tangenten 1/2022

tidsskrift for matematikkundervisning 33. årgang

tangenten 1/2022

Tidsskrift for matematikkundervisning

Utgitt av Caspar Forlag AS
Kopiering fra tidsskriftet er ikke tillatt uten redaksjonens godkjenning

ISSN 0802-8192

Adresse
Caspar Forlag/Tangenten
Kanalveien 51
5068 Bergen

tangenten@caspar.no
www.caspar.no/tangenten.php

Abonnementspriser

Ordinært	479,– per år
Studenter	279,– per år
Klassesett	250,– per år
(ved minimum 15 studenter)	
Utland	500,– per år

Utgivelsesdatoer
20. februar, 20. april
20. september, 20. november

Layout
Caspar Forlag / Aasmund Kvamme

Grafisk produksjon
John Grieg, Bergen

Artikler til bladet sendes til
tangenten@caspar.no

Omslaget
Utforming: Sigrun Werner

Adresseendringer
Medlemmer i LAMIS må bruke
post@lamis.no
for å melde fra om adresseendinger.
Direkteabonnenter hos Caspar Forlag bruker
post@caspar.no

Retningslinjer for vanlige artikler
tangenten.no/for-bidragsytere/retningslinjer-for-forfattere/

Retninglinjer og informasjon for fagfellevurderte artikler
tangenten.no/for-bidragsytere/retningslinjer-for-niva-1-artikler/

Fagfellevurderte artikler er merket som dette i boksen med forfatteropplysninger.

Eksamensnerver

Utdanningsdirektoratet (Udir) skal snart opp til eksamen. I skrivende stund kan det se ut til at eksamenene våren 2022 blir avlyst, men året etter planlegger Udir eksamener med flere store endringer. Det vil vise seg om de har forstått læreplanen, og ikke minst kjerneelementene, godt nok.

Eksamen er viktig for den enkelte elev som får kompetansen sin vurdert, men den er også viktig fordi lærere og lærebokforfattere studerer eksamensoppgavene nøye. Der læreplanmålene er vide og kan være vanskelige å tolke, er eksamensoppgavene konkrete og håndfaste.

I høst kom Udir med signaler om at ungdomsskolens eksamen skulle avgrenses til å teste mål for 10. trinn. Dette ville være stikk i strid med hvordan læreplangruppa tenkte da den fordelte mål på årstrinn. En slik avgrensning av eksamen ville ha gjort det vanskelig å trekke inn viktige deler av faget som geometri og statistikk. Disse delene ville dermed trygt kunne nedprioriteres uten konsekvenser på eksamen.

Etter sterke reaksjoner har nå Udir heldigvis snudd. Ressurspersoner fra LAMIS, Matematikksenteret og læreplangruppa har hjulpet Udir med å finne en bedre løsning. Nå kan også mål fra 9. trinn trekkes inn på eksamen. Alle som reagerte skal ha honnør, og Udir skal ha takk for å ha tatt faglige argumenter på alvor.

Et annet kontroversielt spørsmål er om hele eksamen heretter skal være med hjelpemidler. Det virket lenge som at Udir hadde bestemt seg, men nå har de heldigvis nedsatt ei fagkompetent gruppe som skal vurdere om det likevel er nødvendig med en del uten hjelpemidler for at elevene skal få vise sin kompetanse. Dette er bra, men det gjenstår andre problemer. Det at eksamen skal leveres heldigitalt, begrenser elevenes muligheter til å bruke et mangfold av representasjonsformer. Det er mange elever som ikke får vist sitt beste på grunn av rot med filformater og svake digitale ferdigheter.

FAFOs evaluering av eksamensoppgavene på 10. trinn fra 2017 til 2019 pekte på utfordringer som ikke er løst: det er for mange eksamensoppgaver til at elevene får tid til å utforske og problemløse, og det er nesten ingen oppgaver hvor elever med svake språkkunnskaper kan vise sin matematikkompetanse uten språklige hindringer. Det er også slik at del 2 i liten grad har hatt oppgaver som fanger opp kompetansen som svaktpresterende elever har. Arbeidet med å få eksamen best mulig, er viktig! Vi oppfordrer til å skrive artikler til Tangenten som kaster lys over dette arbeidet.

Bjørn Smestad

Generiske eksempler som argumentasjon

De siste årene har resonnering, argumentasjon og bevis stadig blitt trukket fram som aktiviteter som det må arbeides mer med i matematikkfaget. Også den nye norske læreplanen reflekterer dette. Resonnering og argumentasjon er et av kjerneelementene i matematikk, og skal prege innholdet i faget på tvers av tema og trinn. Ordlyden i kjerneelementet inkluderer at «resonnering i matematikk handlar om å kunne følgje, vurdere og forstå matematiske tankerekkjer», og at «argumentasjon i matematikk handlar om at elevane grunngir framgangsmåtar, resonnement og løysingar og beviser at desse er gyldige». Det handler med andre ord både om å støtte elevenes læring og forståelse for matematikken og om å trekke skolematematikken nærmere matematikk som vitenskapsfag, der det å gi matematisk gyldige argumenter (eller bevis) for påstander har vært en sentral praksis siden Euklids tid. En påstand i matematikk kan handle om ett gitt eksempel eller en løsning på en oppgave, den kan handle om en endelig mengde eksempler, eller den kan handle om uendelig mange eksempler. Den siste typen påstand kaller vi en generell påstand, og det er slike som er i fokus i denne teksten.

Kristin Krogh Arnesen
NTNU
kristin.arnesen@ntnu.no

Arbeid med resonnering og argumentasjon i skolen kan gjøres på mange måter. I denne artikkelen skal vi se på en tilnærming til bevis som kalles generiske eksempler. Jeg skal definere hva dette er, hvordan og når det kan brukes i klasserommet, hva man kan vinne på å bruke denne argumentasjonsformen, og hvilke utfordringer det kan innebære. Teksten er delvis basert på en undersøkelse jeg gjorde sammen med Kirsti Rø (Rø & Arnesen, 2020), og inneholder også data fra klasserom samlet gjennom et større forskningsprosjekt på resonnering og bevis på barnetrinnet (se https://www.ntnu.no/ilu/proprimed).

Hva er generiske eksempler?

På 6. trinn arbeider elevene med hypotesen «summen av to partall er alltid et partall». Er det alltid sånn, aldri sånn, eller noen ganger sånn? Under arbeidet med oppgaven har mange av elevene forsøkt seg fram med ulike eksempler, som de to elevene Azra og Amal gjør her:

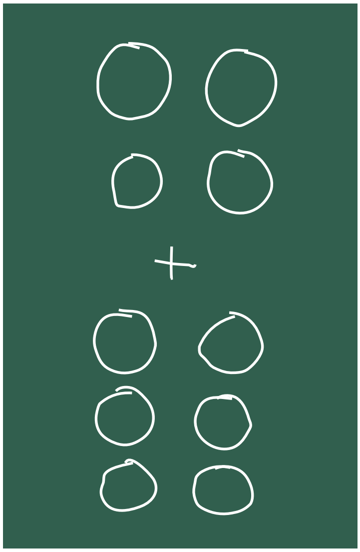
Azra	Hvis man legger sammen 2 pluss 2, blir det 4. 4 er et partall. For 2 pluss 2, 4 pluss 4, 8 pluss 8, 16 pluss 16 …
Amal	Jeg tror det skjer noen ganger?
Azra	Ja, alle. Bare si noen partall.
Amal	8 pluss 8.
Azra	2 pluss 8, det blir 10.
Amal	8 pluss 8. 2 pluss 2. 4 pluss 4. 6 pluss 6.

Azra Ikke bare ta de samme tallene, si noen forskjellige.
Amal 14 pluss 14.
Azra 16 pluss 14.
Amal 84! Nei 86, pluss 86.
Azra Så høyt, det gidder jeg ikke å regne ut.
Azra 100 pluss … 98.

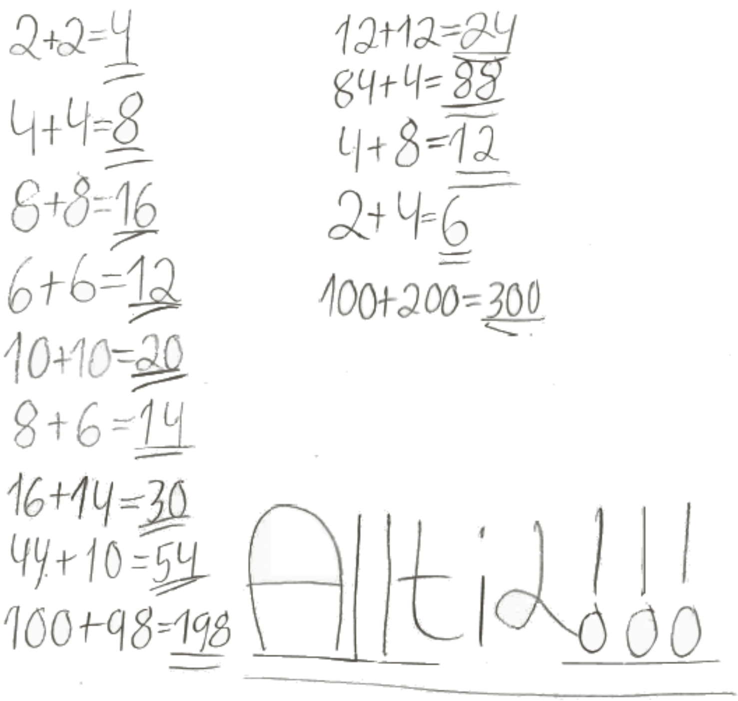
Azra og Amal har prøvd seg fram med flere eksempler på summer av to partall. De har prøvd med to like tall, to ulike tall, små tall og store tall. Figur 1 viser hva de til slutt har skrevet på arbeidsarket.

De konkluderer ganske tydelig med at denne hypotesen *alltid* stemmer. Amal utdyper denne konklusjonen for læreren når han kommer forbi: «Hvis vi klarer å finne så mange, så er vi ganske sikre på at det er alltid.» Men læreren ønsker å utfordre denne typen argumentasjon. I den felles diskusjonen litt senere spør han: «Kan det ikke være sånn at en eller annen plass så lurer det seg inn et svar som ikke blir et partall, da? Dere har jo ikke undersøkt alle partallene. Kan vi med sikkerhet vite at det alltid blir partall, ved å sjekke ut noen?» Etter hvert i diskusjonen tilbyr læreren et annet argument. Med støtte fra elevene minner han om at et partall er et tall som kan deles inn i par. Han sier videre: «Men hvis du plusser sammen to partall, for eksempel fire og seks, så ser vi jo at her er det bare par.» Han tegner en figur på tavla (figur 2), og så kommenterer han: «Uansett hvilket partall det er, om vi bruker 12, 14 eller 20, så vil det alltid bare bestå av par.»

Hva er det som skiller begrunnelsen til Amal og Azra fra lærerens begrunnelse? Og hva er det som kjennetegner lærerens argument? Er det en matematisk gyldig framgangsmåte for å vise at summen av to partall er et partall?



Figur 2: Lærerens illustrasjon av 4 + 6.



Figur 1: Azra og Amals skriftlige svar på om hypotesen stemmer.

Vi kan si at elevenes argument er empirisk: Det baserer seg på at påstanden ser ut til å stemme for ett, to, eller mange eksempler, og dermed virker det sannsynlig at påstanden må stemme bestandig. Det er jo ofte slik vi argumenterer i andre fag, for eksempel når vi gjør eksperimenter i naturfag: Hvis eksperimentet gir samme utfall gang etter gang, regner vi med at det må være sånn. Men en slik argumentasjon er ikke gyldig i matematikken. Når vi har en generell påstand, altså en påstand som skal være sann for en uendelig stor mengde av tall (her: alle partall), er ikke empirisk argumentasjon tilstrekkelig. Det er dette læreren peker mot når han sier «Kan det ikke være sånn at en eller annen plass så lurer det seg inn et svar som ikke blir et partall, da?». Det trengs et matematisk gyldig argument for å vise at påstanden alltid er sann. Et slikt argument kan ta forskjellige former. La oss se på hva læreren gjør i sitt argument for påstanden om partall:

Lærerens argument bruker også et eksempel (4 + 6). Men han sier ikke: «4 + 6 blir 10, det er et partall.» Faktisk sier han ikke engang at svaret på regnestykket blir 10. Derimot bruker han matematiske egenskaper ved partall til å vise hvorfor summen 4 + 6 også er et partall, og ikke bare at det er et partall. Deretter peker læreren på at alle partall kan deles i par på denne måten, så man får samme oppførsel hos alle summer av partall. Dette argumentet er et generisk eksempel, det vil si et eksempel (her: 4 + 6) på en generell påstand (her: summen av to partall er alltid et partall) der man ser på hvilke matematiske egenskaper som får eksempelet til å fungere (her: begge tallene deles i par, da består også summen av par) istedenfor det spesielle ved akkurat dette eksempelet (her: summen er 10 som er et partall). Siden lærerens eksempel både får fram den matematiske sammenhengen i påstanden og sier noe om at dette alltid gjelder, er argumentet et gyldig argument – altså et bevis – for den generelle påstanden om at summen av to partall alltid er et partall.

En annen måte å argumentere for påstanden på er ved en generell logisk slutning (Stylianides, 2008). Da bruker man ikke eksempler, men kun et generelt språk. For påstanden med partallene kunne vi sagt at vi kan tenke på det ene partallet som én mengde med par og det andre som en annen mengde med par, og legger vi dem sammen, ja, da har vi fortsatt en mengde med par. Her er det ingen eksempler som er synlige – og heller ingen algebraisk notasjon, selv om vi naturligvis kunne representert dette argumentet ved hjelp av den algebraiske formuleringen $2k + 2m = 2(k + m)$, der k og m er vilkårlige positive heltall. Generelle logiske slutninger, skrevet med algebraisk språk, er ofte det mange tenker på når man snakker om bevis. Vi kan kalle bevis på denne formen for formelle bevis. En ting det er verdt å merke seg, er at det generiske eksempelet og det formelle beviset gjengitt her bruker samme egenskap ved partall (de er mengder av par) og nøkkelidé for argumentet (to mengder med par danner til sammen en ny mengde med par). Fordeler med å bruke et eksempel som utgangspunkt kan være at det konkretiserer det som skjer – man kan vente med å bruke et generelt språk, men man kan likevel bruke samme nøkkelidé som et formelt bevis. Det er også lett å ta utgangspunkt i den empiriske argumentasjonen som elevene allerede har gjort. Dessuten er det jo slik at når man i matematikken jobber med å argumentere for en generell påstand i matematikk, starter man gjerne med å utforske eksempler – det gjør også matematikere. De færreste, uavhengig av nivå, går rett på et formelt bevis for en påstand som man ikke allerede har en viss kjennskap til.

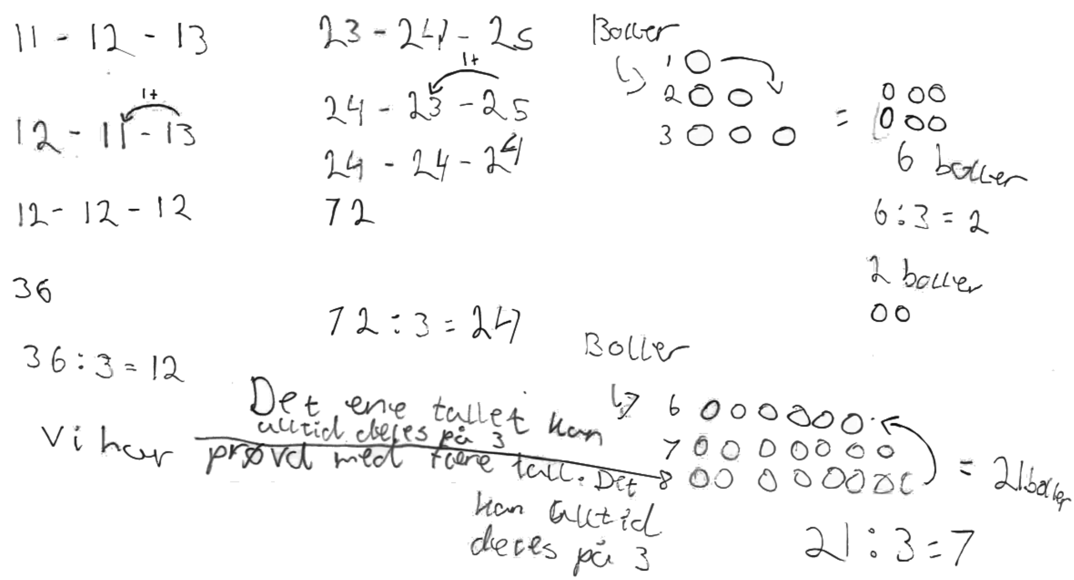
Mange som har forsket på bevis og argumentasjon i skolen, peker på at generiske eksempler er nyttige for elever, men på hvilken måte er det uenigheter om i litteraturen: Balacheff (1988) og Harel og Sowder (1996) mener at generiske eksempler først og fremst er en type argumenter som elever kan ha utbytte av før de har lært formelle bevis, eller som en overgang til disse ved å «oversette» fra generisk eksempel til formelt bevis. Dette så vi over at man kunne gjøre for påstanden om summer av partall. Det er også slik at ikke alle er enige om hvorvidt generiske eksempler er matematisk gyldige bevis. Stylianides (2008) kategoriserer imidlertid generiske eksempler som gyldige bevis, og det samme gjør Rowland (1998). Sistnevnte er dessuten uenig i at generiske eksempler kun bør være en tidlig form for argumentasjon i skolen, før man lærer formelle bevis: Han mener at generiske eksempler er nyttige i seg selv som argumenter, med styrke til både å forklare en påstand og overbevise om at den er riktig – på alle nivåer. I denne teksten deler jeg Rowlands syn, og jeg tar dermed som utgangspunkt at generiske eksempler, dersom de er gjort korrekt, er gyldige som matematiske bevis. Gjennom min egen bakgrunn som matematiker har jeg også sett hvordan generiske eksempler brukes i matematisk forskning. Har man lyktes i å konstruere et generisk eksempel for påstanden sin, da er man overbevist om at den må være korrekt. I vitenskapelige artikler blir de ofte «oversatt» til formelle bevis og videre raffinert, men nøkkelideen i beviset forblir ofte den samme.

Arbeid med generiske eksempler

Så hvordan bruker man generiske eksempler, og hvordan legger man til rette for at elever kan ta dem i bruk? Først og fremst bør man være klar over hvilke påstander som det gir mening å bruke generiske eksempler for. Det må være generelle påstander, som i eksempelet over. Oppgaver som handler om ett eller få eksempler (som «vis at 19 er et primtall» eller «på hvor mange måter kan man skrive 64 som et produkt av to heltall?»), har ikke nytte av generiske eksempler. Et annet aspekt ved bruk av generiske eksempler er å reflektere rundt hvilket eksempel man velger. Dersom læreren i eksempelet over hadde valgt å bruke 6 + 6 som utgangspunkt for det generiske eksempelet, kunne han gjort det samme argumentet, men da kunne man kommet i tvil om hvorvidt han faktisk har bevist at påstanden alltid gjelder – eller bare at den gjelder for summer av to like partall. Det er lurt å unngå eksempler som kan oppfattes som «spesialtilfeller». Kanskje er verken 2 + 4 (for små tall), 10 + 20 (hele antall tiere, det er spesielt) eller 8 + 8 (to like tall) velegnet til å vise påstanden om summer av partall. Velger man for store tall, som 88 + 114, kan eksempelet bli for stort å håndtere, i alle fall dersom man bruker en slik tegning som læreren på 6. trinn gjorde. Det gjelder å velge et eksempel som er passe stort, og passe «vilkårlig».

Stylianides (2007) sier, i sin definisjon av matematiske bevis, at ingrediensene som brukes i et bevis (definisjoner, påstander, symboler og språk som brukes), må være kjent for fellesskapet beviset legges fram i. Det vil si at hvorvidt et argument er matematisk gyldig, ikke bare avgjøres matematisk, men også ut fra om det passer for dem det er ment for. Dette gjelder naturligvis også for generiske eksempler. Hvis sjetteklassen over ikke hadde vært kjent med at partall er tall som består av par, hadde ikke lærerens argument fungert. Men generiske eksempler kommer også med et annet «personlig aspekt». Flere forskere (f.eks. Reid & Vallejo Vargas, 2018) påpeker at hvorvidt et generisk eksempel faktisk er generisk (og ikke bare empirisk), er avhengig av øyet som ser, fordi vi ikke alltid ser det samme i et eksempel. Jeg illustrerer dette med en elevbesvarelse fra 7. trinn. Klassen har arbeidet i grupper med å vise at summen av tre etterfølgende heltall alltid er delelig på 3. Figur 3 viser arbeidet til en av gruppene.

La oss først bare se på «kolonnen» lengst til venstre. Pilen «+1» fra 13 til 11 viser nettopp den matematiske nøkkelideen for hvorfor påstanden stemmer: Ved å flytte 1 fra det største til det minste tallet får man tre kopier av det mellomste tallet – og dermed må summen nødvendigvis være tre ganger det mellomste tallet. Men i den videre teksten kan det virke som om elevene går bort fra denne ideen, og heller går inn i et empirisk argument: For de tre 12-erne blir 36 til sammen, og så viser de at divisjonen 36 : 3



Figur 3: Elevargument til hypotesen om summen av tre etterfølgende heltall.

går opp. Det er uklart om elevene ser sammenhengen mellom «+1»-strategien og det faktum at 36 er tre ganger nettopp 12. En samtale med elevene ville kanskje hjulpet oss her, men også i en samtale kan man risikere at der én elev ser en matematisk sammenheng som kan forklare en påstand, ser en annen bare et eksempel på en påstand.

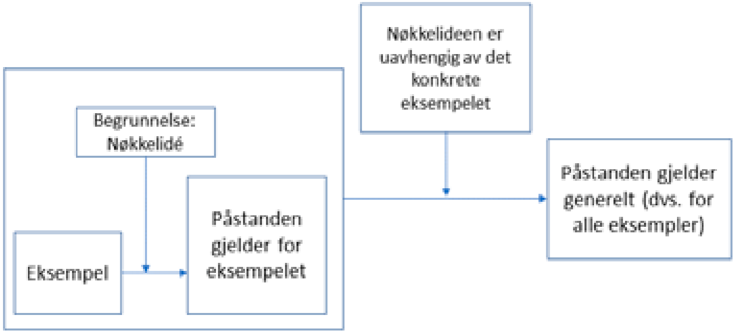
Reid og Vallejo Vargas (2018) foreslår noen elementer lærere bør se på når de jobber med generiske eksempler sammen med elever[1], som Kirsti Rø og jeg har utvidet til følgende to punkter (Rø & Arnesen, 2020):

- Argumentet konkluderer med den generelle påstanden man skulle bevise;
- Argumentet inneholder et resonnement på eksempelet (den matematiske nøkkelideen for beviset synes i eksempelet), i tillegg til en eksplisitt løfting av dette resonnementet til det generelle.

