:2 fordi JF er lik ein firedel av ei kvadratside, og GC er lik halvparten av kvadratsida. JC blir då delt i høvet 1:2.

Altså: EJ:JK:KC = 3:1:2, og av dette: EFJ:JFK:KFC = 3:1:2. Heile trekanten EBC utgjer firedelen av kvadratet, og trekanten EFC halvparten av denne, altså åttedelen av kvadratet, som får høvetalet 48. På grunn av dei nemnde formlike trekantane JFK og CGK, får trekanten CGK høvetal 4.

Ved hjelp av kongruente trekantar, formlike trekantar og eit par subtraksjonar, fell brikkene på plass.

Høvetala blir: 3:12:6:3:1:2:4:8:9

Oppgåve 12



Alle høvetala i oppgåvene er multipla av ei arealeining. Oppgåvene hittil har vore laga slik at det minste området har vore arealeining (og fått høvetalet 1). Det treng sjølvsagt ikkje alltid vere tilfelle. I denne oppgåva skal vi sjå at dei to minste areala får høvetala 2 og 3.

Det spelar for resten ikkje så stor rolle om vi på eit visst tidspunkt vel ei arealeining som medfører brøkar som høvetal. Vi kan berre multiplisere alle høvetala med samnemnaren for brøkane.

Denne oppgåva er vanskeleg. Tidlegare nytta metodar ser ikkje ut til å føre fram. Det gjeld då å finne nye angrepsvinklar. Eit vanleg hjelpemiddel ved løysing av geometrioppgåver er hjelpelinjer. Her må vi vere varsame så ikkje figuren blir rotete og uoversiktleg. Ein ide kan vere å dra ei linje frå B til I. Trekanten EBC (som utgjer ein firedel av kvadratet) er no delt i tre deler. Vi ser lett at delene er like store (to er symmetriske og to har like lange grunnlinjer og sams høgd). Alså: EBI:BIF:FIC = 1:1:1 sum 3.

Trekanten AED er kongruent med trekanten EBC. AED er også delt i tre deler. Trekantane AEH og DGJ er kongruente. Trekantane DGJ og DAH er form-like. Det lineære høvetalet er 1:2.

Vi får då: AEH:AHJG:GJD = 1:3:1 sum 5.

Ved analyse av dei to kongruente trekantane EBC og EAD har vi nytta ulike arealeiningar. Vi må no finne ei sams eining. Den må veljast slik at dei to trekantane kjem ut med same sum. Den minste verdien denne summen kan ha, er 15 (minste sams multiplum for 3 og 5).

Trekanten AEH får då høvetalet 3 og firkanten EBFI høvetalet 10. Arealet av trekanten HEI kan vi no finne som ein differanse, sidan trekanten ABF også er kongruent med DAE. Høvetalet blir 2.

No er resten av oppgåva barnemat. Høvetala blir: 3:2:10:5:16:12:3:9

Sluttvurdering

Mange klagar på dagens geometriundervisning. Den er dels kjedeleg og dels usamanhengande. Geometriske lover og reglar blir mangelfullt forstått. Det er arbeid i gang for å blåse nytt liv i geometrien. Ein veg å gå er å gjere geometrien meir praktisk og nyttig. Spørsmålet er då om den indre geometriske samanheng og logikk kjem tydeleg nok fram på denne måten. Det er vel også fare for at den matematiske komponenten i det praktiske arbeidet blir uforsvarleg liten.

Eg meiner det er viktig å nytte aktivitetar der storparten av tida blir brukt til studium av geometriske former og figurar, og behandling av desse ved hjelp av setningar og slutningar. Oppgåvene som er vist her, bør kunne tene ein slik funksjon. Den relativt utførlege analysen av oppgåvene skulle vise at ein stor del av det geometriske "pensum" kjem til nytte når oppgåvene skal løysast.

Det er rimeleg å anta at spel-preget oppgåvene har, dette at dei representerer eit puslespel som skal "gå opp", vil verke motiverande på dei fleste.

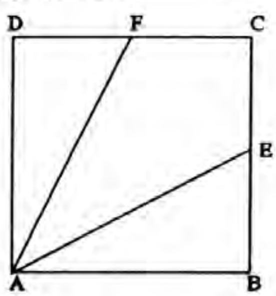
Eg har gitt oppgåvene til ein klasse ved VLH, obligatorisk kurs, og fått positive kommentarar. Det vil vere interessant å prøve oppgåvene ut på ein ungdomsskuleklasse, og eg vonar det kan bli høve til det.

Oppgåvene representerer eit første forsøk på å utforme ein relativt uprøvd type geometriske problem. Dersom sjølve oppgåvetypen vekkjer interesse og fører til lystbetont og utviklande tankearbeid, må ideen kunne førast vidare gjennom nye, justerte og korrigerte oppgåver.

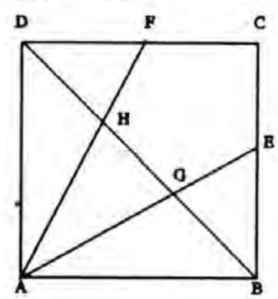
Oppgåvene som er vist her, er henta frå ei samling på 18 oppgåver (Lotsberg,1993).

