TANGENTEN

TANGENTEN

TIDSSKRIFT FOR MATEMATIKK

NR. 4 1994 5. ÅRGANG

Av innholdet:

Matematikkundervisningen som nyttefag og danningsfag; Kompliserte familier; Skolegeometri og arkitektur; Evige kalendere; Tidsoppfatning blant barn; Matematikk på frimerker; Oppgaver fra Sovjetunionen.

RETURADRESSE:
CASPAR - TANGENTEN
Boks 2966
N-5030 LANDÅS

BLAD I POSTABONNEMENT

Innhold:

MASTER TRYKK OG KOPI A.S

På veg mot en ny læreplan. Men hvem er det som kommer til å styre matematikkundervisningen?

Så er det hele i gang.
En ny høringsfrist er ute, vi håper at uttalelsene er mange. Dersom det er slik at Hernes nå mener at uttalelsene spriker, da bruker han nok skjønn og vurderer dem i "beste mening". Slik har også vi hatt det når vi har lest hans siste dokument. Straks vi har lest et avsnitt vi tar avstand fra, kan vi finne et annet avsnitt som ivaretar motsatsen. Slik blir det fritt fram for ulike tolkninger.

Vi liker ikke formen, men den kan ha sine fordeler:
Kjære Rolf Venheim[1], du som nå har fått oppdraget å skrive læreplanen i matematikk. Du skulle ha gode muligheter til å la din faglige og pedagogiske innsikt råde. Tolk retningslinjene i "beste mening"! Gjør som du mener tjener elever og lærere.

Ting er på gang i norsk skole, det gjelder også i matematikkundervisningen. Visst er det riktig at skolematematikken fremdeles har trekk av å være lærebokstyrt og "rett tall på rett plass"-pedagogikk. Samtidig ser vi at mye har skjedd de siste 10 årene. Vi finner klasserom som bruker flere læreverk. Prosessorientert matematikkundervisning praktiseres og mange elever og lærere har fått et friere og mer nyansert forhold til å bruke skolematematikkens "autoriserte metoder". Få lærere mener i dag at "alle elevene skal gjøre alle oppgavene i boka". I hele grunnskolen har prosessorientert skrivepedagogikk påvirket matematikk-undervisningen. Lenge har lærere klaget over svak kompetanse i matematikk, men opprustningen er på gang. Stadig flere studenter får matematikkfordypning i lærerutdannngen, stadig flere lærere etterutdannes i faget. Utfordringen ligger i å gi dem en læreplan de fortjener.

En av problemstillingene til Venheim er: Hvordan lages en plan som ikke er slik at lærebøkene fortsatt skal styre undervisningens innhold og metoder?

Svar på spørsmålet kan søkes i to retninger:

---

[1] Rolf Venheim er høyskolelektor i matematikk ved Høyskolen i Agder (Tidl. Kristiansand lærerhøgskole). Han er forfatter av Regnereisen (1.-6.klasse) og av Matematikk for lærere I og II. Aschehoug forlag.

1) Vi kan få en mer detaljert plan enn den vi har nå, en plan der målene defineres så presist at vi kan måle om de oppnås. Formuleres målene detaljert nok, synes det som om vi er tilbake i regelstyringen. Det kan på mange måter rime med høringsutkastet. Planen vil formulere hva som skal læreres når. Dersom det i tillegg tilbys tester, vil vi tro at lærebøkenes autoritet minkes. Særlig dersom testene blir fulgt opp av metodiske opplegg.

2) Vi kan få en plan som søker å stimulere den skole-utviklingen som vi de siste årene har sett konturer av. Den lages gjennom å signalisere tillit til lærernes kompetanse, gjennom å formulere overliggende mål. Også en slik plan vil kreve etterutdanning, veiledninger og eksemplifiseringer.

Dersom en søker å løse problemet i retning av spor 1, vil en nok finne at lærebokforfatterne vil innrette seg. Vi tror at lærebøkene vil bli stadig mer like hverandre. Ens retning blir ensretting. Søker en i retning av spor 2, vil en fortsatt ha et ulendt terreng. Bøkene vil bli ulike. Lærere og skoler må velge lærebøker, metoder og innhold som følge av pedagogisk miljø og egen kompetanse.

M87 har gjort noe med norsk skole, men vi hadde likt at vi fikk mer tid på oss! Vi ser hvordan norskfaget har fått et løft i denne perioden. Lærerne har utviklet høyere kompetanse. De benytter et mangfold av tekster og metoder. Vi vil neppe kunne få en plan som kan strømlinjeforme de dyktige norsklærerne. De får nok selv det siste ordet, de gjør som de mener er best.
Så blir det spennende å se. Vil man strømlinjeforme lærernes undervisning i matematikk? Vil lærerne la seg styre? Vi håper du lykkes, Venheim, i å lage en plan som tror på lærerne og som støtter dem i å si nei til styring gjennom tester. Det vil være ille om det er tester som skal overta styringen og ikke planens intensjoner!
(Og innerst inne så våger vi: Lærere vil gjøre det de selv mener er best!)

Rolf Venheim ønsker innspill i arbeid sitt. Benytt anledningen, bruk Tangenten!

Gunnar Gjone:

Matematikkundervisningen mellom nytte og danning

I begrunnelsen for matematikkundervisningen i skolen har to forhold ofte vært trukket fram: Matematikken skal være *nyttig*, på den andre siden skal den også bidra til *danning* av individet. Selv om matematikken ikke lenger blir sett på som et middel til å fremme tankeevnen generelt, er faget innenfor vårt utdanningssystem tillagt stor vekt - for eksempel er det nødvendig med matematikk for en rekke ulike studier, og matematikk grunnkurs i 1. klasse i videregående skole er nødvendig for å få generell studiekompetanse.

Disse to forholdene - matematikk som *nyttig* og som *danning* har sine klare tradisjoner i norsk skole.

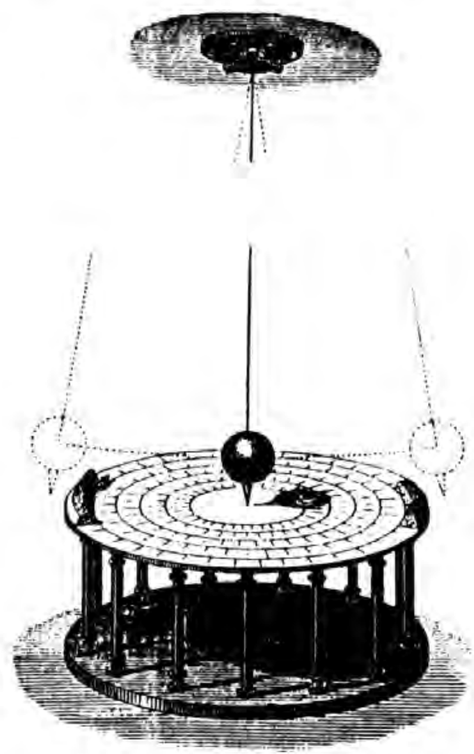


Fig. 286. Foucaults Pendelforsøg.

Matematikk i den høgre skolen og regning i folkeskolen - to ulike tradisjoner.

Matematikk i den høgre skolen

I den lærde skole før 1800 hadde matematikken en plass som et klart dannende fag, og det hadde samme funksjon som logikk og latin.

I forrige århundre sto det en strid om den høgre skolen i Norge. Denne striden, mellom klassisisme og realisme, sto sentralt gjennom største delen av århundret.

Matematikkfaget fikk en fornyelse i denne prosessen. Det ble nært knyttet til framveksten av naturvitenskapene. Vi fikk et nytt danningsideal i den høgre skolen som kom til å dominere utviklingen framover.

Hvis vi går fram til tida like etter den andre verdenskrigen hadde matematikkfaget fortsatt en sterk posisjon som et danningsfag i den høgre skolen. På reallinja var den i hovedsak forberedelse til videre studier. På engelsk- og latinlinja hadde den kanskje en noe uklar profil, men den var ikke et utpreget nyttig fag - den var for eksempel en del av danningen til de vordende filologer.

Regning i folkeskolen

Kravet om folkeskole, som vokste fram i siste halvdel av forrige århundre fikk store konsekvenser for matematikkfaget eller regning. Mens faget i hovedsak hadde hatt en dannende funksjon også i allmueskolen, fikk den en helt ny profil ved innføring av folkeskolen. En av de sterkeste forkjemperne for folkeskolen var Ole Vig:

> Det er "en falsk Paastand", hevdet han, at undervisning i et enkelt fag fremmer evnenes utvikling generelt, at. f.eks. matematikk gir større evne til i sin alminnelighet å trekke logiske slutninger. Det faktiske forhold var at en ved å lære matematikk utviklet tenkeevnen i det som angikk tall og regning, ..(Sitert etter Dokka, 1967, s.122-3)

Dette viser at nytteaspektet dominerte i synet på faget i folkeskolen. Borgersamfunnets behov blir drivkraften i utviklingen av skolen.

Forhold i samfunnet gjorde også til at nytteaspektet ble fokusert: Fart i regnefagets utvikling ble det først etter at lovene om nytt pengevesenet og om metrisk mål og vekt trådte i kraft i 1875. I slutten av det nittende århundre kom det videre en rekke metodikkbøker som også la vekt på praktisk bruk av matematikken. Praktisk matematikk kom til å dominere faget i folkeskolen i lang tid.

Ved inngangen til den 2. verdenskrig hadde vi således i Norge to skoleslag med hver sine matèmatikktradisjoner. Folkeskolen med regning og realskole/gymnas med matematikk, men også noe praktisk (yrkesrettet) regning i realskolen - spesielt i det siste året.

Enhetsskoletanken

En drivkraft i norsk skoleutvikling i de siste hundre år har vært tanken om en enhetsskole, som hadde følgende innhold:

> Enhetsskoletaken innebar ... i vårt land at alle skulle gå i samme skole og få samme undervisning gjennom hele den skolepliktige alder. (Dokka, 1981, s.12)

Prosessen med å lage en enhetsskole har altså bestått i å lage et lengre felles løp for elevene. I Norge var det en prosess fram mot en 7-årig folkeskole i 1930-årene, og mot en 9-årig grunnskole i 1950- og 1960-årene. I de nåværende skolereformene kan vi snakke om en bestrebelse mot en 11-årig enhetsskole: Elevene vil starte ett år tidligere på skolen, og enhetsskoletanken har også gjort seg gjeldende i grunnkurs i videregående skole. Det har vært en tilnærming for fag i de ulike studieretninger: En større del av elevkullet får en mer lik fagkrets.

I utviklingen av enhetsskolen har matematikkfaget vært problematisk. Det har kanskje vært det faget der det har vært mest vanskelig å få et felles tilbud for alle elever oppover i klassetrinnene.

Matematikkundervisningen i etterkrigstiden - forsøk på å forene de to tradisjonene:

Det som framfor alt kjennetegner skoleutviklingen i Norge - såvel som i de andre nordiske land etter den andre verdenskrigen, var utvidelsen av den obligatoriske skolegangen. I Norge startet arbeidet med utredninger om en 9-årig skole for alle, midt i 1950-årene.

Det sentrale spørsmålet når det gjaldt matematikkfaget i den 9-årige skolen for alle, hva slags matematikk skulle elevene lære? Var det folkeskolens regneundervisning - med vekt på det praktiske som skulle være det dominerende element, eller var det den høgre skolens allmenndannende matematikk som skulle være grunnlaget i de øverste trinnene i den nye 9-årige skolen? Flere hensyn måtte veies mot hverandre:

En viktig faktor var elevenes utvikling. Den allmenndannende matematikken som en hadde i realskolen og gymnaset, var neppe egnet for alle elever. På den annen side var det et viktig poeng at elevene ikke skulle være mye dårligere rustet ved inngangen til gymnaset.

Det første planutkastet i denne prosessen var *Læreplan for forsøk med 9-årig skole* som kom i 1959. I denne planen var en meget opptatt av struktur og organisering: En foreslo at de første årene skulle ha felles fagstoff, og at det så skulle være en deling på ungdomstrinnet:

> Ved utgangen av 7. klasse vil det trolig være stor spredning i elevenes kunnskaper, og særskilt i deres evne til å løse oppgaver. Dette er

> grunnlaget for de tre forskjellige kurser som er satt opp for 8. og 9. klasse. (Læreplan for forsøk med 9-årig skole, s.89)

Det som kanskje var mest slående i planen var at en hadde valgt å kalle faget *matematikk* helt fra 1.klasse av. Hans Jørgen Dokka skriver om dette i sin oversikt *Reformarbeid i norsk skole,* Dokka (1981)

> I samsvar med fagets nye navn skulle regneundervisningen også på de lavere trinnene få karakter av undervisning i matematikk. Allerede der skulle elevene begynne å arbeide med et matematisk tegnspråk. Ved utgangen av 6. trinn skulle de bl.a. kunne løse regne-oppgaver ved hjelp av ligning. (s.36-37)

Var dette da en dreining mot en mer abstrakt matematikk? Går vi nøyere inn på formuleringene i planen kan mye tyde på det.

Det kom inn formuleringer tydelig viser at vekten skulle legges på matematikk som danning. At den 9-årige skolen skulle danne et grunnlag for videre undervisning i faget blir også tydelig fram når vi ser mer konkret på lærestoffet som det blir presentert i planen.

Matematikken i den nye 9-årige skolen framstår med dette som mer teoretisk og abstrakt enn tidligere. Matematikkens nytteaspekt er tonet ned. Det som da ble et sentralt spørsmål var hvordan dette ville virke på de ulike elevgruppene. For selv om en her søkte en organisatorisk differensiering, må det understrekes at de målene som var satt gjaldt for alle elevene på ungdomstrinnet.

Imidlertid er det nå på tide å se litt på utviklingen av matematikk-undervisningen internasjonalt. Utvikllingen etter den andre verdenskrigen hadde ført til nye strømninger. Der hvor utviklingen var mest interessant var i USA.

"Moderne matematikk"

Moderne matematikk er det navnet vi vanligvis bruker for å betegne reform-bevegelsen som varte i rundt 20 år, fra midten av 50-årene til midten av 70-årene. Reformen vokste fram i USA i midten av 1950-årene og skjøt fart i USA ved oppskytningen av Sputnik i 1957. Hvordan kan vi karakterisere "moderne matematikk" innenfor et nytte-dannings perspektiv?

Reformen i moderne matematikk startet på sekundærtrinnet. Begynnelsen av reformene i Europa er det rimelig å legge til en konferanse som ble holdt i Royaumont i 1959, arrangert av OEEC. Deltakerne fra Norge kom fra gymnas og universitet, altså innenfor det vi kan kalle danningstradisjonen. Dette var også situasjonen for deltakerne fra de andre landene. Hvert medlemsland skulle sende tre delegater - en matematiker, en person fra utdanningssystemet (departement) og en gymnaslærer (OEEC, 1961).