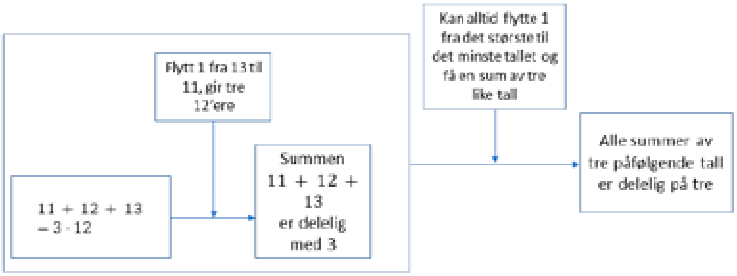
Når vi betrakter hele besvarelsen til disse elevene, finner vi at de har testet med fire forskjellige eksempler, enten med tall eller med systematisk oppstilte mengdemodeller, og at alle er markert med en pil for «+1» fra største til minste tall. Det står også skrevet at «vi mener at det stemmer at tre påfølgende tall alltid er delelig på 3», så man kan anta at elevene vet at det handler om en generell påstand her (de skriver påstanden selv i generell form). Det første punktet over er altså oppfylt. Når det kommer til det andre punktet, finnes det spor av et resonnement i eksemplene. Imidlertid står det ingenting om hvorfor det som skjer i eksemplene, er overførbart til et vilkårlig eksempel, så en eksplisitt løfting mangler. Dessuten avsluttes besvarelsen med teksten «vi har prøvd med flere tall. Det kan alltid deles på 3», altså et empirisk argument. Nøkkelideen i beviset («+1»-operasjonen) er der, men det er kanskje ikke tydelig for elevene at dette alltid må skje, for det er ingen løfting av denne ideen til det generelle. I neste del ser vi mer på utfordringer rundt denne delen av et generisk eksempel.

Mer om strukturen i et generisk eksempel

Når jeg og kollegaer jobber med generiske eksempler sammen med lærerstudenter, har vi erfart at den «eksplisitte løftingen» av resonneringen på eksempelet til det generelle er en van-



Figur 4



Figur 5

skelig affære. I det første klasseromseksempelet besto denne løftingen av én setning: «Uansett hvilket partall det er, om vi bruker 12, 14 eller 20, så vil det alltid bare bestå av par.» I eksempelet med tre påfølgende tall kan vi tenke oss at vi tilføyer «når vi har tre påfølgende tall i en sum, kan vi alltid se for oss at vi flytter 1 fra det største til det minste tallet, og får tre like tall». Vi har imidlertid sett at lærerstudenter er litt for raske til å hoppe til det generelle, slik at de ikke bruker eksempelet til å argumentere for hvorfor påstanden holder (Rø & Arnesen, 2020). Dette har vi kalt et «sprangargument» (leap argument). Et sprangargument for påstanden om tre påfølgende tall kan se slik ut: «$4 + 5 + 6 = 15 = 5 \cdot 3$. Når vi har tre påfølgende tall i en sum, kan vi alltid se for oss at vi flytter 1 fra det største til det minste tallet, og får tre like tall, altså at summen er 3 ganger det mellomste tallet.» Problemet med dette argumentet er at eksempelet ikke egentlig spiller noen rolle her – nøkkelideen kommer kun fram gjennom den neste setningen, som er skrevet i generell form. Å gå rett på generell argumentasjon kan være greit dersom fellesskapet godtar det, også på barneskolen, men det er ikke nødvendigvis slik. I verste fall kan vi se for oss at slike sprangargumenter forvirrer elever (de blir overrumplet av det generelle og abstrakte), og at det styrker ideen deres om at empiriske argumenter er greit (argumentet inneholder jo et eksempel som ikke brukes generisk).

«Løsningen» som Kirsti og jeg skisserte på dette problemet, var å være bevisst på at et generisk eksempel består av to deler, som henger sammen: Først presentere et eksempel og vise hvorfor påstanden holder for eksempelet. Deretter en presisering av hvordan, hvorfor eller bare at dette argumentet ikke var avhengig av tallene som ble brukt, men egenskaper ved dem – og at argumentet derfor kan benyttes på alle andre tall med disse egenskapene. Dette er en måte å beskrive strukturen i et generisk eksempel på. Figur 4 viser et «flytskjema» for hvordan dette kan se ut. Den første delen, i en egen «innkapsling» til venstre, handler bare om eksempelet, der nøkkelideen for argumentet etablerer at påstanden gjelder i dette tilfellet. Deretter må man få fram at, eller hvorfor, man kan gjøre det samme for alle eksempler. Først nå bruker man et generelt språk – her generaliseres det man så i eksempelet.

I figur 5 ser vi strukturen i det generiske eksempelet om summen av tre påfølgende tall.

Avsluttende kommentarer

Hensikten med denne artikkelen har vært å si noe om hva et generisk eksempel er, og også hva det ikke er. Det er viktig å skille empirisk argumentasjon ved bruk av eksempler fra argumentasjon ved bruk av generiske eksempler. Førstnevnte anerkjennes ikke som gyldig i matematikk, verken på skolenivå eller vitenskapelig nivå. Jeg har også forsøkt å tydeliggjøre hva som skiller et generisk eksempel fra en generell logisk slutning: Begge argumenterer for en generell påstand, men det generiske eksempelet gjør det først og fremst gjennom et eksempel, istedenfor å kun bruke et generelt språk. Og det er nettopp her styrken til et generisk eksempel ligger: Ved å bruke et konkret eksempel til å få fram det som skjer, kan man både forklare og overbevise om en påstand på en måte som er tilgjengelig for elever på alle nivåer.

Noter

1 Reid og Vallejo Vargas tar fortrinnsvis for seg skriftlige argumenter, mens Kirsti og jeg ikke legger en slik begrensning for disse kriteriene.

Referanser

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216–235). Hodder & Stoughton.

Harel, G. & Sowder, L. (1996). Classifying processes of proving. I L. Puig, & A. Guitierrez (Red.), *Proceedings of the XXth Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 3, s. 59–66). Universitat de València.

Reid, D. & Vallejo Vargas, E. (2018). When Is a Generic Argument a Proof? I Stylianides, A. J. & Harel, G. (Red.), *Advances in mathematics education research on proof and proving* (s. 239–251). Springer International Publishing.

Rowland, T. (1998). Conviction, explanation and generic examples. I Olivier, A. & Newstead, K. (Red.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 4, s. 65–72). University of Stellenbosch.

Rø, K. & Arnesen, K. K. (2020). The opaque nature of generic examples: The structure of student teachers' arguments in multiplicative reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 58.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 1–12.

Stylianides, G. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 9–16.

Nytt nettsted: tangenten.no

1. januar 2022 lanserte Tangenten sitt nye nettsted, på den logiske nettadressen tangenten.no. Det nye nettsstedet skal være lettere å navigere på enn det forrige – både på stor og liten skjerm.

Selve skattkista på nettstedet er oversikter over alle tidligere nummer, med fri tilgang til nesten alt som har vært på trykk i bladet. Mye har endret seg på 32 år, men veldig mye av det som var inspirerende den gang, er fortsatt inspirerende. Vi har også hatt mange temanumre som det er spennende å dukke ned i, som temanummeret om Matematikk og demokrati (nr. 3/2005) eller om Jenter og matematikk (nr. 4/2000).

Nettstedet har naturligvis all informasjon som trengs for alle som vil bidra i Tangenten. Gjennom 32 år har Tangenten inneholdt artikler fra både lærere, lærerstudenter, lærerutdannere og forskere – og det vil videreføres. Forskningsartikler kan gi lærere ideer til undervisningen, men det kan naturligvis artikler med erfaringer fra klasserommet også. Tangentens styrke er at folk med engasjement for matematikkundervisning møtes i spaltene – og på nettstedet.

Johannessen

Primtall for overlevelse

Vi kjenner en del dyrearter med sykluser – lemen og 4 år er kanskje mest kjent. Når de opptrer i mengder, er det fest for predatorer som rovfugler og rev. Ryper og annet småkryp «gleder seg» siden lemen dekker matbehovet i løpet av den aktuelle sesongen. Det betyr at både rype- og rovfuglbestandene øker: Rypene får fred til å legge egg, og rovfuglungene slipper å sulte i hjel det året. Det dreier seg altså om synkronisering av bestander. En annen synkronisering er rovfugl som klekker sine egg samtidig eller litt etter småfuglene, eller at gjøken legger egg samtidig som småfuglene. Også maursverming og ørretvaking er synkronisert, noe mange fluefiskere vet å benytte seg av. Et annet eksempel er lakseelvene i Nord-Amerika der det samler seg store mengder ørn og bjørn på årstiden når laksen kommer for å gyte.

Sverdrup-Thygeson (2018) skriver i sin bok Insektenes planet om en spesiell sikade, 17-årssikaden, eller «Magicicada» på latin (s. 71–72). Det dreier seg om sangsikader i Sørstatene i USA som bruker 17 år (alternativt 13 år) på å utvikle seg til et forplantningsdyktig insekt. Disse, trolig jordas lengstlevende insekter, svermer samtidig – og med en vanvittig sterk lyd – 100 dB er oppgitt. Enorme mengder strømmer opp av jorda i løpet noen få uker. Det er snakk om millioner, kanskje milliarder. De representerer et formidabelt matfat for dyr og fugler. Mengdene er så enorme at litt svinn ikke betyr noe for bestanden. Sikadene forplanter seg, legger egg og dør. Larvene krabber ned i jorda og forblir der i 17 år, alternativt 13, inntil neste bryllupsfest.

Tor Hjalmar Johannessen
Pensjonist
tor.hjalmar.johannessen@gmail.com

Bilde fra Wikipedia. Størrelse: ca. 3 cm. Sikaden er ikke giftig, men kan bite. Best å la dem sverme i fred.

Predatorer har også årvisse sykluser som er tilpasset tider der matfatet er optimalt, som lemenår. Her kan primtallsykluser komme inn og lage problemer. Sikadene med 13- og 17-årssykluser er vanskelige å tilpasse seg for rovdyr og rovfugler. Dyr med 2-, 3-, 4- og 5-årssykluser

(fortsettes side 19)

Torkildsen

Bilfelger

Denne oppgaven bygger på en oppgave/aktivitet fra Tangenten nr. 4, 1992. I det nummeret hadde Stieg Mellin-Olsen, grunnlegger og redaktør av tidsskriftet, en oppgave som omhandlet bilenes hjulkapsler. Nå er hjulkapsler ikke lenger vanlig, mens bilfelgene derimot har gjennomgått en stor utvikling.

Oppgave

Her ser du bilde av noen bilfelger. Klarer du å tegne av disse bilfelgene? Prøv å tegne så nøyaktig som mulig ved å bruke passer.

Alle bilfelgene på bildet har flere symmetrier, det er både rotasjoner og speilinger. Bestem symmetriene til bilfelgene.

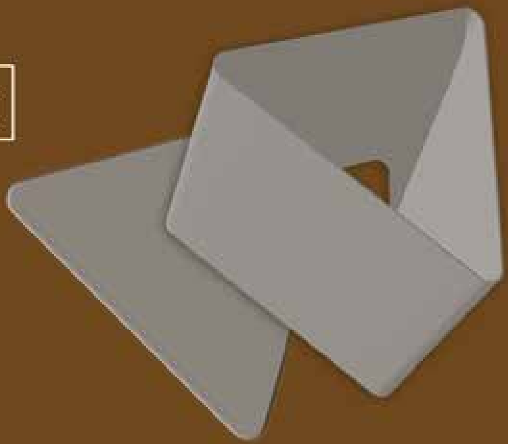
Se på bilfelgene på noen av bilene ute. Se om du kan finne noen bilfelger som har andre symmetrier enn de som du allerede har funnet. Tegn av mønstrene på de bilfelgene du mener er finest.

Du skal nå fortelle om hvordan de bilfelgene du fant, ser ut. Klarer du å gjøre dette uten å samtidig måtte peke på tegningen du har laget? Tenk deg for eksempel at du skal gjøre dette i telefonen (bare snakke, ikke sende bilde).

Ole Einar Torkildsen
Høgskulen i Volda
oet@hivolda.no

Referanse

Mellin-Olsen, S. (1992). Hjulkapsler. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 3*(4), 13.



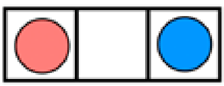
Naylor

Froskehopp og Frosketårn

Her er flere fasinerende puslespill som handler om frosker som hopper på vannliljeblader. Det første spillet fører til en veldig god algebraisk undersøkelse i klasserommet, og det andre er en fin oppgave for å øve på generalisering. Du trenger tellebrikker i forskjellige farger, blanke ark og en blyant.

Froskehopp

Nivå 1: Tegn 3 ruter (eller vannliljeblader) i en rekke og plasser en rød tellebrikke (eller en rød «frosk») på venstre side og en blå tellebrikke (eller blå «frosk») på høyre side (figur 1).

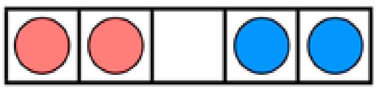


Figur 1: Nivå 1.

En frosk kan bevege seg på to forskjellige måter: ved å skyve en plass til en tom rute eller hoppe over en frosk hvis ruten på den andre siden er tom. Målet er å bytte plasser slik at den røde frosken er på ruten helt til høyre og den blå frosken er på den helt til venstre.

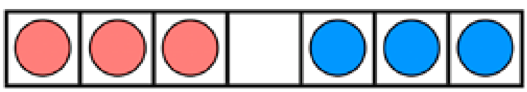
Kan du løse oppgaven? Det er ikke så vanskelig, skyv den røde til midten, den blå hopper over den røde og så skyv den røde igjen. Løst med 3 trekk!

Nivå 2: På det andre nivået har vi 5 ruter med 2 røde frosker, 2 blå og en tom rute i midten. Reglene og målet er det samme. Hvor mange trekk trenger du nå?



Figur 2: Nivå 2.

Nivå 3: Legg til 2 ruter for å få 7 ruter og start med 3 røde og 3 blå med en tom rute i midten. Kan du løse oppgaven nå? Hvor mange trekk trenger du?



Figur 3: Nivå 3.

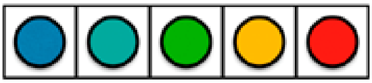
Mike Naylor
Matematikkbølgen
mike@matematikkbolgen.com

Her er noen spørsmål. Lek med problemet og se om du kan svare før du kikker på diskusjonen!

1. Finn en konsistent løsningsmetode.
2. Skriv hvordan du flytter. (Tips: tenk på rød/blå el. skyv/hopp.)
3. Finn ut antall flytt du trenger for å løse nivå 50.
4. Finn ut antall flytt du trenger for å løse nivå *n*.

Frosketårn

Oppgave 1 – Tårnet: Tegn 5 ruter som kan forestille vannliljeblader. Plasser en frosk på hvert vannliljeblad (figur 4). Disse froskene liker å stable seg i tårn! En frosk som er alene, kan hoppe en rute på toppen av en annen frosk eller frosketårn. Et tårn med frosker kan hoppe like så mange ruter som antall frosker i tårnet. En frosk eller et frosketårn kan ikke hoppe på en tom rute.

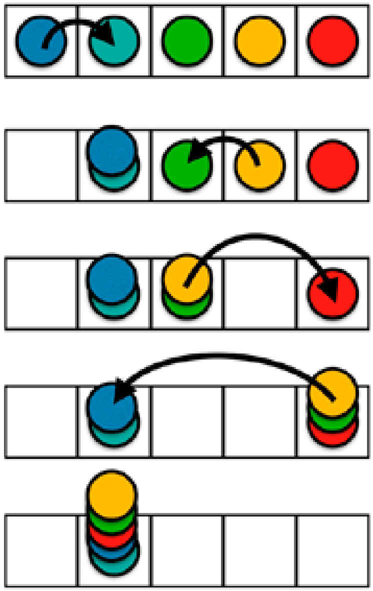


Figur 4

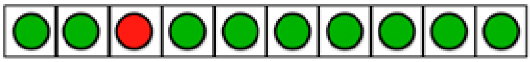
Kan du flytte froskene slik at alle frosker stables i et tårn? Det fins mange måte å gjøre det på. En slik måte er vist i figur 5.

Nå kan du forsøke å løse oppgaven hvis det er 6 vannliljer. Hva med 7 vannliljer? 8? Er det mulig for alle antall frosker/vannliljer?

Oppgave 2 – Dronningen: Froskedronningen kommer på besøk! Ingen får lov å hoppe på dronningen, hun må alltid være på toppen av et tårn som hun er på. Fyll flere ruter med grønne frosker og en rød froskedronning som i figur 6. Er det mulig å løse oppgaven nå, uavhengig av antall frosker og uavhengig av hvor dronningen begynner?

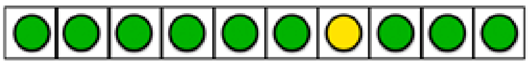


Figur 5



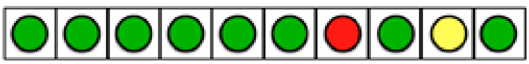
Figur 6: Frosker med dronningen.

Oppgave 3 – Den late frosken: En frosk er veldig lat og vil ikke hoppe i det hele tatt. Fyll rutene med frosker med samme farge bortsett fra en som er den late frosken. Er det mulig å løse oppgaven uavhengig av antall frosker og uavhengig av hvor den late frosken begynner?



Figur 7: En lat frosk.

Oppgave 4 – Dronningen og den late frosken: Prøv med en dronning og en lat frosk. Er det alltid mulig, uavhengig av hvor dronningen og den late frosken er? Utfordrende!



Figur 8: En dronning og en lat frosk.

Svarene fins i diskusjonen i neste nummer av Tangenten.

Kilhamn, Bråting, Rolandsson

Programmering i skolmatematiken?

I ett pågående forskningsprojekt tittar författarna närmare på programmering som innehåll i skolmatematiken sedan införandet i läroplanen [i Sverige, red. anm.] 2018. Här redovisar de hur lärare tolkat uppdraget och vilken roll programmeringen har i de matematiklektioner med programmering som lärarna planerat och genomfört.

Under de senaste fem åren har många länder infört programmering i skolan på ett eller annat sätt. Vissa länder har valt att inkludera programmering i ett nytt mer övergripande skolämne, till exempel i England infördes Computing och i Danmark tänker man eventuellt föra in Teknologiförståelse som ett nytt ämne. Andra länder har valt att stoppa in programmering i redan befintliga skolämnen. I den svenska läroplansrevideringen 2017 skrevs programmering in i ämnena teknik och matematik, i grundskolans samtliga årskurser. Från och med höstterminen 2018 förväntas alla lärare som undervisar i matematik även undervisa i programmering. Implementeringen gick fort och fortbildningsmöjligheterna var begränsade. Skolverket genomförde under första året en rad endagarskurser och flera högskolor har på uppdrag av Skolverket erbjudit högskolekurser om 7,5 poäng. Trots dessa insatser kom förändringen oväntat för många lärare och fortfarande råder en hel del osäkerhet kring vad som förväntas av programmeringsundervisning.

De didaktiska frågorna vad, när, hur och varför besvaras dåligt av skrivningen i grundskolans läroplan. *Vad* finns antytt i det centrala innehållet men är högst begränsat till hur stegvisa instruktioner och algoritmer kan skapas och användas, och uppges vara en del av det centrala innehållet i algebra. Som svar på frågan

Denne artikkelen har stått på trykk i Nämnaren, nr. 4, 2021. Gjengitt med tillatelse.

Cecilia Kilhamn
NCM
cecilia.kilhamn@ped.gu.se

Kajsa Bråting
Uppsala Universitet
kajsa.brating@edu.uu.se

Lennart Rolandsson
Uppsala Universitet
lennart.rolandsson@edu.uu.se

inPAC: *Integrating Programming in school mathematics – exploring the intersection of Algebraic and Computational thinking.* Det fyraåriga projektet (2019–2022) är finansierat av Vetenskapsrådet. Deltagare är Kajsa Bråting och Lennart Rolandsson från Uppsala universitet samt Cecilia Kilhamn från Göteborgs universitet.

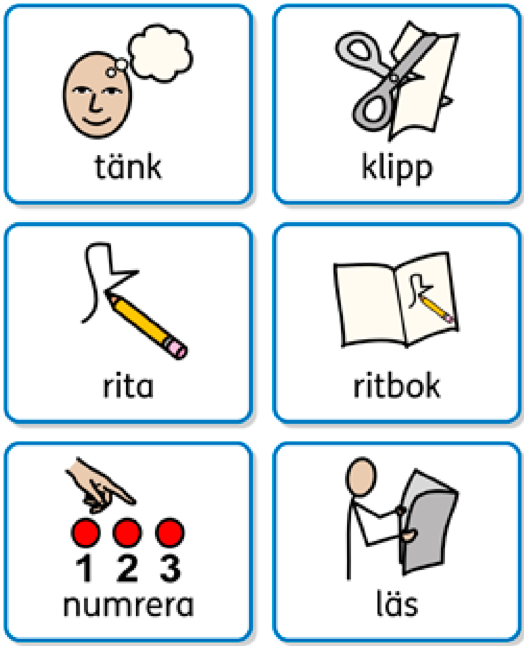
varför förs programmering ihop med digitala verktyg i största allmänhet som eleven ska lära sig att använda ”för att kunna undersöka problemställningar och matematiska begrepp, göra beräkningar och för att presentera och tolka data.” I gymnasiets ämnesplaner är programmering mer framskrivet som ett verktyg för problemlösning.

Ett forskningsprojekt

För att undersöka hur programmering som en del av matematikämnet formas i praktiken, och hur programmering eventuellt berikar eller försvårar den existerande matematikundervisningen i grundskolan, inleddes 2019 ett forskningsprojekt vid Uppsala universitet. På olika sätt försöker vi inom projektet att analysera såväl läromedel som hur lärare väljer att undervisa när de försöker uppfylla läroplanens direktiv att inkludera programmering i matematiken. Ett av projektets delstudier bygger på datamaterial från ett utvecklingsarbete kring programmering i ämnesundervisningen 2017–2020. Där genomförde grupper av lärare så kallade lesson studies om programmering inom den befintliga ämnesundervisningen. Det finns mer att läsa om detta utvecklingsarbete i slutrapporten *Programmering i skolan. Var, när, hur och varför*?

Vi har i detalj analyserat dokumentationen från 32 lesson studies som genomfördes inom ramen för ämnet matematik i grundskolan. Grupper om två till fem lärare planerade, genomförde, utvärderade och reviderade tillsammans en matematiklektion som innehöll programmering. De formulerade själva lektionens syfte och lärandemål och hade fria händer att välja programmeringsmiljö. Därefter dokumenterade respektive lärargrupp sin lektion. De flesta av de lärare som deltog i utvecklingsprojektet hade ingen tidigare erfarenhet av att undervisa programmering och kände sig relativt osäkra i den nya rollen.

I analysen ville vi dels ta reda på vilket matematikinnehåll som kopplades till programmering, dels förstå relationen mellan programmering och matematik i dessa lektioner. Det material vi tittade på bestod av:



- det beskrivna syftet och lärandemålet
- det matematikinnehåll vi kunde se i respektive lektion
- lärarnas utvärdering av lektionen avseende matematiklärande
- den programmeringsmiljö som användes.