Oppgåve 1 - 18. (Oppgåve 13 - 18 er med svar.)

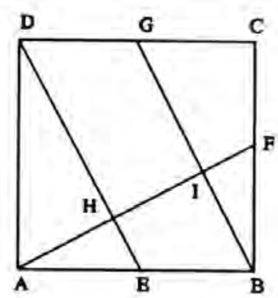
Oppgåve 1



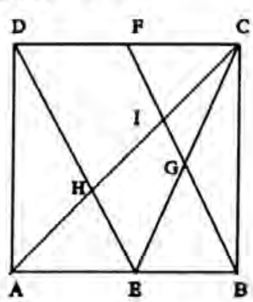
Oppgåve 2



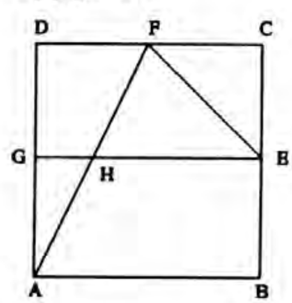
Oppgåve 3



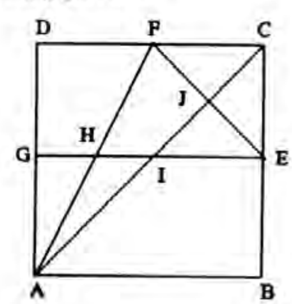
Oppgåve 4



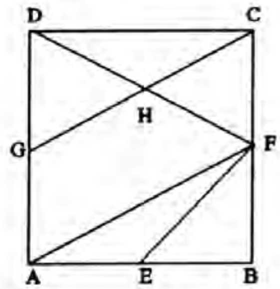
Oppgåve 5



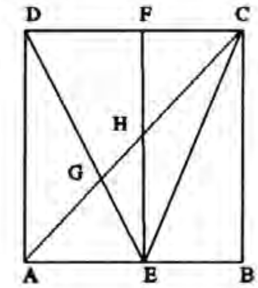
Oppgåve 6



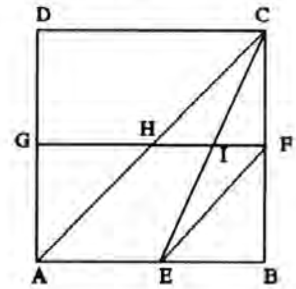
Oppgåve 7



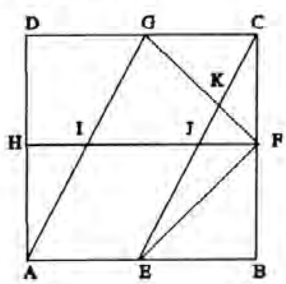
Oppgåve 8



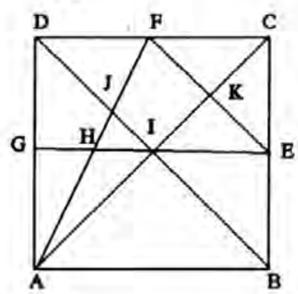
Oppgåve 9



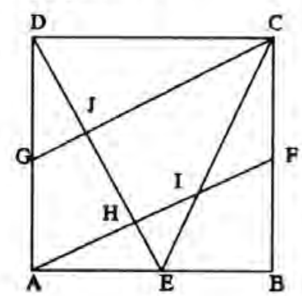
Oppgåve 10



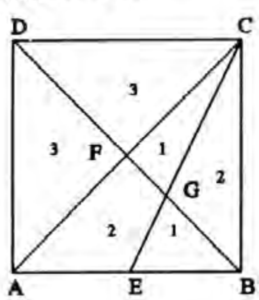
Oppgåve 11



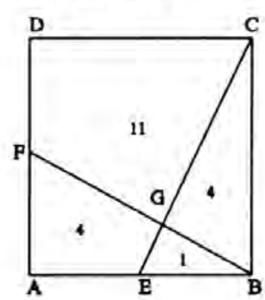
Oppgåve 12



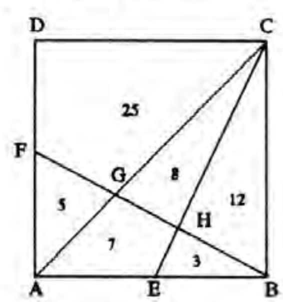
Oppgåve 13



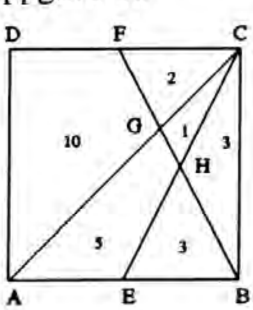
Oppgåve 14



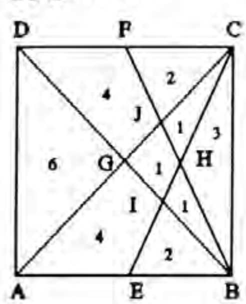
Oppgåve 15



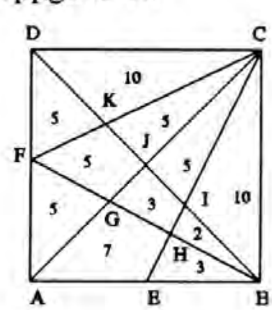
Oppgåve 16



Oppgåve 17



Oppgåve 18



Desse oppgåvene er analyserte og forklarte:

Oppgåve 1 - 4 og 8, 10 og 12.