> Et hovedanliggende hos seminardeltagerne var å gi matematikken på sekundærtrinnet samme oppbygging som den "moderne" matematiske forskningen. Ikke bare skulle sekundærtrinnets matematikk "take on some of the burden now resting on the university" - men det "moderne" matematikksyn (som det bl.a. kommer fram hos Bourbakigruppen) skulle være grunnleggende (Gjone, 1983)

Vi vil derfor hevde at moderne matematikk i den første fasen var en bevegelse med fokus på danningsaspektet. Det som da blir et sentralt spørsmål er: Hvordan - og med hvilken begrunnelse - spredte moderne matematikk seg til de lavere klassetrinnene?

Dette skjedde med noe ulik begrunnelse i ulike land. Det som vi imidlertid vil konsentrere oss om her er utviklingen i Norge.

Som nevnt sto en overfor problemet med å forene de to matematikk-tradisjonene for den 9-årige skolen. De som arbeidet med grunnskolens matematikk i Norge så tidlig at denne formen for matematikkundervisning kunne være interessant også i begynneropplæringen.

De fikk her sterk støtte av sentrale læringsteoretikere. Bruners framlegging om at det er vitenskapsfagets struktur som gir den mest hensiktsmessige fagstruktur ble et slagord for mye undervisning i denne tida.

Dette førte til et oppsving utover i 1960-årene for moderne matematikk gjennom flere forsøksprosjekter. Forkjemperne for reformen hadde tro på at fagets nytteverdi ble tatt vare på gjennom de "moderne" oppleggene, og i flere sammenhenger blir dannings-aspektet til matematikken omtalt som en sentral side ved faget, for eksempel i *Forarbeid til Normalplan for grunnskolen:*

> Faget har også lenge stått sentralt i skolen, ikke bare på grunn av dets åpenbare praktiske betydning, men også fordi det har vært tillagt stor allmenndannende verdi, bl.a. med hensyn til arbeidsdisiplin og tanketrening. (s.123)

Ellers er det tydelig at en i Normalplanutvalget så for seg en matematikkundervisning der en forenet de to tradisjonene:

> Faget er dermed blitt framstilt på en måte som forhåpentligvis vil gi elevene økt faglig forståelse og samtidig gi dem den nødvendige ferdighet i ren tallbehandling. Det en tidligere kalte praktisk regning er gjort til en integrert del av faget. ... Et viktig siktepunkt har ellers vært å gi elevene en sterkere sans for det formelle og for en presis uttrykksform. (s.123)

Reaksjoner mot "moderne matemtikk"

Reaksjonene mot moderne matematikk kom i mange land omtrent samtidig. De startet i slutten av 1960-årene og varte med varierende styrke i ulike land et godt stykke ut i 1970-årene. Et kjennetegn ved reaksjonene var at de i første rekke gjaldt matematikkens nytteverdi og motstanden kom innenfor de tidlige klassetrinnene.

Reaksjonene fikk spesielt store konsekvenser for matematikken på barnetrinnet. Det er videre verdt å merke seg at kritikken nok fikk mindre konsekvenser for matematikken i gymnaset. En rekke av de emnene som kom inn med den moderne matematikken, som for eksempel vektorregning overlevde de omveltningene som fulgte. Etter min mening viser dette den danning som moderne matematikk representerte i gymnaset også levde videre. 1970-årene markerer på mange måter derfor et skifte i synet på matematikk - den skulle være nyttig, spesielt i begynneropplæringen. Men hva ble så resultatet i Norge der noe av begrunnelsen for moderne matematikk var at det skulle være et nytt lærestoff som skulle innfri forventningene til den nye 9-årige grunnskolen?

Omveltninger i slutten av 1970-årene.

Etter at "den moderne matematikken" ikke lenger var aktuell i skolen hadde det oppstått en problematiske situasjon: En ikke hadde noe alternativ til den mer tradisjonelle realskole matematikken på ungdomstrinnet.

I flere land finner vi en ny bevegelse. Den fikk et eget navn: *Back to basics*. Back to basics - tilbake til grunnlaget ble - som alle bevegelser - gitt ulike presiseringer, men med en felles retning - vekt på det grunnleggende. Det kunne bety sterkere konsentrasjon om det grunnleggende i faget, men ofte var det de grunnleggende ferdighetene som var nødvendig for å anvende faget. Som for eksempel de fire regningsartene.

Back to basics bevegelsen kom imidlertid ikke til å bli særlig sterk i Norge. I Sverige ble den imidlertid gjenstand for en rekke utredninger.

Vi fikk også en annen internasjonal bevegelse - forsøket på å definere "minimal kompetanse" i matematikk (minimal competecy). James T. Fey har gitt denne bevegelsen følgende karakteristikk (Fey, 1980):

> Looking at school mathematics today one finds only modest evidence that earlier enthusiasm led to fundamental change; skepticism and doubt have overcome boundless optimism; teachers and the public constituents of education are asking 'What are the minimum competencies we can expect from students?' In the United States this focus on minimal standards of school achievement began building in the early 1970's. (s. 523)

Det er interessant å bemerke at denne bevegelsen fikk en slags innvirkning på situasjonen i Norge: Hvor mye matematikk er det nødvendig at elevene kan ved utgangen av grunnskolen? - var det tydelig at en måtte ha spurt seg i departementet. Svaret som en kom fram til, var at det kanskje bare var nok med 8 år matematikk.

Det reiste seg imidlertid en sterk reaksjon mot dette, først og fremst fra matematiker-samfunnet og departementet måtte gi seg. Det ble imidlertid ikke en "full" seier, matematikken i 9.klasse ble sterkt redusert, det kan hevdes at den ikke gikk særlig langt ut over matematikken på "Plan 3" i 8. klasse fra den kursplandelte ungdomsskolen. Prosessen rundt dette er beskrevet i Gjone (1983).

I Norge hadde vi ytterligere et framstøt som vi kan assosiere med denne retningen. I slutten av 1970-årene hadde Grunskolerådet en arbeidsgruppe som forsøkte å presisere læreplanen i mateamtikk. Et dokument: "Grunnleggende emner i matematikk" ble utarbeidet av en gruppe under Grunnskolerådet, men det synes ikke å ha fått noen særlig utbredelse.

Det kan være god grunn til å spørre om hvorfor disse bevegelsene kom så sterkt i slutten av 1970-årene. Flere har vært inne på at det er rimleig å se de som reaksjoner mot "moderne matematikk".

Utover i 1980-årene var nok nyttehensynet det dominerende for matematikk-undervisningens vedkommende. Mønsterplanrevisjonen i 1987 befestet også dette inntrykket. Selv om danningsaspektet ved matematikken ble understreket i ulike sammenhenger, er det nok riktig å si at nyttehensynet dominerte.

Det ble for eksempel innført nye hovedemner som *Prosent, Måling og enheter* og *Samfunnsøkonomi og personlig økonomi*. En rekke formuleringer i planen viste at nyttehensynet sto sterkt - danningselementet i planen var nedtonet. Blant annet sto det i M87 ikke noe om at matematikken i grunnskolen skulle forberede for videre utdanning - noe som hadde vært tilstede i tidligere planer.

Reform 94
I den generelle delen av fagplanen finner vi følgende overskrifter:

Det meningssøkende menneske
Det skapende menneske
Det arbeidende menneske
Det allmenndannete menneske
Det samarbeidende menneske
Det miljøbevisste menneske
Det integrerte menneske

Disse overskriftene gjenspeiler et danningsideal. Går vi inn i fagplanen for matematikk finner vi mål som for eksempel gjelder *Matematikk som kulturarv*, et mål som ikke er "nyttig" ut fra en vanlig tolking.

Framstillingen ovenfor gir grunnlag til å presentere et diagram over hvordan matematikk-undervisningen har beveget seg mellom nytte og danning. Bildet er et forsøk på å fange inn svingninger for hele skoleverket, fra 1. til 12. klasse. Det er klart at bildet av den grunn blir mindre nøyaktig, siden vi nok - i noen grad - har noe ulik utvikling i de ulike skoleslagene. Et problem vi skal reise, men ikke ta opp her er: Hva menes med *danning?* Danningsbegrepet endret seg i siste halvdel av forrige århundre og det endrer seg også idag. I Reform 94 kan vi peke på integrering av yrkesfag og allmennfag i denne sammenhengen. *Danning* vil være et begrep som vil være ulikt for ulike grupper i samfunnet, og det endrer seg over tid.

Oppsummering
Jeg har i denne framstillingen forsøkt å argumentere for at det er meningsfylt å diskutere svingninger i matematikkundervsningen som en bølgebevegelse mellom **nytte og danning.** Analysen søker å antyde at vi nå er på vei inn i en periode med danning som det sentrale for matematikkundervisningen, men at det danningsidealet som vi nå ser konturene av, er et annet enn det danningsidealet som dominerte matematikkundervisningen i 1960-årene.

Denne bølgebevegelsen er det videre interessant å studere i lys av bestrebelsene når det gjelder enhetsskolen - med to klare tradisjoner for matematikkfaget i skolen: Hva slags matematikk passer for alle elever gjennom hele den obligatoriske skolegang - som gjennom etterkrigstiden har stadig blitt utvidet.

Litteratur

Dokka, H.J. (1967) *Fra folkeskole til almueskole*. Oslo: Universitetsforlaget

Dokka, H.J. (1981) *Reformarbeid i norsk skole*. Oslo: NKS-forlaget

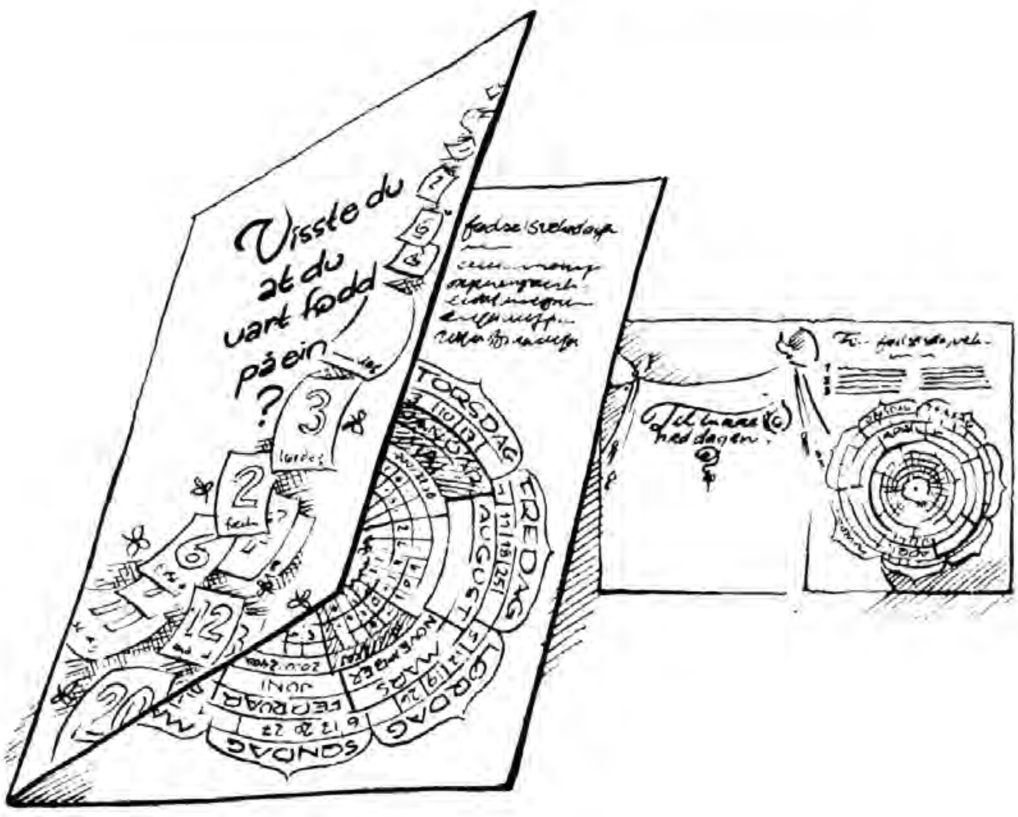
Fey, J.T. (1980) The United States' NSF studies of mathematics education. I *Comparative Studies of Mathematics Curricula. Change and Stability 1960-1980. Materialen und Studien Band 19*, Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik

Forsøksrådet for skoleverket (1959) *Læreplan for forsøk med 9-årig skole. ... (LFF)*

Gjone, G. (1983) *Moderne matematikk i skolen.* Dr. avhandling, Oslo: Universitetet i Oslo

Normalplanutvalget av 1967 (1970) *Forarbeid til normalplan for grunnskolen.* Oslo: Aschehoug

OEEC (1961) *New Thinking in School Mathematics.* Paris: OEEC



Her er en skisse av kalenderskiven til Christoph Kirfel (se artikkelen side 28), nå som bursdagskort, slik at bursdagsbarnet kan finne hvilken ukedag han/hun ble født på, f. eks. Dersom alt går bra, er kortet i handelen til jul.

Knut Ole Lysø

Den problematiske tobarnsfamilien

Problemstillingen som følger kom meg for øre i februar 1991 da landsseksjonen i matematikk var samlet til et rammeplanmøte i Bø i Telemark. Videre undersøkelser omkring dette problemet viser at dette er kjent i videre kretser, og har vært oppe til debatt i flere fora. Om problemet har funnet sin endelige løsning er en annen sak.

Overskriften kan tyde på at problemet dreier seg om en sosial sak, men la oss med en gang konstatere at det dreier seg om matematikk, nærmere bestemt sannsynlighetsregning. Innenfor sannsynlighetsregningen opererer en med begrepet betinget sannsynlighet, og det er her problemet med tobarnsfamilien kommer inn.

1. Hva problemet dreier seg om.

Anta at en tobarnsfamilie flytter inn i nabolaget ditt. Om barnas kjønn foreligger det ulike signaler, men din egen sønn ønsker veldig at begge barna er gutter. Hva er sannsynligheten for at familien har to gutter?

Fødselsrekkefølgen i en tobarnsfamilie er GG, GJ, JG og JJ, hvor det er vanlig å oppfatte f.eks. GJ som gutt i første fødsel og jente i andre fødsel. De to fødslene påvirker ikke hverandre, f.eks. vil ikke kjønnet på første barn ha noen betydning for hvilket kjønn neste barn har. En sier da at fødslene er uavhengige av hverandre. Med antakelse om like stor sannsynlighet for gutt som for jente i hver fødsel, vil hver av de fire mulighetene være like sannsynlige, og det er rimelig å hevde at sannsynligheten for to gutter er lik 1/4. Dette er noe en lett enes om, og representerer ikke en del av problemet.

Problemet dukker opp når det tilflyter oss noen opplysninger om barna. Disse er som sagt av forskjellig karakter, og spørsmålet er om disse opplysningene har ulik betydning for sannsynligheten for to gutter. Opplysningene det dreier seg om er:

I. Det opplyses at minst ett av barna er gutt.
II. Det opplyses at det eldste barnet er gutt.
III. Det opplyses at ikke begge barna er jenter.

Problemet er altså nå å finne sannsynligheten for to gutter i denne tobarnsfamilien under forutsetning av at du vet enten opplysning I, II eller III. Er det forskjell i størrelsen på disse sannsynlighetene, og bør det eventuelt være det?