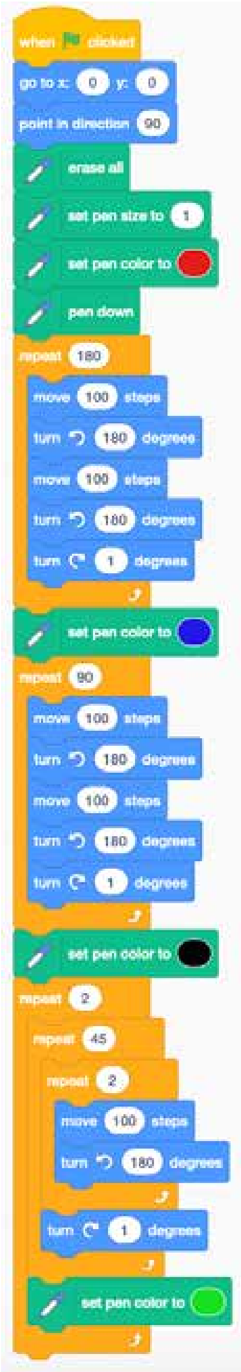
Programmerings roll i skolmatematiken

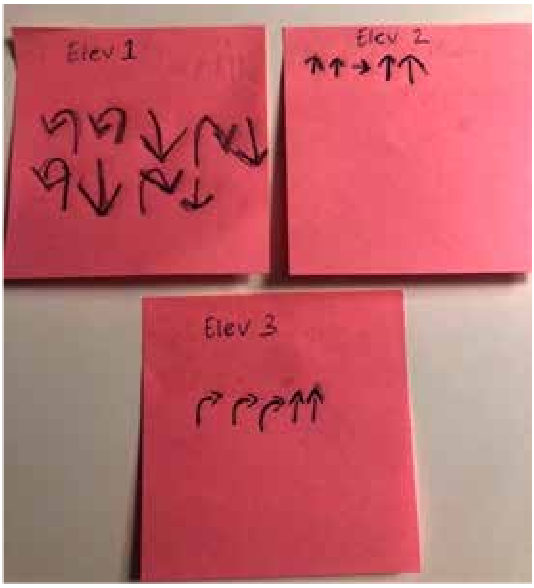
När vi kategoriserat materialet utifrån likheter och skillnader utkristalliserades fyra olika relationer mellan matematik och programmering, eller snarare fyra olika roller som programmeringen spelade under dessa matematiklektioner.

1. *Enbart programmering.* Lektioner i den här kategorin handlar enbart om programmering. Eleverna ska lära sig programmera men aktiviteten kopplas inte alls till matematik. Det kan till exempel handla om att programmera en robot att röra sig över golvet, att programmera en kompis eller

en grafisk figur i ett dansprogram, eller att skapa en presentation i Scratch. Det finns ingenting i dessa lektioner som markerar att de är matematiklektioner i traditionell mening. I flera av lektionerna får ett annat ämne utgöra kontext, exempelvis att programmera ett geografispel eller en saga. Programmeringen i sig betraktas som ett matematiskt innehåll.

2. *Matematik som kontext för programmering.* I den här kategorin utgör matematiken huvudsakligen en kontext för att lära sig programmera. Inget nytt matematiklärande åsyftas, men programmering kan utnyttjas för att repetera eller befästa matematikkunskaper. Eleverna får exempelvis göra en räknesaga eller ett spel som tränar multiplikation. I hälften av lektionerna i den här kategorin utgörs den matematiska kontexten av geometri. Typexempel är när eleverna ska programmera en blue-bot med hjälp av pilar så att den tar sig fram i ett rutsystem mellan olika geometriska figurer, eller skriva en kod





som får en sprajt att röra sig över skärmen i form av en kvadrat. Tid och energi ägnas huvudsakligen åt svårigheter med själva programmeringen och lektionen utvärderas i relation till hur väl eleverna lärt sig programmera, medan den geometri som ingår redan är känd för eleverna.

3. *Programmering som ett verktyg för att effektivisera beräkningar inom matematiken.* I den här kategorin har lektionerna ett tydligt matematikinnehåll med lärandemål i matematik. Ett program skapas och används som ett effektivt sätt att utföra beräkningar. Hälften av lektionerna i denna kategori handlar om statistik och sannolikhetslära, ett matematikområde som innehåller mycket datahantering och

Matematikinnehåll	Relationen mellan matematik och programmering				
	Enbart programmering	Matematik som kontext för programmering	Programmering som verktyg för att effektivisera beräkningar	Programmering som verktyg för att utforska matematik	
Enbart programmering	10				10
Taluppfattning och tals användning		7	1		8
Geometri		5	1	2	8
Statistik och sannolikhet			3		3
Algebra					0
Problemlösning			1		1
Samband och förändring				2	2
	10	12	6	4	

Tabell 1: Fördelningen av de 32 lektioner som planerats i form av lesson studies med avseende på matematikinnehåll respektive relationen mellan matematik och programmering.

beräkningar. Det kan exempelvis handla om att simulera 1 000 tärningskast eller beräkna medelvärden på stora datamängder.

4. *Programmering som ett verktyg för att utforska matematik*. I den sista kategorin används programmering för att utforska matematiska begrepp eller samband. Programmeringen tillför nya sätt att närma sig matematiken och uppges på så sätt kunna fördjupa den matematiska förståelsen på en nivå som är relevant för den angivna årskursen. Exempelvis fick eleverna under en lektion i årskurs 4 utforska begreppen vinkel och rotation samt fundera på sambandet mellan vinkelns gradtal och sektorns andel av en cirkels area. I kombination med reflekterande frågor gav programmeringen möjligheter som motsvarande arbete med papper och penna inte hade gjort genom att programmet kunde testas och modifieras med olika värden på de ingående variablerna.

Varje lektion analyserades med avseende på den roll programmering spelar och det huvudsakliga matematikinnehållet som var synligt. Tabell 1 visar hur rollerna respektive matematikinnehållet fördelar sig över lektionerna.

Problemlösning

Det kan verka förvånande att inte problemlösning förekom i fler lektioner. När vi läste lärarnas dokumentation fanns problemlösning ofta angivet i syfte eller lärandemål, men när vi sedan granskade själva aktiviteten kunde vi inte hitta något matematiskt problem som skulle lösas. Därför klassificerade vi inte matematikinnehållet som problemlösning. Problemen var istället ofta formulerade utifrån programmeringen: ”Hur ska du programmera det här?”, medan matematiken som skulle ingå i programmet var oproblematisk.

Algebra

Ännu mer förvånande var att ingen lektion klassificerades som en lektion i algebra, trots att programmering i läroplanen har införts som en del av det centrala innehållet i algebra. Under några lektioner behandlades variabler, vilket ofta ledde till en osäkerhet hos både elever och lärare eftersom innebörden av variabler skiljer sig inom programmering och algebra. I programmering kan en variabel exempelvis representera en färg eller en form, det måste inte alltid vara ett tal. Dessutom måste variabeln tilldelas ett värde för att programmet ska kunna köras. I algebra däremot representerar variabeln alltid ett tal (åtminstone i skolalgebra) och en viktig poäng med den symboliska algebran är att vi kan utföra manipulationer av uttryck utan att känna till variabelns värde. Att kontrastera de olika betydelserna av variabler inom programmering och matematik skulle kunna berika elevernas begreppsliga förståelse för variabler, men eftersom algebra inte var i fokus under dessa lektioner tillvaratogs inte den möjligheten.

I en av våra tidigare genomförda läromedelsanalyser var det vanligare med programmeringsuppgifter i algebraavsnitten för de tidigare årskurserna. Detta berodde på att en vanligt förekommande uppgift var att arbeta med upprepade mönster, vilket är en del av det centrala innehållet i algebra för tidiga skolår. Dessa uppgifter såg oftast likadana ut i tidigare upplagor av läroboken utan att de då kallades programmering och mer algebraiskt intressanta mönster än upprepningar hittade vi inte i vår läromedelsanalys.

Matematiska begrepp

Genom införandet av programmering i matematikämnet har Skolverket gjort ett val som påverkar synen på matematik. Många av lärargrupperna citerar följande ur läroplanens syftesformulering:

> Genom undervisningen ska eleverna ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och metoder och deras användbarhet.

När detta syfte relateras till en lektion som helt ägnas åt programmeringsbegrepp och kodning utan att andra grundläggande matematisk begrepp och metoder tas upp kan man misstänka att lärarna uppfattar begrepp från programmeringen som matematiska. Detta resultat skiljer sig från resultatet av en tidigare intervjustudie som genomförts inom projektet, där lärarna sällan uppfattade programmering i sig som en matematisk aktivitet.

Implikationer för framtiden

Just nu befinner sig programmering i en kritisk fas i skolmatematiken där den söker sina former och sitt innehåll. Våra resultat visar att programmeringens roll fortfarande är otydlig och att lärare tolkar kursplanens uppdrag på olika sätt. Med all säkerhet kommer programmering att få en allt större betydelse i samhället och har därför en given plats i skolan. Men det finns fortfarande frågor för lärare, rektorer och skolmyndighet att fundera över.

När lektioner i programmering saknar koppling till traditionell matematik kan det diskuteras om de bör förläggas till just matematikämnet. Kanske är Danmarks modell med ämnet teknologiförståelse en väg som bättre skulle kunna fokusera datalogiskt tänkande utan att alla övningar behöver ramas in som matematiskt relevanta? I matematik skulle programmering i så fall kunna få en mer tydlig roll som ett verktyg bland många andra.

Med tanke på vilket matematikinnehåll lärarna i den här studien ansett som lämpligt för arbete med programmering, där ingen lektion klassificerades som en lektion i algebra, kan det också diskuteras om programmeringen verkligen ska anses utgöra en del av det centrala innehållet i just algebra. Det är dessutom helt unikt för Sverige att göra denna koppling mellan programmering och algebra. I övriga länder kopplas programmering oftare till sannolikhetssimulering, datahantering och geometri, vilket även många av lärarna i våra studier gör. I gymnasiets ämnesplaner skrivs programmering fram som ett verktyg för problemlösning utan explicit koppling till algebra.

En annan aspekt av programmering som framgår både i den studie som vi berättat om här och i en delstudie där vi intervjuat lärare är att det finns delade meningar om vad som räknas som programmering. Vissa lärare menar att de undervisar programmering när de använder andra digitala verktyg såsom Excel, Geogebra eller Desmos, medan andra bygger sin uppfattning på en tradition där programmering likställs med kodning. Eftersom såväl kodning och datalogiskt tänkande som andra typer av digitala verktyg har sin plats i skolan är det viktigt att vi skapar ett gemensamt språk för att prata om vad undervisningen ska innehålla. Det vore synd om införandet av programmering i skolmatematiken skulle innebära att användning av dynamiska digitala verktyg som är anpassade för just matematik nedprioriteras till förmån för kodning med fokus på stegvisa instruktioner och algoritmer på grund av att endast de senare nämns explicit i kursplanens centrala innehåll.

Det är vår förhoppning att programmering i allt större utsträckning kommer att användas för att berika matematiken genom sin beräkningskraft och snabbhet samtidigt som andra digitala verktyg utnyttjas för att visualisera matematiska begrepp och samband.

Litteratur

Bråting, K. & Kilhamn, C. (2021). The integration of programming in Swedish school mathematics: Investigating elementary mathematics textbooks. *Scandinavian Journal of Educational Research.* First online.

Bråting, K., Kilhamn, C. & Rolandsson, L. (Red.). (2021). *Programmering i skolmatematiken – möjligheter och utmaningar*. Studentlitteratur.

Jahnke, A. (Red.). (2020). *Programmering i skolan. Var, när, hur och varför*? Slutrapport från FoU-programmet Programmering i ämnesundervisningen. Ifous rapportserie 2020:5.

Kilhamn, C., Rolandsson, L. & Bråting, K. (2021). Programmering i svensk skolmatematik. *LUMAT – International Journal on Math, Science and Technology Education, 9*(1), 283–312.

(fortsatt fra side 10)

klarer ikke å forutse 13- eller 17-årssykluser. Så det er ingen sikadespisende dyre- eller fugleart som kan etablere store mengder av sin art når sikadesvermingene oppstår. Dette er jo en spesiell effekt av evolusjonsprinsippet «survival of the fittest», overlevelse pga. primtallsverming. Hverken 13 eller 17 lar seg som kjent faktorisere i mindre tall som eventuelle predatorer kunne synkronisert seg med og «truffet» når sikadene svermer.

Hva som trigger svermingen, er blant annet telling av år og antall vårdager over en viss temperatur i jorda hvor larvene lever (Sverdrup-Thygeson, 2018). Telling er viktig – men det er jo også primtallene; for noen hver.

Referanse

Sverdrup-Thygeson, A. (2018). *Insektenes planet*. J. M. Stenersens forlag.

Periodical cicadas. (2021). I *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/wiki/Periodical_cicadas

Mæland, Myklebust

Forventning, forvirring og forundring

Innleiing

I Kunnskapsløftet 2020 (LK20) er programmering gitt markert merksemd i læreplanen for matematikk. Valet om å integrera programmering i matematikkfaget er eit val Noreg deler med fleire land, mellom anna Danmark, Sverige og Finland (Balanskat & Engelhardt, 2015; Bocconi et al., 2018). Det er Utdanningsdirektoratet (Udir) som er ansvarleg for utvikling og ivaretaking av læreplanverket i Noreg. Me er grunnskulelærarstudentar med fordjuping i matematikk, og gjennom våre praksisperiodar har me fått inntrykk av at mange lærarar er forvirra og forundra over at programmering no skal vera del av matematikkfaget, og at dei skal undervisa i dette. Basert på desse inntrykka og vår forståing av kva programmering er, ville me i ei eksamensoppgåve i matematikkdidaktikk i vårt 3. studieår sjå nærare på kva som ser ut til å vera Udirs forventning til bruk av programmering i matematikk for 5.–10. årstrinn i grunnskulen, og med det sjå kva som er forventa av læraren og elevane på mellomtrinnet og ungdomstrinnet. I dette arbeidet valde me å berre nytta informasjon som er opent tilgjengeleg på Udirs nettsider, gjennom at dei enten er utarbeidde av Udir, eller at Udir har lenka dei opp til sine nettsider. Denne artikkelen er basert på innhaldet i eksamensoppgåva.

Magnus Drægni Mæland
Student
magnusdreagland@gmail.com

Magnus Myklebust
Student
magnus.myklebust0804@gmail.com

Programmering, algoritmisk tenking og algoritmisk tankegang

Når ein går inn på Udirs sider, vil ein i dag ikkje finna noko dokument der ein finn ein eigen definisjon av programmering, men tidlegare omtalte Udir dette slik i «Veiledning til programmering valgfag» frå 2016:

«Programmering er å lage et program for datamaskinen. Begrepet programmering kan også omfatte prosessen med å strukturere oppgaven som skal løses, og dele den opp i mindre biter som til slutt kan løses ved hjelp av de funksjonene som finnes i et programmeringsspråk. Programmering omfatter også arbeidet med å teste programmet, finne feil og rette dem.» (Udir, 2016c)

Denne definisjonen peikar mot programmering som ein problemløysingsprosess i tråd med Polyas (1945) firestegsprosess, som inneber å analysera problemet (steg 1), leggja ein plan for løysing (her: utforma eit dataprogram) (steg 2), gjennomføra planen (her: skriva programmet inn på ei datamaskin, deretter setje programmet i funksjon og gjennomføra eventuell feilsøking) (steg 3), og vurdera resultatet (steg 4). Ifølgje Chevalier et al. (2020) inneber dette meir detaljerte krav til innhaldet i steg 2 og steg 3 når programmering er del av problemløysingsarbeidet.

I læreplan i matematikk for 1.–10. trinn vert omgrepet «algoritmisk tenkning» nytta éin gong, under omtalen av kjerneelementet Utforsking og problemløysing:

> Utforsking i matematikk handler om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse. Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene. Problemløsing i matematikk handler om at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før. Algoritmisk tenkning er viktig i prosessen med å utvikle strategier og framgangsmåter for å løse problemer og innebærer å bryte ned et problem i delproblemer som kan løses systematisk. Videre innebærer det å vurdere om delproblemene best kan løses med eller uten digitale verktøy.

Det står altså ikkje eksplisitt i læreplanen i matematikk for 1.–10. trinn kva som ligg i omgrepet algoritmisk tenking, slik at det difor er naudsynt å gå til eigne kjelder hjå Udir for å få oversikt over dette. I artikkelen «Algoritmisk tenkning» (Udir, 2019a) definerer Udir omgrepet algoritmisk tenking eksplisitt som ein problemløysingsmetode, gjennom at ein nærmar seg problem på ein systematisk måte, ved formulering og gjennomføring av forslag til moglege løysingar. Dette er ei omsetjing frå det engelske omgrepet computational thinking, som er ei overordna tilnærming som omfattar fleire kognitive komponentar, til dømes abstrahering, algoritmekunnskap, logikk og generalisering. Omsetjinga er ikkje uproblematisk, både fordi ein omtaler algoritmisk tenking som ein metode og ikkje som ei overordna tilnærming, og fordi det vert språkleg forvirrande. Gjøvik og Torkildsen (2019) gjer eit poeng ut av dette siste, gjennom at algoritmisk tenking og algoritmisk tankegang på norsk lett kan bli gitt eit likt innhald, og då i form av at algoritmisk tenking får eit like snevert innhald som det ein algoritmisk tankegang har.

Det vert då diverre kritikkverdig at me i artikkelen «Om algoritmisk tenking og programmering» (Udir, 2019b) finn eksplisitt at «Algoritmisk tankegang er en problemløsningsmetode som dreier seg om å tilnærme seg problemer på en systematisk måte og kunne foreslå løsninger som kan bruke datamaskiner til å løse (deler av) dem». Dette er meir eller mindre same ordlyd som Udir nyttar om algoritmisk tenking i artikkelen «Algoritmisk tenkning» (Udir, 2019a), og dette hjelper ikkje lærarar eller lærarstudentar som forsøkjer å orientera seg i eit landskap av nye og reviderte omgrep. Denne blandinga av omgrep og innhald fører altså til at algoritmisk tankegang som ein problemløysingsmetode vert sett eksplisitt saman med bruk av datamaskiner, og det trur me ikkje er det Udir har tenkt. Algoritmisk tankegang er etter vår oppfatning ein strukturerande framgangsmåte for å utvikla og operasjonalisera ein algoritme som løyser ei oppgåve. Han kjem altså til sin rett som del av den overordna tilnærminga til eit problem som omgrepet algoritmisk tenking er definert som, etter at ein har lagt ein plan for å løyse det aktuelle problemet, og er difor verdifull fyrst når ein har analysert og utforska problemet og valt ein strategi for å løysa problemet som inneber å nytta ein eller fleire algoritmar, slik Chevalier mfl. (2020) og Udir sjølv (Udir, 2019a) har poengtert. Vidare i teksten vil me ut frå vår forståing av denne tydelege forskjellen mellom algoritmisk tenking og algoritmisk tankegang sjå på korleis Udir koplar kompetansemål, kjerneelement og grunnleggjande ferdigheiter til programmering i matematikkfaget, og kva desse koplingane fører med seg.

Trinn	Kompetansemål	Tolking
5.	«lage og programmere algoritmar med bruk av variablar, vilkår og lykkjer»	Elevane skal kunne laga algoritmar, noko som inneber å utvikla framgangsmåtar for å løysa oppgåver. Dei skal også programmera algoritmar. Etter Udirs eigen definisjon vil det seia at elevane skal kunne laga eit program for ei datamaskin, og dela ei oppgåve inn i delar som ein kan løysa. Elevane skal bruka variablar, vilkår og lykkjer. Ein variabel er ein bokstav eller eit ord, som ein kan tilføra ein spesifikk verdi. Vilkår er ein instruks som fortel programmet at dersom vilkåret er sant/usant, skal det gjerest ulike handlingar. Ei lykkje indikerer at eit program skal kunna gjera ei spesifikk handling meir enn berre éin gong. Ifølgje kompetansemålet vil ein altså at elevane skal kunna laga ein framgangsmåte for å løysa ei oppgåve, med bruk av ulike verdiar, vilkår og kor mange gonger ei handling som er del av denne framgangsmåten, skal gjerast.
6.	«bruke variablar, lykkjer, vilkår og funksjonar i programmering til å utforske geometriske figurar og mønster»	På dette trinnet vil ein at elevane, i tillegg til å kunne nytte variablar, vilkår og lykkjer, skal ta i bruk funksjonar. Funksjonar definerer Udir som eit sett av instruksjonar for å løyse ei oppgåve (Udir, 2016c). Elevane skal kunna nytta slike for å utforska innanfor geometri. Me tolkar dette til at Udir her ser omgrepet funksjonar som eit sett av ferdige instruksjonar eller strukturar som ligg i eit programmeringsspråk.
7.	«bruke programmering til å utforske data i tabellar og datasett»	Data betyr i forbindelse med databehandling ein fysisk representasjon av opplysningar, og datasett er ei samling av data, til dømes i form av ein tabell. Elevane skal altså nytta programmering for å utforska data som er samla, og i dette mest truleg nytta sin kunnskap om variablar, vilkår, lykkjer og funksjonar.
8.	«utforske korleis algoritmar kan skapast, testast og forbetrast ved hjelp av programmering»	Her er det naudsynt at ein har klart for seg kva algoritme og programmering tyder, og korleis dei vert kopla saman gjennom algoritmisk tankegang. Kompetansemålet seier at elevane skal kunna laga ein framgangsmåte, testa og forbetra han ved hjelp av programmering, eller å dela det opp i mindre delar som dei kan løyse, ved hjelp av det dei har lært av programmering.
9.	«simulere utfall i tilfeldige forsøk og berekne sannsynet for at noko skal inntreffe, ved å bruke programmering»	Ei simulering vil seia at ein etterliknar ein situasjon, ein prosess eller eit hendingsforløp. Elevane skal altså kunna etterlikna ulike situasjonar, og kunna rekna ut sannsyn for at noko skal inntreffe, ved hjelp av det dei har lært av programmering.
10.	«utforske matematiske eigenskapar og samanhengar ved å bruke programmering»	Matematiske eigenskapar peikar mot det som er typisk for matematikk i forhold til andre fag, og dette vert då matematikk som ein nyttar spesielt i matematikkfaget. Ein skal utforska dette og samanhengane deira ved å bruka programmering.

Tabell 1: Kompetansemål knytt til programmering på mellomtrinnet og ungdomstrinnet.

Årstrinn	Kjerneelement	Grunnleggjande ferdigheiter
5.	«utforsking og problemløysing» og «abstraksjon og generalisering»	«digitale ferdigheiter» og «munnlege ferdigheiter»
6.	«utforsking og problemløysing» og «abstraksjon og generalisering»	«digitale ferdigheiter» og «munnlege ferdigheiter»
7.	«utforsking og problemløysing»	«digitale ferdigheiter»
8.	«utforsking og problemløysing»	«digitale ferdigheiter» og «munnlege ferdigheiter»
9.	«utforsking og problemløysing»	«digitale ferdigheiter» og «å kunne rekne»
10.	«utforsking og problemløysing»	«digitale ferdigheiter»

Tabell 2: Kjerneelement og grunnleggjande ferdigheiter som Udir koplar til kompetansemåla som omhandlar programmering på mellomtrinnet og ungdomstrinnet.