Desse oppgåvene er presenterte med svar:

Oppgåve 13 - 18.

Resten av oppgåvene kan lesaren sjølv løyse på eiga hand. Behovet for fasitsvar skulle ikkje vere altfor påtrengjande: Når ei oppgåve er løyst, er det som regel innlysande at svaret er rett.

Prøv gjerne å løyse ei oppgåve på ulike måtar. Du kan stole på matematikken. Alle fornuftige vegar fører til same mål.

Eg er interessert i kommentarar, erfaringar, idear og kritikk.
Skriv til: Ivar Lotsberg, Høgskulen i Volda,
eller ring: 7007 5326.

Referansar

Lotsberg, I (1993) *Mosaikk.* Volda lærarhøgskule.
Mellin-Olsen, S (red) (1992) *Caspars geometrimateriell.* Caspar Forlag.
Undervisningsplaner for den høgre almenskole, Oslo 1951.

Trygve Breiteig

Utforsking, tal og talmønster

I denne artikkelen tar vi opp eit talteoretisk problem: Når er produktet av to trekanttal eit nytt trekanttal? Vi viser at det finst uendeleg mange slike trippel av trekanttal, og vi gir algoritme til å finne uendelege rekkefølgjer av slike. Bakgrunnen er ein utforskande arbeidsmetode og eit historisk tilknyttingspunkt til gresk matematikk og filosofen Boëthius.

Matematikk er ei samling av teoriar og resultat om tal, storleikar, form, posisjon og relasjonar mellom slike. Men det er også ein skapande og utforskande aktivitet.

Elevane i grunnskolen og den vidaregående skolen bør også få del i den skapande og utforskande sida ved matematikken. Dei bør ikkje berre einsidig få presentert dei ferdige systematiserte teoriane. Elevane bør også få vere med på å systematisere, få utforske aktivt og stille nye spørsmål som dei sjølv kan følgje opp.

Matematikaren og matematikkpedagogen Hans Freudenthal har ofte og sterkt framheva dette.

> Systematization is a great virtue of mathematics, and if possible, the student has to learn this virtue, too. But then I mean the activity of systematization, not its result. Its result is a system, a beautiful closed system, closed, with no entrance and no exit. In its highest perfection it can even be handled with a machine. But for what can be performed by machines, we need no humans. What humans have to learn is not mathematics as a closed sysstem, but rather as an activity, the process of mathematizing reality and if possible even that of mathematizing mathematics.
> Freudenthal (1969).

Eit utgangspunkt – og nye spørsmål

Torkildsen (1993) gir eit fint og konkret døme på utforskande matematikk. Hans døme på elevars utforsking inviterer til å arbeide vidare i eit slikt spor.

Artikkelen viser at ulike talmønster kan gi gode startpunkt for ein rik matematisk aktivitet.

Hans utgangspunkt er enkelt og praktisk: Med ti leikeklossar, av lengder 1, 2, 3 opp til 10, skal elevane byggje to like høge tårn. Summen av lengdene på klossane blir 55. Elevane ser dermed fort at med desse klossane er det ikkje mogeleg å lage *to* like høge tårn, det er nødvendig at summen er partal. Det viser seg snart at dette er utgangspunkt for ein rik aktivitet. Det er naturleg å stille nye spørsmål: Er dette mogeleg i eit anna tilfelle, til dømes med 8 klossar? Når er det mogeleg? Torkildsen byggjer dette opp slik det kunne ha skjedd saman med ein klasse. Han endar med å *vise* at å byggje *to* tårn av klossane 1, 2, 3 og opp til n er mogeleg når n er eit tal på forma $4k$ eller $4k+3$ og berre då. Dette, seier han,

> er en oppgave med rike muligheter. Oppgaven kan brukes på alle klassetrinn fra og med 1. klasse. Alle elevene vil ikke komme like langt, men alle vil kunne arbeide med deler av oppgaven, også elever som er "flinke" i matematikk ... La elevene få tid og anledning til å diskutere oppgaven for å komme fram til mulige løsningsstrategier.

Her berører han eit sentrum for den matematiske aktiviteten – rike oppgåver, med eit enkelt utgangspunkt, elevanes arbeid blir differensiert, dette treng tid og bør få tid, elevane bør få reflektere over sitt arbeid etterpå – helst ved ei skriftleg framstilling i arbeidsboka.

En naturleg aktivitet er å utvide problemet ved å stille nye spørsmål ut frå dette startpunktet. Her er er nokre idear samla. Vi skal straks følgje opp dei to siste av dei.

