tidsskrift for matematikkundervisning 34. årgang

tangenten 1/2023

Tidsskrift for matematikkundervisning

Utgitt av Caspar Forlag AS

ISSN 0802-8192

Adresse
Caspar Forlag/Tangenten
Kanalveien 51
5068 Bergen
tangenten@caspar.no
www.tangenten.no

Abonnementspriser (fra 1.1.2023)

Ordinært	499,– per år
Studenter	289,– per år
Klassesett	270,– per år
(ved minimum 12 studenter)	
Utland	500,– per år

Utgivelsesdatoer
20. februar, 20. april
20. september, 20. november

Layout
Caspar Forlag / Aasmund Kvamme

Grafisk produksjon
John Grieg, Bergen

Artikler til bladet sendes til
tangenten@caspar.no

Omslaget
Utforming: Sigrun Werner

Adresseendringer
Medlemmer i LAMIS må bruke
post@lamis.no
for å melde fra om adresseendinger.
Direkteabonnenter hos Caspar Forlag bruker
post@caspar.no

Retningslinjer for vanlige artikler
tangenten.no/for-bidragsytere/retningslinjer-for-forfattere/

Retninglinjer og informasjon for fagfellevurderte artikler
tangenten.no/for-bidragsytere/retningslinjer-for-niva-1-artikler/

Fagfellevurderte artikler er merket som dette i boksen med forfatteropplysninger.

Korden

Den gode oppgaven

Den gode oppgaven står sentralt i matematikkundervisning. Lærere er på jakt etter oppgaver som kan engasjere elevene, som gir passende utfordring til alle, som åpner for resonnement og argumentasjon, gir rom for ulike representasjonsformer og som hele tida har mer å tilby. Oppgaver som er rike, åpne, har lav inngangsterskel og stor takhøyde, som er problemløsningsoppgaver og grubliser. Kjære barn har mange navn.

Spennende ting skjer når slike gode oppgaver møter lærere og elever. Noen ganger faller gode oppgaver på stengrunn – det skal så lite til, noen ganger ødelegger vi en oppgave ved at vi gir for mye hjelp, eller ved at vi begrenser istedenfor å åpne opp. Andre ganger tas samme oppgave til nye høyder.

Oliver Thiel viser eksempel på det siste i sin artikkel. Han tar utgangspunkt i en oppgave fra Tangenten og viser at den kan løses av barnehagebarn og også gi eldre elever utfordringer. Den kan knyttes til lekedyr og tegning, til arbeid med tall, algebra, bevis og programmering. Thiels artikkel har gitt forsidedesigneren inspirasjon til dette nummerets forside. Kanskje kan den inspirere lesere til å se utvidelsesmuligheter i matematikkoppgaver – send gjerne en artikkel til Tangenten om elevers kreative møter med oppgaver!

Jeg ser en sammenheng med Marit Johnsen-Høines sin artikkel, hvor hun beskriver en praksis hvor læreren klarer å kombinere læringsmål og fantasi, det planlagte og det spontane. Hun beskriver en lærer som tilbyr elevene situasjoner de kan lære av, og er fleksibel når elevene overrasker læreren med nye ideer. Artikkelen ble skrevet i 2003. Den er fortsatt aktuell, men det kan diskuteres om den er blitt mer eller mindre aktuell på tjue år. Er LK20 mer eller mindre i tråd med en slik tankegang enn L97 var? Tråder kan trekkes tilbake til 1939-planen. Den la også vekt på at «elevene selv blir mest mulig aktive», som beskrevet i dette nummeret.

Når vi trykker opp igjen en god artikkel fra 2003, er det også for å markere justeringer i Tangentenredaksjonen. Tre veteraner, Marit Johnsen-Høines, Ole Einar Torkildsen og Aasmund Kvamme, har gått ut av den formelle redaksjonen og får færre redaksjonelle plikter. De avslutter ikke engasjementet for Tangenten, men bidrar med sin oversikt og erfaring i et redaksjonsråd. Kvamme fortsetter dessuten som formgiver av bladet.

Bjørn Smestad

Thiel

Dyr som blir uvenner

I Tangenten 1/2018 presenterte Mike Naylor oppgaven «Dyr som blir uvenner» som aktivitet for barnehagebarn. Jeg vil her vise at det er en rik oppgave for alle trinn som kan løses på ulike nivåer.

«Vi har 8 dyr: 2 griser, 2 kyr, 2 hester og 2 sauer. Dyrene må plasseres ved siden av hverandre i 8 ruter slik at

– mellom grisene er det ett dyr
– mellom kuene er det to dyr
– mellom hestene er det tre dyr
– mellom sauene er det fire dyr»
(Naylor, 2018, s. 35)

Han beskriver hvordan denne oppgaven kan brukes med barnehagebarn. Siden har jeg og mine kollegaer brukt denne oppgaven med barn, barnehagelærere og barnehagelærerstudenter. Med åtte dyr (fire par) er den ganske lett å løse. Enda lettere er det med tre par. Spennende blir det når man spør etter løsninger med fem, seks, sju, åtte eller enda flere par. «Er det mulig å finne en generell løsning uansett antall par?» spør Naylor (2018, s. 36) til slutt og tilføyer: «Denne oppgaven fasinerer meg, og jeg har ikke funnet en løsning ennå.»

Oliver Thiel
Dronning Mauds Minne
Oliver.Thiel@dmmh.no

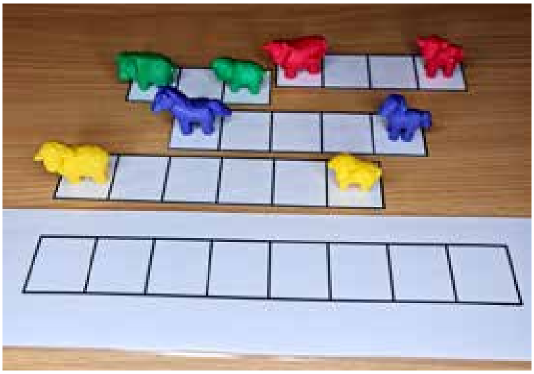
Problemet er kjent i matematikken. C. Dudley Langford (1958) kom på det da hans sønn i barnehagealder lekte med fargete klosser. Han fant løsninger for noen spesielle tilfeller, men ikke den generelle løsningen. Jeg presenterer min vei mot en generell løsning og diskuterer hvordan lærere kan hjelpe elever til å løse problemet på forskjellige nivåer. Artikkelen har to deler. I den første delen utforsker jeg når det finnes en løsning. Den andre delen presenterer løsningen og hvordan lærerne kan hjelpe elever til å finne den. Den andre delen ligger på Tangentens nettside[1].

Tilnærmingen

Inspirert av konteksten med dyr kaller jeg det som dyrene skal plasseres i, en *stall*, og rutene kaller jeg *stallbokser*. Når vi jobber med tre eller fire par, kan vi gjøre det enaktivt, med plastdyr, slik som Naylor (2018, s. 35). Under koronapandemien har jeg brukt en online versjon som jeg har laget i Scratch: (https://scratch.mit.edu/projects/421576551). Det går også an å bruke andre ting, for eksempel figurer i ulike farger (Thiel et al., 2017, s. 23). Uansett hva vi bruker, blir det tungvint når det blir flere par. Det er lurt å bruke tall. Grisene får ettallet, kuene totallet osv. Jeg bruker null hvis plassen er tom.

For tre par finnes bare én løsning og dens speilbilde. Jeg begynner med hestene. De har størst avstand. Det finnes ikke så mange muligheter for hvor de kan plasseres. [3|0|0|0|3|0] er én mulighet, [0|3|0|0|0|3] er dens speilbilde. Når hestene er plassert, finnes bare én mulighet for kuene: [3|0|2|0|3|2]. Og så er løsningen funnet: [3|1|2|1|3|2].

Den opprinnelige oppgaven med fire par løser mange ved å prøve, feile og justere. I videoen https://youtu.be/G8beWUvzCX4 kan du se et hjelpemiddel som en gruppe lærerstudenter ved Humboldt-universitetet i Berlin har utviklet for å løse oppgaven: Treklosser sørger for at dyrene alltid har den ønskede avstanden. Vi kan også bruke papirstriper (se figur 1). Langford (1958) har også brukt papirstriper.



Figur 1: Papirstriper hjelper til å finne løsningen.

Med litt erfaring i problemløsning vil man finne en systematisk fremgangsmåte. Min algoritme er å begynne med paret med størst avstand. Hvert par plasserer jeg så langt til venstre som mulig. Slik løser jeg oppgaven i fem steg:

1: [4|0|0|0|0|4|0|0]
2: [4|0|3|0|0|4|3|0]
3: [4|2|3|0|2|4|3|0]
Men nå må jeg korrigere fordi
det ikke er plass for grisene.
4: [4|0|3|0|2|4|3|2]
5: [4|1|3|1|2|4|3|2]

Ikke alle tall fungerer

Det er innlysende at oppgaven ikke fungerer med ett par. Kravet er at det skal være ett annet dyr mellom grisene, men med bare ett par har vi ikke andre dyr. Den fungerer heller ikke med to par. Det finnes seks mulige plasseringer: Ved [2|1|1|2] har kuene riktig avstand, men ikke grisene. Ved [2|1|2|1] har grisene riktig avstand, men ikke kuene. Ved [2|2|1|1] har verken kuene eller grisene riktig avstand. De andre tre mulighetene får vi ved å bytte enere og toere: [1|2|2|1], [1|2|1|2] og [1|1|2|2].