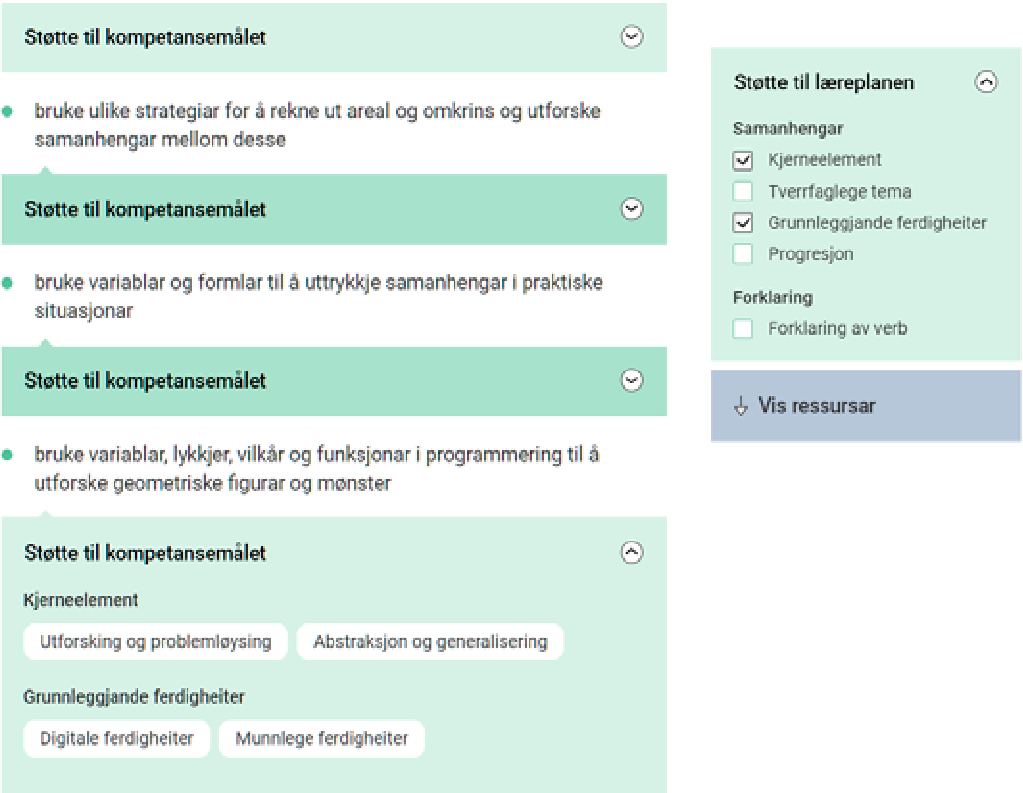
Kompetansemål, kjerneelement og grunnleggjande ferdigheiter

Kompetansemåla for 5.–10. trinn i matematikk inneheld fleire punkt, men det siste punktet knytt til kvart trinn er det som eksplisitt omhandlar programmering og skildringa av det. Kompetansemåla nyttar etter vår oppfatning ein del omgrep som kan vera vanskelege å forstå for den som ikkje er kjend med programmering, og har noko sprikande prioriteringar. I tabell 1 finn ein kvart av desse kompetansemåla, med vår tolking av innhald og forventning knytt til kvart av dei.

I tabell 2 har me samla kva kjerneelement og grunnleggjande ferdigheiter Udir koplar til kompetansemåla som er omtalte i tabell 1. Dette kan ein finna ved å nytta avkryssingsboksen på nettsida til kvart av desse kompetansemåla hjå Udir (sjå figur 1 for døme).

Hjå Udir kan ein lesa om kva kjerneelement som vert kopla til matematikkfaget. Det er seks kjerneelement, men det er berre to av dei som er kopla til kompetansemåla der programmering vert utheva: utforsking og problemløysing og abstraksjon og generalisering. Tabell 2 viser at det desidert mest framheva kjerneelementet knytt til kompetansemåla knytte til bruk av programmering er utforsking og problemløysing, medan i 5. trinn og 6. trinn så nyttar ein abstraksjon og generalisering i tillegg. Abstraksjon handlar om å formalisera matematisk språk, tankar og strategiar, å gjera det konkrete abstrakt, medan generalisering omhandlar å oppdaga samanhengar og strukturar utan å verta presentert for ei løysing, og å sjølv kunna formalisera gjennom algebra og føremålsretta representasjon. Når det gjeld kjernelementet utforsking og problemløysing, er det altså naudsynt å ha ei forståing av omgrepet algoritmisk tenking som samsvarar med det Udir legg fram i artikkelen «Om algoritmisk tenkning» (Udir 2019a), og ikkje forveksla dette med språkforvirringa knytt til algoritmisk tankegang som kjem fram gjennom artikkelen «Om algoritmisk tenking og programmering» (Udir, 2019b).

Når det gjeld grunnleggjande ferdigheiter, viser tabell 2 at det er tydeleg at digitale ferdigheiter er den desidert mest framheva ferdigheita. Digitale ferdigheiter vert skildra som å kunna «innhente og behandle informasjon, være kreativ og skapende med digitale ressurser, og å kommunisere og samhandle med andre i digitale omgivelser» (Udir, 2016a). Omgrepet inneber også andre vinklingar, til dømes å kunna nytta digitale ferdigheiter til å løysa praktiske problem og å nytta digitale ressursar føremålstenleg. I læreplanen for matematikk inneber digitale ferdigheiter «å kunne bruke grafteiknar, rekneark, CAS, dynamisk geo-



Figur 1: Skjermdump av Udirs si kopling av kjerneelement og grunnleggjande ferdigheiter til kompetansemål knytte til programmering i matematikkfaget på 6. trinn.

metriprogram og programmering til å utforske og løyse matematiske problem». Vidare står det og at «å bruke og velje formålstenlege digitale verktøy som hjelpemiddel for å utforske, løyse og presentere matematiske problem» er eit sentralt tema. Her kjem altså programmering direkte inn under ei grunnleggjande ferdigheit.

Munnlege ferdigheiter vert òg av Udir knytt mykje til bruk av programmering (sjå tabell 2). Om munnlege ferdigheiter som grunnleggjande ferdigheit kan ein lesa at «Muntlige ferdigheter innebærer å skape mening gjennom å lytte, tale og samtale» (Udir, 2016b). Dette inneber ikkje berre å vera munnleg sjølv, men òg å kommunisera fagleg og å kunna ta til seg verbal informasjon, både gjennom diskusjon og refleksjon. Dette inneber munnleg og korrekt bruk av fagterminologi, refleksjon og kritikk av andre sitt munnlege arbeid, samarbeid, og å vurdera komplekse tekstar på ein kritisk måte (Udir, 2016b). Munnlege ferdigheiter i matematikk handlar i større grad om å spesifikt skapa meining og samtale rundt matematikk, drøfta og uttrykka idear, nytta matematisk terminologi munnleg og utvikla samtaler rundt matematikk frå kvardagsspråk til presist matematisk språk. Udirs kopling til bruk av programmering finn me her å vera noko upresis, og ho ser ut til å vera mest knytt til å utforska til dømes program ein skal programmera i, og mindre til det matematiske innhaldet i det ein skal arbeida med.

Programmering kunne etter vår oppfatning òg omfatta fleire andre kjerneelement, og me stussar litt på kvifor Udirs kopling av kjerneelement og grunnleggjande ferdigheiter til kompetansemål ikkje i større grad inkluderer rekning som grunnleggjande ferdigheit. Rekning som grunnleggjande ferdigheit «vil seie å bruke matematiske representasjonar, omgrep og framgangsmåtar til å gjere utrekningar og vurdere om løysingar er gyldige», og «å analysere og løyse eit spekter av stadig meir komplekse problem med effektive og formålstenlege omgrep, symbol, metodar og strategiar». Udir skriv altså ikkje noko direkte om å nytta programmering gjennom rekning som grunnleggjande ferdigheit, og det undrar oss litt.

Til slutt skal ein kunna nytta programmering til å utforska ...

Nokre av utfordringane som det er uvisse om innanfor forsking på undervisning i programmering knytt til matematikk i skulen, er å finna ein stad å starta, kva ein skal prioritera, og korleis ein skal setja i gang med undervisning knytt til programmering (Holo, Kveim, Lysne, Taraldsen & Haara, til fagfellevurdering). Støttedokumenta og nettressursane frå Udir bidreg etter vår meining ikkje til å avklara slike utfordringar på ein tydeleg nok måte. Kompetansemåla knytte til programmering i LK20 meiner me spriker ein del i prioriteringane. Det positive med dette er at dei er knytte til fleire matematiske emne, og dette gjer nok at elevane kan få mykje erfaring med å arbeida med digitale verktøy. Dette siste ser me som den viktigaste bodskapen frå Udir med desse kompetansemåla. Det er viktig at elevane får arbeide med programmering i skulen, slik at dei får erfaring med både teoretisk og praktisk digital kompetanse.

Det konkrete knytt til programmering og matematikk som Udir vil ha inn i undervisninga, finn me meir vanskeleg å fastslå. Lærarar kan tolka kompetansemåla ganske fritt. At kompetansemåla er opne, gjer at ein kan nytta dei innanfor mange ulike tema. Dette kan medføra at lærarar som ikkje har kompetanse og erfaring med programmering, kan kjenna at det vert vanskeleg å fylla desse kompetansemåla med meiningsfylt innhald. Kompetansemålet knytt til 10. trinn kan ein sjå på som det elevane skal oppnå i programmering før dei går ut av grunnskulen. Kompetansemålet legg vekt på at elevane skal kunna utforska sjølv, og utforsking er noko me ser at vert vektlagt sterkt i LK20. Utforsking ved hjelp av programmering stiller store krav til elevane sine kunnskapar, både om matematikk og programmering. Dette er altså «målet» for programmering i matematikkfaget i grunnskulen, men samstundes er det ennå vanskeleg å finne råd hjå Udir om konkrete måtar å arbeida på for å oppfylla ei slik forventning. Udir ser det truleg som sjølvsagt at elevane har jobba med alle dei andre kompetansemåla i læreplanen for matematikk, og at lærarane på ein skule saman utviklar ei eiga tolking av det siste kompetansemålet ut ifrå dette. Korleis ulike skular sikrar denne framdrifta for elevane og informasjonsflyten mellom lærarane som underviser på ulike trinn, skal ikkje me meina noko om i denne artikkelen. Me konstaterer likevel at Udir legg opp til at elevane ved fullført 10. trinn har teoretisk og praktisk kompetanse knytt til programmering som gjer at dei kan utforska sjølv ved hjelp av programmering. Dette kjem då mest truleg til å visa att i forventning om at dette vert del av framtidig eksamensinnhald.

Avslutning

Det er vår oppfatning at synleggjeringa av Udirs forventning til programmering i matematikkfaget på 5.–10. trinn er uklar for oss som skal undervisa i skulen. Det som derimot er tydeleg, er at dei grunnleggjande ferdigheitene digitale ferdigheiter og munnlege ferdigheiter og å nytta algoritmisk tenking skal ha vesentleg fokus i samband med programmering i skulen. Det same gjeld det matematiske kjerneelementet utforsking og problemløysing. Det er då utfordrande at Udir blandar saman algoritmisk tenking og algoritmisk tankegang, at algoritmisk tenking kan forståast som ein problemløysingsmetode heller enn som ei overordna tilnærming, og at programmering stort sett berre vert knytt til to kjerneelement og to grunnleggjande ferdigheiter i matematikkfaget. Dette meiner me kan bidra til forvirring og forundring hjå mange lærarar, inkludert oss sjølv. Udir har lagt ambisjonane høgt for integrering av programmering i matematikkfaget. Det står att å sjå i kva grad dette fører til at elevane vert kompetente til å ta i bruk programmering til å utforska i matematikkfaget i skulen.

Referansar

Balanskat, A., & Engelhardt, K. (2015). *Computing our future: Computer programming and coding – Priorities, school curricula and initiatives across Europe*. European Schoolnet.

Bocconi, S., Chioccariello, A., & Earp, J. (2018). *The Nordic Approach to Introducing Computational Thinking and Programming in Compulsory Education*. Rapport forberedt av Nordic@BETT2018 Steering Group.

Chevalier, M., Giang, C., Piatti, A., & Mondada, F. (2020). Fostering computational thinking through educational robotics: A model for creative computational problem solving. *International Journal of STEM Education, 7*, Artikkel 39.

Gjøvik, Ø. & Torkildsen, H. A. (2019). Algoritmisk tenkning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 30*(3), 31–37.

Holo, O-E., Kveim, E. N., Lysne, M. S., Taraldsen, L. H. & Haara, F. O. (2021). A review of research on teaching of computer programming in primary school mathematics: Moving towards sustainable classroom action. [Sendt til utgjevar, under vurdering].

Polya, G. (1957). *How to solve it?* (2. utg.). Princeton University Press.

Utdanningsdirektoratet (2016a). *Digitale ferdigheter som grunnleggende ferdighet*. Henta frå Utdanningsdirektoratet: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/grunnleggende-ferdigheter/digitale-ferdigheter-rammeverk/

Utdanningsdirektoratet (2016b). *Muntlige ferdigheter*. Henta frå Utdanningsdirektoratet: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/grunnleggende-ferdigheter/muntlige-ferdigheter/

Utdanningsdirektoratet (2016c). *Veiledning til programmering valgfag*. Henta frå Utdanningsdirektoratet: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/veiledning-lp/valgfag-programmering/ordliste/

Utdanningsdirektoratet (2019a). *Algoritmisk tenkning*. Henta frå Utdanningsdirektoratet: https://www.udir.no/kvalitet-og-kompetanse/profesjonsfaglig-digital-kompetanse/algoritmisk-tenkning/

Utdanningsdirektoratet (2019b). *Om algoritmisk tenking og programmering*. Henta frå Utdanningsdirektoratet: https://www.udir.no/kvalitet-og-kompetanse/nasjonale-satsinger/den-teknologiske-skolesekken/om-algoritmisk-tenking-og-programmering/

Utdanningsdirektoratet (2020). *Grunnleggende ferdigheter*. Henta frå Utdanningsdirektoratet: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/grunnleggende-ferdigheter/

Sørensen, Vedvik, Fadum, Tellefsen

Programmering og samarbeidslæring

Bakgrunn og formål

Etter Fagfornyelsen 2020 skal programmering innlemmes i matematikkfaget i den norske skolen. Det er mange ulike meninger om hvordan programmeringsfaget og matematikkfaget kan forsterke hverandre – se for eksempel Stenseth et al. (2019), Kravik (2020), Flø (2021) og Maugesten et al. (2021). Programmeringen kan tilby variasjon i matematikkundervisning med rom for å skape situasjoner der elever argumenterer med matematikk, utforsker, lager algoritmer og løser utfordringer systematisk. Men samtidig kan dette skape nye utfordringer for lærere og elever.

Trine Sørensen
Risenga ungdomsskole
Trine.Sorensen@asker.kommune.no

Dag Jarle Vedvik
Risenga ungdomsskole
Dag.Jarle.Vedvik@asker.kommune.no

Aleksandra Hara Fadum
OsloMet – storbyuniversitetet
aleksandra.hara.fadum@oslomet.no

Helga Kufaas Tellefsen
OsloMet – storbyuniversitetet
HelgaKufaas.Tellefsen@oslomet.no

Teaching and Transfer Effects of 21st Century Skills – Collaborative Problem Solving in Digital Environments (TEACH21st) er et forskningsprosjekt som er støttet av Norges forskningsråd under FINNUT-programmet, og gjennomføres ved Universitetet i Sørøst-Norge i samarbeid med nasjonale og internasjonale partnere. TEACH21st-prosjektet har som mål å undersøke hvordan samarbeidslæring kan inkorporeres i undervisningen i ulike fag, og i hvilken grad det bidrar til kompetanseutvikling i undervisningsfaget og problemløsning i samarbeid.

Stenseth et al. (2019) beskriver utfordringer som matematikklærere kan møte når programmering skal integreres i matematikkfaget. De refererer blant annet til Bray and Tangney (2017), som peker på at programmering som oftest brukes i klasserommet som et redskap for å løse spesifikke matematikkoppgaver, i stedet for at det fokuseres på arbeidsmåter og didaktikk i skjæringspunktet mellom matematikk og programmering. Læreren vil her fungere mer som en guide, og ha en viktig rolle når det gjelder elevenes samarbeid.

Maugesten et al. (2021) presenterte en måte å tilnærme seg programmering i matematikkfaget på. De beskriver en arbeidsmåte Use-Modify-Create som kan bidra til å koble programmering tettere til det matematiske innholdet. Blant annet viser de to eksempler med programmene Scratch og Python ved en aktivitet knyttet til kompetansemålet om simulering av tilfeldig forsøk og sannsynlighetsregning fra 9. trinn. Lærerne i deres prosjekt hadde tidligere brukt regneark under arbeid med terningkast og sannsynlighetsregning. Ifølge forfatterne førte den erfaringen til gode diskusjoner om hvorfor det var nødvendig å bruke programmering i arbeid mot dette kompetansemålet. Vi vil bygge videre på det og utdype blant annet tanken om regneark som programmeringsverktøy.

I denne artikkelen vil vi formidle noen resultater fra et internasjonalt prosjekt, se ramme. I første fase av prosjektet skulle vi undersøke hvordan undervisningsopplegget kunne legge til rette for samarbeidslæring i digitale omgivelser, her programmering i matematikkfaget. To lærere ved en skole har vært med på å utvikle undervisningsmateriellet i samarbeid med to lærerutdannere ved OsloMet. Undervisningsopplegget er utviklet i tråd med læreplanen og følger kompetansemålene i matematikk. Lærerne fikk prøvd ut opplegget i klasserommet. Etterpå tilpasset de, reviderte og videreutviklet opplegget slik at det nå fungerer bedre og kan brukes av andre lærere for å bidra til bedre samarbeidslæring.

I denne artikkelen vil vi presentere et undervisningsopplegg om sannsynlighet og programmering i regneark og Python og se på muligheter som samarbeidslæring kan gi.

Undervisningsopplegg

Undervisningsopplegget er laget for elever på 9. trinn. Det knytter ulike begreper i sannsynlighet opp mot programmeringsoppgaver og utforskende samarbeidsmåter. Det jobbes med kompetansemålet: «simulere utfall i tilfeldige forsøk og beregne sannsynligheten for at noe skal inntreffe, ved å bruke programmering; beregne og vurdere sannsynlighet i statistikk og spill». Hele opplegget med alle oppgaver og lenker til videoforelesninger og koder finnes på Tangentens nettsted. I artikkelen bruker vi noen oppgaver fra opplegget.

Ett mål er at elevene skal få en grunnleggende forståelse for sannsynlighet. De skal kunne beregne enkel sannsynlighet av ulike gunstige utfall, og kunne angi svaret som desimal, brøk og prosent. Elevene skal kunne se sammenhengen mellom empirisk og teoretisk sannsynlighet, og nytten i å bruke simuleringer som verktøy. Elevene trenger ingen forkunnskaper innenfor sannsynlighet. Men de bør ha forkunnskaper om sammenhengen mellom desimal, brøk og prosent.

Et annet mål er at elevene skal få mer erfaring og styrke i bruk av regneark som programmeringsverktøy. I tillegg til å kunne lage formler, formatere celler og lage diagrammer skal elevene lære hvordan regnearket kan brukes for å simulere utfall av terningkast. Det anbefales derfor at elever som skal jobbe med opplegget, har noe erfaring med regneark. De bør ha grunnleggende ferdigheter i bruk av formler og diagrammer, samt formatering av celler. Elevene skal også få innsikt i hvordan Python kan brukes til samme formål ved å endre variabler og finne likheter og ulikheter med regnearket. Undervisningsopplegget ble gjennomført ved å bruke Google regneark og Python på nettstedet Trinket.io. Her kan man kjøre Python-koden uten å installere programvaren.

Et tredje mål er samarbeidslæring. Noen tilnærminger til dette går ut på å strukturere gruppearbeid på bestemte måter for å forbedre kvaliteten av diskusjonen. Disse metodene kan kreve at grupper for eksempel utfører bestemte aktiviteter eller gir elever bestemte roller. Forskning viser at disse tilnærmingene har positive effekter på samarbeid i grupper, gruppeprestasjoner og ofte på elevens prestasjoner (Hmelo-Silver et al., 2013). I dette opplegget er samhandling et nyttig verktøy for å modellere for hverandre og dele den kunnskapen den enkelte har.

Det er lagt inn oppgaver som elevene skal løse i gruppene, og flere innslag av diskusjon.

Det skal være tre i hver gruppe. Gruppemedlemmene får fargekoder, rød, blå og grønn. De samme fargene er fordelt på oppgavene. Når en elevs fargekode er gitt i oppgavenummeret, er det den eleven som er leder. Lederen for oppgaven har ansvar for å hjelpe medlemmene til å ta aktiv del i oppgaven. Målet er at alle skal føle et eierskap til oppgaven, få en definert mulighet til å styre ordet, og også en øvelse i å se de andre på gruppa og bidra til inkludering og læring for alle. Nærmere beskrivelse av gruppesamarbeidet står beskrevet innledningsvis i elevarket, se figur 1.

Terningkast

Sannsynlighet og programmering

Hva skal du lære:
- Forstå hvor stor sannsynligheten er for å få de ulike sidene når du kaster en terning?
- Hvordan du kan programmere en simulering av terningkast i regneark, og forstå nytten av å gjøre det.
- Hvordan simuleringer av terningkast kan se ut programmert i python, og hva som er likt og ulikt med simuleringen i regnearket.
- Erfare hva samarbeidslæring har å si for egen læring.

Dere skal jobbe sammen i grupper på 2-3 elever. Dere vil alle få en fargekode rød, blå eller grønn. Fargekoden vil gi dere bestemte oppgaver i gruppa.

Når det er din farge i oppgavenummeret, er det du som er gruppeleder. Gruppeleder sørger for å åpne de lenker dere trenger og passer på at alle får delta i arbeidet. Hvis gruppen har 2 elever, fordeles de grønne oppgavene dere mellom.

Gruppelederansvar:

RØD	BLÅ	GRØNN
Oppgave 3 og 6	Oppgave 1 og 5	Oppgave 4 og 7

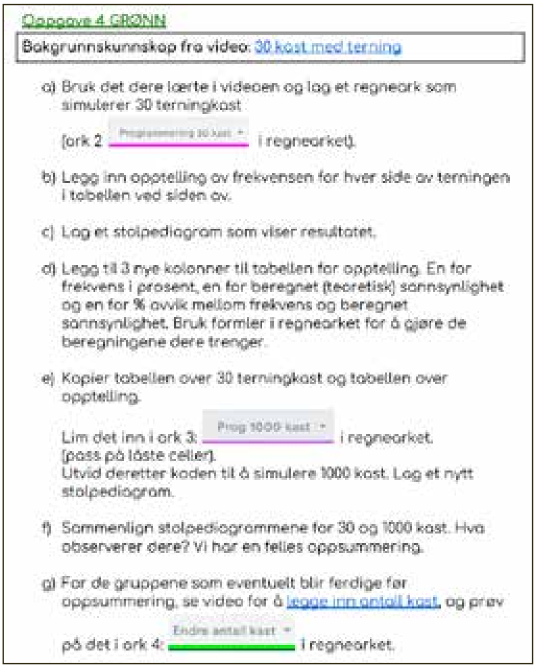
Individuelt arbeid-:
1) Hjemmearbeid i forkant av gruppearbeidet (film)
2) Oppgave 2

Figur 1: Undervisningsopplegg om sannsynlighet.