1. *Finn* alle løysingane for to tårn av klossane 1, 2, ..., n – for ulike n.
2. Bygg klossane til 3 tårn. Til 4 tårn, til 5 og så vidare. *Når* er det mogeleg?
3. Bruk berre klossane med lengde *oddetal*. Altså 1, 3, 5, 7 og så vidare. Når kan desse byggjast til like høge tårn?
4. Bruk berre klossane med lengde eit *partal*. Altså 2, 4, 6, 8 og så vidare. Når kan desse byggjast til to tårn.
5. Vi søker trekanttal lik *summen av to* trekanttal. Finn eit uttrykk som gir mange slike trippel. (Det tilsvarande problemet for kvadrattal er klassisk. Sjå til dømes oppslaget Pytagoreiske tripler hos Tvete, 1992)
6. Når er *produktet* av to trekanttal eit nytt trekanttal?
7. Når er *produktet* av to rektangeltal lik eit nytt rektangeltal?

Ei historisk tilknytting

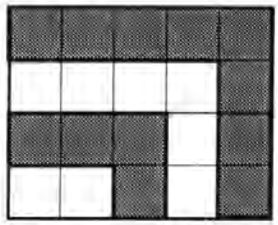
Med *rektangeltal* vil vi meine eit tal av forma $a(a + 1)$. Dei første rektangeltala er 2, 6, 12 og 20. Greske matematikarar studerte slike. Spesielt kjend er tallæra til Nichomachos frå cirka år 100 etter Kristus. Kvadrattal, rektangeltal og trekanttal har ein viktig plass i Nichomachos' arbeid som døme på talmønster. Hans arbeid et ført vidare til andre land og nye tidsepokar.

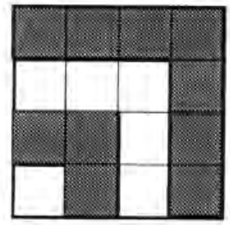
Boëthius (475-526) står i ei særstilling blant dei som formidla antikkens filosofiske arv inn i middelalderen, ikkje minst ved sine oversettingar av og arbeid med bøker frå gresk – om tal, geometri, astronomi, musikk og logikk. Boëtius som "den siste romar og den første skolastikar" sameinar i seg klassisk og kristen kultur, og han kom spesielt til å byggje bru fra grekaranes matematikk til middelalderens Europa. Hans lærebok om tal, De institutione Arithmetica – som rett nok når det gjeld matematikken er ei ukritisk oversetting av Nichomachos' Introductio Aritmetica frå gresk til latin – vart likevel ei lærebok som vart ståande som ein standard autoritet i rundt tusen år! Boëthius peikar på samanhengar som til dømes følgjande:

- **a** Eit rektangeltal er sum av positive partal, frå det første partalet og oppover: $2 + 4 + 6 + \ldots$ Eit kvadrattal er sum av oddetal.
- **b** Eit rektangeltal er det dobbelte av eit trekanttal.
- **c** Summen av to kvadrattal etter kvarandre addert til kvadratet av rektangel-talet mellom dei er eit nytt kvadrattal.
- **d** Den doble summen av to naborektangeltal er eit kvadrattal.
- **e** Summen av to rektangeltal som følgjer etter kvarandre addert til det doble av kvadrattalet imellom dei – blir eit kvadrattal.
- **f** Eit rektangeltal pluss det påfølgjande kvadrattalet blir eit trekanttal.
- **g** Eit kvadrattal pluss det påfølgjande rektangeltalet blir eit trekanttal.
- **h** Eit tal pluss kvadratet av talet blir eit rektangeltal.

Kva er det for samanhengar som på denne måten er skrivne ned? Vi merker oss følgjande:

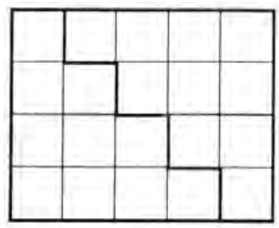
Samanhengen **a** kan vi illustrere. Vi startar med 2 og adderer partala oppover. Eller vi startar med 1 og adderer oddetala på same måten. Det første gir rektangeltala, det andre kvadrattala.





b kan vi også illustrere på ein figur eller uttrykkje med vår symbolbruk:

Trekanttal nummer n er $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$



Samanhengane i **c** krev eigentleg algebraens verktøy for å kunne gje dei ei klar form og ei enkel grunngjeving. Vi kan skrive

$$n^2 + (n+1)^2 + [n(n+1)]^2 = (n^2 + n + 1)^2$$

Dei greske matematikarane og Boëthius hadde ikkje dette symbolverktøyet. Trass i det fann dei interessante samanhengar, som ikkje utan vidare er openberre.

f - h er også døme der vi har særleg nytte av variable og ei algebraisk uttrykksform. Ved det verktøyet kan vi bevise at

$$(n-1)n + n^2 = T_{2n-1}$$
$$n^2 + n(n+1) = T_{2n}$$
$$n^2 + n = n(n+1)$$

I Boëthius' vitskapsfilosofi spela talmønster ei viktig rolle.