Når vi prøver å finne en løsning for fem eller seks par, vil vi gi opp etter en stund. Algoritmen bruker 66 steg for å finne ut at det ikke finnes en løsning for fem par og 295 steg for seks. For sju par, derimot, finner vi en løsning i 16 steg. Hvis vi fortsetter, oppdager vi at det finnes løsninger for 3, 4, 7, 8, 11, 12 osv. par, men ikke for 1, 2, 5, 6, 9, 10 osv. Det samme oppdaget også Langford (1958), men han visste ikke hvorfor det var slik.

Det har noe med par- og oddetall å gjøre. Ett av kompetansemålene etter 2. trinn er «at eleven skal kunne utforske og beskrive generelle egenskaper ved partall og oddetall» (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 5). Hvis vi plusser sammen et partall og et partall, er resultatet et partall. Det overrasker ikke, selv om det kan være spennende å utforske det (se Krogh Arnesen, 2022, s. 2–3). Det overrasker meg mer at resultatet også er et partall hvis vi plusser sammen et oddetall og et oddetall. Hvorfor er det slik? Jeg mener at barn på 2. trinn allerede kan utforske det hvis de bruker konkreter, for eksempel tellebrikker. Hvert oddetall er et partall pluss én. Oddetall pluss oddetall er altså partall pluss én pluss partall pluss én, og det er partall pluss partall pluss to som er et partall. På samme måten kan barn finne ut at partall pluss oddetall alltid er et oddetall, og det gjelder også for oddetall pluss partall (figur 2).

I telleramsen er annethvert tall et oddetall. Derfor får vi et interessant mønster når vi plusser sammen tallene i telleramsen:

1:	et oddetall
1 + 2 = 3:	et oddetall
1 + 2 + 3 = 6:	et partall

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$: et partall
$1 + \ldots + 5 = 15$: et oddetall
$1 + \ldots + 6 = 21$: et oddetall
$1 + \ldots + 7 = 28$: et partall
$1 + \ldots + 8 = 36$: et partall
…

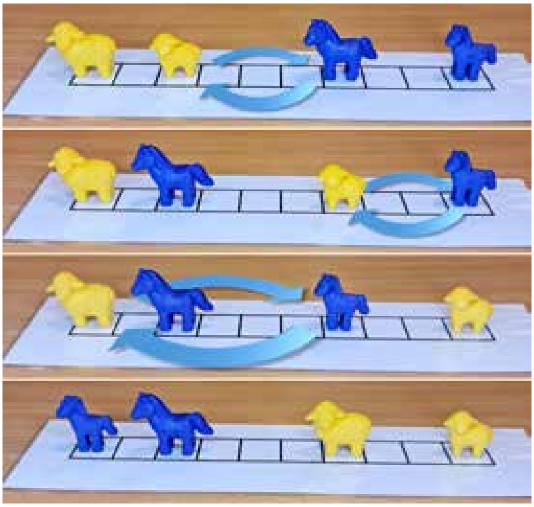
Mønsteret fortsetter: oddetall, oddetall, partall, partall osv. Her oppdager vi sammenhengen med vårt problem: For N par finnes det en løsning hvis $1 + \ldots + N$ er et partall. Det er nemlig ikke mulig å plassere parene slik at summen av mellomrommene er et oddetall. For å skjønne hvorfor det er slik, kan vi begynne med alle parene plassert uten mellomrom: $[1|1|2|2|\ldots|N|N]$. Summen av mellomrommene er null. Vi kan forandre mellomrommene ved å bytte to dyr som tilhører forskjellige par. Generelt finnes det tre muligheter for hvordan mellomrommene kan endres:

Begge mellomrom økes (eller minskes) med det samme (se eksempelet øverst på figur 2). Summen økes (eller minskes) med et partall.

Det ene mellomrommet økes med det samme tallet som det andre minskes med (se eksempelet midterst på figur 2). Summen endres ikke.

Den tredje muligheten er litt vanskelig siden begge mellomrom endres med forskjellige tall (se det tredje eksemplet på figur 2), men etter hvert skjønner man at summen endres med det dobbelte av avstanden mellom de to indre dyrene, altså med et partall.[2]

Riktignok viser figur 2 bare konkrete eksempler, men det som skjer med summen når vi bytter dyr, er det samme uansett hvor stor avstandene mellom dyrene faktisk er. Slik kan vi argumentere for at dette er generiske eksempler (Krogh Arnesen, 2022, s. 7). I tillegg til argumentasjon for at avstandene ikke spiller en rolle, må vi også argumentere for at det ikke finnes flere muligheter. Det finnes flere muligheter for hvordan dyrene kan plasseres og byttes, men hver mulighet tilhører en av disse tre kategoriene.



Figur 2: Ved å bytte dyr kan vi endre avstandene mellom dyrene.

Uansett hva vi gjør, så er det ikke mulig å få summen til å bli et oddetall. Det finnes altså bare en løsning for 3, 4, 7, 8, 11, 12 osv. par. Det er tall som er i fire-gangen (4, 8, 12 …) eller én mindre enn tall i fire-gangen (3, 7, 11 …). Litt mer abstrakt kan vi si at det finnes en løsning for N par hvis N eller $N + 1$ er delelig med fire.

Et formelt bevis

Davies (1959) presenterer et formelt bevis. Det er mye kortere, men mer abstrakt: Hvis det første dyret av paret med mellomrom r står i stallboks a_r, så står det andre dyret i stallboks $a_r + r + 1$. Tallene a_r, $a_r + r + 1$ for $r = 1, 2 \ldots N$ er tallene $1, 2 \ldots, 2N$ i en viss rekkefølge (fordi hvert dyr står i akkurat én stallboks). Derfor er

$$\sum_{r=1}^{N}\left(2a_r + r + 1\right) = \sum_{i=1}^{2N} i = N\left(2N+1\right).$$

Av det følger at

$$\sum_{r=1}^{N} a_r = \frac{3N^2 - N}{4}$$

Siden summen må være et naturlig tall, må N være $4m$ eller $4m - 1$ for naturlige tall m (Davies, 1959, s. 253–254). Det beviser at det finnes en løsning for Langfords problem bare hvis N eller $N + 1$ er delelig med fire.

Konklusjon

Så langt har vi ennå ikke jobbet med å finne en generell løsning til Langfords problem «Dyr som blir uvenner». Allerede det første delproblemet, nemlig når det er løsbart, og når det ikke er løsbart, er spennende å jobbe med. Det som er så fascinerende, er at det kan gjøres på mange ulike nivåer. Barnehagebarn kan utforske det på en lekende måte. Elever i barneskolen kan utforske det enaktivt, men med fokus på tall og deres egenskaper. Elever på ungdomsskolen kan prøve å finne et generisk eller formelt bevis for de sammenhengene som vi har oppdaget. Problemet «Dyr som blir uvenner» har ikke noen praktisk relevans i hverdagen, men etter min erfaring er det motiverende for både barn og voksne å jobbe med det. Og mens vi jobber med det, lærer vi mye om matematikk og hvordan vi kan løse problemer.

I den andre delen av artikkelen (som ligger på Tangentens nettside), vil jeg presentere hvordan lærere kan hjelpe elever til å finne en generell løsning. Det kan også gjøres på ulike nivåer. På veien mot løsninger er det mye spennende som kan utforskes, og interessante mønstre vi kan oppdage.

Note

1 Den andre delen av artikkelen ligger på https://www.tangenten.no/filer/2022/thiel-del-2.pdf

2 Vi betegner sauene med S og s og hestene med H og h og avstanden fra S til H med SH osv. Når vi bytter dyrene, endres mellomrom mellom sauene med $-SH - Hh$ og mellomrom mellom hestene med $-Hh + SH$. Summen endres altså med $-SH - Hh - Hh + SH = -2Hh$.

Referanser

Davies, R. O. (1959). On Langford's Problem (II). *The Mathematical Gazette, 43*(346), 253–255. https://doi.org/10.2307/3610650

Krogh Arnesen, K. (2022). Generiske eksempler som argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(1), 2–8.

Kunnskapsdepartementet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn*. Utdanningsdirektoratet.

Langford, C. D. (1958). Problem. *The Mathematical Gazette, 42*(341), 228–228. https://doi.org/10.2307/3610395

Naylor, M. (2018). Dyr som blir uvenner. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(1), 35–36.