For at elevene skal ha størst mulig utbytte av opplegget, anbefales det å legge opp til felles oppsummeringer underveis i løpet, se for eksempel oppgave 7b (figur 3).

Elevarket består av fem videoforelesninger som elevene anbefales å se i forkant av undervisningen, og tre regneark opprettet i Google regneark. Elevene har kun lesetilgang, og må lage en kopi for å kunne redigere. Noen læringsplattformer gir læreren mulighet til selv å tildele en kopi til hver elev/gruppe.

I oppgave 4, se figur 2, skal elevene lage et program i regneark som simulerer mulige utfall og beregner sannsynligheten for disse utfallene, slik det står i kompetansemålet som det er henvist til over. Regnearket «Terningkast og programmering» er en mal som består av fire ulike ark. Oppgavene på elevarket angir hvilket ark som skal brukes.



Oppgave 4 GRØNN

Bakgrunnskunnskap fra video: 30 kast med terning

a) Bruk det dere lærte i videoen og lag et regneark som simulerer 30 terningkast
(ark 2 i regnearket).

b) Legg inn opptelling av frekvensen for hver side av terningen i tabellen ved siden av.

c) Lag et stolpediagram som viser resultatet.

d) Legg til 3 nye kolonner til tabellen for opptelling. En for frekvens i prosent, en for beregnet (teoretisk) sannsynlighet og en for % avvik mellom frekvens og beregnet sannsynlighet. Bruk formler i regnearket for å gjøre de beregningene dere trenger.

e) Kopier tabellen over 30 terningkast og tabellen over opptelling.
Lim det inn i ark 3: Prog 1000 kast i regnearket.
(pass på låste celler).
Utvid deretter koden til å simulere 1000 kast. Lag et nytt stolpediagram.

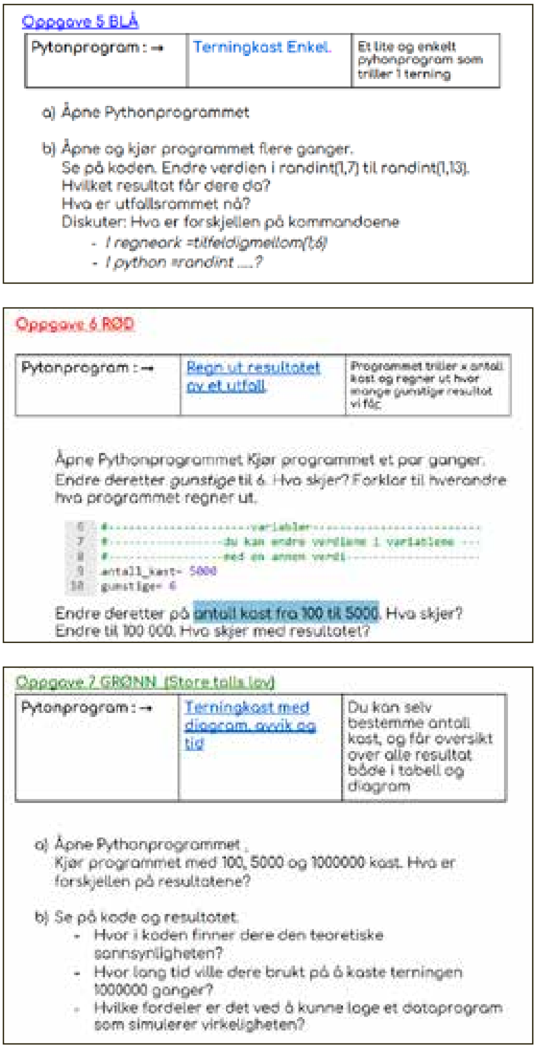
f) Sammenlign stolpediagrammene for 30 og 1000 kast. Hva observerer dere? Vi har en felles oppsummering.

g) For de gruppene som eventuelt blir ferdige før oppsummering, se video for å legge inn antall kast, og prøv på det i ark 4: Endre antall kast i regnearket.

Figur 2: Oppgave 4, der elevene skal lage et regneark som simulerer 30 terningkast.

Elevene blir kjent med programmeringsbegreper som løkker, variabler, funksjoner og vilkår. Det er krevende for elevene å lære disse. Flere studier fremhever at elevene ikke lærer programmering og programmeringsbegrepene automatisk ved å lage egne programmer (Flø, 2021). Derfor er det viktig at læreren tar opp disse begrepene eksplisitt i sin undervisning og bevisstgjør elevene på sammenhengen mellom det konkrete innholdet i aktiviteten og de tilhørende programmeringsbegrepene.

Oppgavene 5, 6 og 7 på figur 3 består av tre Python-programmer i Trinket. Elevene kan redigere direkte i programmene. De skal gjennomføre simuleringen en gang til, nå i Python.



Figur 3: Oppgavene 5, 6 og 7, der elevene kan bruke Python-programmer.

LK20 nevner ikke eksplisitt tekstbasert programmering på ungdomstrinnet. Programmering kan beskrives ved å designe, skrive, teste og feilsøke koden til et program som skal tolkes av en datamaskin. Derfor mener vi at alle kompetansemålene kan nås ved hjelp av programmering i regneark. Ifølge Flø (2021) kan type programmeringsspråk inngå i lærerens differensieringsstrategi, da de fleste programmeringsoppgaver på ungdomstrinnet vil kunne gis for blokkprogrammering, tekstbasert programmering eller i regneark i vårt tilfelle.

Forskningen på feltet anbefaler å ta utgangspunkt i å redusere elevenes opplevde vanskegrad gjennom at elevene får andre typer oppgaver enn å skrive egen kode fra bunnen (Flø, 2021). Oppgavene 5, 6 og 7 på figur 3 er eksempler på slike oppgavetyper. Elevene får et ferdig program der de skal forklare hva det gjør, og beskrive «output» til. I tillegg må de bytte ut en del av koden (for eksempel endre verdien i randint(1,7) til randint(1,13) i oppgave 5 eller endre antall kast fra 100 til 5000 i oppgave 6) og forklare hvordan dette kan påvirke resultater.

Gjennomføringen og tilbakemeldinger fra elever

Undervisningsopplegget er gjennomført i seks klasser på 24–28 elever, der to av klassene er på 10. trinn og de resterende på 9. trinn. Klassene på 10. trinn var med på å teste undervisningsopplegget, og har bidratt til de endringer som er gjort for å ferdigstille opplegget. Elevene som deltok, har varierende forkunnskaper innen programmering. Noen har aldri programmert, mens andre har erfaring både fra blokk- og tekstprogrammering.

I en undersøkelse i etterkant av det endelige opplegget ble elevene på 9. trinn spurt om hvilket læringsutbytte og erfaringer de sitter igjen med knyttet til bruk av regneark, sannsynlighet, programmering og samarbeidsform. Elevene på 9. trinn hadde lite forkunnskaper innen sannsynlighet, og de syntes det var vanskelig å formulere hva de hadde lært om sannsynlighet og programmering. Men ved oppfølgingsspørsmål kom det frem at de hadde utviklet bedre forståelse av begreper som betingelser, variabler og tilfeldige tall, og hvordan det ble brukt for å simulere terningkastene.

Det kom tydelig frem i tilbakemeldingene at elevene følte at opplegget hadde gitt dem økte ferdigheter i bruk av regneark. Flere ble overrasket over at regneark kunne brukes på flere måter enn det de lærte før. Et godt eksempel som viser det, er fra en elev som sier «Regnearket har jo formler for alt!».

I siste del av opplegget, hvor elevene bruker et ferdig laget Python-program, syntes noen av elevene at det virket overveldende. Spesielt elever som ikke har tidligere erfaring med tekstprogrammering. De greide likevel enkelt å løse oppgaven.

Modellen for samarbeid bygger på at elevene får faste, men rullerende roller underveis. Disse elevene er vant til å samarbeide i grupper, men ofte skaper de selv sin egen rolle i gruppa. Det var stor variasjon i hva elevene tenkte om denne faste formen. Der noen syntes det var godt å ha en fastbestemt rolle, syntes andre det helt motsatte. «Jeg liker ikke å bestemme, men det blir alltid sånn likevel», sa en av elevene som var positiv til vår modell. Under gjennomføringen observerte læreren at det i enkelte klasser og grupper fungerte svært bra med samarbeidsmodellen, mens det i andre klasser og grupper nesten virket mot sin hensikt.

Oppsummering

Undervisningsopplegget har som mål å øke læringsutbytte og bidra til kompetanseutvikling i sannsynlighetsregning ved hjelp av programmering og samarbeidslæring. Undervisningsopplegget legger vekt på en samarbeidsferdighet gjennom ulike roller ved å løse oppgaven. Gjennom samarbeidsoppgaver kan elevene øve seg på å sette seg inn i hva andre tenker, føler og erfarer. Alle elever skal delta, uavhengig av tidligere prestasjoner. Deltakelsen økes ved at det fremmes likeverd mellom elevene. Målet er å utvikle et nettverk av matematiske ideer som elevene kan utforske gjennom programmering.

Elevene som deltok, hadde ulik førforståelse. Mange på 9. trinn hadde ingen eller få forkunnskaper i både sannsynlighet og programmering. Flere av elevene uttalte også at arbeidsmåten var fremmed for dem da de før bare hadde jobbet gruppevis, men uten roller. Det kan se ut som om flere av elevene er der som Bray og Tangney (2017) peker på. Ut fra svarene ser det ut til at elevene ser på programmering som et redskap for å lære om sannsynlighet og øke ferdigheter i bruk av regneark. Spørsmål som hvorfor programmering her er nyttig for å forstå sammenhengen mellom empirisk og teoretisk sannsynlighet, bør derfor synliggjøres. Her har læreren en viktig oppgave. Det vil være svært viktig å kjenne sine elever godt, hvem som skal være på gruppe sammen, og hvor mange. Det viktigste målet må være at gruppene skal fungere på en slik måte at de sammen kan utvikle et nettverk av matematiske ideer som alle på gruppa kan utforske gjennom programmering.

Det er ikke alltid eksplisitt for elevene hva de har lært i timene, og hvordan matematisk kunnskap ble brukt når de skriver koder eller jobber med regneark. Det er derfor viktig at læreren oppsummerer underveis og gir elevene tid til å reflektere om det de gjør og har lært.

Referanser

Bray, A. & Tangney, B. (2017). Technology usage in mathematics education research – A systematic review of recent trends. *Computers & Education*, 114, 244–273.

Flø, E. E. (2021). Programmering i LK20. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 32*(1), 3–9.

Hmelo-Silver, C. E., Chinn, C. A., Chan, C. & O'Donnell, A. M. (Red.) (2013). *The International Handbook of Collaborative Learning*. Routledge.

Kravik, R. (2020). Programmering og geometri. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(2), 7–11.

Maugesten, M., Stigberg, H. & Stigberg, S. K. (2021). Programmering på ungdomstrinnet, *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 32*(3), 2–7.

Stenseth, B., Kaufmann, O. T. & Forsström, S. E. (2019). Programmering og matematikk. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 30*(2), 7-12.

Berge

Drøfting av ein regel for stigningsvinkel

Vi vil her sjå på ei problemstilling med stigningsvinklar, som kan gje elevar i vidaregåande fin trening i praktisk bruk av matematikk.

Når ein går på ski utanfor oppkøyrde løyper, er det viktig å halde seg unna skredfarleg terreng. Litt forenkla kan ein seie at dersom stigningsvinkelen til terrenget er mindre enn 30°, er det lite fare for snøskred, men dersom stigningsvinkelen er 30° eller større, er det skredfarleg terreng. Korleis kan ein finne ut om terrenget er brattare eller slakare enn 30°? Snøskredskolen på nettstaden varsom.no gjev svar på dette (sjå ramma).

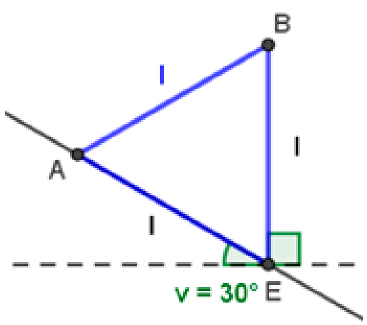
Dette er eit godt utgangspunkt for å lage eit undervisningsopplegg for elevar i vidaregåande med faga matematikk 1T eller matematikk R.

Ein kan innleie med å la elevane lage figurane 1, 2 og 3 (papir og blyant) og vise påstandane i punkt 3 over. I figur 1 har vi AE: Liggande stav (avtrykk), AB: Oppreist stav, BE: Loddrett stav, v: Stigningsvinkelen, l = stavlengd.

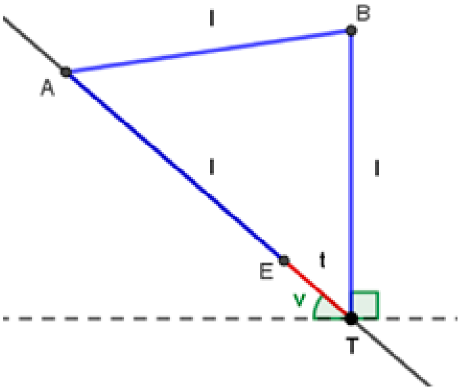
I figur 1 er AEB ein likesida trekant ($AE = AB = BE = l$) og $\angle AEB = 60°$. Stigningsvinkelen er då $v = 90° - \angle AEB = 30°$. Dette gjeld for alle stavlengder l.

Ola Berge
Pensjonist
ola.berge@enivest.net

1. Lag et avtrykk i snøen med den ene staven i fallretningen.
2. Sett den ene staven forsiktig i snøen øverst. Hold stavene mot hverandre og la den andre staven pendle fritt slik at den henger helt loddrett.
3. Før den loddrette staven ned mot snøen og merk deg hvor staven treffer avtrykket. Dersom den treffer utenfor (nedenfor) avtrykket, er det brattere enn 30°. Dersom staven treffer på innsiden av avtrykket, er det slakere enn 30°.
4. For hver 10 cm kan du legge til, eller trekke fra hvis den treffer på oversiden, 3 grader. (Hvis staven treffer 20 cm nedenfor merket, er det 30 + 6 = 36 grader helning).



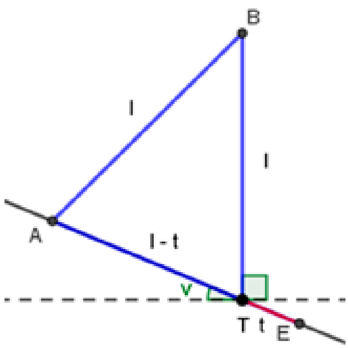
Figur 1: Den loddrette staven treffer i enden E av avtrykket AE. Stigningsvinkelen er då lik 30°. Kvifor?



Figur 2: Den loddrette staven treffer bakken i punktet *T* nedanfor enden *E* av avtrykket *AE*. Stigningsvinkelen v er då større enn 30°. Kvifor?

I figur 2 har vi *T*: Det punktet der den loddrette staven treffer bakken, og $ET = t$.
Ei forklaring til spørsmålet i figur 2 kan vere:

Vi set $ET = t$, dvs. at t er avstanden frå enden av avtrykket AE til treffpunktet T for den loddrette staven. Her er $\angle ABT > 60°$ fordi $AT = l + t > l$. Då er $\angle TAB = \angle ATB < 60°$ og $v > 30°$.



Figur 3: Den loddrette staven treffer bakken i punktet *T* ovanfor enden *E* av avtrykket *AE*. Stigningsvinkelen *v* er då mindre enn 30°. Kvifor?

I figur 3 er $ABT < 60°$ fordi $AT = l - t < l$. Då er $\angle TAB = \angle ATB > 60°$ og $v < 30°$.

Vi kan finne ein tilnærma verdi for stigningsvinkelen v ved å starte med 30° og så legge til eller trekke frå 3° for kvar 10 cm treffpunktet T ligg nedanfor/ovanfor enden E av avtrykket AE (Skredskolen på varsom.no). Dette kan vi kalle for 3°-regelen.

Det naturlege spørsmålet blir: *Kor god tilnærming til den nøyaktige stigningsvinkelen gjev 3°-regelen*?

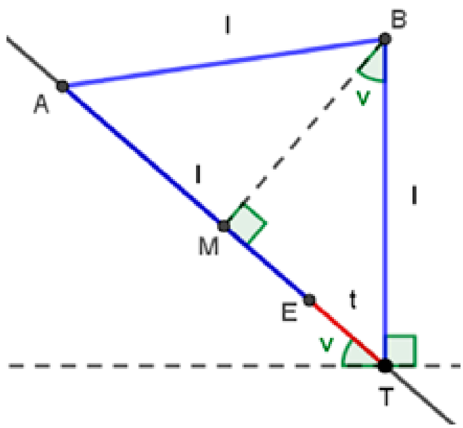
Det kan vere greitt å starte med å skrive 3°-regelen på matematisk form. Det er då lurt å rekne storleiken $t = ET$ som *negativ* når treffpunktet T ligg *ovanfor* enden E av avtrykket AE.

Vi får då formelen

$$(1) \qquad v_3 = 30 + \frac{3}{10}t = 30 + 0,3t \qquad \text{(3°-regelen)}$$

Her er stigningsvinkelen i grader, og t er avstanden, rekna med forteikn, frå enden av avtrykket AE til treffpunktet T målt i cm. (Korleis blir formelen (1) dersom vi brukar dm = 10 cm som måleining?)

Uttrykket i (1) gjev ein tilnærma verdi for stigningsvinkelen v. For å finne ut kor god denne tilnærminga er, må vi finne den eksakte verdien av v. I figur 4 har vi v: stigningsvinkelen, $AT = l + t$, M er midtpunktet på AT og $\angle MBT = v$.



Figur 4: Hjelpefigur til å finne stigningsvinkelen *v*. I geometri er ein god figur ofte «halve løysinga».

Her bør ein diskutere ulike måtar å finne stigningsvinkelen på. ATB er ein likebeina trekant ($AB = BT = l$). Det er naturleg å dele denne trekanten i to rettvinkla trekantar. $\angle MBT$ er lik stigningsvinkelen. Kvifor?

Ei forklaring kan vere at vinkelbeina til dei to vinklane står parvis vinkelrett på kvarandre. Vi kan då finne:

(2) $$\sin v = \frac{MT}{BT}\ ,\ MT = \frac{l+t}{2}\ \text{og}\ BT = l$$

(3) $$\sin v = \frac{l+t}{2l}$$

(4) $$v = \sin^{-1}\left(\frac{l+t}{2l}\right),\quad t \in [-l, l]$$

Eller vi kan finne $\angle ATB$:

(5) $$\cos \angle \mathrm{ATB} = \frac{\mathrm{MT}}{BT} = \frac{l+t}{2l}$$

og

(6) $$v = 90° - \angle \mathrm{ATB}\ \text{der}\ \angle \mathrm{ATB} = \cos^{-1}\left(\frac{l+t}{2l}\right)$$

I ATB kjenner vi alle tre sidene $l + t$, l og l. Det er ei kjend problemstilling for elevar med matematikk 1T at når vi kjenner alle sidene i ein trekant, kan vi finne vinklane med cosinussetninga. Ved å bruke cosinussetninga på ATB får vi det same som i (5) (dette er fin algebratrening). Vi ser at $\cos\angle ATB = \sin v$ (sjå (3)) fordi $\angle ATB = 90° - v$.

Vi legg merke til at den stigningsvinkelen som svarar til ein målt t-verdi ($t \neq 0$), er avhengig av stavlengda l (sjå (4)). 3°-regelen (1) er uavhengig av l.

Vi er no klar til å samanlikne stigningsvinklane vi får av 3°-regelen (1), med dei nøyaktige vinklane som vi får av (4).

Ein bør innleie med å diskutere kva for metodar og digitale hjelpemiddel det kan vere aktuelt å bruke. Vi vil her sjå på tabellar, grafisk framstilling og dynamisk geometri med hovudvekt på tabellar og programmering. Elevane kan velje ulike metodar/hjelpemiddel etter ferdigheiter og interesse.

Tabellar

Vi kan bruke ein kalkulator til å lage tabellar for stigningsvinkelen v i (4). Mange kalkulatorar har ein tabellfunksjon som gjer det enkelt å lage tabellar. Med ei stavlengd på l = 140 cm må vi lage ein tabell for funksjonen

(7) $$f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{140+x}{280}\right)$$ (frå (4), med $t = x$)

Så kan vi samanlikne desse vinklane med 3°-regelen (1). Vi må gjere det same med andre stavlengder. Men kva verdiar skal vi bruke for x?

Vi bør bestemme oss for eit realistisk vinkelområde der vi vil samanlikne 3°-regelen med den nøyaktige stigningsvinkelen. Kor små/store stigningsvinklar har vi behov for å bestemme når vi går på ski i terrenget? Når stigningsvinkelen er mindre enn 20°, er det svært lite sannsynleg at det vil gå snøskred. Har vi bruk for vinklar over 40°? Terreng med ein stigningsvinkel på 40° er svært bratt (unnarennet i Holmenkollbakken er på det brattaste 35,7°). Mange vil ha meir enn nok med å halde seg på beina i så bratt terreng. Då er det vanskeleg å utføre denne målemetoden med stavar. Ein kan for eksempel avgrense seg til å sjå på vinklar mellom ca. 20° og ca. 40°.

Vi kan lage tabellar for stigningsvinkelen meir effektivt ved å bruke programmering. Python-programmet i figur 5 lagar ein tabell som viser korleis stigningsvinkelen (4) er avhengig av t og stavlengda l.

Elevane lærer om absolutt vinkelmål (radianar) først i matematikk R2. Her trengs det nok litt hjelp/forklaring når elevar skal finne stigningsvinkelen i grader (linje 5 og linje 6 i programmet i figur 5). Det er ei utfordring å lage ein «pen» tabell. Det kan vi få til ved å bruke format()-funksjonen i Python (linjene 15, 21, 23 og 24 i programmet i figur 5).

Vi kan også lage tabell 1 ved å bruke rekne-

```python
1
2   from math import asin, degrees
3
4   def v(t,l):
5       v=asin((l+t)/(2*l))  # Gjev vinkel v i absolutt vinkelmål
6       return degrees(v)    # Gjer om vinkel v til grader
7
8   def v3(t):
9       return 30+0.3*t
10
11  print()
12  print('  t/l',end='')    # end='': Ikkje linjeskift
13
14  for l in range(100,155,5):
15      print(format(l,'6.0f'),end='')
16
17  print()
18  print()
19
20  for t in range(-50,50,10):
21      print(format(t,'5.0f'),end='')
22      for l in range(100,155,5):
23          print(format(v(t,l),'6.1f'),end='')
24      print('   (',format(v3(t),'4.1f'),')')
25
```

Figur 5: Python-program for tabell 1 (Python 3.8.3).

ark. I Excel brukar vi funksjonane ARCSIN(tall) og GRADER(vinkel) for å lage formelen i (4). Når vi brukar rekneark, er det enkelt å lage ein «pen» tabell.

Vi ser at stigningsvinkelen som svarar til ein målt t-verdi ($t \neq 0$), er avhengig av stavlengda l.