> ... all things consist of the same nature and then of the nature of another, and ... this can first be seen in numbers.
>
> Masi (1983)

Kvadrattal og rektangeltal er grunnleggjande i Boëthius' filosofi. Desse to formene er fundamentale og gir opphav til kvar ei form:

> From squares and from figures longer by one side the idea of every form takes its being. ...
> The fact that the entire development of all forms may be seen to arise from these two forms should be noted with no small consideration.
> (Masi, 1983, side 159)

Den tyske matematikkhistorikaren Detlef Jordan, som særleg har arbeidd med middelalderens matematikk, peika i ei gjesteførelesing i Kristiansand 1986 på korleis Boëthius såg samanhengar mellom tal som eit teikn på universets einskap. I forbifarten kom Jordan til å tilleggje Boëthius "resultatet": Produktet av to rektangeltal er alltid eit rektangeltal, analogt til at produktet av to kvadrattal alltid er eit nytt kvadrattal. Seinare fann han at dette "resultatet" likevel ikkje er historisk dokumentert hos Boëthius, det er heller ikkje riktig. Men ein feil kan, i eit utforskande arbeidsmiljø, nettopp vere fruktbar og tenne interesse: *Når* er produktet av to rektangeltal eit nytt rektangeltal? *Når* er produktet av to trekanttal eit nytt trekanttal?

Trekanttal lik produkt av trekanttal

Kva for nokon trekanttal er produkt av to trekanttal? Kva par av trekanttal (større enn 1) har produkt lik eit trekanttal? Vi kan her ha nytte av gode utforskingsstrategiar: Prøv med enkle tal. Ver systematisk. Lag tabell. Leit etter mønster. Bruk mønsteret. Formuler ein hypotese. Bevis hypotesen.

Her er ein tabell over dei første trekanttala.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
T_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105

Då ser vi til dømes at $3 \cdot 15 = 45$, som kan skrivast $T_2 \cdot T_5 = T_9$. Eit litt større døme er: $78 \cdot 276 = 21\ 528$ eller $T_{12} \cdot T_{23} = T_{207}$. Sjølvsagt kan vi halde fram med å leite i tabellen etter fleire trippel. Er det uendeleg mange? Kan vi bevise, eventuelt motbevise det? Kan vi oppdage ein metode til å finne fleire? Finst det ei algoritme som gir alle?

Skaffe fram og ordne tal

Vi skal altså finne trippel av naturlege tal x, y og z slik at

$$\frac{x(x+1)}{2} \cdot \frac{y(y+1)}{2} = \frac{z(z+1)}{2}$$

Vi ser straks at å leite gir ei svært omfattande rekning. Vi går derfor til datateknologien, for å skaffe fram løysingar. Eit BASIC-program kan vere slik:

```
10    FOR Y=2 TO 350
20        FOR X=2 TO Y
30            U=X*(X+1)*Y*(Y+1)/2
40            Z=INT(SQR(U))
50            IF Z*(Z+1)=U THEN PRINT X,Y,Z
60        NEXT X
70    NEXT Y
```

Vi gjer her bruk av standardteknikken å lage ei løkke i arbeidsplanen. Vi lar Y gå frå 2 og oppover (til 350), med steglengde 1, lar altså Y bli 2, 3, 4 og så vidare. For kvar verdi av Y skal programmet sjekke om dette talet er med i eit slikt trippel som vi er på jakt etter. Resultatet blir følgjande:

x	y	z
3	3	8
2	5	9
4	6	20
7	10	55
5	11	44
4	12	39
9	13	90
3	14	35
14	18	189
5	19	75
2	20	35
13	20	195
15	20	224
6	21	98
14	22	230

12	23	207
11	28	231
12	29	260
6	33	153
3	34	84
19	34	475

Kva mønster viser dette? For nokre y-verdier finst det løysing, for andre ikkje – men gir det nokon hypotese? Kan tala delast inn i klasser eller familiar? Det er fleire måtar å dele mengda av løysingar opp i familiar på. Ein måte er å halde x konstant og sjå kva løysingar vi då har. Eit døme:

x	y	z
2	1	2
2	5	9
2	20	35
2	76	132
2	285	494

der den eine faktoren er konstant, $x = 2$. Då har vi ei likning med to ukjende i staden for tre, noko som klart er enklare å takle vidare.

Korleis er så mønsteret her, går det å uttrykkje ein y ved hjelp av føregåande tal? Det blir ei oppgåve å analysere eit talmønster! Det vil truleg innebere ei rekkje overslag, mykje talbehandling, prøving og bruk av intuisjon – før vi kanskje kan kome til eit resultat som dette: For å finne neste y-verdi – doble y, addér z og pluss på 1!

Ein annan familie:

x	y	z
3	1	3
3	3	8
3	14	35
3	34	84
3	143	351
3	341	836

Anar vi ikkje mønster her? Men gir det eit grunnlag til å kunne stille opp hypotesar for korleis desse tripla ser ut? Vi lar spørsmålet stå utan svar. Tida kan nå vere inne til å prøve ein annan innfallsvinkel.