Thiel, O., Loviscach, J., Vaz-Rebelo, P., Kostova, N., Josephson, J., Jessat, M. & Hottmann, A. (2017). *vidumath – Kreative videoer i matematikkopplæring*. Kulturring. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.17086.59208

Belboe, Rossing

Matematikk som nødvendig redskap for design

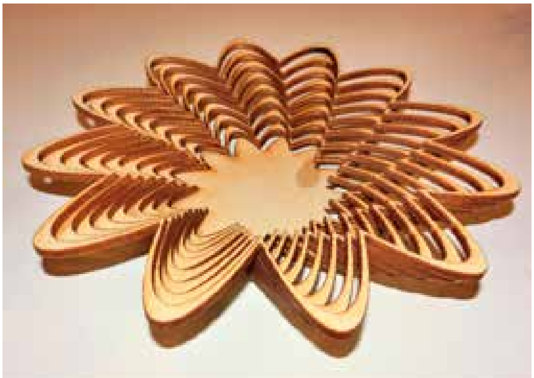
Kombinasjonen av matematikk og kunst og håndverk er spennende og viser at matematikk kan gi elevene mulighet til å designe et nyttig og vakkert produkt. I denne artikkelen skal vi beskrive noe av det som skjedde da vi ga elever i barneskolen digitale verktøy og utfordret dem til å konstruere skåler ut fra egne kreative ideer og innfall, men med beskjed om at de skulle bruke matematikkunnskapene sine.

Eksemplene under er hentet fra en utprøving av verkstedsaktiviteten «Nytt og gammelt» ved Vitensenteret i Trondheim i 2019.

I alt deltok tre grupper à 13–14 elever fra 5. og 6. trinn fra en barneskole i Trondheim. Hver gruppe ble delt i to, hvorav den ene drev med treskjæring («gammelt»), og hvor den andre laget laserkuttete skåler («nytt»), deretter byttet de. Elevene hadde på forhånd blitt bedt om å velge to geometriske figurer som kunne være utgangspunkt for design av skålene. Ved ankomst til Vitensenteret fikk de ti minutters opplæring i bruk av tegneprogrammet Corel-

Anne Birgitte Belboe
Byåsen skole
Anne-Birgitte.Belboe@ou.trondheim.kommune.no

Nils Kristian Rossing
Skolelaboratoriet ved NTNU
nils.rossing@ntnu.no



Figur 1: Skål laget av seks ellipser.

DRAW og de ble bedt om å være oppmerksomme på ting de oppdaget underveis som de syntes var interessante eller rare.

I CorelDraw lærte de hvordan de kunne lage ellipser og andre former, kopiere og dreie figurer en gitt vinkel, speile om vertikale og horisontale akser, skalere (i prosent) og få fram omhyllingskurven (ytterkanten av samlingen av former). De hadde dessuten tilgang til seks hjelpeark for å finne fram i menyene. De fikk også hjelp til å skrive ut designet på Vitensenterets laserkutter.

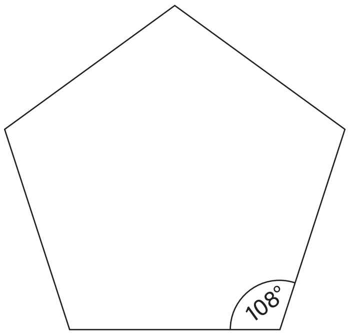
Tegningene og skålene som er vist i denne artikkelen, er elevenes egne og er hentet ut av arbeidene deres, men sammensetningen og kommentarene er gjort av instruktøren. For å kunne dokumentere det elevene gjorde og ikke minst hvordan de resonnerte, ble de bedt om å presentere produktet sitt og fortelle hvordan de hadde tenkt. I tillegg ble de intervjuet i etterkant. Elevene fikk dessuten beskjed om ikke å lukke programmet når de avsluttet. Dermed fikk instruktøren anledning til å gå tilbake i prosessen ved å bruke angreknappen. La oss se på et par eksempler.

To gutter med forskjellige kunnskaper om matematikk

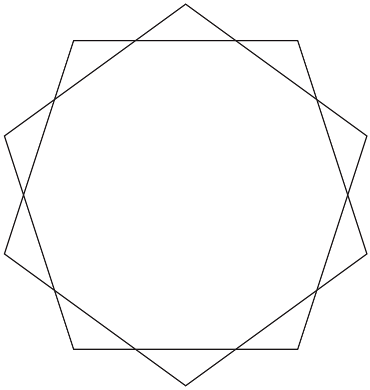
I dette tilfellet ble den ene gutten, den matematikkflinke ifølge læreren, sittende en del alene og fordype seg i en problemstilling, mens den andre tok seg en tur for å studere hva de andre lagene holdt på med. Fordelen var at den flinke eleven fikk brynt seg, ulempen var at den andre forlot oppgaven for en periode da han ikke skjønte hva den første holdt på med.

De to guttene hadde på forhånd bestemt seg for å ta utgangspunkt i femkanter (figur 2 a). En femkant kan lages ved at man henter fram en likesidet trekant fra menyen for så å be programmet øke antallet kanter til fem. Dermed lager programmet en regulær femkant.

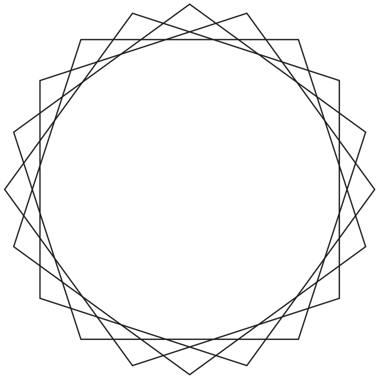
Problemstillingen var hvor mye den neste femkanten skulle roteres i forhold til den første slik at de passet til hverandre. Mens den ene gutten blir sittende og fundere på dette, går den andre rundt og ser hva de andre gruppene holder på med.



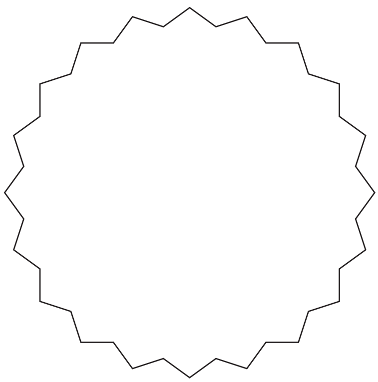
Figur 2 a: Vinkelsummen i en femkant er 540°, dvs. 540°:5 = 108° per vinkel. Fem like lange linjestykker blir en femkant når vinkelen mellom linjestykkene er 108°. Hvis man roterer en femkant 108°×5 så har manrotert den en hel runde rundt.



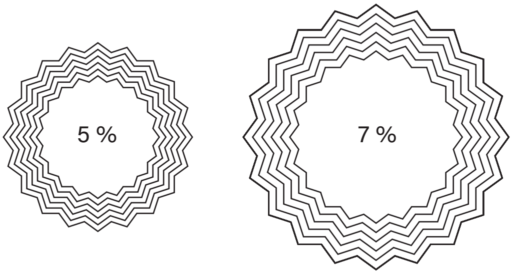
Figur 2 b: Kopier og roterer figuren 108° så havner hjørnet midt mellom hjørnene til originalen.



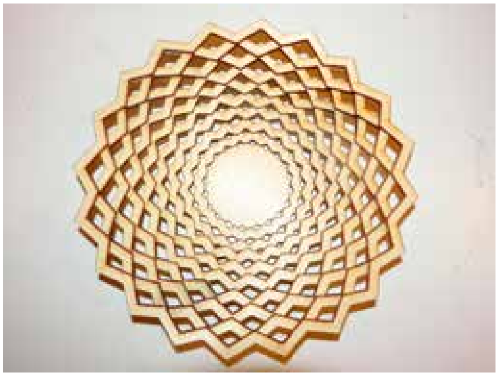
Figur 2 c: Kopierer og roterer figuren 108°:2 = 54° så havner hjørnet midt i mellom hjørnene til forrige kopi og originalen. Siste kopi blir da 54° + 108° = 162°. De fire figurene roterer derfor 0°, 54°, 108° og 162°.



Figur 2 d: Merk alt, bruk kommandoene Objekt, Shape, Weld.



Figur 2 e: Bruk kommandoene Kopier, Lim inn, Forminsk. Her ser vi at 5 % forminskning blir for tynt. Derfor har man her brukt 7 % forminskning. 100 %, 93 %, 86 %, 79 %, 72 %, 65 %, 58 %, 51 %, 44 %.



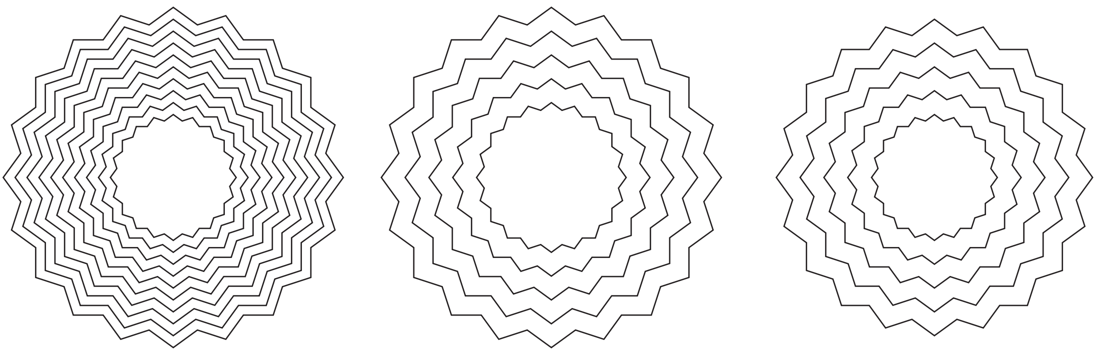
Figur 4: Kopi[1] av den roterte skåla som elevene designet og laget.