En måte som er blitt presentert for å beskrive de to første opplysningene konkret, er at du får se et av barna på trappa, og at dette barnet er en gutt (situasjon I). Du går ut for å hilse på gutten, og hører samtidig barnegråt inne fra huset (som impliserer at gutten på trappa faktisk er det eldste barnet, altså er du nå i situasjon II). Er det rimelig at disse opplevelsene skal endre på sannsynligheten for to gutter i denne familien?

Prøv gjerne selv å finne et forslag til løsning på dette problemet før du leser videre.

2. Litt om betinget sannsynlighet.

Før vi analyserer problemet nærmere, er det rimelig at en presiserer hva som ligger i begrepet betinget sannsynlighet. Dersom leseren er fortrolig med dette begrepet, kan en hoppe til kapittel 3.

Anta at du ved en bestemt forsøkssituasjon er interessert i å finne sannsynligheten for et bestemt utfall. Dersom du får en eller annen tilleggsinformasjon under forsøkets gang, kan det hende at denne informasjonen er av en slik art at det har betydning for resultatet av forsøket. Du må ihvertfall vurdere om den opprinnelige sannsynligheten du satte opp for utfallet fremdeles er aktuell/riktig. Den eventuelle reviderte sannsynligheten kalles en betinget sannsynlighet.

La oss nå gi fire konkrete eksempler på hva som kan ligge i begrepet betinget sannsynlighet.

Eks. 1.

La oss f.eks. si at du skal tippe hva en person får i et spesielt kast med en vanlig terning. I et slikt kast kan en argumentere for at sannsynligheten for et hvilket som helst resultat, dvs. antall øyne terningen viser, er lik 1/6. Dersom du tipper at vedkommende får en sekser, har du altså en sannsynlighet på 1/6 for å få riktig svar.

Anta at du selv ikke ser resultatet av kastet, men får vite at kastet resulterte i minst fire øyne. Er sannsynligheten for at du tipper rett lik 1/6 fremdeles, eller er sannsynligheten blitt endret på bakgrunn av opplysningen om minst fire øyne? Tenker en etter, er det under de gitte opplysninger kun muligheten for firer, femmer eller sekser. Disse er like sannsynlige, slik at det nå virker rimelig å sette sannsynligheten for en sekser lik 1/3. Altså har tilleggsopplysningen du har fått ("resultatet av kastet er minst fire øyne") endret sannsynligheten for den aktuelle hendelsen, og en sier at den betingete sannsynligheten for en sekser er lik 1/3.

Eks. 2.
I et kortspill kan du f.eks. være interessert i å vurdere sannsynligheten for at en person trekker en spar ved en tilfeldig trekning fra en godt blandet kortstokk. Når alle kort stiller likt, er sannsynligheten for å trekke en spar lik 13/52. Dersom du ikke ser resultatet av trekningen og personen som trakk kortet opplyser deg om at verdien av kortet er 4, er sannsynligheten for spar nå lik 1/4 (siden spar fire er et av de fire aktuelle kortene). Da disse to sannsynlighetene er like (1/4), har altså tilleggsinformasjonen om at kortet er en firer, ikke noen betydning for sannsynligheten for det opprinnelige utfallet. Dette viser at det ikke alltid er slik at sannsynligheter endres ved betinging (en sier da at en har uavhengighet).

Eks. 3.
I et kortspill kan du f.eks. også være interessert i å få tildelt et ess. Når alle kort stiller likt, er sannsynligheten for å trekke et ess lik 4/52. Under tildelingen av kort får du et glimt av kortet som tilsier at det er rødt. Siden flere detaljer om kortet ikke er avslørt, er de 26 røde kortene like sannsynlige, to av disse er ess, slik at det er rimelig å hevde at sannsynligheten for ess nå er lik 2/26. Da disse to sannsynlighetene er like (1/13), har altså denne tilleggsinformasjonen ikke noen betydning for sannsynligheten for det opprinnelige utfallet, og en har igjen uavhengighet.

Eks. 4.
I et kakelotteri selges det 500 lodd. Du kjøper ett lodd. Dersom du ikke vet noe om eventuelle andre solgte lodd, er det rimelig å sette sannsynligheten for å vinne hovedgevinsten lik 1/500. Du avdekker loddnummeret, og finner ut at du ikke har vunnet. Så kjøper du ett lodd til. Sannsynligheten for å vinne hovedgevinsten denne gangen er lik 1/499 siden du nå har informasjon om det første loddet du kjøpte.

Disse fire eksemplene viser ulike aspekter ved slike forsøkssituasjoner. I eksempel 1 og 2 har du ikke direkte oversikt over forsøkets gang, men mottar informasjon via personen som henholdsvis kaster terningen og trekker kortet. Eksemplene viser at de opplysningene du får, i enkelte tilfeller kan endre sannsynligheten for den hendelsen du er interessert i, men også at det finnes tilfeller der tilleggsinformasjonen ikke har betydning for densannsynligheten vi ønsker å finne.

Situasjonene beskrevet i eksempel 3 og 4 har du derimot direkte oversikt over forsøkets utvikling, og en ser at også i slike forsøk kan det i enkelte tilfeller være slik at det som skjer i løpet av forsøkets gang kan ha betydning for størrelsen av den søkte sannsynligheten, mens det i andre tilfeller ikke har noen betydning.

3. Presentasjon av problemet i ulike lærebøker.

La oss nå se på hvordan problemene slik de er formulert i kapittel 1, håndteres i enkelte lærebøker. I denne omgang konsentrerer vi oss om å finne sannsynligheten for to gutter i lys av opplysningene I og II.

Utfallsrommet (en liste over de mulige utfall i et sannsynlighetsteoretisk forsøk) er altså {GG, GJ, JG, JJ}. Med antakelse om like stor sannsynlighet for begge kjønn, sa vi i kapittel 1 at sannsynligheten for to gutter er lik 1/4. Dette kalles en ubetinget sannsynlighet, og notasjonsmessig er det vanlig å skrive dette som

P(To gutter)=1/4.

Betingede sannsynligheter handler om tilleggsinformasjon (relevant eller irrelevant) og om det eventuelle reduserte utfallsrom, i de tilfeller tilleggsinformasjonen er relevant. Holder en seg kun til informasjonen i I, "minst en gutt", vil utfallsrommet foran reduseres slik at en har følgende sammenheng:

Minst en gutt: {GG, GJ, JG},

siden JJ nå er utelukket. Da det fremdeles ikke er noen av disse kombinasjonene som er mer sannsynlig enn andre, får en at

P(To gutter | I) = 1/3. (Den loddrette streken bak "To gutter" symboliserer at vi har en tilleggsinformasjon, nemlig opplysningen I om minst en gutt.)

I tilfelle II, med tilleggsopplysningen "eldste barnet er gutt", vil det opprinnelige utfallsrommet også reduseres. Vi får nå følgende sammenheng:

Eldste barnet er gutt: {GG, GJ},

siden JJ og JG nå er utelukket. Da GG og GJ ansees like sannsynlige, får en at

P(To gutter | II)=1/2.

Dette viser at vi altså er sikrere på at det er to sønner i familien dersom vi vet II ("eldste barnet er gutt") enn om vi vet I ("minst en gutt"). Dette virker kanskje overraskende på mange, spesielt om en knytter dette til de konkrete beskrivelsene i det nest siste avsnittet i kapittel 1. Dersom du ser en gutt på naboens trapp, er sannsynlighetheten for to gutter i denne familien lik 1/3. Hører du i tillegg barnegråt inne i huset, er sannsynligheten for to gutter i denne familien lik 1/2. En kan bare spekulere på om barnegråt i seg selv representerer en såvidt viktig tilleggsopplysning som tilsier en økning i sannsynligheten for to gutter fra 1/3 til 1/2.

Det er kanskje ikke så rart at disse sannsynlighetene i enkelte læreverk er blitt presenterte som et paradoks. En sannsynlighet lik 1/2 i tilfelle II synes ikke så merkelig i det en i dette tilfellet uttaler seg om sannsynligheten for at den yngste er gutt, altså om kun en fødsel. Da vil en sannsynlighet lik 1/2 følge av antakelsen om at jente- og guttefødsler opptrer like hyppig. Spørsmålet er da om sannsynligheten 1/3 for situasjon I er rimelig. Imidlertid finner en svaret 1/3 også ved utregning. La X være antall gutter i en tobarnsfamilie. Etter loven om betingede sannsynligheter får vi at

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{To gutter} \mid \mathrm{I}) &= \mathrm{P}(X=2 \mid X \geq 1) \\
&= \frac{\mathrm{P}[(X=2)\cap(X\geq 1)]}{\mathrm{P}(X\geq 1)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(X=2)}{1-\mathrm{P}(X=0)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3.
\end{aligned}$$

4. Diskusjon om andre løsninger på problemet.

Som nevnt innledningsvis, er denne problemstillingen også debattert i fagmiljøet. En løsning som er blitt lansert av Steinar Engen ved AVH i Trondheim, går ut på at formuleringen minst ett av barna er en gutt er naturlig å tolke som at en har observert en gutt. Dette er for øvrig i overensstemmelse med den tolkningen som er lagt til grunn i kapittel 3, og som ble konkretisert i kapittel 1 gjennom at du ser en gutt på trappa. Engen hevder imidlertid at sannsynligheten for to gutter er lik 1/2 (og ikke lik 1/3) i dette tilfellet. Argumentet for dette er: Definer hendelsene A, B og C som følger:

A: To gutter (dvs. $X=2$)
B: Minst en gutt (dvs. $X \geq 1$), (dvs. det samme som opplysning I)
C: Observere en gutt

Engen hevder at dersom hendelsen C har inntruffet ("gutt på trappa"), har også hendelsen B inntruffet. Sannsynligheten for to gutter må sees i lys av både opplysning B og opplysning C. Da C er en ekte delmengde av B, er det eneste korrekte å betinge med hensyn på C. Dette medfører at

$$P(\text{To gutter} \mid I) = P(\text{To gutter} \mid C) = \underline{1/2}.$$

Et argumentet som taler for en sannsynlighet lik 1/2 i dette tilfellet, er at en faktisk uttaler seg om sannsynligheten for at et bestemt barn (det barnet en ikke ser) er en gutt.

Imidlertid halter denne forklaringen noe hvis en har perspektivet om at betingede sannsynligheter handler om tilleggsinformasjon som eventuelt reduserer utfallsrommet for forsøket. Når det opprinnelige utfallsrommet er {GG, GJ, JG, JJ}, vil opplysning C kun utelukke to jenter (JJ), og utfallsrommet reduseres til {GG, GJ, JG}. Dette gir altså opphav til sannsynligheten 1/3.

Denne betraktningsmåten fokuserer igjen på et problem som jeg personlig har tenkt veldig mye på: Den sidestiller hendelsene B og C! Dette kan ikke være riktig, og det er muligens her hele problemet ligger. I mitt studie av dette problemet har jeg lenge fundert på når en kan observere "minst en gutt", med andre ord når det kan være aktuelt å betinge med hensyn på denne opplysningen. Ser vi etter, har vi (Engen inkludert) så langt i denne artikkelen konkludert med at "minst en gutt" må tolkes som at en har observert en gutt. Er dette en riktig tolkning? Dersom en har "observert en gutt", må en selvsagt ta hensyn til dette i det videre regningsarbeidet, men en må finne ut hva slags type informasjon dette er i forhold til informasjonen "minst en gutt".

Dersom du får opplyst at minst ett av barna er gutt, kan dette likså gjerne tolkes som at du får informasjonen fra noen annen (f.eks. din kone), og at du altså ikke har observert noe selv. Den tilleggsopplysningen som du har fått, er av samme karakter som opplysningene som er gitt i eksemplene 1 og 2 i kapittel 2, og er ikke knyttet til noe bestemt (konkret) barn. Når du mottar kun denne opplysningen, har din kone mer informasjon om nabo-familien enn hva du har, men at hun holder igjen noe av denne informasjonen. Opplysningen minst en gutt utelukker kun muligheten JJ, og det vil derfor være riktig at sannsynligheten for to gutter da er lik 1/3. Ved en slik tolkning vil altså resonnementet i kapittel 2 omkring denne sannsynligheten og beregningen til slutt i kapittel 2 være korrekt.

Har du imidlertid sett en gutt på trappa, har du egentlig mer informasjon om nabofamilien enn om du får informasjonen "minst en gutt" fra din kone. Opplysningen du nå har om forsøket, er av samme karakter som i eksemplene 3 og 4 i kapittel 2, og er knyttet til et bestemt barn. Det riktige i denne situasjonen vil være å konsentrere seg om kjønnet på det andre barnet, altså har en redusert forsøkssituasjonen fra et to-trinnsforsøk til et ett trinnsforsøk. Sannsynligheten for to gutter når en har observert en gutt, vil altså være lik 1/2. Det virker rimelig at denne sannsynligheten er større enn sannsynligheten for to gutter når du får opplyst minst !n gutt siden du faktisk har mer informasjon om nabofamilien.

Dersom du får opplyst at det eldste barnet er en gutt, har du igjen en opplysning som reduserer forsøket fra et to-trinnsforsøk til et ett-trinnsforsøk. Den korrekte sannsynligheten for to gutter er derfor lik 1/2 også i dette tilfellet.

I den praktiske situasjonen belyst i slutten av kapittel 2 vil det etter dette altså ikke være noen forskjell i sannsynlighetene. Mer presist vil sannsynlighet for to gutter være lik ½ både når du observerer en gutt på trappa, og når du i tillegg hører barnegråt inne.

Til slutt gjenstår å finne sannsynligheten for to gutter dersom det blir opplyst at ikke begge barna er jenter, altså tilleggsinformasjon III i kapittel 1. Er opplysningen "ikke begge barna er jenter" en tilleggsinformasjon som tilflyter oss via direkte observasjon? Neppe, dette er også en tilleggsopplysning av samme karakter som opplysningene som er gitt i eksemplene 1 og 2 i kapittel 2. Av det opprinnelige utfallsrommet er det bare to jenter (JJ) som er utelukket, og sannsynligheten for to gutter er lik 1/3. Vi merker oss at opplysningene I og III er av identisk karakter.

5. Konklusjon.

Vi har i kapittel 4 konkludert med følgende resultater:

P(To gutter | I) = 1/3.
P(To gutter | II) = 1/2.
P(To gutter | III)= 1/3.
P(To gutter | C) = 1/2.

Hovedproblemet ligger altså i tolkningen av tilleggsinformasjonen "minst !n gutt". Det en i litteraturen ikke har tatt tilstrekkelig hensyn til, er at tilleggsopplysninger har to ulike kjennetegn; noe du observerer selv i løpet av et forsøk kontra hva du får opplyst av andre. Vi har sett at dette kan gi ulike resultater.

Merk ellers at dersom din kone faktisk selv har observert gutten på trappa, og heller sier til deg at et av barna er en gutt (opplysning C), vil altså sannsynligheten for to gutter være lik 1/2. I dette tilfellet har nemlig du og din kone like mye opplysninger om situasjonen, opplysninger som gjør at en kan konsentrere oppmerksomheten om kjønnet til det ene barnet som en ikke har sett (fra to trinn til ett trinn).