Deduktiv analyse

Vi vil angripe på ein annan måte: Vi vil setje det under lupa og analysere det. Målet er altså å finne tre tal x, y og z slik at $T_x \cdot T_y = T_z$ – eller

$$x(x+1)y(y+1) = 2z(z+1) \tag{1}$$

Dette er ei likning som skal løysast i naturlege tal. Slike *diofantiske likningar* utgjer eit stort område av talteorien, men det er få standardiserte løysingsteknikkar tilgjengeleg. Her skal vi likevel sjå at vi er heldige og kan knyte oss til ein type likningar som det er utvikla teori for.

Sei at vi har funne ei løysing x, y, z av (1). Vi lar x vere konstant og leitar vidare etter fleire i denne familien. Vi omskriv og forenklar (1), og set

$$\frac{x(x+1)}{2} = a \tag{2}$$

a er altså ein konstant. Då gir (1)

$$ay(y+1) = z(z+1)$$

For å få fram fullstendige kvadrat her, multipliserer vi med 4 og adderer 1 på begge sidene.

$$a(4y^2 + 4y + 1) - a + 1 = 4z^2 + 4z + 1$$

Då kan vi skrive dette om til

$$(2z + 1)^2 - a(2y + 1)^2 = 1 - a$$

Igjen forenklar vi uttrykket. Ved å setje

$$2y + 1 = u$$
$$2z + 1 = v$$

endar vi opp med denne likninga

$$v^2 - au^2 = 1 - a \tag{3}$$

som vi vil løyse i *heile tal*, u og v. Likninga (3) er ei *pellikning*, fortel matematikkhistorien. Dette er ei likning som inviterer til utforsking. Historien bak henne finn vi hos Dickson (1919, Ch 12). Ei innføring i pellikninga finn vi elles til dømes hos Tvete (1992).

Vi vil byggje på kunnskapar som er oppnådde tidlegare. Også i ein utforskande matematikk er matematiske kunnskapar, som er forstått og reflektert over, vesentlege. Dei vil styre valet av problem og løysingsmetodar. Sjølv om vi utforskar og systematiserer bitar av matematikken, slik at det blir noko nytt og vårt eige, er vi avhengige av kunnskapar og tidlegare arbeid i matematikk.

Vi ser nøyare på (3). Umiddelbart er $v = 1$ og $u = 1$ ei løysing. Det svarar til $y = 0$ og $z = 0$ i (1).

- Vi finn det minste positive talet $v + u\sqrt{a}$ der v og u er løysing av (3). Då $u = \pm1$ og $v = \pm1$ er løysingar, blir det minste positive talet vi søker $-1 + \sqrt{a}$.
- Vi finn vidare den løysinga av

$$v^2 - au^2 = 1 \tag{4}$$

der u og v er minste naturlege tal. Sett at den minste løysinga av (4) er $u = u_0$ og $v = v_0$.

Vi finn eigentleg *einingane* av forma $v + u\sqrt{a}$, det vil seie dei som multiplisert med sitt motstykke (sin konjugerte), $v - u\sqrt{a}$, gir talet 1. Dirichlets vakre einings-teorem sier at alle løysingane av (4) får vi som potensar av ei grunneining, $v_0 + u_0\sqrt{a}$. Denne grunneininga blir mor til alle dei andre. Ut av dette kjem det at løysingane u og v på (3) er gjevne ved likningane

$$v + u\sqrt{a} = \left(-1 + \sqrt{a}\right)\cdot\left(v_0 + u_0\sqrt{a}\right)^n \tag{5a}$$

$$v + u\sqrt{a} = \left(1 + \sqrt{a}\right)\cdot\left(v_0 + u_0\sqrt{a}\right)^n \tag{5b}$$

der $n = 0, 1, 2, 3$ og så vidare. Vi får to seriar av løysingar, ein frå kvar av desse to formlane.

Døme

Vi ser på tilfellet at $x = 3$. Då er a trekanttal nummer 3, altså $a = 6$. Vi leitar dermed etter minste løysing av

$$v^2 - 6u^2 = 1$$

og finn, ved å prøve oss fram, at denne må vere $v = 5$, $u = 2$

Vi ser då vidare på produkta i (5a) og (5b) og reknar ut.

Først for $n = 1$. Det gir

$$\left(-1+\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right) = 7+3\sqrt{6}$$

som gir $v = 7$ og $u = 3$, det vil seie $y = 1$ og $z = 3$. Vidare gir (5b)

$$\left(1+\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right) = 17+7\sqrt{6}$$

som altså tyder at $v = 17$ og $u = 7$, det vil seie $y = 3$ og $z = 8$.

For $n = 2$ får vi tilsvarande av (5a)

$$(-1+\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})^2 = (-1+\sqrt{6})(49+20\sqrt{6}) = 71+29\sqrt{6}$$

som gir $v = 71$ og $u = 29$, altså $y = 14$ og $z = 35$. Av (5b) følgjer på same måten:

$$\left(1+\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)^2 = 169+69\sqrt{6}$$

som gir $v = 169$ og $u = 69$, det vil igjen seie $y = 34$ og $z = 84$. Slik kan vi halde fram og lage løysingane i denne familien.