Den gjenværende gutten bestemmer seg for å rotere den andre femkanten slik at spissene akkurat treffer midt på langsiden til den første. Han ser ut til å forstå at for å få til det må han først bestemme størrelsen til vinklene i hjørnene på femkanten.

Han prøvde først med en vinkel på 360° / 5, men han fant fort ut at det ble galt. For å lede ham på rett vei spør instruktøren hva vinkelen i en likesidet trekant er, og han svarer raskt at den er 60°, og at vinkelsummen i en trekant er 180°. Læreren spør så om han vet hva vinkelsummen i en firkant er. Deretter forlater hun eleven som blir sittende og gruble over problemet. Det går imidlertid ikke mange minutter før han kommer gledestrålende tilbake og forkynner: «Æ e blitt oppfinner. No veit æ kordan æ kan finn vinkelsummen når det blir fler kanta.» Deretter følger en forklaring om at det blir 180° mer for hver ny side som blir lagt til. Det ble imidlertid litt krevende for de andre som var med på samlingen når han skulle formidle sin oppdagelse i plenum.

Selv om han brukte mer tid enn de andre, kom han fram til at vinkelsummen for femkanten ble 540°, og delt på 5 ble vinkelen i hvert hjørne 108°. En bragd av en elev på 5. trinn utført på 20 minutter, mener vi. Og han hadde all grunn til å være strålende fornøyd. Han oppdaget så at han måtte dreie kopien 36° for å treffe med spissen midt på sidekanten til den første femkanten (figur 2 b).

Men han nøyde seg ikke med det, han bestemte seg for å legge fire femkanter på hver-



Figur 3: Mønsteret til venstre har en forminskningsfaktor på 7 %. De to andre er oppdelt i to mønster slik at bruk av annenhver ring kan stables med overlapp uten å roteres.

andre som utgangspunkt for mønsteret sitt (figur 2 c). Nå hadde han knekt koden og var tydelig på at han måtte rotere hver femkant en «kvart», som han uttrykte det. Dvs. 1/4 av vinkelen mellom to av hjørnene, som blir 72°/4 = 18°. De tre ekstra femkantene ble derfor dreid «en kvart», «halvveis» og «trekvart», slik han uttrykte seg.

Han forteller også hvordan han først gikk fram for å bestemme vinkelen, ved at han prøvde med ulike vinkler. I ett forsøk roterte han femkanten litt for lite og i det neste litt for mye ut fra øyemål. Selv om partneren var mer enn godt nok fornøyd med en tilnærmet riktig vinkel, var konklusjonen hans: «Dette må æ regn mæ fræm te.» Underveis i prosessen oppdaget han også et verktøy i Corel-DRAW som gjør det mulig å måle vinkler. Dette brukte han flittig, og vi ser av figur 2 at vinkelmålet henger igjen i modellen et stykke utover i prosessen.

Deretter var det bare å bruke verktøyet i CorelDRAW for å finne omhyllingskurven, og arbeidet med å kopiere, forminske og sentrere kunne begynne.

Han forsøker med en forminskning på 5 %, men oppdager som flere andre, at dette er litt lite. I mellomtiden har makkeren hans «spionert» og kommet tilbake med beskjed om at 7 % er den optimale prosentsatsen, og fra nå av kommer også han på banen og utfører de resterende trinnene fram til ferdig skålmønster (figur 3).

Som et unntak får denne gruppen lov til å lage to skåler, en som krever rotasjon, og en for overlapp. I den forbindelse var det også naturlig å diskutere forskjeller i materialbruk. Overlappende ringer krever nemlig dobbelt så mye materiale.

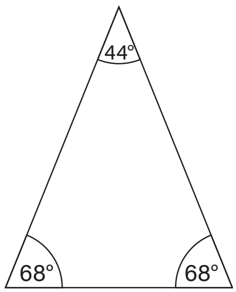
To jenter

To jenter hadde bestemt seg for å lage en stjerne, og siden CorelDRAW har et eget verktøy for tegning av stjerner, var det fristende å gjøre det enkelt. Siden dette skulle være en matematikktime og ikke en tegnetime, ble de av instruktøren utfordret til å konstruere stjerna selv og bruke matematikkunnskapene sine, for eksempel bruk av former, rotasjon og speiling: «Ikke skynd dere, bruk tid. Lek dere med matematikk, prøv nye ting og utforsk», sa hun.

De visste også at dersom de satte sammen trekanter, så kunne det bli stjerner av det. Så de startet med to likesidede trekanter og la dem oppå hverandre, slik at de fikk en stjerne med seks tagger.

Men så var det slik at den ene jenta ville ha én tagg i toppen og to som pekte nedover. For å få til det startet de med en litt tilfeldig likebeint trekant med en horisontal nedre kant (grunnlinje[2]) (figur 5 a). De sjekket også at det virkelig var en likebeint trekant, ved å måle vinklene ved grunnlinja og slik bekrefte at de var like store.

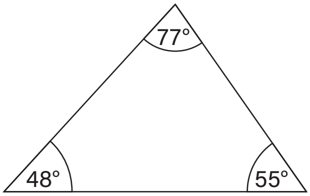
Det neste spørsmålet de måtte ta stilling til, var hvor mange tagger stjerna skulle ha. De hadde allerede bestemt seg for at to av taggene skulle peke nedover slik at de stakk ned under grunnlinja til den likebeinte trekanten. Dermed besluttet de like godt at det skulle stikke ut to tagger på hver av sidene i den likebeinte trekanten, dermed ble det totalt ni tagger på stjerna.



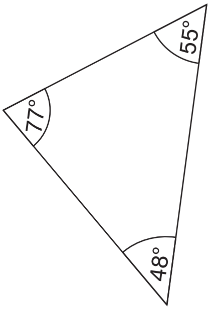
Figur 5 a

De konkluderte derfor helt riktig med at dette krevde bruk av totalt tre trekanter.

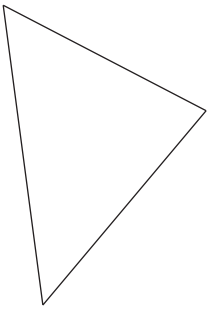
Så tegnet de en tilfeldig trekant som de syntes så fin ut (figur 5 b), og tok de vinklene de fikk, 48°, 55° og 77°. Denne trekanten dreide de i en passende vinkel («… som vart 82,4°») slik at den «spissesteste spissen kom ned» (figur 5 c) og la den prøvende oppå den likebeinte trekanten slik at det «så pent ut».



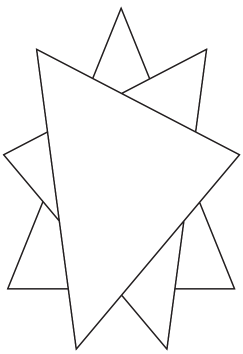
Figur 5 b



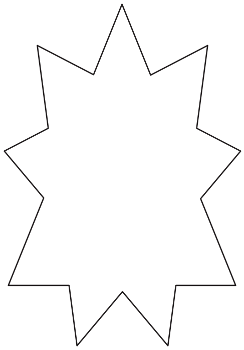
Figur 5 c



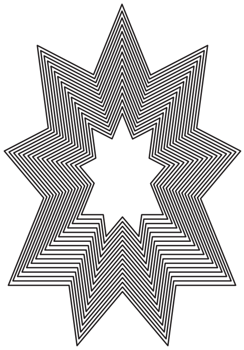
Figur 5 d



Figur 5 e



Figur 5 f



Figur 5 g

De speilet så denne trekanten om en vertikal akse (figur 5 d) og la alle tre trekantene oppå hverandre (figur 5 e). Når de sentrerte trekantene vertikalt og horisontalt, falt alt på plass, og de var strålende fornøyde. Hvilket følgende søte kommentar understreker: «De va bra vi valgt 48, 55 og 78 grader.» Til slutt fant de omhyllingskurven (figur 5 f).

Det mest overraskende var at de faktisk bestemte seg for å velge tre trekanter og ikke bare to som på mange måter ville ha vært naturlig. Det som synes å ha rokket ved et slikt valg, var den ene jentas forestilling om at stjerneformen skulle ha to spisser ned og én opp. Kommentarer synes å antyde at hun ønsket at den skulle være noe annet enn en tradisjonell julestjerne.

Det endelige skålmønsteret er vist på figur 5 g. Som vi ser er linjene særdeles tette, hvilket også ga dem en del utfordringer da skåla skulle skjæres ut. I alt ble det laget fem utskrifter av skåla, slik at de til sammen fikk nok uskadde ringer. Årsaken var at noen av ringene knakk når de skulle tas fra hverandre. Det endelige resultatet er vist på figur 6.