Som vi har sett, er det å observere !n gutt blitt tolket som å observere minst !n gutt. Dette strider også mot en annen innfallsvinkel til problemet. X=antall gutter i en tobarnsfamilie er binomisk fordelt, noe som forutsetter bl.a. uavhengighet og uordnet utvalg. Er resultatet av en av fødslene kjent (observere en gutt), kan ikke denne "variere mer", og vi får å uttale oss om den siste fødselen. Dette innebærer at antall enkeltforsøk i den binomiske situasjonen reduseres med en; dvs. fra to enkeltforsøk til ett.

En ser muligens dette klarere dersom en betrakter en firebarns-familie (ingen eneggede tvillinger o.l). La oss si at vi ønsker å finne sannsynligheten for minst tre gutter i denne familien. I utgangspunktet er X = antall gutter i firebarnsfamilien binomisk fordelt (4,1/2). Dersom jeg får opplyst at to av barna er gutter, vil jeg på grunn av uavhengighet og det at vi har et uordnet utvalg, kun konsentrere meg om de to ukjente barna. Oppgaven blir nå redusert til å finne sannsynligheten for minst en gutt blant disse to barna, der antall gutter blant disse to barna er binomisk fordelt (2,1/2).

I dette perspektivet blir utregning av betingede sannsynligheter ikke en ren mekanisk utførelse gjennom bruk av formler, men en bør først analysere hvilken situasjon en er oppe i. Betingede sannsynligheter handler følgelig om det eventuelle reduserte utfallsrom eller (ved uavhengighet) et redusert antall forsøkstrinn.

Svein H. Torkildsen

Skolegeometri og arkitektur

Oppgave n

a) Konstruer en trekant ABC der AB er 5 cm, vinkel A 60° og vinkel B er 90°.
b) Hvor lang er siden AC?
c) Beregn BC.
d) Trekanten ABC er en del av firkanten ABCD. CD er parallell med AB og vinkel DAC er 30°. Konstruer firkanten.
e) Hva slags firkant er ABCD?
f) Beregn arealet av firkanten.

En overkommelig oppgave for de fleste elevene i ungdomsskolen. Linjer kommer på plass på papiret, beregninger utføres og elevene tar fatt på oppgave n+1. Vi går videre - som oftest uten å reflektere over det vi har gjort. Og hvem bryr seg? Det er jo bare noen streker på et papir.

Men "oppgave n" er virkelig verd å dvele ved. Dette rektanglet er like vakkert og like spesielt som A4-arket og Det gylne rektangel. Men det har såvidt meg bekjent ikke fått noe navn - ennå. Foreløpig kaller jeg det bare "Navnløs skjønnhet". Jeg kom over det mens jeg studerte matematikken bak arkitekturen her i Kristiansand - landets best bevarte renessanseby. Det var vinduene som vakte min interesse, og med dette rektanglet falt de siste brikkene på plass. Mer om det seinere, for vi startet opp med de enkle forholdene.

En rusletur i byen

Kan vi "sløse bort" en verdifull matematikktime med en spasertur i byen? Jeg har gjort det mer enn én gang, og gjør det sikkert om igjen. Men jeg venter til en god varm sommerdag. Da tar vi en rask oppsummering: Hvilke geometriske figurer kjenner vi? Hva kjennetegner dem? Og med et indre bilde av trekanter, kvadrater, romber, rektangler, sirkler osv. går vi på jakt i byen. Hvilke figurer finner vi? Like borti gata ligger "Hospitalet" og "Dollhuset", trebygninger fra 1709 og tidlig 1800-tall. Fine representanter for renessansen. De smårutete vinduene er kvadrater. Selve vinduene er rektangler med et enkelt forhold mellom høyde og bredde: 3:2.

Vi ser på vinduer i flere staselige bygg. Den gamle katedralskolen ligger der i hele sin majestet. At den er velproporsjonert er alle enige om, men vi kan ikke uten videre si noe bestemt om forholdet mellom høyder og bredder i vinduene. Det får bli en hemmelighet inntil videre.

På en tur rundt domkirken får vi med oss det meste. To og to elever får hver sin geometriske figur å se etter. Men Ragnhild er ikke optimistisk: "Si fra hvis noen av dere ser ei rombe!" Elevene studerer såvel detaljer som store linjer. Og mye blir registret - også romben. Den stod der som en liten detalj like over en av de gotiske buene.

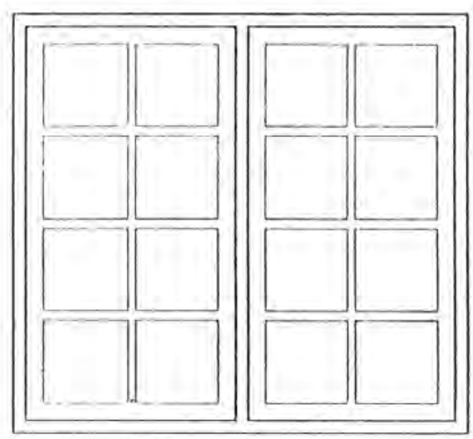
Renessansevinduene

er smårutete, og det er ikke vanskelig å finne vinduer der de små rutene er kvadratiske. Grupper av elever får oppgitt hver sin adresse i Posebyen - den delen av byen der de gamle trehusene har holdt stand mot framskrittet.

Oppgaven består i å studere et hus og spesielt se på hvordan vinduene er laget. Vel tilbake på skolen bearbeides inntrykkene og notatene/skissene:

* Elevene konstruerer figurer med samme form som vinduene uten å ta hensyn til tykkelse på sprosser og rammer.
* Vinduene blir beskrevet og elevene noterer ned det de vet om de geometriske figurene de finner i vinduet.

Unn har ordet:
Vinduet er et kvadrat. Det er delt i to like rektangler. Når vinduet skal åpnes, skyves rektanglet ut. Det er hengslet ut mot veggen, ikke inn mot det andre vinduet. Inne i hvert rektangel er det 8 små kvadrater, to bortover og fire oppover. Inne i hvert av de små kvadratene er det ei enkel rute. Det er altså 16 småruter i vinduet.



Anne Christine ordla seg slik:
Vinduet er et kvadrat. Kvadratet er delt inn i to rektangler som er like store. Disse rektanglene gjør at vinduet kan åpnes. Rektanglene er igjen delt inn i kvadratiske ruter, 2 i lengden og 4 i høyden.

I arbeidsboka følger så en oppsummering av alt de vet om kvadratet og rektanglet: Vinkler, sider, areal, omkrets, diagonaler m.v.

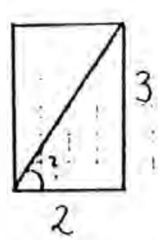
Spørsmål dukker opp

John har sett på lengden av diagonalen i et kvadrat. Den er 1,41 ganger så stor som siden i kvadratet, og vinkelen mellom diagonal og side er 45°. Nå sitter han og studerer på diagonalen i et rektangel der forholdet mellom høyden og bredden er 3:2 (1,5). Lengden av diagonalen er grei nok å beregne. "Er vinkelen mellom diagonalen og siden i alle rektangler også den samme?" spør han. Svaret kommer ikke umiddelbart, men han finner selv ut at det ikke kan stemme. Måling med transportør avgjør saken.

"Går det an å regne ut hvor stor vinkelen i dette rektanglet er?" blir neste spørsmål. "Jo, det gjør nok det, men det er ikke just noe vi pleier ta i 8. klasse". "Ikke vær kjip da - jeg har lyst til å vite det."

Noen av elevene er ute og observerer. De som er i klasserommet klarer seg selv. Så finner jeg fram en lommeregner med trigonometriske funksjoner. Vi tar utgangspunkt i trekanten som dannes av bredde, høyde og diagonal i flere formlike rektangler. Forholdet mellom høyde og bredde (1,5) sier noe om hvor stor vinkelen mellom bredde og diagonal er. Tallet 1,5 kan faktisk brukes som mål på vinkelen. Vi kaller det målet tangens (tg). Lommeregneren gir oss sammenhengen mellom vinkelmål i grader og tg - og motsatt. Og i John Christians arbeidsbok leser jeg:

VINKEL I DIAGONAL (tangens)
Den som ikke er vinkelbein
deles på vinkel bein. Da får man
forhold mellom sidene. Ved hjelp
av lommeregner kan man finde
vinkelen (2nd) Inv. -tangens = 56,3



$\frac{3}{2} = 1,5$

1,5 (Inv·tan) = 56,30

Fritz' setning

"Diagonalene deler rektanglet i fire like store trekanter!" En selvfølge for mange, kanskje. Men Fritz hadde nå kommet på å undersøke arealet mens han satt og betraktet rektanglet med begge diagonaler inntegnet. Og han undret seg over resultatet: "Er det alltid sånn?" - "Kanskje det bare slumpet til at det var slik i akkurat det rektanglet," antyder jeg, "du kan jo undersøke noen til". Fritz undersøkte og fikk bekreftet sin hypotese.

Sammen lager vi en generalisering: I et rektangel med sider a og b får vi to trekanter med grunnlinje a og høyde b/2, og to trekanter med grunnlinje b og høyde a/2. Arealet blir ab/4. Ingen matematisk nyvinning, men Fritz opplevde at også han kan oppdage sammenhenger uten at noen forteller om dem.

Vindu i dør

Kjetil har hatt øynene med seg:

> Vinduet er rektangulært. Forholdet mellom sidene er 1:2. Sprossene i vinduet består av to diagonaler og ei rombe som har hjørnene midt på sidene i vinduskarmen. Det blir da to likebeinte trekanter på langsidene og to likesidede trekanter på kortsidene, toppen og bunnen.

Her får leseren ingen illustrasjon til hjelp. Er beskrivelsen entydig? Kan alle observasjonene til Kjetil være korrekte? Elevene leser beskrivelser hos hverandre, og læreren kommer med sine innspill. Diskusjoner og drøftinger kommer i fortsettelsen. Begrep avklares gjennom aktiv bruk av dem.

Tre harmoniske rektangler

Alle gode ting er tre. Så også her: A4-arket, den Navnløse skjønnhet og Det gylne rektangel. Her møtes geometri og kultur. Vi burde bli flinkere til å utnytte slike kombinasjoner. Det ville berike matematikkundervisningen og åpne øynene for den kultur vi er en del av.

I et slik perspektiv lar jeg gjerne elevene få fem timer til å studere A4-arket, eller mer korrekt: A-formatet. Utgangspunktet var slik: Årsprøvene var gjennomført og det var ei god uke igjen til siste skoledag. Hva får vi ut av slike dager når sørlandssommeren attpåtil er på sitt mest innbydende?. "La meg få én dag til matematikk!" Klassestyreren ser vantro på meg, men ønsket innvilges umiddelbart - hvis jeg tar sjansen. Det endte med at jeg fikk fem timer fordelt på to dager. De fem siste timene før bøkene ble levert inn og klasserommet ryddet.

A4-arket...
står sentralt i hverdagen vår, og mange er vel klar over dets hemmeligheter. Men få elever kjenner dem, og vi burde la eleven få anledning til å lette litt på sløret. La meg antyde noen aktiviteter mine elever slapp til med:

* Mål sidene på A4-arket. Finn forholdet mellom lengde og bredde. Beregn arealet og angi svaret i både cm^2, dm^2, m^2.
* Lag et A3-ark. Utfør samme målinger og beregninger.
* Lag et A2-, A1- og A0-ark. Samme målinger og beregninger.
* Hvor mange A4-ark går det i et A0-ark? Vei så mange A4-ark.

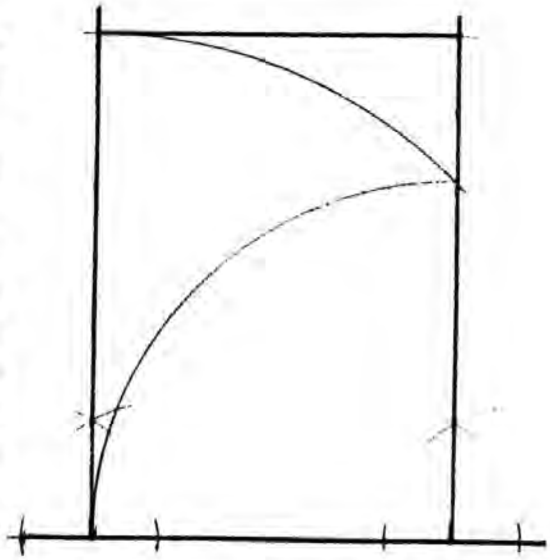
Det ble 80 gram. I dagene før hadde elevene foretatt miljøundersøkelser i Otra like ved Hunsfos papirfabrikk. De hadde også vært på bedriftsbesøk og fått med seg noen pakker kopipapir hver. Det ble mangt et måpende ansikt å se da jeg viste dem teksten på innpakkingspapiret: Hunsfos Crown Bond - 80 g/m^2. Mange hadde sett og lest nettopp dette. Men det sa dem ikke noe - før nå. Og det var litt av en tankevekker for meg som lærer.

* Det ble laget A5-ark og A6-ark. Mange ga seg ikke før de hadde laget A9-arket. Andre nøyde seg med å lage en tabell som viste målene på papirstørrelsene. Forholdet mellom sidene var ingen overraskelse lenger.
* Hvilket format må vi ned i før vi har et ark som veier mindre enn ett gram? Og en utfordring på sparket for ei gruppe: Hvilket mål må vi ha om arket skal veie nøyaktig ett gram? Gruppa beregner, måler, klipper og veier. Resultat: 0,9 g. De er fornøyd.
* Og så bretter vi A4-ark. Kortsiden legges over langsiden slik at vi får en brett fra det ene hjørnet til et punkt på langsiden. Hvor lang er bretten? Veien er kort til følgende oppdagelse: A4-arkets langside er lik diagonalen i et kvadrat med side lik A4-arkets kortside.
* Kan dere ut fra dette konstruere et "A4-ark" med kortside 10 cm?

Det elevene nå visste om A-formatet ble samlet på en plakat - selvsagt i A0-format. Da vi nærmet oss spisefri og avslutningen for vårt lille arbeid, hadde ingen elever ennå tenkt på å ta seg frikvarter. Tro meg, det er ikke hver dag sørlandssola taper for matematikken.

...og vinduer

Men hva har A-formatet med vinduer og renessanse å gjøre? Øyvind fant svaret. Han fikk med seg notatblokk, tommestokk og følgende beskjed: Lag ei skisse av et vindu i "Silkeslottet". Ta noen mål av høyder og bredder. (Det var flere aktuelle steder å ta mål). Vel tilbake fikk han i oppgave å undersøke forholdet. Snart dukket det magiske 1,41 opp. Vinduet er laget i "A-format"! Og den vindusstørrelsen finner vi igjen i mange vinduer fra empire-perioden (sen-renessansen).