Vi kan også finne ut kva som skjer om vi går frå ei løysing av typen $(3, y, z)$ til den neste i same serien, $(3, y', z')$. Vi multipliserer då nemleg talet $\left[(2z+1)+(2y+1)\sqrt{6}\right]$ med $5+2\sqrt{6}$.

Det gir produktet $\left[(24y+10z+17)+(10y+4z+7)\sqrt{6}\right]$, som igjen gir $y' = 5y+2z+3$ og $z' = 12y+5z+8$. Altså: Er $(3, y, z)$ ei løysing, så får vi neste i serien som $(3, 5y+2z+3,\ 12y+5z+8)$.

Dermed har vi vist: Det finst uendeleg mange trekanttal lik produktet av to trekanttal. Vi har også uttrykt ei algoritme til å finne alle.

Rektangeltal lik produkt av rektangeltal

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
R_n	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156	182	210

Produktet av to nabo-rektangeltal er eit rektangeltal, noko følgjande identitet viser:

$$(x-1)x \cdot x(x+1) = (x^2-1)x^2$$

Men utover dette? Når er eit rektangeltal produktet av to rektangeltal? Kva for trippel (x, y, z) er slik at

$$x(x+1)y(y+1) = z(z+1) \tag{6}$$

Problemet er analogt med det vi nettopp har studert for trekanttal, men det viser seg faktisk enklare. Vi tenkjer igjen at x er fast og set $a = x(x+1)$. Nye variable $u = 2y+1$ og $v = 2z+1$ gjer det heile enklare, og uttrykket endar igjen opp som

$$v^2 - au^2 = 1 - a \tag{7}$$

Vi ser så etter minste løysinga av

$$v^2 - au^2 = 1 \tag{8}$$

Denne er $(u, v) = (2, 2x+1)$, idet

$$(2x+1)^2 - 4a = 4x^2 + 4x + 1 - 4x(x+1) = 1$$

Refleksjonar

Matematikken lar seg utforske og oppdage. Vi ønskjer å stille enkle spørsmål som startproblem, men slike som opnar for rike matematiske aktivitetar. Utforsking av talmønster bør vere aktuelt for grunnskolen og for den vidaregående skolen. Nokre utforskingsstrategiar er nyttige då, og slike strategiar bør vere ein del av den handbagasje ein elev får med seg frå skolen, ut i yrkes- og samfunnslivet.

Men utforsking krev også grunnleggjande kunnskapar i matematikk. Kor ligg så denne balansen mellom kunnskap og utforsking? Korleis bør vi balansere mellom det å ta imot og reflektere over kunnskapar på den eine sida – og å finne ut, oppdage, uttrykkje seg sjølv og sine tankar på den andre? Korleis kan elevane arbeide med problemløysing, utforsking og refleksjonar over sitt eige arbeid og gjennom det førebu matematikkens teoriar og resultat? Dette er sentrale spørsmål i matematikkdidaktikk i dag.

Vi kan ved ein utforskande arbeidsmetode gjenomleve glimt av den historiske utviklinga. Det er ein god lærdom. Vi har grunn til å verdsetje også oldtidas og antikkens matematikk. Kunnskapar vi tar for gitt i dag, slik som dei konsise algebraiske symbola og omgrepa var då ikkje utvikla.

Samtidig møter vi spørmålet om å kunne utnytte på ein naturleg måte vår tids informasjonsteknologi også i matematikk. I slike tilfelle bør terskelen til bruken vere låg. Teknologien er eit middel eleven skal styre, ikkje motsett. Men det kan det vere godt å kjenne nokre basisprinsipp for enkel programmering.

Utprøving og blindvegar er ein del av alt utforskingsarbeid. Elevane går seg fast og veit ikkje om det fører nokon veg vidare, kanskje dei må gå tilbake og starte på nytt, og dei kan bli frustrerte. Det er ein del av prosessen. Ikkje alle problem i matematikken lar seg løyse, og vi kan måtte gjere forenklingar. Får elevane også røyne det i skolen?

Referanser

Dickson, (1971) *History of the Theory of Numbers*. New York: Chelsea.

Freudenthal, H (1968) Why to teach mathematics so as to be useful. I *Educational Studies in Mathematics*, **1**, 3-8.

Masi, M (1983) *Boethian Number Theory*. A translation of the De Institutione Arthmetica. Amsterdam: Rodopi.

Torkildsen, O E (1993) Ei eske med ti lekeklosser. I *Tangenten* **4**, 3/4, 23-33

Tvete, K (1992) *Tallære*. Rådal: Caspar.