Kva for stavlengd(er) gjev minst forskjell mellom 3°-regelen og den nøyaktige stigningsvinkelen? For å undersøkje dette nærare kan det vere greitt å lage ein tabell for denne forskjellen. Vi byter ut $v(t, l)$ i linje 23 i programmet i figur 5 med $v_3(t) - v(t, l)$ og får tabell 2.

Vi kan sjå på ei stavlengd, for eksempel 130 cm. I tabell 2 har vi positive verdiar når $t > 0$, og negative verdiar når $t < 0$. Kva betyr det?

Når stavlengda er 130 cm, gjev 3°-regelen for stor vinkel når stigningsvinkelen er større enn 30°, og for liten vinkel når stigningsvinkelen er mindre enn 30° (for t-verdiar frå –50 til 40). Gjeld dette for alle stavlengdene i tabell 2? Er det andre stavlengder som gjev mindre forskjell mellom 3°-regelen og den nøyaktige stigningsvinkelen?

t/l	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	
-50	14.5	15.2	15.8	16.4	17.0	17.5	17.9	18.3	18.7	19.1	19.5	(15.0)
-40	17.5	18.0	18.6	19.0	19.5	19.9	20.3	20.6	20.9	21.2	21.5	(18.0)
-30	20.5	20.9	21.3	21.7	22.0	22.3	22.6	22.9	23.1	23.4	23.6	(21.0)
-20	23.6	23.9	24.1	24.4	24.6	24.8	25.0	25.2	25.4	25.5	25.7	(24.0)
-10	26.7	26.9	27.0	27.2	27.3	27.4	27.5	27.6	27.7	27.7	27.8	(27.0)
0	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	(30.0)
10	33.4	33.2	33.1	32.9	32.8	32.7	32.6	32.5	32.4	32.3	32.2	(33.0)
20	36.9	36.5	36.2	35.9	35.7	35.5	35.2	35.0	34.8	34.7	34.5	(36.0)
30	40.5	40.0	39.5	39.1	38.7	38.3	38.0	37.7	37.4	37.1	36.9	(39.0)
40	44.4	43.7	43.0	42.4	41.8	41.3	40.8	40.4	40.0	39.6	39.3	(42.0)

Tabell 1: Stigningsvinklar i grader. Øvste rad: Stavlengd i cm. Venstre kolonne: *t*-verdiar i cm. Vinklar frå 3°-regelen i parentes.

t/l	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	
-50	0.5	-0.2	-0.8	-1.4	-2.0	-2.5	-2.9	-3.3	-3.7	-4.1	-4.5	(15.0)
-40	0.5	-0.0	-0.6	-1.0	-1.5	-1.9	-2.3	-2.6	-2.9	-3.2	-3.5	(18.0)
-30	0.5	0.1	-0.3	-0.7	-1.0	-1.3	-1.6	-1.9	-2.1	-2.4	-2.6	(21.0)
-20	0.4	0.1	-0.1	-0.4	-0.6	-0.8	-1.0	-1.2	-1.4	-1.5	-1.7	(24.0)
-10	0.3	0.1	-0.0	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.7	-0.8	(27.0)
0	-0.0	-0.0	-0.0	-0.0	-0.0	-0.0	-0.0	-0.0	-0.0	-0.0	-0.0	(30.0)
10	-0.4	-0.2	-0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	(33.0)
20	-0.9	-0.5	-0.2	0.1	0.3	0.5	0.8	1.0	1.2	1.3	1.5	(36.0)
30	-1.5	-1.0	-0.5	-0.1	0.3	0.7	1.0	1.3	1.6	1.9	2.1	(39.0)
40	-2.4	-1.7	-1.0	-0.4	0.2	0.7	1.2	1.6	2.0	2.4	2.7	(42.0)

Tabell 2: Differansar mellom stigningsvinklar frå 3°-regelen (i parentes) og den nøyaktige stigningsvinkelen, i grader.

Kan ein seie at det er bra om 3°-regelen gjev litt for stor stigningsvinkel (særleg for vinklar over 30°)? Stikkord kan her vere sikkerheitsmargin og falsk tryggleik.

Vi ser av tabell 1 og tabell 2 at 3°-regelen gjev bra tilnærming til den nøyaktige stigningsvinkelen dersom stavane vi brukar, har «høveleg» lengd (for vinklar mellom ca. 20° og ca. 40°). Med teleskopstavar (stavar med stillbar lengd) kan ein velje stavlengda og få bra målingar med 3°-regelen.

Kva for stavlengd(er) er det «best» å bruke? Ein kan utfordre elevane til å svare på dette spørsmålet og argumentere for svara. Eit argument som kan brukast, er at 3°-regelen ikkje bør gje for liten vinkel når terrenget er brattare enn 30°. Her kan ein også sjå på stavlengder mellom 115 cm og 120 cm.

Grafisk framstilling

Vi kan også studere denne problemstillinga med stigningsvinklar grafisk. Vi kan teikne grafane til funksjonane

(8) $$v(x) = \sin^{-1}\left(\frac{l+x}{2l}\right) \cdot \frac{180}{\pi}, \quad x \in [-50, 40]$$

ved å bruke (4), og

(9) $$v_3(x) = 30 + 0{,}3x, \quad x \in [-50, 40]$$

ved å bruke (1), i det same koordinatsystemet. Her er $x = t$.

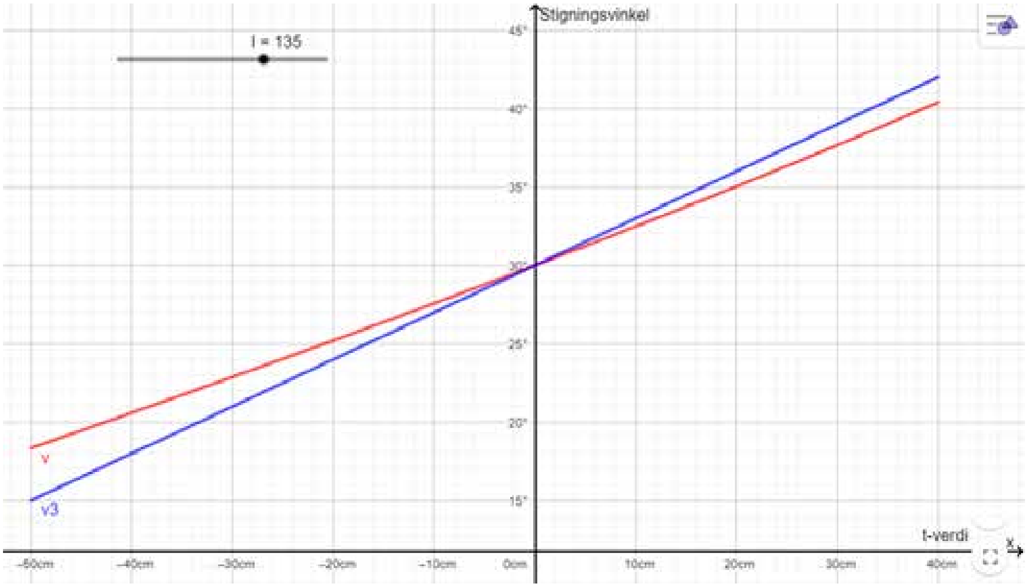
I Geogebra er det to omvende sinusfunksjonar, asin( ) og asind( ). No er $\operatorname{asin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ og $\operatorname{asind}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$, men *funksjonane* asin(x) og asind(x) er identiske (begge gjev funksjonsverdiar i absolutt vinkelmål). Elevane som ikkje har matematikk R2 treng ei forklaring på faktoren $\frac{180}{\pi}$ som vi har med i (8) for å gjere vinkelen om frå absolutt vinkelmål til grader.

Ein kan starte med å skrive inn ein verdi for stavlengda, for eksempel $l = 130$. Det blir då laga ein glidar for l. Ved å bruke denne glidaren kan ein samanlikne 3°-regelen med den nøyaktige stigningsvinkelen for ulike stavlengder.

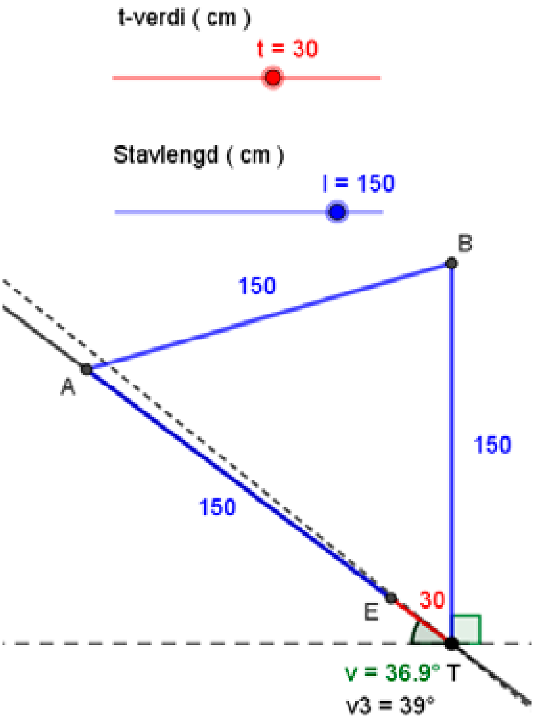
Dynamisk geometri

Vi kan også bruke den dynamiske geometrien i Geogebra til å «konstruere» denne målemetoden med stavar, sjå figur 7.

Vi kan starte med å skrive inn verdiar for t og stavlengda l, for eksempel $t = 20$ og $l = 130$. Då blir det laga *glidarar* for t og l. Vi teiknar først den *loddrette* staven BT. Det er då enklast å bruke det underliggande koordinatsystemet. Vi kan plassere punktet T (sjå figur 2) i origo i koordinatsystemet, dvs. $T = (0, 0)$. Det betyr at $B = (0, l)$. Punktet A er eit skjeringspunkt mellom to sirklar med sentrum i B og T og med radiar l og $l + t$ (sjå figur 2). Bakken blir den rette linja gjennom A og T. Vi brukar verktøyet *Vinkel med fast storleik*, vinkel lik $30 + 0{,}3t$ (sjå (1)), til å teikne bakken med stigningsvinkel ifølgje 3°-regelen (lag eit hjelpepunkt på den horisontale linja $y = 0$).



Figur 6: Skjermutklipp frå Geogebra. Glidar for stavlengda *l*.



Figur 7: Skjermutklipp frå Geogebra. Glidar for *t* og stavlengda *l*.

Ved å halde *l* fast og variere *t* kan vi samanlikne 3°-regelen med den nøyaktige stigningsvinkelen i eit vinkelområde (for eksempel mellom ca. 20° og ca. 40°).

Det er ikkje praktisk relevant å halde *t* fast og variere *l*. For kvar stigningsvinkel finst det ei stavlengd som gjer at vinkelen vi får av 3°-regelen, er lik den nøyaktige stigningsvinkelen (det kan vi vise ved å finne *l* av (3)). Her er det lett å sjå om 3°-regelen gjev for stor vinkel eller for liten vinkel. Men det er ikkje så lett å vurdere kva for stavlengd(er) som er «best» å bruke.

Det er eit «problem» med 3°-regelen at kor nøyaktig regelen er, avhenger av lengda av stavane vi brukar (Tabell 2). Men 3°-regelen gjev rett stigningsvinkel lik når $t = 0$ for alle stavlengder. Vi kan på ein nokså enkel og nøyaktig måte avgjere om terrenget er brattare eller slakare enn 30°, slik at vi kan unngå skredfarleg terreng. Dette er det viktigaste med regelen.

NYTT FRA MATEMATIKKSENTERET

Vi jobber med kompetanseutvikling, forskning, formidling og utvikling av læringsressurser og digitale verktøy, i tett samarbeid med praksisfeltet.

I dette nummeret skriver vi om:

- Grenseobjekt for god sammenheng i matematikkfaget
- Å arbeide med "Hopp videre med kenguru" i klasserommet

Vi jobber tett med både praksisfeltet, lærerutdanningene, høgskoler og universitet. Vi har ca. 30 ansatte, hvor de fleste har bakgrunn som lærere fra grunnskolen, videregående skole, lærerutdanning eller som barnehagelærere. Vi forsker på matematikkdidaktikk, og utvikler arbeidsmetoder og læringsressurser.

Besøk våre nettsider:

Matematikksenteret.no
Fagstoff og læringsressurser

MatteLIST.no
Oppgaver og aktiviteter for utforskning og problemløsning

Matematikk.org
Spill, oppgaver og fakta om matematikk

Alleteller.no
Vurderingsverktøy for talloppfatning og tallforståelse

Realfagsloyper.no
Kompetanseutvikling i realfagene

NTNU

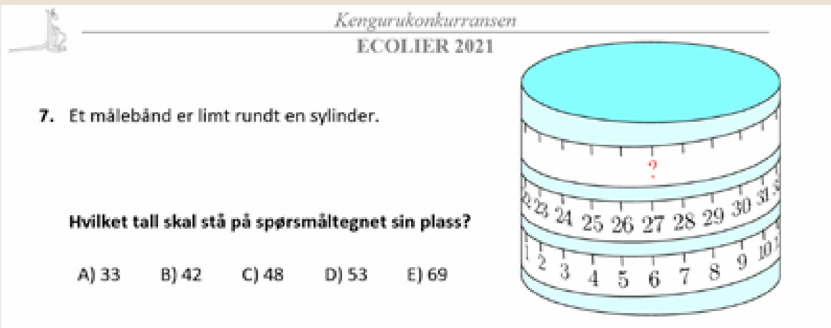
MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Å arbeide med «Hopp videre med kenguru» i klasserommet

Stig Atle Myhre

Tilpasset undervisning i matematikkfaget er ikke alltid enkelt. Noen velger å løse det ved å dele elevene inn i grupper som arbeider med ulike oppgaver. En utfordring med denne tilnærmingen er at det er vanskelig å få til gode diskusjoner om elevene ikke har arbeidet med de samme oppgavene. For å ivareta muligheten til tilpasset undervisning samtidig som du legger opp til gode diskusjoner i klasserommet, er oppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde[1] et godt alternativ. Disse oppgavene kalles «LIST-oppgaver» eller «rike oppgaver». *Lav inngangsterskel* betyr at det skal være enkelt å komme i gang med oppgaven, og at alle elevene skal ha en tanke om hvordan de skal sette i gang for å løse den. *Stor takhøyde* vil si at oppgaven kan utvides slik at det gir muligheter for dybdelæring. Det er flere fordeler med å utvide oppgaver på en slik måte i stedet for at elevene får en ny oppgave å arbeide med. Det at elevene allerede «er inne i» konteksten og strategiene, gjør at de raskere kan gå i gang med den matematiske utfordringen. Dessuten kan det føre til mer dybdelæring om elevene får se hva som skjer med sine strategier når det kommer nye forutsetninger. For eksempel får de se om strategiene deres fortsatt fungerer, eller om de må justere dem.

Mange kenguruoppgaver har kvaliteter som gjør at de er oppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde. Derfor har Matematikksenteret laget ressurser som kan brukes som utgangspunkt både for å utvide kenguruoppgaver, og være grunnlag for diskusjoner i klasserommet. Ressursene kalles «Hopp videre med kenguru», og finnes under «Kengurusidene» på matematikksenteret.no[2]. Ressursene er utformet som oppgaveark, slik at det er fritt fram for alle å bruke dem slik de ønsker. Vår anbefaling er dog at de gis til alle elevene slik at oppgavene kan være utgangspunkt for diskusjoner i klasserommet. Vi har laget forslag til noen utvidelser av oppgavene i dette oppgavearket, men det er rom for å utvide oppgavene enda mer. Du kan også ta utgangspunkt i andre kenguruoppgaver, ettersom det er mange andre kenguruoppgaver som egner seg godt til dette. Å endre noen forutsetninger i oppgaven for å se hvordan det påvirker løsningsmetoder og svar, kan gjøres på veldig mange oppgaver uten at det blir mye ekstraarbeid for læreren. I noen oppgaver trengs det ikke mer enn å endre på et tall for at oppgaven blir en ny utfordring.



Figur *1*: Originaloppgave

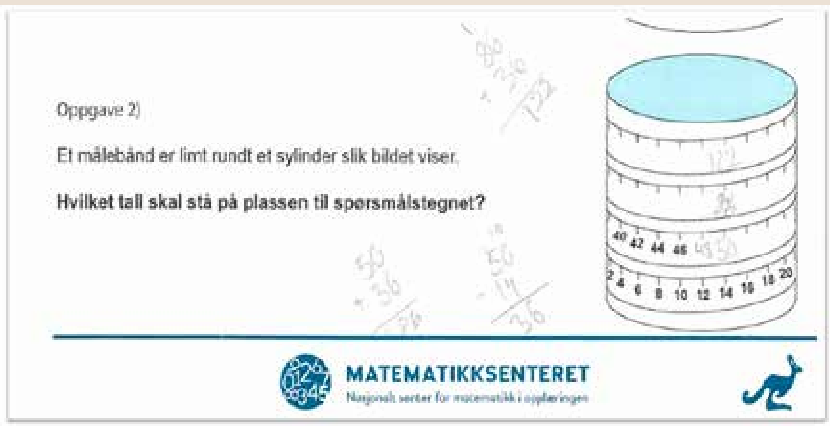
I arbeidet med å utvikle «Hopp videre med kenguru» ble ressursen det refereres til i denne teksten prøvd ut på 7. trinn. Ressursen kalles «Målebånd», og originaloppgaven var med i kengurukonkurransen for 2021. Figur 1 viser hvordan originaloppgaven så ut.

Oppgaven omhandler mønster og tall. Det er tre rader, der tallene i den øverste raden ikke vises. Oppgaven for elevene er å finne hvilket tall som skal stå på en av disse plassene. Det er to strategier som egner seg for å løse oppgaven. Jeg velger her å kalle dem for horisontal og vertikal strategi. Den horisontale strategien går ut på om elevene ser etter hva som ikke vises mellom radene. Altså hvor mange tall er det mellom det siste tallet i en rad, og det første tallet i neste rad. Her vil de da se at det er 11 i differanse mellom 11 og 22. Da vil det første tallet i den tredje raden være 43, ettersom det er 11 større enn 32. Så er det bare å telle seg fram til spørsmålstegnet sin plass. Den vertikale strategien er å se kolonnene, og regne ut hvor stor differanse det er fra en plass til tilsvarende plass på raden ovenfor/nedenfor. Mellom 6 og 27 er det 21 i differanse, så 27+21 er tallet på spørsmålstegnet sin plass. De to strategiene er like gyldige og gode, så det bør ikke være noe krav om at elevene bør velge den ene strategien framfor den andre. Derfor bør elevene få kunne bruke den strategien de føler er naturlig, og heller ha en samtale om strategiene i fellesskap i klassen.

Det var ganske få elever i klassen som fikk riktig svar på denne oppgaven da de hadde den i selve konkurransen, så vi startet økta med en forberedende aktivitet. På den måten kunne elevene få arbeide litt mer med temaet uten at jeg som lærer røpte for mye av strategiene for elevene. Det var ønskelig at elevene selv skulle finne strategiene de ville bruke på oppgaven. Ettersom oppgaven omhandler tall og mønster, så var «Telle i kor»[3] godt egnet som forberedende aktivitet. Fokuset i økta med «Telle i kor» i dette arbeidet var å legge stoppunkter og diskusjoner slik at elevene kunne telle videre til neste rad, men også slik at de kunne se mønster nedover i kolonnene. Dette var i tråd med de to måtene å se mønsteret i «Hopp videre»-oppgavene som de skulle arbeide med senere i økta.

Når elevene arbeidet med Hopp videre-oppgavene, samarbeidet de

Figur *2*: Horisontal strategi



Figur *3*: Vertikal strategi

sammen to og to med oppgavearket som de fikk utdelt. Som lærer gikk jeg rundt til gruppene og så hvilke strategier de brukte. Dette var viktig for den påfølgende samtalen vi skulle ha om oppgavene. Jeg registrerte at de aller fleste løste oppgavene ved å bruke vertikal strategi, men det var også noen grupper som brukte horisontal strategi. I figur 2 og 3 ser vi de to ulike strategiene brukt på oppgave 2 på oppgavearket.

I den påfølgende samtalen om oppgavene skulle to grupper forklare metoden sin til resten av klassen. Under arbeidet med oppgavene hadde jeg valgt ut hvilke grupper det skulle være, slik at de representerte én av hver av strategiene. Målet mitt som lærer i denne sekvensen, var at alle elevene skulle klare å forstå begge strategiene. Ettersom jeg vurderte strategiene til å være like gyldige og gode, så ønsket jeg at fokuset skulle være på dybdelæring. Samtalen skulle derfor omhandle sammenhengene mellom strategiene og hvorfor de alltid fungerer. Bruk av samtaletrekk[4] var et godt hjelpemiddel for å drive samtalen framover. Viktige spørsmål å stille var «Hva var likt, og hva var ulikt med måtene?», og «Hvorfor er det ikke de samme tallene som blir lagt sammen i de to måtene?» (med tanke på at det i oppgave 2 er 16 som blir lagt til i den horisontale strategien, mens det er 36 som blir lagt til i den vertikale strategien).

Elevene avsluttet økta med at de selv skulle lage en lignende oppgave. Det kan ofte være mer krevende å lage en oppgave selv, enn det er å løse den. Elevene trenger øving i arbeide på denne måten, og det kan etter hvert bli en veldig positiv aktivitet. Elevene kan prøve oppgavene ut på hverandre og ofte synes elevene dette er ganske gøy. Det kan også være en fin måte å jobbe på som supplerer vurderingsarbeidet til læreren. Elevene kan ta i bruk det de har lært i en slik aktivitet, og vurdering blir en naturlig del av undervisningen. Da kan læreren gi tilbakemelding hvordan elevene kan jobbe videre. I flere av ressursene i «Hopp videre med kenguru» er det lagt opp til at elevene skal lage oppgaver selv. Men det er jo selvfølgelig mulig for læreren å legge inn dette som aktivitet, uavhengig om det er en slik oppgave i ressursen eller ikke.

Oppsummering

For å oppsummere kort hvordan ei undervisningsøkt med «Hopp videre med kenguru» kan være:

Læreren bør sette seg godt inn i oppgavene som skal brukes i forkant av økta, både når det gjelder oppgavene som skal brukes, og eventuelt hvordan en samtale/diskusjon skal være.

En forberedende aktivitet kan være nyttig dersom elevene har behov for det. Bruk gjerne «telle i kor» eller lignende der det er naturlig og henger sammen med den matematiske ideen som oppgavene omhandler.

Vi anbefaler at læreren planlegger en samtale/diskusjon underveis, og at læreren er forberedt på hvordan denne samtalen skal være. Noen spørsmål som skal stilles for å belyse dette bør være planlagt på forhånd.

En fin avsluttende aktivitet kan være at elevene lager oppgaver til hverandre. Da kan elevene få bruke det de har lært, og læreren kan få en ytterligere mulighet til å vurdere elevenes læring.