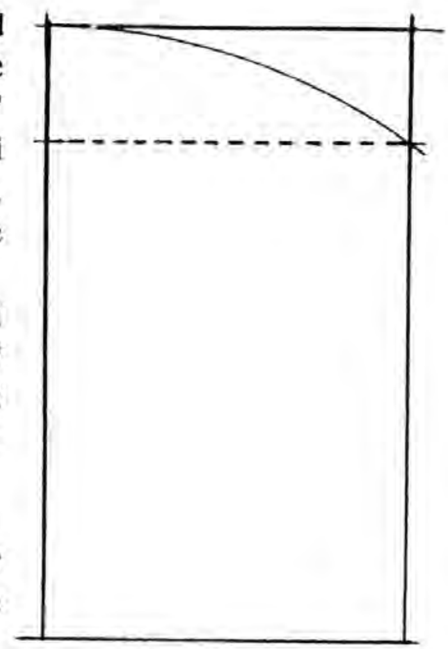


Navnløs skjønnhet...

Nå vi først har arbeidet så grundig med konstruksjon av A-formatet, ligger en utvidelse snublende nær: Beregn diagonalen i "A4-arket" med kortside 10 cm. La dette være langsiden i et rektangel som også har kortside 10 cm. Hvordan kan du lett konstruere dette rektanglet?

Sammenlikn nå med oppgave n i innledningen. Hvilken tilnærming er best? Uansett hva du måtte mene om det. Her har vi et strålende eksempel på sentral skolegeometri:

* Trekant med 30, 60 og 90 graders vinkler
* Diagonalene danner likesidede trekanter sammen med kortsidene og likebeinte trekanter sammen med langsidene



Litt å undre seg over finner vi også: Del rektanglet i tre like store rektangler på tvers av langsiden. Undersøk forholdet mellom langside og kortside. Hva slags rektangler er dette?

Og så er altså denne formen sentral i arkitekturen. Vi finner den igjen i mange vinduer. Og det var den som reddet meg da jeg ble frustrert over vinduene på vaktmesterboligen til "Gamle Katta" (se illustrasjon s. 40). Jeg hadde ventet å finne et gyllent rektangel der, men ble skuffet. Ikke fant jeg noe annet kjent heller. Med velvillig hjelp av Breiteig på KLH fikk jeg tilgang til stoff som satte meg på sporet.

I gotisk arkitektur stod dette rektanglet svært sentralt. Men det blir en annen historie.

...med mulighet for utvidelse

Tenk på hvilken mulighet det her er til å innføre bruk av eksakte verdier i beregningene. La kortsiden være 1 dm. Kvadratets diagonal/A4-arkets lengde er da $\sqrt{2}$ dm. Og dette er altså langsiden i et rektangel med A-format. Diagonalen i dette rektanglet er $\sqrt{3}$ dm, og det blir langsiden i den navnløse skjønnhet. Hvor lang er så diagonalen i dette rektanglet? Hva om vi lar det bli langsiden i enda et rektangel? Hvordan blir nå forholdet mellom sidene? Snart oppstår behovet for en generalisering.

Et gyllent rektangel

Før den store vindu-jakten må vi kjenne egenskaper ved dette rektanglet også. Der finner jeg en flott introduksjon i Regnereisen 9a. Den starter "På historisk grunn" - nærmere bestemt i Athen med Akropolis og Partenon-templet. "Et gyllent rektangel" heter neste avsnitt, og da blir vi tatt med til Dionysos-teatret i skråningen opp mot Akropolis. (Og noen sider lengre ute får vi med oss A4-arket også).

Den store vindu-jakten

Nå kan ikke "Gamle katta" lenger skjule sine hemmeligheter for oss. Vi er i stand til å finne sammenhenger der øyemålet ikke strekker til. Byarkitekten har sørget for opptegning av den staselige fasaden fra historismens periode (målestokk 1:50). Vi bruker kopier av inngangsparti, vinduspartier og fasadepartier som utgangspunkt. Det er en rik kilde å øse av. Her har vi alle de tre harmoniske rektanglene og mer til. Spørsmålet blir bare når arbeidet må avbrytes. For vi trenger ikke stoppe ved "Gamle Katta". Byen er full av eksempler på fint avpassede vinduer.

Ny plan - nye tanker?

M-87 er snart historie. G-97 er under arbeid. Selve utvalget av emner er det neppe aktuelt å gjøre noe med. Tall og tallregning, måleenheter, prosent osv må fortsatt stå sentralt. Men i elevenes bøker må ikke matematikken få leve sitt eget tørre liv. Jeg ønsker f.eks. oppgave n "dit pepperen gror", men jeg elsker geometri.

Dere som steller med G-97: Understrek og forsterk formuleringer som "Opplæringen i geometri må i utgangspunktet være konkret og praktisk, og oppgavene må hentes fra elevenes nære omgivelser" (M-87 s. 200). Jeg synes det kan gjelde i fortsettelsen også, og det gjelder samtlige emner!

Dere som godkjenner lærebøker: Send manuskriptene i retur hvis ikke forfatterne klarer å bygge alle emner opp omkring realistiske og praktiske sammenhenger.

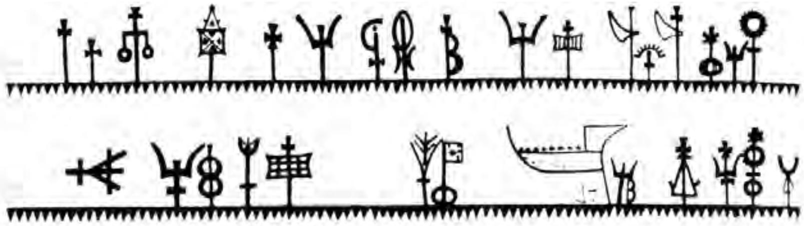
Dere som lager eksamensoppgaver: La de også være realistiske og praktiske! Kunne de to første periodene i Kjetils beskrivelse av dør-vinduet vært starten på en eksamensoppgave? Kunne oppgaven bestått i å tegne/konstruere, analysere og beregne?

Trenger vi et eget skolegeometrispråk for å arbeide med geometri? Trenger vi oppgave n?

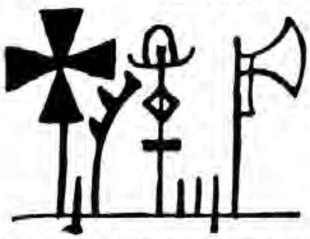
Ivar Lotsberg
hadde en interessant artikkel i Tangenten 2/94. Han peker blant annet på at altfor mange "spennende" innfall og innspill kan resultere i tilfeldig og fragmentarisk kunnskap. Matematikken bør - i alle fall periodevis - behandles på egne premisser.

Er det en motsetning mellom det praktiske og "spennende" og "... at setningane heng ihop, at det er råd å sjå et mønster i den matematiske veven." Blir ikke utfordringen for læreplanforfatterne å meisle ut en plan med setninger som "heng i hop". Så får lærebokforfatterne sørge for å sette denne helheten inn i praktiske og "spennende" sammenhenger.

Jeg kan godt tenke meg å prøve noen av kvadratoppgavene til Lotsberg. Men for mine elever vil det i utgangspunktet være tale om å komponere blyglassvinduer med ulike farger i feltene. Da må vi vite hvor mye glass av hver farge som trengs. Elevene skal få farge vinduene også! Hvor mye bly trengs forresten i hvert vindu? Med denne lille vrien er jeg overbevist om at at jeg får flere elever med meg.

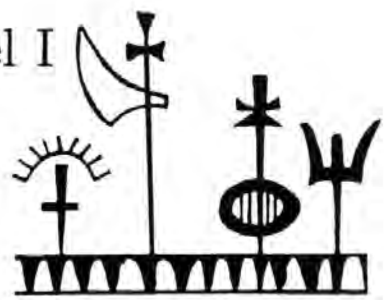


Prosjektoppgave: Den evige kalender, Del I



Christoph Kirfel

Juli 1994



Dette prosjektet egner seg på klassetrinn seks til ni i ungdomsskolen. Det er delt i tre deler. Del to kommer i neste og del tre i overneste utgave av Tangenten. Sett av rikelig med tid. Først da vil en ha skikkelig utbytte av det.

Prosjektets del I går ut på at vi skal lage oss en såkalt kalenderskive. Kalenderskiven fungerer som en vanlig kalender med den forskjellen at den er gyldig i mange hundre år både i fortiden og inn i fremtiden. Med denne kalenderen kan du finne ut hvilken ukedag du er født på, hvilken ukedag 17. mai 1814 var eller hvilken ukedag første januar 2400 faller på. Det er ingen heksekunst å håndtere skiven, det går meget fort og alle kan lære seg dette i løpet av noen få minutter. Vi vil imidlertid også prøve å forstå virkemåten til denne kalenderskiven og ikke bare bruke den blindt. Noen har kanskje sett kalendergeniene på fjernsyn som kan beregne ukedag til en gitt dato på ett sekund. Med litt trening på vår skive kan vi muligens bli like raske.

I del II skal vi utvikle en liten formel til bestemmelse av ukedagen for en gitt dato til hoderegning. I den siste delen skal vi ta for oss en indisk variant av kalenderskiven som er veldig enkel å lage og som egner seg meget godt til julegave.

Før vi setter i gang passer det her med noen historiske opplysninger om kalenderen vår. Fra gammelt av, eller rettere sagt fra året 46 før Kristus, gjalt den såkalte Julianske kalender. Denne ble innført av Julius Cæsar (derav navnet Juliansk). Denne liknet nokså mye på vår kalender i dag. Året startet med 1. mars. September (latinsk: septem=7) blir da den syvende måned, oktober (oktem=8) den åttende, november (novem=9) den niende og desember (decem=10) den tiende måned. Året hadde 12 måneder slik som hos oss og februar måned, som da var årets siste måned hadde 28 dager med unntak av skuddårene (hvert fjerde år) der februar hadde 29 dager. Man justerte altså året i den siste måneden slik at det skulle passe med solåret. Vår- og høstjamndøgnet skulle alltid falle på samme dato.

Året hadde i gjennomsnitt hadde 365,25 dager etter den Julianske kalenderen. Men nå er det engang slik at solåret, dvs. den tiden jordkloden bruker for å komme fra en astronomisk posisjon i verdensrommet en gang rundt solen og så tilbake til den samme astronomiske posisjonen, er på 365,2422 dager. Dvs. at solåret er 0,0078 dager kortere enn året i den Julianske kalender. De første årene var denne forskjellen så liten at ingen la merke til den, men etter 1500 år hadde forskjellen vokst seg stor. Nå lå kalenderåret nesten 10 dager før solåret. Det betydde at datoer for såing og innhøsting var begynt å komme skikkelig i utakt med naturen. Derfor bestemt Pave Gregor XIII i 1582 at kalenderen skulle reformeres. Dagene 5. oktober til og med 14. oktober 1582 ble rett og slett kuttet ut slik at den 15. oktober fulgte direkte etter den 4. oktober. Dessuten innførte han følgende regel for *bortfall av skuddår* som skulle sørge for at en slik utakt av sol- og kalenderåret ikke skulle gjenta seg.

Det skal ikke være skuddår i følgende år 1700, 1800, 1900, 2100, 2200, 2300, 2500, 2600, 2700, 2900 osv.

Sekularår (årstall som ender på to nuller) der antall hundreår ikke kan deles på fire skal altså ikke være skuddår. Etter denne justeringen er et gjennomsnittig kalenderår nå litt kortere enn før nemlig 365,2425 dager. (På fire hundre år blir nemlig 3 dager kuttet ut i forhold til den Julianske kalenderen altså er året i gjennomsnittet 3/400=0,0075 dager kortere enn i den Julianske kalenderen.) Den Gregorianske kalender er dermed adskillig bedre tilpasset solåret enn den Julianske. Denne kalenderreformen gjaldt riktignok bare for katolske land. Norge beholdt som protestantisk land den Julianske kalenderen. I 1700 innså man også her til lands at en måtte følge etter. Den dagen som egentlig skulle hete 19. februar 1700 ble omdøpt til 1. mars 1700. Andre land, som Russland, hadde sin kalenderreform først i vårt århundre (1923).

Vi har nå såpass med bakgrunnsinformasjon at vi kan begynne på vår datoskive. Til det trenger vi følgende

Ingredienser:

- 1 stor papplate litt tykk
- kopi av den vedlagte kopieringsorginalen (gjerne i forstørret format)
- lim, saks, splittbinders, fin tusj og kontaktpapir