Sluttkommentar

Vi mener at tverrfagligheten er oppleggets styrke. Det må imidlertid understrekes hvor viktig det er at elevene vet hvilke fag de jobber med slik at de er i stand til å fokusere på kompetansemålene i de aktuelle fagene. Da elevene designet skålene, ble de utfordret til å bruke geometriske former, finne vinkler og passende skalering. Dermed ble de oppmerksomme på styrken ved å bruke matematikk i en designprosess. Da elevene laget karveskurd (treskjæring), var også matematikken til stede, men her ble det fokusert på håndverket, å skjære i tre og matematikken kom i bakgrunnen. Vi er derfor overbevist om at vi ikke bare kan blande fag, men vi må hjelpe elevene til aktivt å se verdien av å jobbe tverrfaglig, i dette tilfellet bruke matematikk som et nødvendig redskap i prosessen med å skape et produkt.

Når elevene oppmuntres til å bruke matematiske begreper og metoder, ser de at matematikken hjelper dem å formgi produktet. Framstilling av skåler på denne måten gir elevene stor grad av frihet i valg av utforming av produktet samtidig som de oppdager at det finnes regler for hva som gir et godt og funksjonelt design. Selve monteringen gir også mulighet til eksperimentering og utvikling av motoriske ferdigheter. De får dessuten med seg et produkt som de er stolte av.

Det er viktig at det er lav terskel for å ta i bruk tegneverktøyet, slik at de kommer fort i gang. Det ble derfor laget hjelpeark for de viktigste kommandoene, som elevene kunne låne ved behov mens de arbeidet. Selv om CorelDRAW koster en del, finnes det alternativer som er tilstrekkelige for å kunne gjennomføre det omtalte prosjektet, for eksempel Inkscape (Rossing et al., 2021).

Figur 6: Kopi[3] av skåla de to jentene designet og laget.

Laserkuttere er foreløpig lite utbredt på skolene, men de aller fleste av de tolv regionale vitensentrene er utstyrt med kraftige laserkuttere. Det er derfor mulig at elevene kan gjøre hele tegneprosessen i eget klasserom for så å komme til et nærliggende vitensenter for kutting av skåla.

Vi ble imidlertid litt overrasket da vi i etterkant av besøket spurte elevene hva de hadde likt best av å lage skåler med laserkutter og tradisjonell karveskurd med treskjærerjern. Til tross for at kvaliteten på treskjæringen ble svært varierende, var det dette de likte best. Årsaken syntes å være at treskjæringen ga dem en opplevelse av å komme tettere på selve skaperprosessen og kjenne hvordan jernet skar seg inn i treverket. Dette er noe å tenke på i vår digitaliserte verden.

Noter

1 Kopien er bygget av instruktøren Anne Birgitte Belboe. Foto: Nils Kristian Rossing.

2 Elevene brukte enda ikke begrepet «grunnlinje» men vi velger å bruke det her for å lette beskrivelsen.

3 Kopien er bygget av instruktøren Anne Birgitte Belboe. Foto: Nils Kristian Rossing.

Referanser

Rossing N. K., Kleiven K., Belboe A. B., Sæther R. & Hagen E. H. (2021). *Digital tegning, laser- og vinylkutting – DeKom, Rev. 1.5*, Vitensenteret i Trondheim https://www.ntnu.no/skolelab/bla-hefteserie (DeKom – Skapende aktivitet i klasserommet)

Smestad

Hvem var på forsida?

En del lesere har lagt merke til at Sigrun Werners forside på Tangenten 4/2022 var preget av både jul og matematikere, og noen har etterlyst en «fasit». Det var mer eller mindre klare hint om hvem de ulike pepperkakepersonene skulle forestille – og kanskje også snømannen? Ta gjerne en ny kikk nå og se om du finner ut av flere av dem før du leser videre.

Bjørn Smestad
Oslomet - storbyuniversitetet
bjorn.smestad@oslomet.no

De to portrettene på veggen (som havner på baksida av bladet når bildet brettes) er på en måte de enkleste, siden de har portrettlikhet med virkelige personer. Øverst henger ingen ringere enn Norges mest kjente matematiker, *Niels Henrik Abel* (1802–1829), slik han ser ut i det eneste autentiske portrettet av ham. Portrettet har vært brukt både på frimerker og sedler. Abel arbeidet blant annet med løsninger av femtegradslikninger (og beviste at det ikke finnes noen generell formel av typen vi kjenner for andre-, tredje- og fjerdegradslikninger). Det nederste portrettet er *Sophie Germain* (1776–1831), en fransk matematiker som blant annet arbeidet med tallteori og differensialgeometri – på en tid hvor kvinnelige matematikere ikke fikk tilgang til verken utdanning eller stillinger.

Pytagoras (ca. 570 fvt. – ca. 490 fvt.) er vel ikke kjent for nisselue, men den rettvinklede trekanten forbinder vel de fleste med ham. Det er riktignok høyst uklart hvem som faktisk burde ha hatt æren for de ulike innsiktene om rettvinklede trekanter. Bak Pytagoras tar *Arkimedes* (287 fvt. – 212 fvt.) et bad, samtidig som han kanskje får en idé (se lyspæren). Naturligvis vet vi ikke om han noen gang løp naken gjennom gatene i Syrakus og ropte «Eureka! Eureka!» etter å ha løst gåten om kong Hierons gullkrone mens han satt i badekaret – men det er ei god historie.

Til høyre for Arkimedes finner vi *Katherine Johnson* (1918–2020). Hennes bidrag til å beregne baner for romferder for NASA har blant annet blitt beskrevet i filmen *Hidden Figures* – hun var en bemerkelsesverdig matematiker i ei tid hvor både kjønn og hudfarge var hindringer for å studere og arbeide med matematikk. Til høyre for henne igjen står en mystisk person – det eneste hintet som forteller hvem det kan være, er eplet som er i ferd med å ramle i hodet på vedkommende. Dette bringer tanken til *Isaac Newton* (1643–1727), som ifølge mytene observerte et eple falle til jorden og derfor forsto at gravitasjonskreftene virker på store og små legemer.

Hengende rett over Newton er «the lady with the lamp»; *Florence Nightingale* (1820–1910). Som om ikke lampa var hint nok, så er kjolen dekorert med hennes berømte diagram som viste dødsårsakene til soldater i Krimkrigen – et forsøk på å få oppmerksomhet om de sanitære forholdene der.

Midt i det venstre vinduet henger en mann med tallfølgen 0–1–1–2–3–5–8–13–21–34–55 på beina. Overkroppen er dekorert med «Fibonaccispiralen», og personen må dermed være *Leonardo Pisano Fibonacci* (ca. 1175–ca. 1235). Han er også kjent for å ha bidratt til å gjøre det hindu-arabiske tallsystemet populært i Europa, på bekostning av de tradisjonelle romertallene.

For å forstå hvem den siste pepperkakepersonen er, må man kanskje kjenne igjen tallet 1729. Det kan jo virke som et anonymt tall, men noen vil kanskje tenke at «1729 er jo det minste tallet som kan skrives som summen av to ulike kubikktall på to ulike måter». Ifølge en anekdote var det i hvert fall det matematikeren *Srinivasa Ramanujan* (1887–1920) svarte da kollegaen *G. H. Hardy* fortalte at han hadde ankommet med en drosje med et helt vanlig nummer: 1729. (Spesielt interesserte lesere finner vel fort ut at det er $10^3 + 9^3$ og $12^3 + 1^3$ som gir 1729.) Ramanujan er mest kjent for at han kom med en rekke – nærmere 3900 – matematiske påstander uten å gi fullstendige beviser, og som matematikere helt fram til i våre dager har arbeidet med å bevise.

Hva med snømannen? Det kan jo se ut som at snømannen har et teleskop i hånda og noe som likner på Saturn, på hodet, og det kan bringe tankene til *Galileo Galilei* (1564–1642), som ved hjelp av sitt teleskop var den første som observerte Saturn, i 1610. At han holder ei jordklode i «hånda», kan skyldes at han var opptatt av jordklodens bane rundt sola.

Reinsdyret helt til venstre i vinduet, derimot, er vel kanskje rett og slett bare et reinsdyr. Kanskje Rudolf? Det er vel de færreste som da tenker på en kjent matematiker som *Christoff Rudolff* (1499–1543). Og uansett er det her som ellers i matematikken: Det kan ofte finnes flere mulige løsninger.

Hvis forsida har gitt litt julestemning og litt hjernetrim – og samtidig minnet om at matematikere kommer i mange varianter – så var den vellykket!

Johnsen-Høines

Det skjer i mellomrommet

Mellom elever og mellom elever og lærer, mellom situasjonene, mellom matematikken 'her og nå' og den matematiske fantasien. Å være der det foregår.

Besøk i småskolens klasser og samtale med elever og lærere gir et mangfoldig bilde. Visst finnes fremdeles klasserommene der matematikk er lærebokstyrt og der elever sitter og regner regnestykker 'uten å se på hverandre', der det viktigste er å ha regnet flest oppgaver (selv 1. klasser kan ha preg av dette). De blir imidlertid stadig færre.

Matematikk er blitt så gøy, forteller en lærer. Vi knytter matematikk til alle mulige aktiviteter. Barna leker, spiller spill, utforsker, fantaserer, finner ut. Matematikk er blitt et lystbetont og kreativt fag.