Noter

1 Les mer om LIST-oppgaver på mattelist.no

2 https://www.matematikksenteret.no/læringsressurser-og-undervisningsopplegg/kenguru/hopp-videre-med-kenguru

3 Les mer om «telle i kor» her: https://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/mam/aktiviteter-og-filmer-i-mam/telle-i-kor

4 Les mer om samtaletrekk her: https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/MAM/Revisjon%2020-21/Modul%202/02%20W%C3%A6ge.%20Samtaletrekk.pdf

Grenseobjekt for god sammenheng i matematikkfaget

Camilla Justnes, Ingunn Valbekmo, Svein H. Torkildsen

Studier av overgangssituasjoner viser at alle overganger byr på muligheter som ansatte i barnehager og skoler kan gripe fatt i. I overganger oppstår ofte et brudd i kontinuitet. Dersom ansatte i barnehagen og lærere i skolen sammen kan skape kontinuitet for barn og unge, vil det være med på å trygge overgangssituasjonene (Akkerman & Bakker, 2011). Når barnehager og skoler samarbeider om å skape sammenheng i overgangen for barna, er det en rekke «tiltak/grep» som kan styrke samarbeidet for barnas beste.

Barn og unge starter ikke med blanke ark etter en overgang. De benytter seg av sine tidligere erfaringer i møte med nye utfordringer. Et grep for å sikre en viss kontinuitet i overgangssituasjoner er å ta i bruk grenseobjekter. Grenseobjekter er gjenkjennelige objekter som kan lette overganger ved at de får en funksjon som brobygger. Grenseobjekter kan være bildebøker, elementer fra naturen, lekemateriell eller faglige elementer, slik som bestemte matematiske representasjoner eller strategier (Hogsnes, 2016). Mange kommuner (blant annet Sola, Bærum, Trondheim) bruker grenseobjekter aktivt i overgangen fra barnehage til skole. Vi mener at grenseobjekter kan bidra til sammenheng i matematikkundervisningen, og at grenseobjekt kan være med på å skape kontinuitet i overgangen fra barnetrinn til ungdomstrinn også. I et samarbeid med Kristiansund kommune har vi arbeidet aktivt for å finne gode grenseobjekter både for overgangen barnehage-barnetrinn og overgangen barnetrinn-ungdomstrinn.

Vi vil videre fortelle om dette prosjektet og arbeidet med å finne gode grenseobjekter til overgangssituasjonene. Samarbeidet har pågått siden 2019 og har vært en del av kommunens satsing som realfagskommune. Samarbeidet har hele veien vært styrt av samskaping, og i kommunens strategiplaner var arbeidet med overgangssituasjoner trukket fram som et ønsket satsningsområde. Deltakerne i nettverket ønsket å se på mulighetene for å bestemme grenseobjekter for overgangssituasjonene, og mulige grenseobjekter ble løftet fram og diskutert.

Overgangen barnehage-skole

Trondheim kommune og Bærum kommune er to kommuner som har valgt å benytte seg av grenseobjekter som en av flere rutiner for overgangen mellom barnehage og skole. I arbeidet med å velge ut grenseobjekter, har de tatt utgangspunkt i at grenseobjektene skal befinne seg i både barnehage og skole, at de skal være gjenkjennelige for barna og at de skal være fleksible i tolkning og bruk. Alle barnehager og skoler i disse to kommunene skal la barna bli kjent med en felles bok, en lek, en sang og et spill.

Det er en rekke fordeler med at grenseobjektene skal være fleksible i tolkning og bruk. Et fleksibelt grenseobjekt kan være et utgangspunkt for samtaler, der samtalen handler om det barna kjenner til, er interessert i og erfaringer de har gjort seg med grenseobjektet. Dersom flere barn har erfaringer med det samme grenseobjektet, får flere barn muligheter til å delta i samtalen. Ved hjelp av grenseobjektene, kan altså barna dele erfaringer fra barnehagen i skolen. Når grenseobjektet kan relateres til matematiske ideer, kan samtalen handle om matematiske erfaringer og opplevelser. Et grenseobjekt med matematiske muligheter gir ikke bare barna muligheter til å bidra i faglige samtaler, det gir også læreren verdifull kunnskap om barnas tidligere matematiske erfaringer og ideer, som læreren kan bygge videre på i sin undervisning.

En annen fordel med at grenseobjektene er fleksible, er at de kan bidra til matematisk utvikling både i barnehagen og i skolen. Det er ikke et mål at barnehagen og skolen skal bruke grenseobjektene likt, men heller at skolen bygger videre på det arbeidet som er startet i barnehagen. Det er grenseobjektet i seg selv som skal være gjenkjennelig for barna. Når grenseobjektet er fleksibelt gir det barnehagen og skolen muligheter for å integrere og utvikle arbeidet med grenseobjektet som en del av den allerede etablerte praksisen.

Geitekillingen som kunne telle til ti – et godt valg

Kristiansund kommune har sett på hvilke muligheter «Geitekillingen som kunne telle til ti» gir som grenseobjekt, spesielt med tanke på matematikk.

I rammeplanen står det blant annet at personalet skal bruke bøker for å inspirere til matematisk tekning og at gjennom arbeidet med antall, rom og form skal barnehagen bidra til at barna får leke og eksperimentere med tall, mengde og telling og får erfaring med ulike måter å uttrykke dette på (s. 54). Dette kan vi se i sammenheng med kjerneelementene og kompetansemål i matematikk, der elevene for eksempel skal representere tall på ulike måter og oversette mellom ulike representasjoner. Representasjoner kan være konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske, og læreplanen legger vekt på at elevene får muligheten til å bruke de matematiske representasjonene i ulike sammenhenger gjennom egne erfaringer og matematiske samtaler (s. 31 og 33). Det ga derfor god mening at ansatte i barnehage og på 1. og 2. trinn i første omgang sammen analyserte hvilke muligheter boken gir for matematiske erfaringer og ulike uttrykksformer, og deretter presenterte dette for hverandre.

De ansatte la vekt på at barna må få høre historien flere ganger, leke historien, både med dramatisering og med lekedyr, og etter hvert undre seg over og utforske telling og tallord.

Overgangen barnetrinn-ungdomstrinn

På samlinger i realfagsnettverket ble mulige grenseobjekt for småtrinn-mellomtrinn og mellomtrinn-ungdomstrinn drøftet. Det var stor enighet om å innarbeide grenseobjekt knyttet til matematikk som et element i kommunens overgangsplan. Drøftinger på nettverkssamlinger for skole, endte opp med å foreslå at et utvalg representasjoner blir innarbeidet i overgangsplanen. Kommunens ståstedsanalyse viser blant annet at lærerne på småtrinnet bruker ulike former for konkretisering. Men bruken avtar etter hvert, og på ungdomstrinnet brukes konkretisering i liten grad.

Representasjoner – et godt valg

Valg av representasjon for skole falt på tre sentrale visuelle representasjoner: tallinje, barmodellen og arealmodellen. Ved å velge disse visuelle representasjonene som gjennomgående grenseobjekt får elevene i tillegg mulighet bli kjent med en sentral problemløsingsstrategi: Lag en tegning.

De tre representasjonene har alle egenskaper som gjør det mulig å la dem være verktøy i både begrepsutvikling og problemløsing. Figur 1 (NCTEM) viser hvordan konkreter og visuelle representasjoner kan være nyttige verktøy for å utvikle forståelse av matematiske ideer, få oversikt over problem og identifisere matematikken som trengs for å løse problemer.

I fortsettelsen viser vi eksempler på områder der disse visuelle representasjonene kan være nyttige på ulike nivåer i skoleløpet.

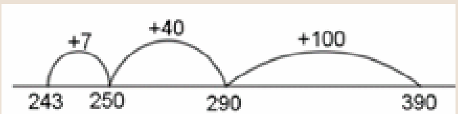
Tallinje

Cambridge Mathematics har laget en rekke «Espressoer», som er populærvitenskapelige tekster om forskning. I espressoen «The number

Figur 1

line: a flexible and useful model»[1] presenterer de hva forskning sier om tallinjen. Her blir det slått fast at tallinjen som representasjon kan bli en viktig modell for å forstå matematikk på ulike nivå.

Elever som har arbeidet med kuleramme eller perlekjede vil sannsynligvis intuitivt forstå ei tallinje med nøyaktig avstand mellom markeringene av tall. Det kan gi nødvendig støtte for tanken når de yngste elevene for eksempel arbeider med addisjon, subtraksjon og rekketelling. Figur 2 viser hvordan ei åpen tallinje kan gi elevene støtte for tanken i arbeid med regneoperasjoner med større tall:



Figur 2

Elever som får bruke og konstruere ulike tallinjemodeller, basert på deres intuitive mentale tallinjer, får god støtte i matematisk utvikling. Modellen kan tilpasses både brøk og desimaltall, og det er sentrale tema på mellomtrinnet.

Den doble tallinja i figur 3 kan brukes til problemstillinger som er aktuelle på ungdomstrinnet. Visualisering av en problemstilling der man skal finne 100 % av en størrelse når 125 % av størrelsen er gitt. Modellen kan gi oversikt over problemstillingen og gi ideer til hvilken matematikk man kan ta i bruk for å finne 100 %.

Figur 3

Barmodeller

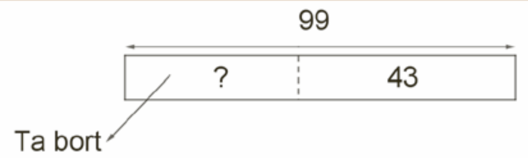
Barmodellen gir elevene mulighet til å «se» matematiske strukturer. Det er ikke i seg selv en problemløsingsmetode. Det er snarere en metode for å få klarhet i den matematiske strukturen i et problem. Elevene kan få et visuelt bilde av hvordan man kan oversette et problem til matematisk symbolspråk, noe som setter dem i stand til å løse problemet. Barmodellen egner seg til å representere de fire regneartene, forhold mellom størrelser, proporsjoner, variabler og ukjente i et problem. Barmodellen kan altså fungere som førstadiet til mer symbolsk algebra (NCTEM).

Det fins to hovedtyper av barmodeller: modeller for å visualisere del(er)-helhet og modeller for å visualisere sammenlikning mellom størrelser.

Figur 4 viser hvordan en del-hel modell kan visualisere en aktuell matematisk problemstilling på småtrinnet.

Hvilket tall skal stå på plassen til spørsmålstegnet? 99 – ? = 43

Modellen kan tegnes parallelt med en retorisk tolking av oppgaven: Vi har 99 og skal ta bort noe, men vi vet ikke hvor mye. Da har vi 43 igjen.



Figur 4

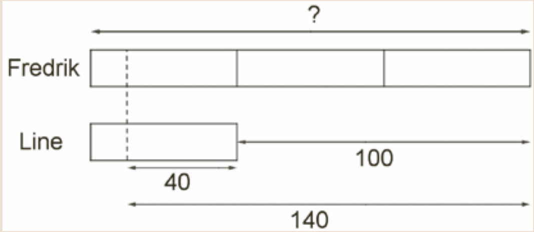
Figur 5 viser hvordan en modell for å sammenlikne størrelser kan visualisere en aktuell problemstilling på mellom- eller ungdomstrinnet.

Fredrik har tre ganger så mye penger som Line. Når Fredrik bruker 140 kroner og Line bruker 40 kroner har de like mange kroner igjen. Hvor mange kroner hadde Fredrik?

Den stiplede linja viser at etter handelen hadde begge like mye.

Arealmodeller

Arealmodellen kan introduseres tidlig i elevenes møte med multiplikasjon og divisjon. Elevene

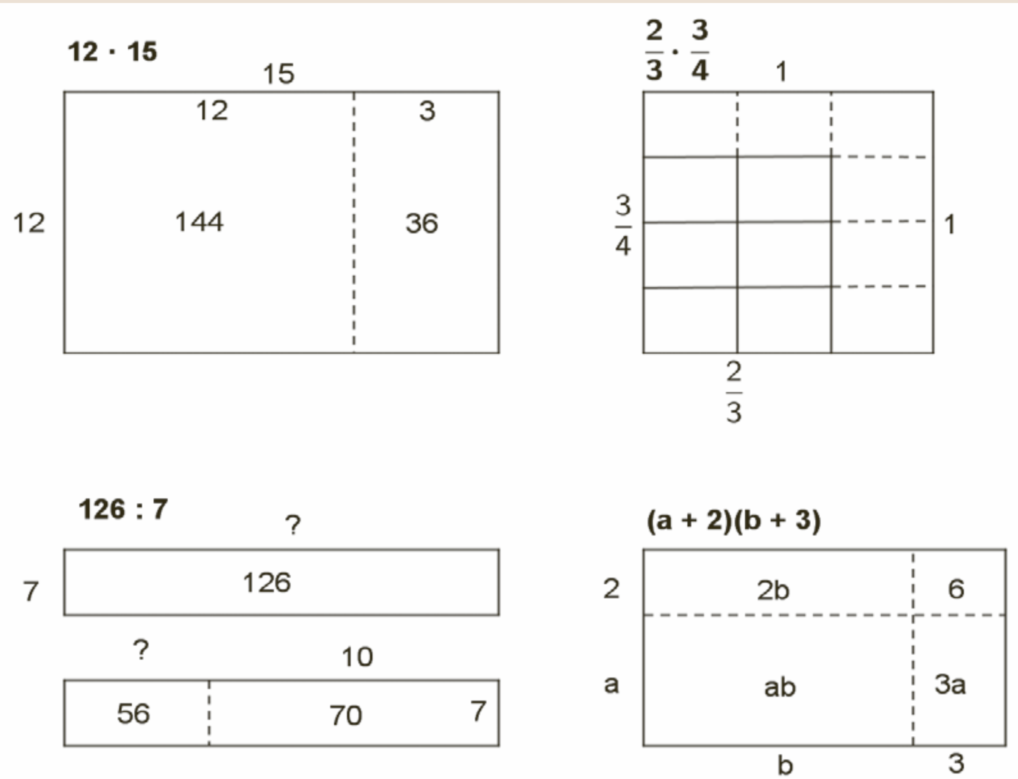


Figur 5

kan tegne kvadrater på et rutepapir og lage multiplikasjonsstykker som gir antall kvadrater i rektanglet. Med utgangspunkt i rektangler med nøyaktig størrelse på kantene kan forståelsen for modellen utvikles på en måte som tilsvarer det som ble skissert fra ei nøyaktig til ei åpen tallinje.

Figur 6 viser hvordan arealmodellen kan brukes både i multiplikasjon og divisjon på ulike nivå.

Figurene viser at de tre modellene – tallinje,



Figur 6

barmodell og arealmodell – er anvendelige på matematiske problemstillinger som behandles på alle klassetrinn i grunnskolen. Slike fleksible modeller vil kunne fungere godt som grenseobjekt i overgangen småtrinn-mellomtrinn og mellomtrinn-ungdomstrinn. Om lærerne har en felles forståelse av når bruk av de ulike modellene er egnet og hvordan de best kan illustrere matematiske ideer og sammenhenger, vil det gi elevene bedre muligheter for å ta modellene i bruk som verktøy i arbeidet med matematiske problemstillinger.

Modeller har potensiale i seg til å fungere som en brobygger mellom uformell og formell matematikk. I starten knyttes modellene til en konkret matematisk situasjon. Modellen man lager er da en *modell av* tanken. På et seinere tidspunkt kan slike kontekstspesifikke modeller bli generalisert til en *modell for* tanken. Modellen brukes da *som* støtte for å organisere både tilsvarende og nye situasjoner og for å resonnere matematisk (van den Heuvel-Panhuizen, M. 2003).

Nettverk

For å unngå at nettverksarbeidet bare kretser rundt praksisfortellinger, valgte de ansatte i barnehage og lærere på 1.–2. trinn i Kristiansund å diskutere hvordan de ulike uttrykksmåtene og representasjonen knyttet til Geitekillingen kan bygge på hverandre, hvordan en kan se dem i sammenheng, og hva som kan være problematisk med dem med tanke på matematikk. Når de ansatte diskuterer hvilke ideer eller representasjoner som potensielt kan føre til matematiske misoppfatninger, kan de også diskutere hvordan man kan møte slike utfordringer, både i barnehagen og de første årene i skolen.

I løpet av prosjektperioden førte diskusjonene fram til at lærerne på 3.–10. trinn valgte å anbefale de tre nevnte representasjonene som grenseobjekt alle lærere som underviser i matematikk må forplikte seg på å arbeide med i matematikkundervisningen. Lærerne har et ønske om å vedlikeholde det nettverkssamarbeidet som er utviklet gjennom prosjektet realfagskommune. Levedyktigheten til slike fagnettverk avhenger av flere forhold. Et av de viktigste er at man har noe meningsfylt å samarbeide om. Med utgangspunkt i de ønskede grenseobjektene får man mulighet for å dele erfaringer og diskutere seg fram til en felles forståelse av modellenes verdi for elevenes utvikling av matematisk kompetanse, inkludert faglige og didaktiske utfordringer ved introduksjon og bruk av modeller. Det bør være interessant for alle som underviser i matematikk.

Noter

1 Matematikksenteret oversetter denne og flere andre espressoer som blir lagt ut på nettsiden mattelist.no

Referanser

Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Boundary crossing and boundary objects. *Review of Educational Research, 81*(2), 132–169.

Hogsnes, H. D. (2016). *Kontinuitet og diskontinuitet i overgangen fra barnehage til skolefritidsordning og skole*. Doktoravhandling, Fakultet for humaniora og utdanningsvitenskap, Høgskolen i Sørøst-Norge.

Strand, G. M. (2019). Experiencing the transition to lower secondary school: Students' voices. *International Journal of Educational Research, 97*, 13–21.

Vinje, B. (2019). Den gode overgangen – fra barnetrinn til ungdomstrinn. *Realfagsløyper*. https://realfagsloyper.no/sites/default/files/2019-05/Fagtekst%20den%20gode%20overgangen_BU_mai19_0

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003) The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics 54*, 9–3.

Cambridge Mathematics, Espresso. (2021). *The Number Line: a flexible and useful model*. https://www.cambridgemaths.org/espresso/view/the-number-line/

NCTEM. *The Bar Model*. https://www.ncetm.org.uk/classroom-resources/ca-the-bar-model/

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
c/o Elin Unstad
Postboks 181
1371 Asker

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det er en demokratisk rett å få en matematikkundervisning som setter en i stand til å delta aktivt som borger i et demokrati. Derfor vil Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) sette fokus på matematikk for alle.

Styret for LAMIS

Leder
Renate Jensen, Vestland

Barnetrinnet
Henrik Kirkegaard, Møre og Romsdal

Mellomtrinnet
Inger-Lise Risøy, Viken
Svend Eidsten, Viken

Ungdomstrinnet
Kari-Anne Bjørnø Rummelhoff, Viken

Videregående skole
Odd-Bjørn Lunde, Rogaland

Høgskole/universitet
Marianne Maugesten, Viken

Varamedlem (Barnetrinnet)
Hilde Svendsen

Medlemskontingent

450 kr for enkeltmedlem
200 kr for husstandsmedlemmer
300 kr for studenter/pensjonister
975 kr for skoler/institusjoner

Organisasjonssekretær

Elin Unstad, org.sek@lamis.no

Lederen har ordet

Renate Jensen

Godt nyttår til alle LAMIS kollegaer.

Starten på 2022 ble ikke helt slik vi hadde håpet – akkurat det samme startet min leder i 2021 med. For en innsats som gjøres av alle som arbeider med barnehage, skole og lærerutdanning! Meldingen om strenge tiltak og skoler med mye smitte og krav til organisering på gult og rødt nivå krever mye av elever, lærere og skoleledere. Drift og organisering tar mye tid i, i tillegg til at skoler skal drive utvikling. Vi er derfor imponert over de digitale lokallagskveldene som er arrangert så langt dette skoleåret, og vi i sentralstyret har som mål denne våren å bidra til flere kvelder i samarbeid med lokallagene, med tema som er viktige for våre medlemmer og andre som er interessert i matematikkundervisning.

Mange av oss er opptatt av diskusjonene rundt sluttvurdering og usikkerhet knyttet til både standpunkt og eksamen i faget til våren. I høst arrangerte vi flere digitale kvelder om ny eksamen i matematikk på 10, trinn, og aldri har vi hatt så mange deltakere på våre arrangementer. Vi takker Matematikksenteret for hjelp til å forstå oppgaver og diskutere vurdering av disse. Eksamen skal ikke styre undervisningen, men det kan likevel være til hjelp for å orientere kursen med tanke på at den er laget etter LK20. En av disse kveldene som ble arrangert av LAMIS lokallag Sunnmøre kan du leser mer om på side 52.

Et punkt om sluttvurdering i matematikk 10. trinn har særlig vært diskutert på disse digitale kveldene og i andre sammenhenger der vi i LAMIS har snakket om temaet, og det er Udir sin tekst publisert i oktober om at det bare er kompetansemål fra 10. trinn som skal ligge til grunn for standpunktvurdering og eksamensoppgaver. Sentralstyret i LAMIS sendte før jul en e-post til Udir og KD med bekymring om denne beslutningen. Det gjorde også mange andre – både kommuner, forfattere og læreplangruppen. Resultatet er at det 17. januar ble publisert en ny tekst utarbeidet med hjelp fra Matematikksentret, medlemmer av læreplangruppen og medlemmer fra sentralstyret i LAMIS. Teksten håper vi gir hjelp til å se sammenhengen mellom kompetansemålene på ungdomstrinnet i matematikk og det å tolke kompetansemålene i lys av tekstene Om faget. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagspesifikk-stotte/standpunktvurdering-i-matematikk/

For oss i LAMIS handler denne våren også om å lage mange planer for våre oppgaver som UngeAbel og sommerkonferansen. Vi vil denne våren og sommeren arbeide for at vi kan gjennomføre våre arrangementer fysisk, og har stor tro på dette. Selv om smittetrykket er høyt nå, er det også optimisme for at hverdagen kan bli mer som før. Første runde startet i november og mer enn 4500 elever har nå gjennomført de innledende rundene. I arbeidet med UngeAbel denne våren ønsker vi å legge til rette med så god forutsigbarhet som mulig, slik at lærere og elever ser muligheter i å delta på et finalearrangement uansett situasjon. Vi håper også at oppgaver fra tidligere år med UngeAbel, som dere finner på vår hjemmeside, vil være en ressurs når man skal legge til rette for variasjon i en hverdag der elevene i perioder arbeider både på skolen og hjemme.

(fortsettes side 55)

Velkommen til LAMIS sommer-konferanse i Sandefjord

Tema: Matematikk – Nå går vi i dybden
Tid: 5.–7. august 2022
v/årets sommerkonferansekomite

Vi har virkelig troen på at dette er året der vi alle får til å møtes igjen. Vi gleder oss til å ta dere imot etter to år med avlysninger!

I år går turen tilbake til byen med Hvalfangstmonumentet, Sandefjord. Dere som var tilstede for tolv år siden da vi var på samme plass, vet at en omvisning i Sandefjord ikke er komplett uten et par ti runder rundt dette monumentet! Til dere som ikke var med den gangen: Dette vil dere ikke gå glipp av!

Også denne gangen legger vi opp til høy faglig og sosial faktor. Vi lover høy kvalitet på det faglige og lav kvalitet på underholdninga. Det faglige har vi tenkt å overlate til svært profesjonelle forelesere og lærere. Underholdninga vil vi i sommerkomiteen, som sist, stort sett stå for selv. Problemløsingskonkurranse vil bli gjeninnført. Denne gangen er det tre klasser man kan vinne – en trekning mellom riktige svar, en for beste originalitet på løsningsmetode og en for mest kreative feilsvar.