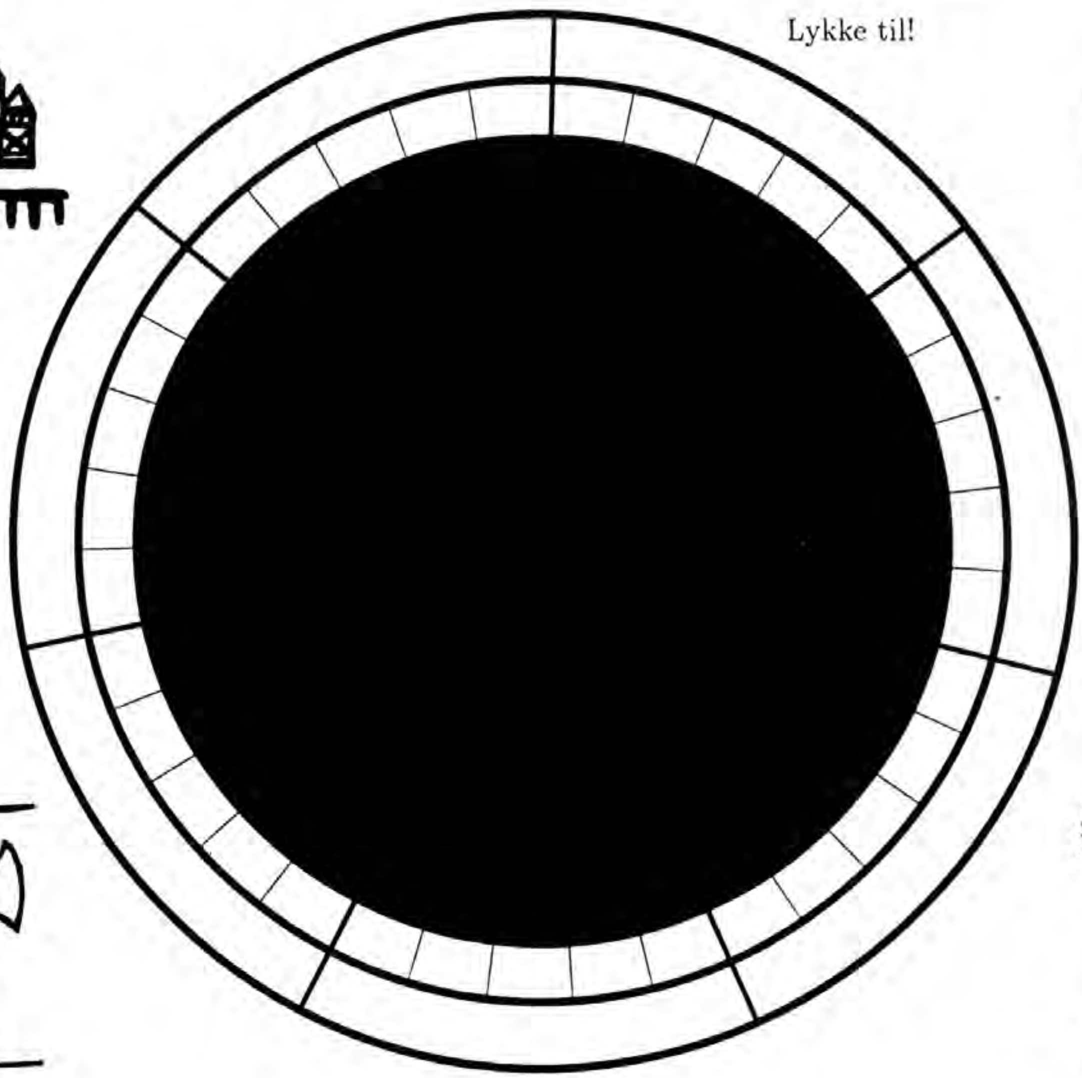
Den evige kalender

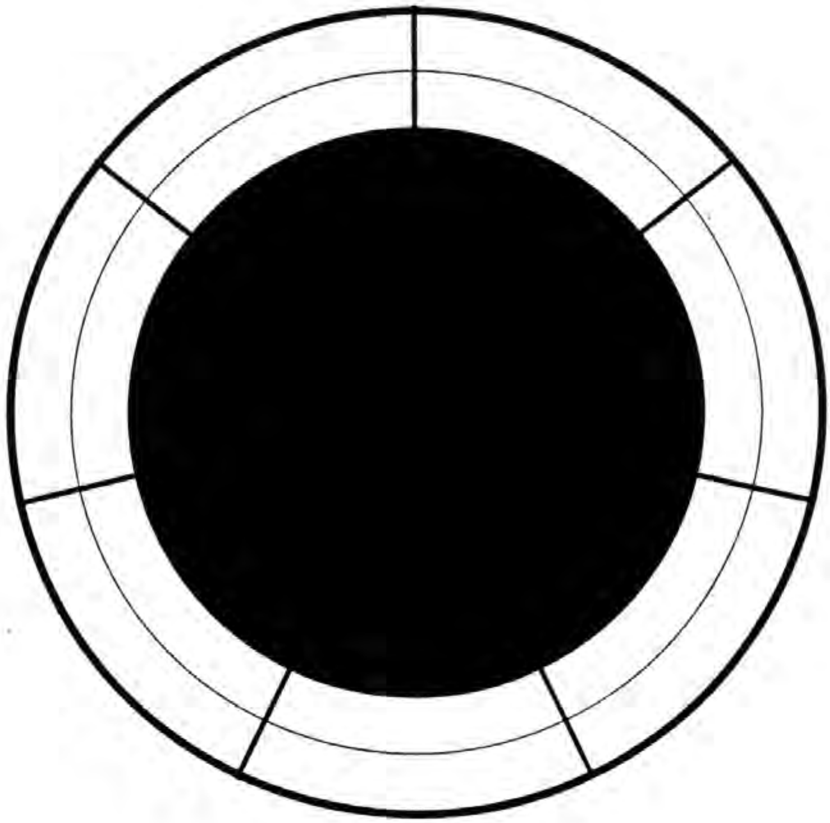
Er du et søndagsbarn? Finn ut av det selv!

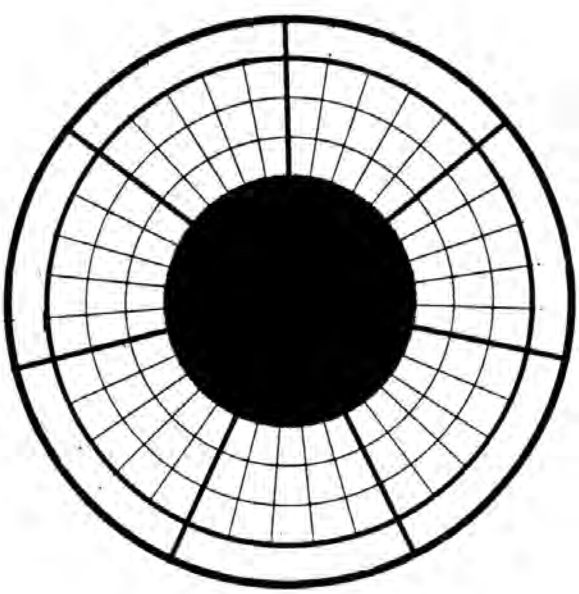
Datoskiven viser ukedagen til en gitt dato f.eks. din egen fødselsdag. Skiven er delt inn i 7 *sektorer*, en for hver ukedag. Bruken er illustret vha. 17. mai 1994.

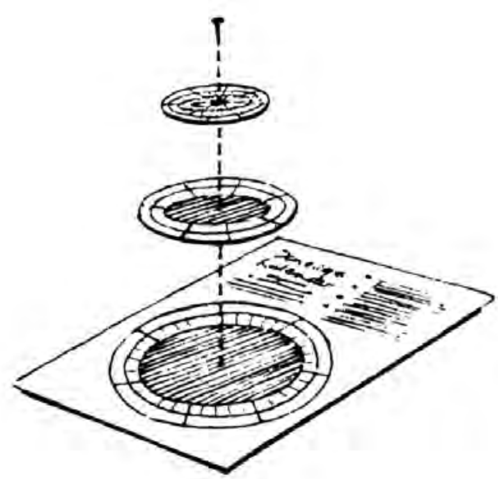
- Sett gult felt på **dagssektor** (17).
- Sett rødt felt på aktuell **måned** (mai). Finn sektoren med den rette **årgangen**. Les av **ukedag** ytterst på skiven. Det er en tirsdag.
- Jan. og feb. hører fra gammelt av til fjoråret. Bruk årgangen *før* det aktuelle året for datoer i jan. og feb. For å finne 4. 2. 94 les av ved årgang 93, ikke 94.
- Andre århundrer enn 1900: Bruk sektoren med aktuelt *sekel* (på randen av innerskiven) som utgangspunkt istedenfor rødt felt når du stiller inn på den rette måneden før avlesing.
- Datoer mellom 1. jan og siste dag i feb. i sekelår (altså 1900, 2000, 2100 ovs): Avlesing må skje i året 99 i det foregående århundre.

Lykke til!









Montering av utstyret

Monteringsanvisning

a) Vi kopierer kalenderskivearket og de to sirklene på de følgende sidene på litt tykt papir og klipper ut de to små sirklene. Så limer vi sirklene på to litt stive pappskiver som har tilsvarende diameter. Vi tar frem kalenderskivearket og ser at sirkelen der er delt inn i 7 sektorer som svarer til ukedagene. Vi skriver ukedagene etter hverandre (med klokken) i riktig rekkefølge i de tilsvarende syv feltene ytterst på randen av den store skiven.

Ukedagene fylles i.

Når vi er kommet rundt begynner vi på en ny uke og ukedagene gjentar seg. Derfor egner sirkelen seg spesielt godt for slike kalenderspørsmål.

b) Vi tar nå utgangspunkt i dagen idag. I skrivende stund er det mandag 1. august 1994. (Du må gjerne ta utgangspunkt i den dagen, der du lager skiven.) Siden det er 1. august skriver vi tallet 1 i det første av de fem feltene under mandag. Så setter vi tallet 2 i det første feltet under tirsdag, siden 2. aug. 94 må jo da være en tirsdag. Slik fortsetter vi og fyller ut de første feltene i hver av de syv sektorene. Slik kommer vi til søndag den 7. Tallet 8 plasseres nå i feltet like ved siden av ettallet siden også den 8. denne måneden faller på en mandag.

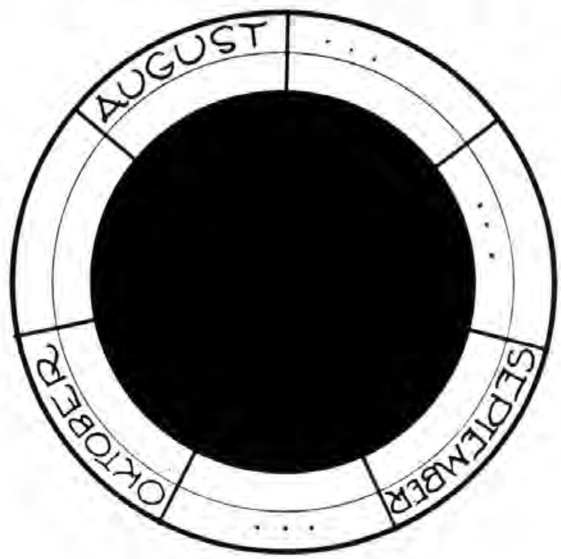
Datoene fylles i.

Slik fortsetter vi til vi har fylt ut hele måneden og er kommet til onsdag 31. aug. Under onsdag f. eks. vil vi da ha tallene 3, 10, 17, 24, 31. Nå har vi allerede en kalender som gjelder for hele august 1994. Dette er riktignok ikke så imponerende men så er vi jo ikke ferdig ennå.

c) Vi tar nå fatt på den mellomste sirkelen, lager et lite hull i midten og fester den midt på den store skiven ved hjelp av en splittbinders.

Vi ser at den har 14 felter. Vi trenger riktignok bare 12 av dem, ett til hver måned. Vi farger en av sektorene gult. Denne sektor skal vi bruke som en slags utgangssektor, altså en slags "nullstilling". Siden vi tok utgangspunkt i 1.8.1994 skal vi selvfølgelig notere måned august i et av de to fargelagte feltene. Hvis du bruker en annen dato som utgangspunkt velger du den aktuelle måneden.

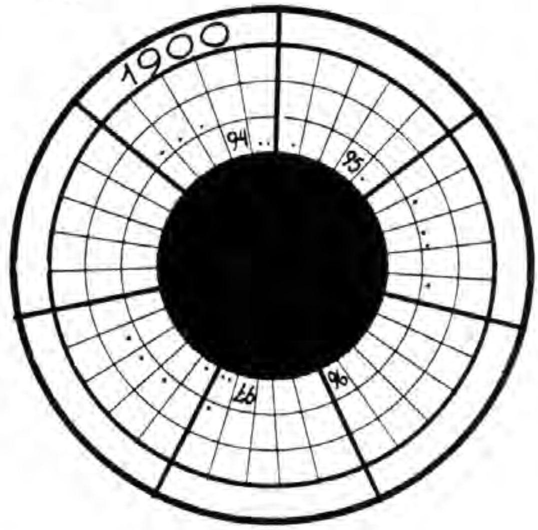
Vi vet at august har 31 dager altså 4 hele uker og tre dager ekstra. Det betyr at 1 september 1994 må være en torsdag (mandag + tre dager ekstra) og alle datoer i september måned ligger tre dager lenger ute i uken enn den tilsvarende datoen i august. F. eks. er 13. september en tirsdag siden 13. august var en lørdag og fra lørdag må vi telle tre dager videre i uken. Derfor setter vi måned september i det tredje feltet ved siden av august. Også her teller vi med klokken. September har bare 30 dager (4 hele uker og to dager ekstra) og datoer i oktober derfor bare 2 dager forskjøvet i forhold til den samme datoen i september. Oktober havner to hakk lenger ut i uken enn september.



Månedene fylles i.

Det å legge til 30 dager eller bare 2 dager utfra en gitt dato fører oss frem til samme ukedag. Slik fortsetter vi med månedene november desember januar og februar. Her slutter vi fordi her sluttet jo også året i den gamle kalenderen. Den vriene måneden februar er dermed den siste. Men hvordan skal vi få plassert månedene mars til juli? Her må vi rett og slett gå baklengs i forhold til vårt utgangspunkt, august. Siden også juli måned har 31 dager må juli plasseres tre dager *tidligere i uken* enn august og juni igjen 2 dager tidligere enn juli. osv. Slik fortsetter vi til alle månedene har fått sin plass. To av feltene vil naturligvis stå åpne. Det vi har fått nå er en kalender som fungerer et helt år og den brukes på følgende måte: Vi ønsker f.eks. å finne ukedagen til 12. mai 1994. Sett den gule sektoren på den sektoren som hører til tallet 12. Finn nå måned mai på den innerste skiven. Les av ukedag ytterst på skiven. Det er en torsdag. Dette kan du gjøre med alle datoer mellom 1. mars 1994 og 28. februar 1995. Kalenderen er altså gyldig i et helt år. Husk, da vi plasserte månedene gikk vi fra august videre til februar neste år mens tilbake gikk vi bare til mars. På den måten slutter vårt år alltid med februar måned og problemene som skuddårsdagen skaper ligger helt i slutten av året.

d) Vi har nå en kalender som fungerer i et helt år og kunne godt tenke oss å utvide den slik at den var gyldig for et helt århundre. Dette skal gjennomføres i neste trinn. Til dette klipper vi ut den minste skiven og fester den i midten av kalenderen vår.



Årgangene fylles i.

Skiven har en ytterring og en innerring. På ytterringen fargelegger vi et felt rødt og skriver 1900 for vårt århundre. Innerringen har 105 felt, nok til årgangene i et helt århundre. Den fargelagte sektor bruker vi som "nullstilling" eller utgangspunkt, i vårt tilfelle gjør vi det ved å skrive årgangen 94 i det nestsiste feltet av den sektoren som hører til den markerte sektoren.

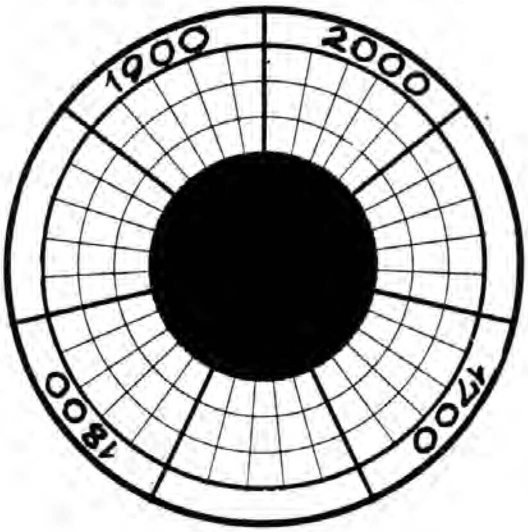
Setter vi nå det gule feltet på en dato og det røde feltet på en måned vi ønsker å undersøke, så kan vi lese av ukedagen ytterst på randen forutsatt at datoen ligger mellom 1.mars 1994 og 28. februar 1995. Ønsker vi nå å finne ukedag til en dato litt lenger ut i 1995, så vet vi at et år har 365 dager og det er 52 hele uker og en dag ekstra. En dato i 1995 vil altså ligge en dag lenger ut i uken enn den tilsvarende datoen i 1994. Husk at 1994 ikke er et skuddår. Vi skriver derfor årgang 95 på neste sektor i forhold til 94 på innerskiven. Vi går igjen med klokken. 96 havner to et hakk lenger ute siden 96 er et skuddår. Året 97 havner igjen bare ett hakk lenger ute, det samme gjelder 98 og 99.