Men, kommenterer kollegaen, jeg er nå litt opptatt av at dette ikke tar helt av. Greit nok å spille spill og leke leker, men jeg er nå ikke sikker på at ungene ser all matematikken jeg ser. Klarer jeg for eksempel å hjelpe dem til å se sammenhengene mellom regnestykkene og aktivitetene? Jeg har ansvar for at de lærer det de skal! Det er viktig med matematikk-glede, men det er ikke nok. Og vi kan blendes. Er vi på veg inn i en ny periode med aktivitetspedagogikk?

Marit Johnsen-Høines
Høgskulen på Vestlandet
mjh@hvl.no

Artikkelen ble første gang trykket i Tangenten nr 2/2003.

Mange lærere løfter dette fram som et problem:

Det er viktig å finne fram til gode aktiviteter. Det er ikke nok. Hvordan hjelper vi elevene til å se sammenhenger?

Den vanlige samtalen

Dagen begynner, elevene sitter på benker i samtaleringen. Det er ufattelig hvordan de viltre ungene fra skoleplassen faller til ro der, etter noen måneders sosialisering som skolebarn. I samlingsstunden er det plass til småprat og viktig prat; og det er plass for rutiner. Oppmerksomheten vendes mot kalenderen. En elev får fjerne tirsdagen. I dag er det onsdag 27. november. De snakker om dag, dato, måned og år. ONSDAG. 27. NOVEMBER. 2002 står det på tavla.

Hvordan er været i dag? Hvor mange er det som hadde refleksvest på i dag? Det føres statistikk på store oppslag. Elevene snakker om hvor mange. De sammenligner. Det er merkbart at samtalen er preget av at noe av dette skjer nesten hver dag.

«Når vi roper opp i dag kan dere svare med et tall dere liker. – Charlotte?» «Fire»; «Fredrik?»

«seks». Elevene svarer med ulike tall. Seks går igjen. De er seks år, og en av dem har fødselsdag i dag. «Totusen og to,» sier en elev. De vanlige, lave tallene krydres med «totusenogtre», «totusen og tre tusen og tre», «uendelig», «uendelig og totusen og to», «tjuesju».

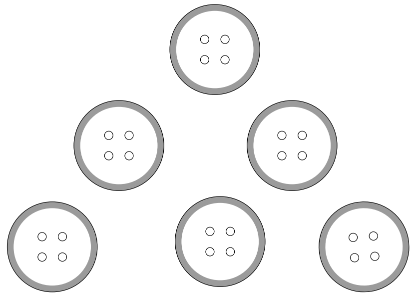
Læreren beveger seg mellom samtalens muligheter. November, snart er det siste måneden i året. Fantasier om høye tall, om uendelig. Fokus på seks. Hvor mange novemberbarn? Hvor mange refleksvester i morgen? Carlotte snakker om et trafikkuhell. Lars har fått ei bok i presang. Viktige beskjeder skal gis. Læreren vurderer muligheter og foretar valg, læreren utøver regi.

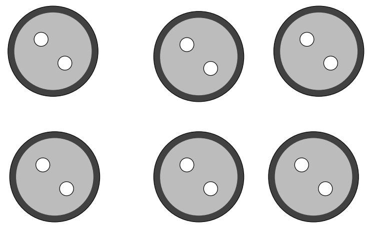
Tallene får en naturlig plass. Det handler mest om de lave tallene, men også om å fantasere om de høye tallene. Leke med dem. Da er det er ikke så nøye om de er riktige. De høye tallene omgir de små. De er en del av familien. Slik er det også med de bitte små: halvparten av halvparten av halvparten … Er det mulig å veie et hår? I samtaleringen stimulerer barna hverandre. Noen ganger gis det rom for tallfantasier.

I knappeverkstedet

Åtte barn har plass i knappeverkstedet. En periode har det vært det mest populære verkstedet. De vet at så lenge de 'arbeider godt', kan de være så mange. Mormoren til Lars hadde et stort skrin med mange flotte knapper, slangene de lager bærer preg av det. Prøv å lage et mønster som har et system, oppfordret læreren. Hun iakttar at ungene sorterer knappene før de begynner å lage mønster. Hun oppfordrer dem til å samarbeide. De beskriver planene sine, og ser at mønsteret utvikles underveis. De skal prøve ut og bestemme mønsteret før de begynner å feste knappene. Noen elever arbeider individuelt, noen arbeider parvis. Læreren ser det positivt at de veksler mellom samarbeid og individuelt arbeid. Hun erkjenner at de har ulike behov i forhold til tallbegrepsutvikling, og ser knappeverkstedet som virksomt til å arbeide på ulike nivå.

Aktiviteten gir grunnlag for nye aktiviteter. Barna lager ulike bilder. De lager ulike mønstre. I dag bruker vi akkurat seks knapper. Kan dere lage ulike mønster med seks knapper?





Hvor stor er dem minste knappen? Hvor stor er den største? Hva har knappene vært brukt til? Kan vi sy i en knapp? Trine kom på skolen med ei bok om slanger. Lars sin mormor har vært sydame.

Charlotte ser at noen tall blir like mange hver vei når hun lager dem firkantet, hun blir opptatt av kvadrattall. Etter hvert lager hun 9, 16, 25, 36. Det blir et stort prosjekt for henne og samarbeidspartnerne hennes.

Er det virkelig mulig å arbeide med trekanttall og kvadrattall i 1. klasse? Lærerens utfordring er å se muligheter og å velge hvilke baller hun løfter videre.

Mellom *dette lærer vi nå* og *matematisk fantasi*

Det er viktig at vi en periode arbeider nitid med at elever utvikler rike tallbegrep på måter som gjør at elevene blir kjent med tallets plass i tallrekken, vet at seks er en mer en fem, en mindre enn sju, at seks kan være to treere eller fire og to

… at halvparten av seks er tre, dobbelt blir tolv … at de arbeider med å se kardinaltall og ordinaltall i sammenheng … osv.[1] Samtidig er det er viktig at de får smake på tall som ligger utenfor dette området, tall som tjuesju eller seks millioner. At uendelig er et ’fantastisk’ begrep på samme måte som det er fascinerende at noe blir bittelite. At et tall kan skrives slik: 666666666 og at jeg kan fortsette så lenge jeg bare vil og det er et nytt tall. Det er en utfordring å inspirere elevene i bevegelse mellom «dette lærer vi nå» og den fantastiske matematikken som omgir tallene.

Læreren stimulerer den matematiske fantasien gjennom å følge elevene og spille på dem slik det ble gjort i samtaleringen. Læreren forvalter en matematikk der posisjonssystemet er viktig. Elevenes fantasering om 666666 … hjelper til å assosiere: «Seks minus to er fire.» ; Seks hundre minus to hundre hvor mye er det? Seks tusen minus to tusen … million … læreren har et matematisk prinsipp i sin hånd når hun leker med tallene sammen med ungene. At det er noe vi kan kalle rektangeltall, trekanttall, eller kvadrattall, kan hun tenke om på samme måte. Hun kjenner imidlertid også at hun må passe seg. Hun skal stimulere deres fantasi. Hun skal ikke overta. Det handler om å være matematisk spørrende sammen med elevene.

Mellom praktiske kontekster

Vi søker de gode aktivitetene; der elevene får være, bli kjent, utvikle videre, der de bruker tid. En lærer forteller om hvordan hun strevde før butikk-kroken ble et slikt sted. «I begynnelsen var den preget av kaos. De handlet og handlet, men det ble så rotete. Det ble liksom verken sammenheng, lek eller konsentrasjon. Jeg måtte forsøke å lage noen rammer omkring det som hjalp dem til å finne aktiviteten. Jeg måtte være tålmodig. Klasser er ulike. I en annen klasse jeg hadde fungerte butikkleken under elevenes regi! Jeg forsøker å utvikle situasjoner som er slik at elevene bruker matematikk, at de argumenterer og finner ut, sier læreren. Det er viktig at de utvikler godt språk for kunnskapene sine og at de erfarer dem gjennom bruk. Så merker jeg også at de lærer språk av hverandre. Jeg skal lære å bruke språket deres og å ha det som basis når jeg tilbyr skolespråket. Jeg må finne gode situasjoner for det.»

De gode aktivitetene gir gode *referanser*[2]. Læreren forsøker å ha stemmen som hjelper elevene til å se sammenhenger mellom ulike aktiviteter og situasjoner. Det betyr å søke de gode referansene, å forsøke å bruke dem i samtalene med ungene slik at de inspireres til å bygge ut sammenhengene. Når ungene bestemmer priser, når de veksler, gir penger igjen, lager huskelapper og kvitteringer, søker læreren de korte språklige uttrykkene som kan minne dem på. «Det er sånn som vi tenker når vi …» Noen situasjoner fremstår som meningsfulle. Matematikken brukes, den har en funksjon. Det er en utfordring å få denne meningsfullheten til å virke i forhold til andre aktiviteter. Aktivitetene får mening i lys av hverandre.