Christoph Kirfel

Tallkuriositeter

I forrige nummer av Tangenten kom vi i skade for å trykke en artikkel som egentlig skulle ha vært med i dette nummeret. Tanken var å sette i gang en liten "serie" om tallmønster men ved en feiltakelse ble altså del 2 trykt før del 1. Her kommer nå den første delen av serien:

I det tyske tidsskriftet for matematikkdedaktikk "mathematik lehren" (Heft 59, side 24) fant jeg følgende regnestykker som virker nokså pussige. Mange mennesker lar seg lettere inspirere av slike mønster enn av store teorier og teoremer. Det er nettopp slike folk denne lille noten henvender seg til. Her kommer kuriositetene:

$$\begin{aligned}
121 &= \frac{22 \cdot 22}{1+2+1} \\
12321 &= \frac{333 \cdot 333}{1+2+3+2+1} \\
1234321 &= \frac{4444 \cdot 4444}{1+2+3+4+3+2+1} \\
123454321 &= \frac{55555 \cdot 55555}{1+2+3+4+5+4+3+2+1} \\
12345654321 &= \frac{666666 \cdot 666666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1} \\
\dots \quad & \quad \dots \\
\dots \quad & \quad \dots \\
12345678987654321 &= \frac{999999999 \cdot 999999999}{1+2+\cdots+8+9+8+\cdots+2+1}
\end{aligned}$$

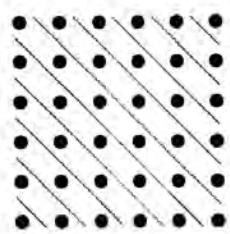
Forresten, hvordan vil de manglende linjene se ut? Prøv om de tilhørende regnestykkene også er riktige. Er det ikke et forunderlig mønster?

Følgende lille hint vil jeg gi til dem som mener å trenge det for å trenge inn i hemmeligheten bak denne kuriositeten. Det vil nemlig lønne seg å studere summeformlene som opptrer i nevnerne. Heldigvis lar dette seg gjøre på en helt intuitiv og geometrisk måte uten vanskelige beregninger og krumspring.

Vi velger ut ett av eksemplene nemlig

$$1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1.$$

Nedenfor ser du tegningen av et 6 ganger 6 kvadrat med 10 skrå linjer som går i diagonal retning.



Oppdelingen forteller oss at kvadratet er satt sammen av 11 striper med først voksende og så avtagende lengde. Men det var jo nettopp det vi ville frem til, altså:

$$1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=6\cdot 6=36.$$

Nå er det lett å se at ikke bare vårt 6 ganger 6 kvadrat, men hvilketsomhelst kvadrat ville kunne bli delt opp etter samme mønster med skrå linjer som er parallele med en av diagonalene. Dette lille trikset forteller oss da at

$$\begin{aligned} 1+2+1 &= 2\cdot 2=2^2 \\ 1+2+3+2+1 &= 3\cdot 3=3^2 \\ 1+2+3+4+3+2+1 &= 4\cdot 4=4^2 \end{aligned}$$

osv. Generelt kan vi si at oppdeling av et kvadrat med sidelengde n etter det gitte mønsteret gir oss følgende formel:

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=n\cdot n=n^2.$$

Med denne ballasten skulle det ikke være umulig å gjennomskue, hvorfor regnestykkene våre tar seg ut slik de gjør.

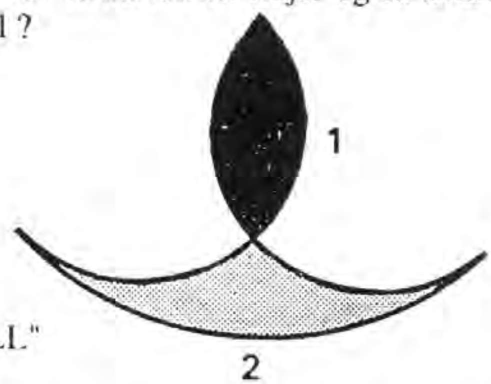
Lykke til med den videre utforskning av tallmønsteret!

"INNTRYKK FRA FRANKRIKE"

I Frankrike arrangeres det mange konkurranser i matematikk på forskjellige plan. Her følger noen smakebiter på oppgaver fra "Matematikk-rally uten grenser" 1991, arrangert i området Andorra, Catalonia, Midt-Pyreneene og Baskerland. Oppgavene er på 9.klasse-nivå, unntatt den siste.

"LOGO"

Denne logoen består av to halvsirkel-linjer og en kvart sirkellinje. Hvilken sone har størst areal ?



"FORENEDE TALL"

Vi sier at tallene 390, 394, 196 og 784 er forenet av 2 fordi 390+2= 394-2=196*2=784:2 På samme måte sier vi at tallene 210, 222, 36 og 1296 er forenet av 6 fordi 210+6=222-6=36*6=1296:6

Legg nå merke til at:
1764 = 390 +394 + 196 + 784 ; det vil si at 1764 er summen av de fire tallene som er forenet av 2.
1764 = 210 +222 + 36 +1296 ; det vil si at 1764 er også summen av de fire tallene som er forenet av 6.

Hva er det minste tallet større enn 1991 som har denne samme egenskapen ?
Det vil si at tallet lar seg skrive :

-både som summen av de fire heltallene forenet av 2
-og som summen av de fire heltallene forenet av 6.

"SAMBOERE" (1.klasse, videregående skole)

Noen husdyr har så dårlig lynne at de ikke kan "bo" sammen med andre dyr, unntatt på en betingelse : at de har minst 8 m. avstand fra de andre dyra. Kan 10 av disse dyra med dårlig lynne "bo" sammen i en rektangulær innhegning som er 18 m. lang og 15 m. bred ?

Bjørn Erik Kolstad