For å finne plasseringen av de andre årgangene på skiven starter vi igjen med årgang 94, men denne gangen teller vi tilbake. 93 må plasseres en dag tidligere i uken (ett hakk mot klokken), mens 92 plasseres enda to hakk lenger tilbake siden 92 er skuddår. På samme måte kan vi tråkle oss tilbake gjennom hele århundret helt til årgang 0 dvs. årstall 1900. Dette tar kanskje et lite kvarter, men så har vi da fått en kalender som varer i hundre år. Den fungerer på følgende måte:

- **Sett gult felt på aktuell datosektor.**
- **Sett så rødt felt på den aktuelle måneden.**
- **Finn nå årgangen på den innerste skiven og les av ukedag ytterst ved randen av skiven.**
- **Hvis datoen er i januar eller februar skjer avlesing ved fjoråret, altså et år tidligere enn det vi er interessert i. Dette fordi at vi har behandlet januar og februar-måned som om de tilhørte fjoråret. På denne måten klarte vi jo å kvitte oss med skuddårsproblematikken.**

Nå har vi altså en kalender som er gyldig i hundre år og det er ikke noe problem å finne fødselsdagene til hele familien. Kontroller gjerne resultatet der det går an.

e) Noen har kanskje en bestemor eller oldemor som er født på 1800-tallet. Vi skulle ønske kalenderen vår også omfattet dette århundre og kanskje mere til. Først spør vi oss selv hvor lenge det 19. århundre varte. Svaret er enkelt siden det startet (etter vår kanskje litt omstendelige tidsregning) 1.mars 1800 og sluttet 28. februar 1900. Husk at året 1900 **ikke** var noe skuddår i følge vår Gregorianske kalender. Tilsammen utgjør dette 100 ganger $365 = 36\ 500$ vanlige dager og 24 skuddårsdager, alt i alt altså 36524 dager. Regner vi dette om i uker får vi 5217 uker og fem dager ekstra. En dato på 1900-tallet ligger altså nøyaktig fem dager senere i uken enn den tilsvarende datoen på 1800-tallet. Derfor setter vi tallet 1800 fem dager lenger ut i uken på ytterringen til innerskiven og bruker den tilsvarende sektoren som "nulljustering" når vi leter opp datoer på 1800-tallet i stedet for det røde feltet med "1900" på.



Århundrene fylles i.

Sjekk at du har funnet rett plassering ved å velge en vilkårlig dato i begge århundrer før du skriver tallet 1800. På den samme måten er det også lett å finne posisjonen til de andre seklene. Et århundre varer vanligvis 5217 uker plus fem dager ekstra. Dette gjelder imidlertid ikke alle århundre. Vårt århundre varer en dag lenger siden også året 2000 er et skuddår i motsetning til år 1900 og 1800 f. eks. Dette var jo nettopp det nye ved den Gregorianske kalenderen. Plasseringen må altså forskyves med 6 hakk.

f) Alle tre skivene trekkes nå med kontaktpapir og settes på igjen. Da vil de være beskyttet mot slitasje samtidig som skivene vil være litt stivere og gli lettere mot hverandre.

Klipp ut to kartonger som er like store som kalenderskivearket. Lag en liten splitt i midten til den ene slik at bena til splittbindersen kan legges inn i denne og lim skiven bakpå arket. Lim den siste (hele) platen som et slags lokk på baksiden. Splittbindersen vil være sikret og samtidig usynlig.

Bruksanvisningen står sammen med kalenderskiven slik at du ikke glemmer hvordan skiven skal brukes. Sett igang og lykke til.

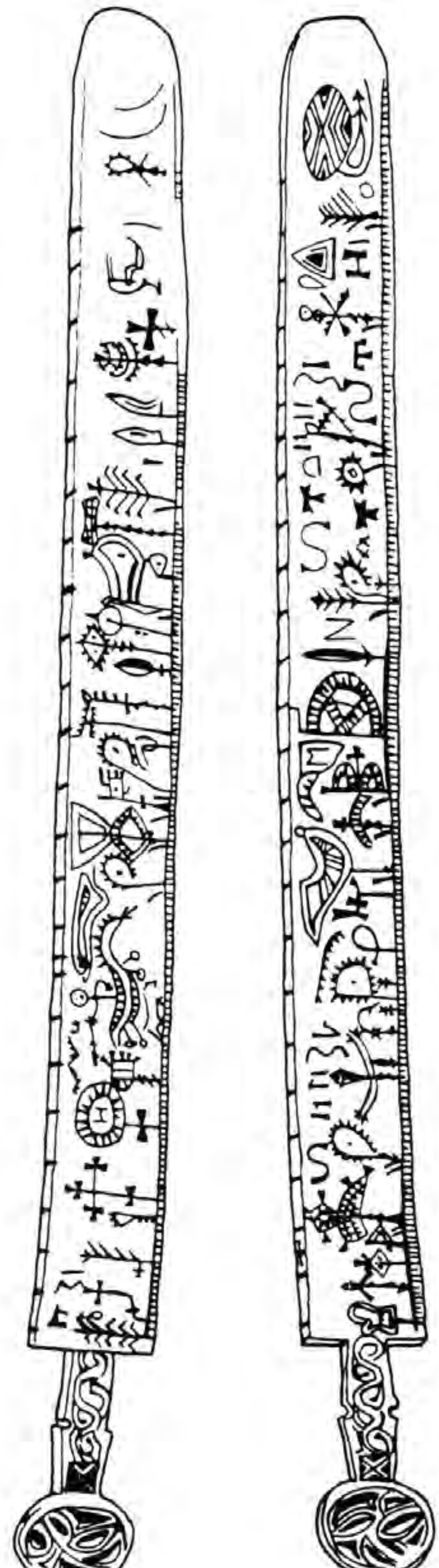
h) For de som er opptatte av historiske datoer skal vi her utvide skivens gyldighetsområde enda lenger tilbake i historien enn året 1700.

Her må vi imidlertid være oppmerksom på at vi bare skal beregne "norske datoer", dvs. datoer og de tilsvarende ukedagene som ble brukt i Norge. Mellom 1582 og 1700 hadde dagene i Norge og

Mellomeuropa forskjellige datoer. I innledningen nevnte vi at februar måned 1700 sluttet etter den 18. Der manglet altså 11 dager eller en uke og fire dager i forhold til et komplett Juliansk århundre. Siden sekelåret (århundreskiftsåret) **alltid** er skuddår i den Julianske kalenderen, varer et vanlig Juliansk århundre like lenge som den lange utgaven av de Gregorianske århundredene, nemlig 5217 uker og seks dager. Pga. kalenderreformen varte 1600-tallene derimot bare 5216 uker og to dager. For å finne plassering av 1600-tallet på innerskiven må vi altså to hakk videre i forhold til 1700-tallet. Tallene 1600 og 1800 havner altså på samme sted.

Plasseringen av tidligere århundre blir nå veldig enkelt siden alle Julianske århundrer varte like lenge. For hvert århundre en går tilbake i tiden må en altså gå seks hakk videre (eller ett hakk tilbake) på skiven. Men vi kommer altså ikke lenger enn året 46 før Kristus, for da ble den Julianske kalenderen innført.

Til slutt en liten nøtt til dem som liker nøtter: Vis ved hjelp av datoskiven at det hvert år finnes en fredag den trettende. Kan du også vise at det i 1943 ikke fantes noen torsdag den trettiførste?



Primstav frå Telemark, dat. 1711, i Norsk Folkemuseum (0.1007—15). Øvst sommarsida. Ein les frå venstre mot høgre.

Pedagogiske glimt om TID og TIDSMÅLING

Det er så abstrakt med tid, det er vanskelig og fascinerende..... Vi har laget våre måleinnretninger for å tidfeste nåtid, fortid og framtid. Hvordan formidler vi at kalender og klokke måler tid (når klokka er tre er det tre timer siden klokka var tolv), at det er menneskenes innretninger for å få oversikt over noe så "naturbestemt". Hvordan hjelper vi barna til å få "tidsperspektiv"? Her er et lite knippe fortellinger vi har fått fra pedagoger, om kommunikasjon med barn om tid.

"Lise visste at det tok ti minutter å gå hjem, dersom hun gikk jevnt og ikke møtte noen. Vi brukte det i barnehagen som en enhet. Nå skal vi lese like lenge som Lise trenger på å gå fram og tilbake. Er det noen som vet de bruker lengre tid eller kortere tid? Gjett da, så kan kanskje noen hjelpe dere med å finne ut om det er rett."

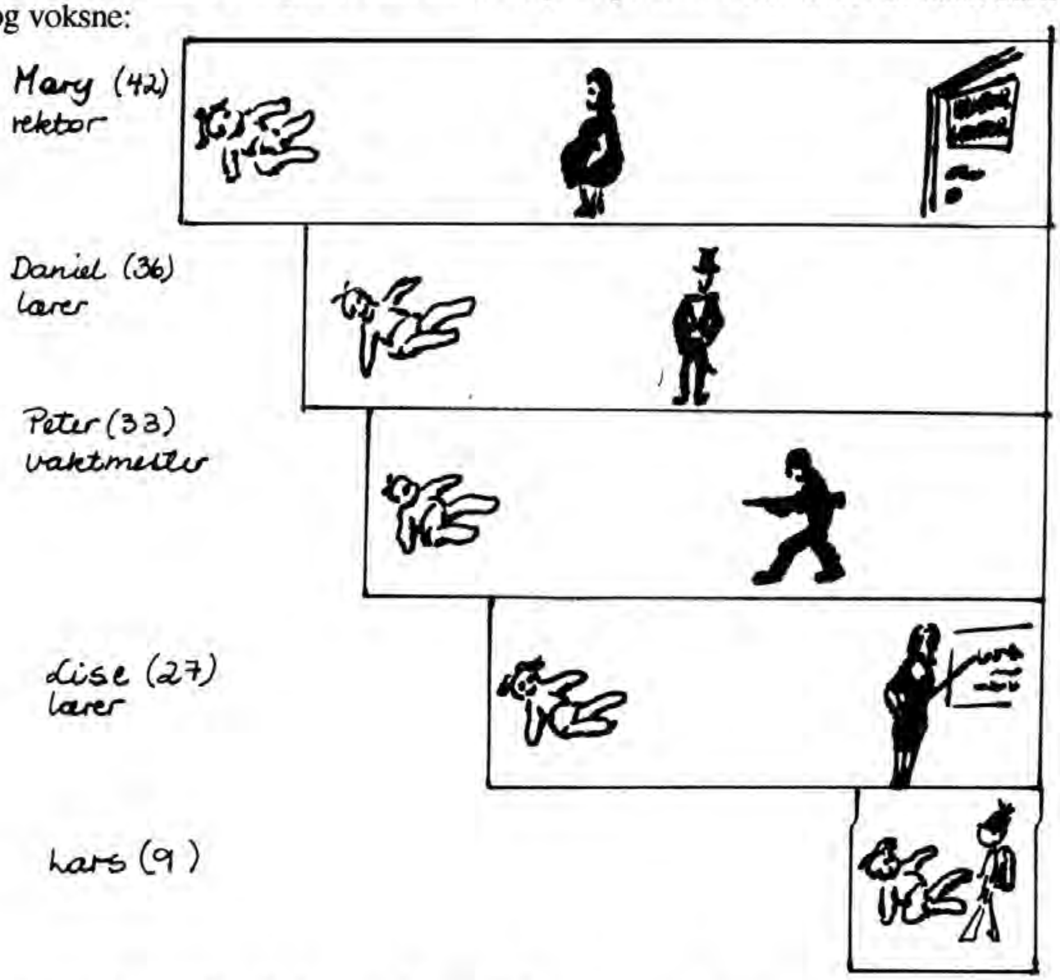
"Vi måler tid i *lørdagsgodter*. Minstejenta på fem år begynte med det, men nå gjør hele familien det. Det er to lørdagsgodter til mormor kommer på besøk. Det er seks lørdagsgodter til jul!"

"Vi river av en kalenderlapp hver dag. Da vi begynte etter nyttår sa vi: Det er den fjerde i dag. Det er fire dager siden nyttårsaftenen. 5.mai sa vi: Det er den femte dagen i den femte måneden. Da er det fire måneder og fem dager siden nyttårsaften. Men alle månedene er ikke like lange. Det er litt tullete, men det er noen som har bestemt det slik. Og det hadde ikke vært lett å få det til å være akkurat like lange måneder heller...."

"Vi så på hele året vi hadde lagt bak oss da vi kom til nyttårsaften. Tok fram en kalender med månedsark som kunne rives av. Først så vi på januar. Vi snakket om noe som hadde hendt. Noen som hadde bursdag. Så krøllet vi den og sa: Alt det har vi gjort. Vi er ferdige med januar. Slik tok vi hele året. Ett år var dette. Vi kaller det 1993. Nå begynner vi på en ny januar. Vi begynner på et nytt år som heter 1994. Se på det store tallet! Det er nesten to tusen. Vi kan tenke oss at de begynte å telle år da Jesus var liten......og nå er det snart to tusen år siden!......"

"Vi laget en oversikt over temperaturen i løpet av et helt år. Neste år laget vi en ny temperaturkurve på den samme plansjen. Slik kunne vi sammenligne de to årene. Vi snakket om for et år siden, om året som gikk og året som vi holder på med. Vi husket mye annet enn hvor varmt eller kaldt det var."

På et skolebesøk i England fant Ruth en plansje som viste "livet" til noen barn og voksne:



Line tegnet bursdagskaker med lys. Slik tegnet hun alder. Hun var fire år. Søsteren var åtte. Søsteren pleide å si til henne: Jeg er dobbelt så stor som deg, for jeg var like stor som du er nå når du ble født! Line spør en av de voksne: "Kan ikke du tegne far sine lys for meg?" (Han hadde nettopp hatt 40-årsdag). Hun ser alle lysene sier hun: "Å , det må være **mange** sånne som meg, det..."

Johannes (2) var utålmodig. Han ventet på barne-TV. Mor forsøkte å få ham til å forstå at han måtte vente. Hun er trøtt av masingen; holder fram klokka og peker: "når klokka har kommet hit, da kommer Labbetuss." Spontant kommer det fra toåringen: "Skru, da vel!"

"Parallelt med denne innføringen brukte vi matematikk som redskap til å synliggjøre bl. a. tidsbegrepet for elevene. (...) Ved å lage en tallinje på et matpapir der 100 år var 25 cm, 1000 år altså 2,5 meter, klarte vi å synliggjøre tidsavstanden. På tallinjen la vi inn viktige begivenheter og perioder. Da den 2. verdenskrig ble plassert knappe 14 cm tilbake på linjen "gikk det et lys opp" for flere elever. Enda flere ble forundret da de så at det kun var 2,5 cm siden de selv ble født, og hele 5 meter siden vi startet vår tidsrekning. Nå ble tid noe virkelig spennende! Hvor lenge var det siden de første menneskene levde i Norge? Her var ikke matpapiret tilstrekkelig. Nå måtte vi forlenge tidslinjen med en svært lang snor, en rull med 100 meter bendelbånd for å være eksakt. Ved å føre snoren rundt klasserommet kom vi ca. 30 meter pr. omgang. Vi kom fram til at de eldste bosetninger i Norge kunne ligge ca. 30 meter ute på tidslinjen. Hvor langt måtte vi tilbake for å finne dinosaurer? Da en av elevene ville vite hvor juratiden befant seg på tallinjen forlot vi klasserommet og lot tallinjen gå "i tankene" helt opp til Sognefjorden. Der et sted, ca. 16 mil fra matpapiret vårt, måtte vi for å finne dinosaurene."