På det faglige programmet står selvfølgelig LK20 og dybde-

læring. Plenumsforedragsholdere blir Mona Røsseland, Hanan Abdelrahman og forhåpentligvis årets Holmboeprisvinner. Sentralstyret i LAMIS vil også presentere eksempler på tverrfaglige tema fra FNs bærekraftsmål. På programmet står også delplenum med lek for de yngste barna ved Svanhild Breive og programmering ved Inspiria Science Center. På denne konferansen vil det også bli en økt der ulike matematikkonkurranser blir presentert, og du kan prøve på oppgaver fra disse konkurransene. I tillegg til dette er en rekke verkstedholdere klare. Flere av disse kommer fra skolene i nærområdet, så det skal bli praksisnært og noe å ta i bruk allerede fra første skoledag!

Som sist skal vi innlosjeres på Park Hotell. Det er et flott hotell som er kjent for sin gode mat. Spesielt har frokosten blitt kåret til Vestfolds beste hotellfrokost. Og ikke glem badedrakten eller speedoen, du rekker kanskje en liten svømmetur i hotellets basseng.

Vi gleder oss til å få faglig påfyll i sosiale rammer (uten å stirre inn i en skjerm samtidig som vi setter på en vaskemaskin og svarer på en e-post).

Følg med på www.lamis.no for å finne ut når åpningen for påmeldingen er klar våren 2022.

Vi gleder oss til å se deg!

UngeAbel – Løsningsforslag og ny oppgave

Marianne Maugesten, sentralstyremedlem og leder av UngeAbel-juryen

Gateløpet

I oppgaven er både resonnement, kommunikasjon og bruk av ulike representasjoner viktige kjerneelementer som kan brukes for å finne løsningen.

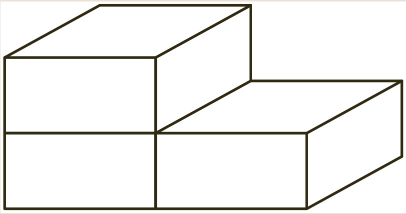
Løsning: B og C kommer først og samtidig i mål, A nr. 3 (B = C, A) .

Ny oppgave

Tre esker

Oppgaven er fra innledende runder 2018-2019

Figuren viser tre like store esker. Sidelengdene i hver eske (målt i dm) er positive, hele tall, alle større enn 1. Til sammen rommer eskene 168 liter. Bestem sidelengdene i eskene. Finn så mange løsninger som mulig.



Lokallagskveld LAMIS Sunnmøre: Eksamen i matematikk – kva er nytt?

May Britt Høydal

LAMIS Sunnmøre er eit lokallag som er sett saman av personar busett mange stadar i fylket, og som arbeider i alt frå barnehage til høgskule. Ungdomsskulelæraren hadde eit sterkt ønskje om å få til ein temakveld om grunnskuleeksamen. Styret støtta opp og Renate blei kontakta, noko som førte til temakveld ved Spjelkavik ungdomsskule tysdag 20. oktober.

Det viste seg tidleg at det ikkje var berre lærarar på Sunnmøre som hadde behov for støtte til arbeidet mot eksamen. Ved å opne for at påmelde kunne delta digitalt, fekk vi totalt 115 deltakarar; 91 som fulgte digitalt, frå Alta i nord til Costa Blanca i sør. Til stades i Spjelkavika var det 24 frammøtte, storparten frå Spjelkavik, men også lærarar frå Søvika, Giske og Volda, og sjølvklart Renate som kom med fly frå Bergen.

Renate er først og fremst i denne samanheng leiar i LAMIS, men hennar tidlegare arbeid med læreplanen og hennar daglege stilling i etat for skole i Bergen er ingen bakdel med tanke på bestillinga ho fekk frå LAMIS Sunnmøre. Det var tydeleg at Renate hadde budd seg godt i forkant av temakvelden, og som eit ledd av førebuinga hadde ho sendt bestilling vidare til Matematikksenteret, slik at ein andre del av denne samlinga kom digitalt 9. november og då i regi av Matematikksenteret.

I avklaringa si var Renate tydeleg på at undervisinga vår ikkje skal styrast av eksamen, men at det kan vere ei hjelp til å kome i gang med endringsarbeidet. Ho snakka om at ein i den nye læreplanen legg opp til at elevar skal få vise kompetanse på fleire og meir varierte måtar enn tidlegare.

LK20 nyttar eit utvida kompetanseomgrep og det er viktig å sjå tekstane i lys av kompetansemål og kjerneelementa. Både på Udir sine sider og på Matematikksenteret sine sider ligg der ny og oppdatert informasjon. Ved å vise oss nokre korte filmsnuttar og vise nokre sider, så var Renate med på å systematisere og sortere informasjonen for deltakarane på temakvelden. Det er nytt av året at det er Matematikksenteret som utviklar eksamen. Dei testar ut oppgåvetypane på elevar og gjer justeringar ut frå resultata dei der får. Eksempeloppgåvene som no ligg ute på Udir sine sider kjem i revidert utgåve i januar.

Våren 2023 kan vi vente oss tre-delt og heildigital eksamen der Del 1 legg opp til 8-12 interaktive oppgåver, både fleirsvar og kortsvar og denne delen vert vurdert av eit digital verktøy. Til denne delen vert det sett av ein klokketime. Del 2 vert ein del der elevane skal kommunisere resonnement og grunngi svara sine. Her må dei aller fleste øve meir på å skrive digitalt i matematikk. Denne delen vert på 3-6 oppgåver, og det er ein sensor som vurderer. Delen vert vekta til om lag to timar arbeid. Del 3 vert også på to timar. Denne delen vert det truleg to oppgåver der elevane skal få vise kompetanse i nye situasjonar, dei vert først og fremst testa i uthald og evna til å gå i djupna. Her er tanken at dei skal lage ein plan, stille spørsmål og så gjere utrekningar som dei til slutt vurderer. Kunsten i denne delen vert i stor grad å kunne sjå samanhengar. Dei som har elevar som er yngre enn 10. klasse skal sjå mot denne. Eksamen skal IKKJE styre undervisninga, men det kan likevel vere greitt å orientere kursen med tanke på at den er laga etter læreplanen.

Eksamen 2022 vert ein tradisjonell papireksamen og to-delt, men innhaldet er endra og i tråd med LK20. Her må vi som har 10. klasse i år øve elevane til å skrive med penn, vise korleis dei tenkjer, ha fokus på prosess framfor løysing og det er ein fordel å snakke

mykje matematikk, diskutere ulike løysingar og gjerne bruke tid med elevane til å sjå på oppgåver som til dømes «My favorite no». Renate fortalte konkret om elevar som arbeidde i grupper som i nye samanhengar tok med seg tidlegare gruppemedlem sine tankar inn i nye utfordringar. Korleis ville den tenkt her, noko som er ein av mange gode måtar å ta med seg andre sin kunnskap om metode vidare inn i eige arbeid seinare. Det er viktig å ha fokus på strategiar og omgrep, ein som manglar omgrep vil heller ikkje kunne setje ord på ei utfordring. Det å fortelje elevane at når det er fleirvalsoppgåver så betyr sirkel at det finns berre eitt riktig svar, medan når det er kvadratiske avkryssingsboksar, så kan fleire alternativ vere moglege.

Ein bør i det daglege arbeidet arbeide med eliminering og logisk tenking. Her viste Renate til Matematikksenteret sine Kenguruoppgåver som gode øvingsoppgåver. Oppgåvene til nasjonal prøve er også fine å øve med. Renate sa også at det alt ser ut som om den nye eksamensmodellen treff elevane i midten, medan dei som strevar og dei som tidlegare har raga i toppen er dei som treng mest øving i ny oppgåvetype. Renate stoppa opp med ord som "gyldig". Er dette eit ord elevane forstår? Det kan vere lurt å gå oppgåver i saumane og diskutere kva ord elevane finn vanskelege. Ordbanken til elevane bør ein difor arbeide jamnleg med. Kanskje bør ein lage ei liste med ord som elevane finn vanskelege? Det er for øvrig viktig at elevane vert testa i matematikken og ikkje i hjelpemiddel, det er difor viktig at vi tidleg lærer dei hjelpemidla dei kan bruke.

Når det gjeld eksempeloppgåvene som per i dag ligg ute, så er det venta at ordlyden i oppgåve 9 og 10 vert noko reviderte. På utprøvinga var det mange elevar som greidde noko, men ei utfordring var at det var vanskeleg å vise høg grad av måloppnåing. Oppgåvene kan minne noko om oppgåver ein ville gitt til ein munnleg eksamen, det er då betimeleg å spør seg om det kunne ver til hjelp med ein førebuingsdag med førebuingsmateriell også til eksamen i matematikk. Ved å sjå til norskførebuinga ser vi at der er lista opp fagomgrep og forklaringar, der er skrivetips der vi kan sjå føre oss at vi kunne ha lista opp gode spørsmål å stille og elles skriverammer/reknerammer og hjelp til planlegging. Ikkje berre til eksamen, men også elles i året kan vi sjå føre oss at vi oftare kan nytte tankekart og at vi kan ha nytte av setningsstartere og det å revidere løysingane/tekstane.

Det at vi har fått ny type oppgåver kan kanskje gjere at det no er ei anna type elevar som vil meistre faget betre, det er noko vi må ha i bakhovudet. Vi må arbeide med kjerneelementa i alle timar og vi må ha fokus på tenkemåtar og metodar ein kan bruke for å løyse oppgåver. Mattelist, UngeAbel, «My favorite no», Kåres kokebok i programmering er også tips frå Renate som fleire

(fortsettes side 55)

I fyr og flamme

Henrik Kirkegaard, sentralstyremedlem og medlem av LAMIS Sunnmøre

I disse grønne miljøtider hvor bruken av plastikk må begrenses, kan det være en trist affære å se alle de fargerike plastikkonkretene ligge i haugevis i matematikkskap rundt omkring på skolene.

Et mer miljøvennlig alternativ er fyrstikker. Fyrstikker kan kjøpes i svære poser uten svovel – bare spør innkjøpsansvarlig på skolen. Eller du kan kjøpe små fyrstikkesker uten at det blir den store utgiften. Fyrstikker er altså et bra miljøvalg (spesielt dem uten svovel) og vi kan bidra litt til FNs bærekraftmål.

Det beste med det hele er at fyrstikker er fortreffelige i matematikkundervisningen. Går du inn på www.lamis.no og i Oppgaver/Oppgavebanken søker på «fyrstikk» får du ferdige opplegg fra barnehage og helt opp til videregående skole.

Fyrstikker er veldig anvendelige

Å telle opp til 100 går som en lek. Samtale om det er lurt å dele opp i tiere og så videre.

La elevene jobbe sammen to og to og ha ti fyrstikker opp i fyrstikkesken. Den ene elevene tar

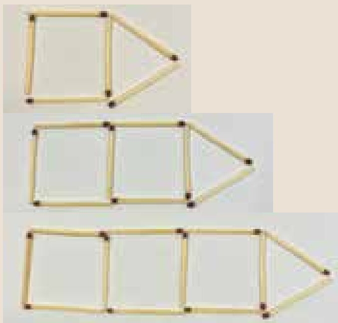
ut noen fyrstikker av esken og legger dem ved siden av esken. Den andre eleven skal nå gjette hvor mange fyrstikker som er igjen i esken. Tiervenner blir innøvd på et blunk.

Ha to A4-ark på pulten

med et likhetstegn mellom arkene. Legg en tom fyrstikkeske og 3 løse fyrstikker ved siden av på det ene arket og 7 løse fyrstikker på det andre arket. Hvor mange fyrstikker må opp i esken for at det skal være like mange fyrstikker på hvert av arkene? Lett forståelig inngang til å regne med en ukjent faktor. Det går fint an å ha både to og tre tomme fyrstikkesker på arkene, bare husk at det må være like mange fyrstikker i alle eskene når oppgaven er løst. Dette fungere på småtrinnet, mellomtrinnet og også i ungdomsskolen. Etter hvert på mellomtrinnet og på ungdomsskolen erstattes fyrstikkeskene med X.

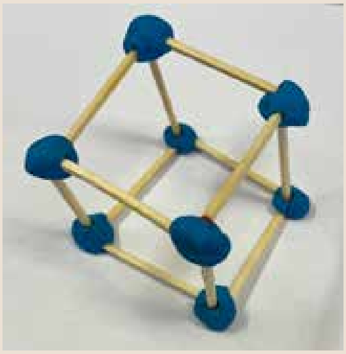
Tallfølger

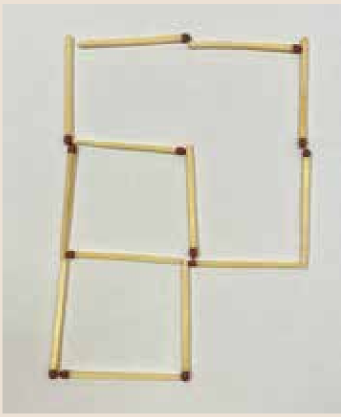
er også glimrende å introdusere med fyrstikker. Lag en figur med fyrstikker. Hvor mange fyrstikker bruker du? Utvid figuren og finn ut hvor mange fyrstikker du nå har og hvor mange utvidet med. Gjenta dette flere ganger. Klarer du å finne et mønster? Finner du en formel for dette?



Geometriske figurer

er også enkelt å få til. Alle elever får til å bygge med fyrstikker. Gjør du en liten feil er det ikke noe stort problem å rette opp i. Mye lettere enn hvis du skal tegne figurene i en bok. Når du har formet ditt kvadrat kan du ta et bilde og legge det inn i en digital bok. Etter hvert får du en fin samling. Selv terninger, prismer og pyramider får du til. Bruk plastalina i hjørnene. Oppskrift på plastalina finner du på nettet (helt uten bruk av plastikk).





Klunse

er et flott og ukomplisert spill med fyrstikker. Det er beskrevet et par ganger før i Tangenten. Fungerer glimrende fra barnehage og opp til videregående. Det er mange fasetter ved spillet.

Grubliser

med fyrstikker er også kjekt. Du kjenner sikkert masse oppgaver allerede ellers finner du dem som sagt i Oppgavebanken. Det ligger fem kvadrater i fyrstikker på bordet. Hvordan får du det til 3 kvadrater ved bare å flytte to fyrstikker? Det er bøttevis med slike oppgaver. En annen måte å jobbe med dette på er å utfordre elevene til selv å finne på nye oppgaver. Å jobbe med fyrstikker gir rom for mange matematiske samtaler mellom elevene. Det er enkelt å flytte rundt på fyrstikkene for å vise hva du mener og du kan flytte dem tilbake igjen hvis det ikke ble den løsningen dere skulle frem til.

Er du pandemirammet på skolen legger du de brukte fyrstikkene i en boks og lar de stå i to til tre uker til de er klare til bruk igjen. Du kan også feire den gode matematikktimen du hadde og sette fyr til bunken med fyrstikker. Det er jo alltid festlig.

Mine elever spør alltid om de kan få lov å tenne på en fyrstikk og selvfølgelig må de det. Etter timen går vi ut i skolegården og alle får lov å tenne noen fyrstikker i kontrollerte former. Mye bedre og mye morsommere enn bare å si nei. De kommer til det uansett på et tidspunkt.

(fortsatt fra side 48)

Vi er optimistiske for sommerkonferansen i august og håper at dette vil være en anledning til å kunne møtes. Påmeldingen åpner i mars, og på side 49–50 kan dere lese mer om konferansen. Temaet er LK20, og vi lover faglig flotte plenum og verksteder – og flotte dager i Sandefjord.

Til slutt vil jeg si noe om arbeidet med ressursen om FN sine bærekraftsmål som LAMIS har kjøpt fra vår danske samarbeidspartner. Lokallagene gjør en kjempejobb med ressursen, og på sommerkonferansen vil vi presentere aktiviteter som er oversatt og tilrettelagt for LK20.

(fortsatt fra side 53)

noterte seg, samt kompetansepakken frå Udir, som kan gi oss støtte i algoritmisk tenking. Det viktigaste vert uansett å ha fokus på gode spørsmål og å snakke om korleis elevane tenkjer.

Hugs at vurdering skal vere ein integrert del av opplæringa, det står ingen stad at vi skal ha tradisjonelle prøver i matematikk.

Temakvelden avslutta med at Hanne takka Renate for at ho tok turen til oss og heilt til slutt med å invitere til sommerkonferanse i Sandefjord i august 2022. Tema: Vi går i dybden!

LAMIS-verksteder på November-konferansen 2021

v/LAMIS sentralstyre

Novemberkonferansen er noe mange ser frem til, og det var derfor utrolig kjekt at konferansen kunne gjennomføres i Trondheim på slutten av 2021. Det ble to dager med faglig flotte plenum og verksteder, og vi i LAMIS sentralstyre fikk muligheten til å holde to verksteder der vi presenterte tema vi arbeider med og er opptatt av.

Det første verkstedet hadde tittelen: Verktøy for å beherske utforsking og problemløsing i praksis.

I LK20, læreplan i matematikk, innleder ordet «utforske» hele 12 av 32 kompetansemålbeskrivelser for ungdomstrinnet. For 1P finner vi aktiviteten «utforske» nevnt i en tredel av kompetansemålene. Dette indikerer at arbeidet med kjerneelementet utforsking og problemløsing er sentralt for å gi elevene en helhetlig matematisk kompetanse, og at elevene må få anledning til å praktisere systematisk bruk av ulike strategier og fremgangsmåter i jakten på en eller flere mulige løsninger.

Dette er en «krevende sport» for både lærer og elev, og på verkstedet fikk deltakerne sammen i grupper både gjøre og diskutere åpne oppgaver, oppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde og problemløsningsoppgaver fra skriftlig eksamen i matematikk for 10. trinn og 1P.

Verkstedet var fulltegnet, og deltakerne sto i grupper og jobbet på vertikale tavler. Dette ble vi introdusert for av Peter Liljedahl på Novemberkonferansen 2019, og er en måte å jobbe på som vi bruker mye i vårt arbeid i LAMIS.

Marianne, Kari Anne og Odd Bjørn fra sentralstyret ledet oppsummering av oppgavene og fikk i gang gode diskusjoner på spørsmål som; Hvordan engasjerer og motiverer vi elevene til å tenke selv? Hvilke verktøy trenger vi for å beherske utforsking og problemløsing i klasserommet? Hvordan trener vi elevene i systematisk bruk av sentrale problemløsningsstrategier?

I midten av januar publiserte Udir et revidert eksempelsett for eksamen i matematikk 10. trinn. Vi vet at mange er engasjert i endringen i oppgavetyper til eksamen og hvordan jobbe mer med utforskende oppgaver og få dialog i matematikkundervisningen. Vi har derfor bestemt oss for at vi i slutten av februar inviterer til en digital kveld der vi kan både løse oppgaver og diskutere sammen i grupper og i plenum. Følg med på vår hjemmeside og fb-gruppe.

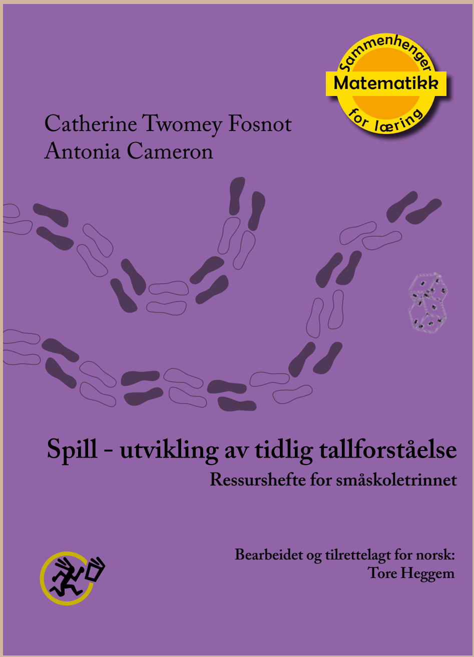
Det andre verkstedet hadde tittelen; TVERRFAGLIGE TEMA I LK20 med utgangspunkt i FNs 17 bærekraftsmål.

LAMIS ønsker å gjøre matematikk til et fag som oppleves som relevant, nyttig og motiverende for alle elever. Når vi spør elever hva de tenker er viktig å lære for fremtiden er svarene vi får; klima, bærekraft, teknologi, det å forstå andre, økonomi og helse. Gode tverrfaglige oppgaver er motiverende for elevene, og når elever opplever lærestoffet på skolen som relevant, blir de engasjert i arbeidet, både kognitivt og følelsesmessig.

LAMIS samarbeider med lærerorganisasjoner i de andre nordiske landene, og har i den forbindelse fått muligheten til å oversette en tverrfaglig ressurs med aktiviteter knyttet til de tverrfaglige temaene i LK20.

På verkstedet fikk deltakerne prøve ut en aktivitet fra Bærekraftsmål 11 (Bærekraftige byer og lokalsamfunn). Aktiviteten vi gjorde sammen var i matematikk knyttet til algoritmisk tenking og programmering. Det ble latter og gode diskusjoner, og vi fikk nyttige innspill til hvordan ressursen kan brukes med elever. Vi i LAMIS fortsetter arbeidet med å oversette og tilrettelegge ressursen, og vil presentere arbeidet på LAMIS sommerkonferanse i Sandefjord i august.

Fosnot-hefter oversatt til norsk



Spill

Utvikling av tidlig tallforståelse

Spill – utvikling av tidlig tallforståelse er et ressurshefte som kan brukes gjennom hele skoleåret. Det består av 24 spill som kan inngå i undervisningsopplegg eller brukes individuelt etter behov. Lek og spill er naturlig del av barns læring og brukes som motivasjon for å utvikle tallforståelse og automatisere tallfakta. Elevene samarbeider i spillene, de må dele strategier med hverandre. For hvert spill gis det oversikt over det aktuelle læringslandskapet og faglige mål. Utdrag fra elevsamtaler viser samspill mellom lærer og elever med muligheter til utvikling. Spillene passer best på første og andre trinn, men kan også brukes for litt eldre elever.

Bearbeidet og tilrettelagt for norsk ved Tore Heggem.

Froskehopp. Algebra gir elevene inngang til algebra og algebraiske uttrykk og symboler. Det er særlig rettet mot mellomtrinnet.

Beste kjøp. Brøk – addisjon og subtraksjon er knyttet til brøk, desimaltall og prosent. Det er særlig rettet mot mellomtrinnet.

Dagligvarer. Multiplikasjon – en innføring er knyttet til multiplikasjon og divisjon. Det er særlig rettet mot elever på 3.–5. trinn.

Køyesenger. Tidlig tallforståelse handler om tallforståelse, addisjon og subtraksjon. Det er særlig rettet mot de tre første skoleårene.

Arkitektprosjektet handler om areal, omkrets og volum. Det passer på grunnskolens mellom- og ungdomstrinn.

Hvert hefte koster 295,–

Caspar Forlag AS · www.caspar.no

Bestill hos ordre@fagbokforlaget.no

Returadresse: Tangenten / Caspar Forlag AS, Kanalveien 51, 5068 Bergen

Matematikksenteret

LAMIS