I klasserommet henger et bybilde. Hver elev har laget sitt hus. Bildet er resultat av et større arbeid: Vi studerte hus, hvordan hus er forskjellige. Da vi gikk ute, diskuterte vi hvordan de så ut. Vi så på hytter som unger bygde i en hage og noen drivhus. Ungene tegnet mange ulike hus i tegnebøkene sine. De fantaserte om hus; grisen sitt hus fra eventyret, torneroseslott, slottet i Oslo, huset jeg bor i, hundehuset hos bestefar. Vi merket hvor gode iakttagere ungene ble, og hvor flinke de ble til å beskrive. Noen tegninger var detaljerte, andre ikke. Vi snakket om hva alle hus hadde.

Når vi arbeider med andre geometriske aktiviteter merker vi ofte hvordan de gjenkjenner og beskriver geometriske egenskaper med referanse til hus. De har lært om geometriske figurer. De har lært å iaktta, gjenkjenne og se forskjeller. Akkurat her merker vi at aktivitetene preger hverandre. Vi forsøker å påvirke til det.

Slik kan det bli med en aktivitet fra Lamisheftet *Matematikkens dag* 2003.[3] Elevene skal lage et bilde av en sirkelflate. Elevene klipper opp biter og setter sammen bildet. De vurderer former, størrelser og plassering – etter hvert lages et fint bilde. En slik oppgave kunne fungert som en isolert aktivitet. Den får imidlertid en annen verdi i kraft av andre geometriske aktiviteter. Lærerens stemme blir viktig - som den litt lavmælte, spørrende og refererende stemmen. Den etterstreber at elevene bruker geometrisk kompetanse som er bygget opp bl.a. gjennom arbeid med hus.

Situasjoner innehar ulike muligheter. I arbeidet med bybildet kan det være viktig at husene kan flyttes på. Vi kan lage gate med husnummer. De kan plasseres etter hverandre og så kan vi ha brunt husnummer på alle partall og hvitt tall på oddetallene. Kanskje vi må plassere dem på to sider av gata? Vi kan ha røde karmer på husene som er svar i tregangen, blomst utenfor i femgangen.

Lene er på veg i en annen retning. Hun har fokus på formen til husene og sier tenksomt: Er det egentlig slik at kvadratet altså er et rektangel? Er alle kvadrat rektangel? Er alle rektangel kvadrat? Vi ser hun nærmer seg spørsmålet: Er det faktisk slik at 'alle' er trapes?

Det er stadig lærerens utfordring å få øye på mulighetene og å foreta valg. Da handler det også om å være matematisk interessert.

Å være matematisk spørrende

Å være matematisk spørrende innebærer å referere til sammenhengene, å vise veier med en undersøkende stemme. Det er en stemme som ikke stiller en type spørsmål det forventes et endelig svar til. Ordene kan mer betraktes som hentydninger, er ikke bydende eller kontrollerende. Barna skal selv assosiere, vi forsøker å aktualisere sammenhengene, inspirere til de *fortsettende spørsmålene*.

Helle Alrø betegner noen samtaler mellom elever og lærere som *gjettelek*[4]. Dette er samtaler der elevene hele tiden er på jakt etter å svare slik læreren har ment at de skal svare. Læreren som spør vet svaret. Det er en samtale som er preget av spørsmål–svar–stopp (riktig). Nytt spørsmål–nytt svar–ny stopp. Dette vil være motsats til å være matematisk spørrende. Å være matematisk spørrende innebærer å være spørrende sammen med elevene. Det handler om en annen lærerrolle.

Å bevege seg imellom

Hånd-dukker kan være til hjelp med kommunikasjonen forteller Åshild som bruker *Kråka Knas*. Det begynte med at hun leste om kråka og at hun fant ei flott hånddukke som passet. Etter hvert ser vi for oss hvordan kråka utvikler stemme og identitet. Den ble med i samtaler om små og store hendelser. Kråka kan være grublende, undersøkende, spørrende, ikke-forstående, eller forklarende. Den kan være fascinert over store tall, eller være opptatt av at den alltid vil ordne, alltid vil ha system. Den kan være glad i rosiner og alltid velge haugen der det er mest rosiner. Den kan like fine farger eller fine mønster, den kan ha trekanten som yndlingsfigur. Hver gang en figur dukker opp liker Knas å dele den opp i trekanter. Hun kan oppdage en vidunderlig figur som heter sekskant.

Ungene snakker og forklarer på en annen måte til Knas enn til læreren. Kråka kan be dem å forklare på nytt. Den kan være forvirret eller den kan vise til hva den tror 'Katrine tenkte'. Kråka sitt språk ligger mellom elevene og læreren. Noen ganger kan vi høre elever snakke med kråkestemmen når de sitter for seg selv og grubler. Kråka Knas kan hjelpe oss å trekke tråder, å aktualisere referanser. Den kan hjelpe oss å bevege mellom «dette lærer vi nå» og den matematiske fantasien. Det blir viktig at kråka er nysgjerrig.

Kan det være slik at Knas også hjelper læreren til å være nysgjerrig, inspirerer den til at også læreren lytter på andre måter, stiller andre spørsmål eller tenker andre tanker?

Da vil den være i mellomrommet: Mellom elevene og mellom elever og lærer, mellom situasjonene, mellom matematikken 'her og nå' og den matematiske fantasien. Der det foregår.[5]

Mellom regnestykkene

Det er ikke trivielt å gjøre en drillpreget aktivitet meningsfull. Å lage regnestykker, å regne regnestykker, å automatisere og trene er en del av skolematematikken. Hvordan utvikles arbeid med regnestykker til et meningsfullt og undersøkende felt? I en klasse bruker de vann i gjennomsiktige engangsglass. Målestrek er tegnet inn. De har vann i glasset. Elevene leser av hvor høyt vannet står: 5. Elevene drikker av sugerør og sjekker hvor mye som er drukket: Nå er det 2. 5 – 2 = 3. Størrelsen på glassene og tettheten av målestrekene kan varieres. 14 – 3 = 11. Drikker mer. 11 – 2 = 9. Drikker mer.

Elevene sammenligner glass. Ser på hvor mye vann til sammen. Lager stadig flere regnestykker. De sjekker. Sier høyt. Skriver. De søler nesten ikke. De vet at blir det mye søl, blir det slutt på aktiviteten, og dette er gøy!

Vi iakttar 2. klassingen som arbeider i matematikkboka si. Akkurat nå holder alle på med 8-tallet. De trener på å skrive tallet skikkelig. De øver på 'alt som blir 8'. De snakker høyt med seg selv eller sidemannen. De teller på konkreter og pinner. Noen arbeider på ekstrasidene. Der kan de velge hvor de vil arbeide og aktivitetene spres. Lene ser litt trøtt ut, hun strever. «Har du lyst til å regne med vannglass?» spør lærer. Lene blir glad. «Det skal handle om 8», sier lærer. «Trine, vil du være med?»

Læreren er ekstra bevisst på Trine og Lene. Hun ser at vannglassene hjelper til med selve regnestykkespråket. Hun er imidlertid også stadig våken for ulike referanser, til oppdagelser omkring butikklek, hus, uteskole osv. Vannglassene er virksomme, men det trengs andre aspekter. Lærer utøver regi.

«Åtte millioner,» sa Lene i dagens samtalering. Kråka Knas har sunget en kråkesang for dem i dag, om åtte potte millioner. Det er åtte potter med millioner frø.

Bitene i puslespillet

Lærebokstyrt undervisning betegnes som motsats til matematikkundervisningen vi forsøker å stimulere. Vi kan se for oss elever som regner oppgaver fra side til side og som assosierer det å være flink i matematikk med å være kommet lengst i boka. Flest mulig rette svar til kortest mulig tid, er målet. Undervisning som drives i tråd med dette, må vi kunne hevde er ulovlig. Den er ikke i tråd med læreplanen. I det klasserommet arbeidet alle elevene med 8-tallet samtidig. I det klasserommet fantes ikke tall over 8 (slett ikke 2003). Læreren skulle hjelpe elevene til å bygge stein på stein, vente på hverandre og bygge videre. Det var viktig at vi var systematiske. Elevene kunne utsettes for å få 'hull' i sin kunnskap hvis vi ikke fulgte 'oppsatt progresjon'. Progresjonen var definert i læreboka. Problematiserte vi hva elevene lærte? Hørte vi spørsmål som: *Lærer de matematikk når de skriver regnestykkene sine*?

Dagens klasserom korresponderer bedre med læringsynet Olof Magne viser til når han bruker puslespill som metafor.[6] Vi bygger ut kunnskap ved at vi stadig får flere biter til å falle på plass i bildet vårt. Det handler altså om å hjelpe elevene til å bli kjent med bitene og sammenhengene de skal inngå i. Skal vi stimulere en slik prosess blir det viktig å stimulere det undersøkende barnet, det kreative og fantaserende barnet.

Vi ønsker å legge til rette for at elevene utvikler sine matematiske tanker og omtaler det gjerne som elevers tekstskaping. Vi forsøker å legge til rette for meningsfulle situasjoner. Elevene uttrykker sine måter å tenke på. De tegner, regner på fingrene, bruker konkreter, klipper ut; det skapes meningsfulle tekster.[7] Da er det et poeng at tekstene (aktivitetene) får betydning i lys av hverandre.