Har du pedagogiske glimt å dele med oss? Send inn!

Arbeidsark 3 til "Den gamle Katedralskolen": Vaktmesterboligen og hovedinngangspartiet.

Gunnar Gjone

Komplekse tall

Han tægner Landkort og læser Loven,
Han er saa flittig som jeg er doven.

skrev Johan Herman Wessel om sin bror Caspar Wessel. Hva har dette med motivet på det tyske frimerket å gjøre? Frimerket har undertittelen "det gaussiske tallplanet" og ble utgitt i 1977 i forbindelse med 200 års jubileet for Carl F. Gauss' fødsel.

Først en liten kommentar til motivet til frimerket. Dette er et *meget* matematisk motiv. Det gjengir en figur som gjerne kunne vært hentet fra en universitetslærebok i matematikk, hvorfor har det da kommet på frimerke? En er fristet til å spørre hva vanlige folk tenker hvis de tok seg tid til å studere motivet. Kanskje drev det tyske postvesen med folkeopplysning?

La oss imidlertid gå inn i historien, og det temaet som vi skal ta for oss er utvidelse av tallbegrepet. Vi kan si at de naturlige tallene 1,2,3,4, .. forekommer "naturlig" i telling, seinere har tallbegrepet gjennomgått en rekke utvidelser: vi har brøk, irrasjonale tall - som for eksempel π - og vi har negative tall. Tallene er i en forstand konstruksjoner, noe som fikk den tyske matematikeren Leopold Kronecker (1821-1891) til å uttale: *Die ganzen Zahlen har der liebe Gott gemacht, alles andere is Menschenwerk.*

Enhver utvidelse av tallbegrepet har har møtt store vanskeligheter på grunn av problemer med å se sammenhengen mellom tall og praktiske erfaringer knyttet til geometri - som mål på avstand mellom to punkter.Pytagoreerne hadde vanskeligheter med $\sqrt{2}$ som lengden på diagonalen i et kvadrat, den kunne ikke skrives som en brøk.

Negative tall ble innført via algebra, der de var nødvendige ut fra et fullstendighet - at en førstegrads likning, for eksempel $x + 3 = 0$, alltid skulle ha en løsning. Helt opp til 1600-tallet hadde negative tall motstandere, som heller ville si at likningen ikke hadde noen løsning, enn at den skulle være -3.

Men hva med likningen: $x^2 + 1 = 0$? Den har ingen løsning - hvis vi holder oss til de reelle tallene. Hvis vi ville forsøke å løse den har vi likningen $x^2 = -1$ som altså skulle ha løsningene $x = \pm\sqrt{-1}$.

Euler og andre før han betegnet $\sqrt{-1}$ med i (en forkortelse for imaginær). Dette tallet i kan vi regne med på vanlig måte for eksempel $(3+2i)+(1+i)=4+3i$, men vi har i tillegg $i^2=-1$.

Løser vi 2.gradslikningen $x^2+2x+5=0$ finner vi løsningene $x=(-2\pm\sqrt{4-20})/2$ eller $x=-1\pm 2i$, og generelt får vi at enhver 2.gradslikning har to røtter. Det var Gauss som innførte betegnelsen *komplekse tall* for tall på formen $a+ib$ der a og b er reelle tall. Hvis $b=0$ blir tallet reellt og vi har altså at de reelle tallene blir en delmengde av de komplekse tallene. Hvis $a=0$ får vi et tall på formen ib som vi kaller et imaginært tall.

De komplekse tallene er på denne måten innført rent algebraisk, men hva med den geometriske anskueligheten?

Det er her Caspar Wessel kommer inn. I 1799 publiserte han et arbeid "Om Directionenes Analytiske Beregning" der han gjennom å innføre regneoperasjoner på "piler" (vektorer) kunne gi en geometrisk tolking av operasjoner for komplekse tall. Arbeidet vakte imidlertid liten oppmerksomhet, rimeligvis fordi det var publisert på dansk. Viggo Brun siterer Sophus Lie som skriver:

> Hvis Caspar Wessels Arbeide var kommet til sin Ret, saa vilde han forlængst have vundet et fuldt saa stort Navn i Mathematikens Rige som hans Broder Johan Herman Wessel inden den nordiske Literatur og som hans (grand)Onkel Peter Wessel (Tordenskjold) vandt som Kriger.

Idèen i arbeidet til Wessel er gjengitt i Brun (1962) og i Hall (1965) - på litt ulike måter. Måten å representere tallene geometrisk ble også utviklet av andre uavhengig av Wessel. Den sveitsiske bokholderen og amatørmatematikeren Jean-Robert Argand (1768-1822) publiserte et tilsvarende arbeid i 1806. Vi finner også av og til at planet kalles Argand-planet.

Det var imidlertid først da Gauss brukte den geometriske tolkingen av de komplekse tallene i et bevis for algebraens fundamentalsetning at de ble allment akseptert av matematikerne. Dette ble først framstilt fullstendig av Gauss i 1831. Det er imidlertid grunn til å tro at han hadde idèene tidligere, rundt 1800. En regner det som sikkert at han ikke kjente arbeidene til Wessel eller Argand.

Som nevnt innledningsvis bærer frimerket teksten "det gaussiske tallplanet" og det er den vanligste betegnelsen idag. Viggo Brun skriver imidlertid:

> Historisk sett ville det være riktigere å kalle det Wessels plan. Ikke bare har Wessel en klar prioritet fremfor Gauss, men hans fremstiling er mer overbevisende enn den Gauss ga i 1831. (Brun, 1961)

Så tilbake til figuren på frimerket. De komplekse tallene framstilles i et plan, med en horisontal tallinje som den reelle aksen og en vertikal tallinje som den imaginære aksen, med enhet *i*. Tallene representeres da som punkter i planet, som utvider begrepet tallinje. På frimerket er det illustrert 4 komplekse tall: $-5+6i$, $4+4i$, $7-\pi$ og $-7/2-5i$.

De komplekse tallene spiller en stor rolle innenfor naturvitenskap og er grunnlaget for et eget område innenfor matematikken. Det finnes en rikholdig litteratur om emnet. En elementær innføring er boka til Finn Holme.

Litteratur

Brun, V. (1961) *Regnekunsten i det gamle Norge*, Oslo: Universitetsforlaget
Hall, T. (1965) *Gauss Matematikernas konung*. Stockholm: Prisma
Holme, F. (1982) *Komplekse tall*. Oslo: Gyldendal/Norsk Matematisk Forening
Katz, V. (1993) *A History of Mathematics. An Introduction*
New York: HarperCollins College Publishers
Wessel, J.H. (utgitt 1965) *Digte* Oslo: Gyldendal

Tallkuriositeter III

Christoph Kirfel, Ole Einar Torkildsen

23.9.1994

For en liten stund siden startet en artikkelserie med tallkuriositeter og tallmønstre. Etter et lite opphold i siste nummer tar vi opp tråden igjen. Følgende observasjoner er ganske interessante. De forteller oss noe om 11-gangen.

$$
\begin{aligned}
11 &= 1 \cdot 11 \\
1001 &= 91 \cdot 11 \\
100001 &= 9091 \cdot 11 \\
10000001 &= 909091 \cdot 11 \\
1000000001 &= 90909091 \cdot 11 \\
\ldots & \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Tallmønsteret fortsetter slik i det uendelige. Kan du finne ut hvorfor? Et annet mønster er kanskje litt lettere å gjennomskue:

$$
\begin{aligned}
99 &= 9 \cdot 11 \\
9999 &= 909 \cdot 11 \\
999999 &= 90909 \cdot 11 \\
99999999 &= 9090909 \cdot 11 \\
9999999999 &= 909090909 \cdot 11 \\
\ldots & \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Begge resultatene skal vi bruke til å lage oss en enkel og god regel til å avgjøre om et tall er delelig med 11 eller ei. Vi starter med et litt stort tall slik at vi ikke kan se med det blotte øye om 11 går opp i dette tallet eller ei. Vi velger tallet

$$1543278.$$

Vi skriver tallet på en ny måte ved å ta hensyn til verdien av sifrene i vårt titallssystem.

$$\begin{aligned}
1543278 &= 1\cdot 1000000 + 5\cdot 100000 + 4\cdot 10000 + \\
&\quad 3\cdot 1000 + 2\cdot 100 + 7\cdot 10 + 8 \\
&= 1\cdot(999999+1) + 5\cdot(100001-1) + 4\cdot(9999+1) + \\
&\quad 3\cdot(1001-1) + 2\cdot(99+1) + 7\cdot(11-1) + 8 \\
&= 1\cdot 999999 + 5\cdot 100001 + 4\cdot 9999 + \\
&\quad 3\cdot 1001 + 2\cdot 99 + 7\cdot 11 + \\
&\quad (1-5+4-3+2-7+8).
\end{aligned}$$

Vi ser at tallene før parentesen i den siste likningen alle sammen må være delelige med 11. Enten så hører de med i listen fra det første eller det andre tallmønsteret. Siden parentesen summerer seg til null må tallet vi startet med være delelig med 11. Men hva var det egentlig vi regnet ut i denne parentesen. Det ligner veldig på tversummen, bare det at sifrene inngår med vekslende fortegn. Det siste sifferet teller positivt det nestsiste sifferet teller negativt, det tredje siste positivt igjen osv. Derfor kaller man dette uttrykket også for *den alternerende siffersum*. Denne størrelsen forteller oss noe om resten ved divisjon med 11. Er den null, 11, 22 eller kanskje -11, -22 eller et annet tall i 11-gangen så er tallet vi startet med selv i 11-gangen.

Det artige er nå at man ved hjelp av denne alternerende siffersummen kan lage en **elleverprøve** som fungerer like godt som nierprøven som mange av oss sikkert husker godt. Et litt større regnestykke skal overprøves, f. eks.: $345615 + 324561 = 670176$. Vi er ikke sikre på om vi har regnet riktig. Derfor beregner vi den alternerende siffersummen for alle tre tall i regnestykket, nemlig 6, -6 og 0. Nå er $6+(-6)=0$ og det er nokså sannsynlig at vi har regnet riktig. Kontrollregnestykket behøver ikke alltid bli en eksakt likning men forskjellen mellom høyre og venstre side må ligge i 11-gangen som i følgende eksempel som tydeligvis er regnet riktig: $21-15=6$. I kontrollregnestykke er venstresiden $-1-4=-5$ mens høyresiden er 6. Differansen mellom sidene, 11, ligger i 11-gangen og vi har "sannsynligvis" regnet riktig. Prøven fungerer for såvel addisjon subtraksjon og multiplikasjon. Når det gjelder divisjon får vi problemer. Kan du se hvorfor?

Fordelen med elleverprøven som bygger på den alternerende siffersummen, er at den vanligvis gir relativt små tall. Sifrene har gjerne en tendens til å oppheve hverandre. I en vanlig nierprøve vil tversummen bare øke på jo flere siffer utgangstallet har. Til gjengjeld må vi noen ganger regne med negative tall når elleverprøven skal brukes.

De som har arbeidet med andre tallsystemer, kanskje med femtallssystem har muligens oppdaget at man i femtallssystemet har en firerprøve slik som vi har en nierprøve i vårt titallssystem. Den baserer seg igjen på tversummen av tall skrevet i femtallssytem. Kan du finne ut om den alternerende siffersummen også kan brukes i femtallssystem. Hvordan fungerer den og hva forteller den oss? Hva vil du kalle en slik prøve for?

Lykke til med elleverprøven og en videre utforskning av tallmønsteret!

Aasmund Kvamme

Oppgåver frå sovjetiske matematikk-konkurranser

I det tidlegare Sovjetunionen vart det kvart år arrangert konkurranser i matematikk for elevar frå heile unionen. Konkurransene var lagt opp for elevar i dei tre øverste klassane, som tilsvarer våre 8. til 10. klasse. Elevane måtte gjennom minst to uttakingar (på kvar skule og i kvar republikk) før dei kom til unionsfinalen. Det var eit krav til oppgåvene at dei ikkje skulle gå ut over pensum, slik at vansken ikkje var det *faglege*, men *tida*. Finalen var lagt opp over to dagar, med fire timar kvar dag. Vinnaren løyste vanlegvis alle oppgåvene.
Oppgåvene i dette nummeret er *8. klasse-oppgåvene* frå den 15. konkurransen i Alma-Ata, 1981.

8. klasse (oppgåve 1 - 4 første dag, 5 - 8 andre dag)

1 To like sjakkbrett på 8×8 ruter har same sentrum, men det eine er snudd 45° i forhold til det andre. Dersom rutene er 2×2 cm, finn det totale arealet av overlapping mellom svarte ruter på begge bretta.

2 På ein sirkel har du gjeve 4 punkt A, B, M, og N. Gjennom punktet M går dei to kordene MA_1 parallell med linja NA, og MB_1 parallell med linja NB. Vis at linjene AA_1 og BB_1 er parallelle.

3 Eit naturleg tal har eigenskapen $P(k)$ dersom det kan framstillast som eit produkt av k påfølgjande naturlege tal større enn 1.

a) Finn k slik at det finst eit tal n som har eigenskapane $P(k)$ og $P(k+2)$ samstundes.

b) Vis at det ikkje finst tal som har eigenskapene $P(2)$ og $P(4)$ samstundes.

4 Gjeve ein rektangulær tabell med fire rekkjer. Den første inneheld tilfeldige naturlege tal (nokre av dei kan vere like). Dei neste rekkjene er laga etter regelen: vi leiter gjennom den forrige rekkja frå venstre til tal nr n, og skriv talet k dersom vi fann n tilsaman k gonger. Vis at rekkjene 2 og 4 må vere like.

5 Firkantane *AMBE*, *AHBT*, *BKXM* og *CKXP* er parallellogram. Vis at firkanten *ABTE* også må vere eit parallellogram (hjørnene er lista opp i rekkefølgje mot klokka).

6 Finn dei naturlege tala x og y som er løysinga til $x^3 - y^3 = xy + 61$.

7 18 fotballag har spelt dei 8 første rundene i ein turnering. Vis at det finst 3 lag som ikkje har møtt kvarandre.

8 Punkta C_1, A_1 og B_1 ligg eit på kvar av dei tre sidene AB, BC og CA i trekanten ABC. Du får vite at

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{1}{3}.$$

Vis at omkretsen P av trekanten ABC og omkretsen p av trekanten $A_1B_1C_1$ tilfredsstiller ulikskapen $P/2 < p < 3P/4$.

Bidragsytere i dette nummeret:

Gjone, Gunnar: SLS, Universtitetet i Oslo
Høines, Marit Johnsen: Høgskolen i Bergen, Landåssvingen 15, 5030 Landås
Kirfel, Christoph: Høgskolen i Bergen, Landåssvingen 15, 5030 Landås
Kvamme, Aasmund: Høgskolen i Bergen, Lars Hillesgt. 34, 5008 Bergen
Torkildsen, Ole Einar: IPP, Univ. i Bergen, Johs Bruns gate, 5020 Bergen
Torkildsen, Svein H.: Samfundets Skole, Posebyen, 4602 Kristiansand