Vi utfordres til å reflektere over hvordan drilloppgaver i ei lærebok kan bli meningsfulle i lys av andre aktiviteter elevene arbeider med.

Vi etterstreber at elever vil være spørrende og utforskende når de arbeider i lærebøker. Til å trekke assosiasjoner, og for eksempel utvide oppgavene. Til å tenke: «Det er akkurat sånn som når vi gir penger igjen på butikken», «Dette er et kvadrattall». Til å si: «Dette kan jeg nå, kan jeg få en *grublis* som har noe med åttetallet å gjøre?»

Praksis viser at det er mulig å knytte matematikk til læreboka samtidig som vi har andre aktiviteter som skaper variasjon og motivasjon. Dette kan fungere slik at matematikken *blir* i læreboka, mens de andre aktivitetene blir liggende ved siden av som 'artige opplevelser'. Resultatet kan bli at den 'skikkelige' matematikken forblir 'lærebokmatematikk'.

Men dette kan også fungere slik at lærebokarbeidet *preges* av aktivitetenes kvaliteter, og slik at aktivitetene *preges* av lærebokstoffet. Aktivitetene får betydning i lys av hverandre.

Det skjer mellom

Vi søker matematikkaktiviteter som er 'gode', lystbetonte og meningsfulle.

Elevene lærer ved å være i aktivitetene *og* ved å bevege seg mellom dem.

Elevene lærer ved å være i aktivitetene *og* ved å bevege seg ut av dem

Elevene lærer ved å være der aleine og av å være der sammen med andre.

Elevene har regien, de beveger seg mellom «dette lærer jeg nå» og matematisk fantasi.

Elevene beveger seg, lærers ledelse blir viktig.

Lærer tilbyr matematikk som måter å ordne på, som måter å tenke på.

Lærer etterstreber å aktualisere referanser, etterstreber det matematisk spørrende.

Det skjer mellom elevers og lærers regi.

Etterord

Artikkelen er inspirert av arbeid med avhandlingen Fleksible språkrom. Matematikklæring som tekstutvikling og samtaler med gode kolleger: Åshild Sveinsgjerd, Trude Fosse, Lisbeth Alver, Birte Endresen Charalambous, Maiken G. Tysland Huseby, Asbjørg Øvrebust.

Etterord 2023

Denne artikkelen ble publisert i Tangenten 2/2003. Samtidig som den gir bilde av datidens klasserom og didaktiske diskusjon, peker den fremover. Det er derfor relevant å være spørrende til hvordan artikkelen leses i dag. Er beskrivelsene og problemstillingene fortsatt gjenkjennelige og relevante for småskoletrinnets lærere?

Fotnoter

1 Se Johnsen Høines, M. (1996). Om tallbegrepsutvikling og om betydningen av hvordan vi tenker om den. I M. Johnsen Høines (red.) *De små teller også*. Caspar Forlag.

2 Dette aktualiserer språk av 1. og 2. orden og oversettelsesledd utviklet i Begynneropplæringen. Boka er videreutviklet og nyskrevet: Johnsen-Høines, M. (2020), *Begynneropplæringen. Matematikkdidaktikk – barnetrinnet*. Caspar Forlag.

3 Holden, I. m.fl. (2003): *Skolens matematikkdag*. LAMIS.

4 Alrø, H. & Skovsmose, O. (1993): Det var ikke meningen – om kommunikasjon i matematikkundervisningen. *NOMAD*, *1*(2), 6–29

5 Kråka Knas omtales ikke her som et ideelt metodisk virkemiddel. Hun brukes her for å beskrive det vi lærere ofte forsøker å få til: Å bevege oss mellom. Åshild refererer til Tveit, M. M., Andersen, T., Nygård, E., & Rykkelid, G. T. (1997). *Historien og sangene om kråka Knas*. Høyskoleforlaget. Den var en begynnende inspirasjon til å arbeide med kråka Knas.

6 Magne, O. (1994): *Taluppfatningens pussel.* Lærerhögskolan, Malmö.

7 Tekstskaping og grublis utdypes i *Begynneropplæringen*. Se også Solem, I. H. & Reikerås, E. K. L (2001). *Det matematiske barnet*. Caspar Forlag. Siste utgave: 2017.

Topphol

Modellering og radioaktivitet

Modellering har fått ein sentral plass i matematikkplanen i LK20. Dette er særleg tydeleg i kjerneelementet *Modellering og anvendingar*, men også fleire av kompetansemåla handlar om modellering. Matematisk modellering er ikkje noko nytt. Både Newton og Kepler og mange av deira forgjengarar brukte matematiske modellar for å beskrive dei fysiske omgivnadane dei levde i. Fysikk er nok det faget som sterkast har vore prega av matematisk modellbruk, men både i økonomi og andre fag har matematiske modellar lenge vore sentrale i teoriane. Denne koplinga mellom matematisk modell og det vi kan kalle røyndomen eller verkelegheita, utan å gå inn på dei meir filosofiske sidene av kva røyndom er, finn vi også i LK20: «Ein modell i matematikk er ei beskriving av verkelegheita i matematisk språk. Elevane skal ha innsikt i korleis modellar i matematikk blir brukte for å beskrive daglelivet, arbeidslivet og samfunnet elles» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 2). I det følgjande nyttar eg omgrepa «røynd» og «røyndom» like slepphendt som læreplanen nyttar «verkelegheit», utan å gå inn i ei nærare drøfting av kva desse omgrepa inneber. I denne samanheng held det med ei intuitiv forståing av dei.

Arne Kåre Topphol
Høgskulen i Volda
arne.kare.topphol@hivolda.no

Eg presenterer her nokre måtar å modellere radioaktivitet på og ser dei i samanheng med kvarandre. Det er modellar i form av matematiske uttrykk, ein modell der vi kastar terningar og ein modell basert på tilfeldige tal programmert i Python. Modellen basert på terningar har eg brukt i ulike samanhengar i lærarutdanninga i 30 år, og eg har tidlegare skrive om han som døme på Monte Carlo-simulering (Topphol, 1997). Her vil eg skrive om han som eit døme på modellering. Terningar kan elevar i alle aldrar vere med på å kaste. Dei matematisk formulerte modellane og programmering høver nok best for ungdomsskule og vidaregåande skule.

For dei som ønskjer ei meir generell innføring i modellering og korleis det kan forståast i skulefaget matematikk, viser eg til det Torkildsen og Gjøvik (2021) skriv om modellering som kjerneelement, og til Erfjord (1998), som inspirert av det som då var læreplanen for vidaregåande skule, Reform 94, skriv om modellering i vidaregåande skule.

Radioaktivt sundfall

I ein radioaktiv isotop av eit grunnstoff har kvart atom same sannsyn per tidseining for å verte spalta eller sende ut stråling og gå over til atom av ein annan type[1], anten ein annan isotop av same grunnstoff eller eit nytt grunnstoff. Dette vert kalla radioaktivt sundfall. Høvelege tidseiningar å operere med kan vere sekund, minutt, år eller anna, avhengig av kva isotop det er snakk om. Har vi ei gitt mengde av eit slikt radioaktivt stoff, er det tilfeldig kva for nokre atom dette skjer med i ei gitt tidseining. Sannsynet for sundfall held seg konstant gjennom heile levetida til stoffet. Som ei følgje av det konstante sannsynet vil mengda av opphavleg isotop verte redusert med ein konstant prosent i like lange tidsintervall, med dei statistiske fluktuasjonar som tilfeldigheitene medfører. Med det enorme talet på atom vi har sjølv i ein liten klump materiale, vil desse fluktuasjonane relativt sett vere minimale. Vi får altså konstant prosentvis reduksjon, med andre ord eksponentiell nedgang. Dersom vi ved eit gitt tidspunkt har eit tal N_0 atom av ein radioaktiv isotop og p er sannsynet kvart atom har for sundfall i løpet av ei tidseining, vil ein nærliggande matematisk modell for ei gjennomsnittleg utvikling av tal på atom som er igjen, vere slik: $N_n = N_0(1 - p)^n$, der n er talet på tidseiningar.

Ein fysikar vil truleg protestere og seie at denne modellen eigentleg er litt for enkel. Den reknar som om alle sundfalla i løpet av eit intervall på ei tidseining kjem mot slutten av intervallet og ikkje som ein kontinuerleg prosess. Det vert som å rekne kapital i banken med påføring av renter etter kvar termin, berre at ved renter er det vekst. Det er meir korrekt å rekne sundfallet som ein kontinuerleg prosess, tida er kontinuerleg, og radioaktiviteten let seg ikkje styre av lengda vi har valt for tidsintervalla. Då kan vi heller ikkje rekne med sannsyn p per tidseining på same måte som over, men innfører i staden det som vert kalla desintegrasjonskonstant eller sundfallskonstant λ. Eg går ikkje vidare i detalj på det, men dette gir differensiallikninga $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, som har løysinga $N_n = N_0 e^{-\lambda t}$, der $e \approx 2{,}71828$ er grunntalet for naturlege logaritmar og t er tida (Holtebekk & Bjørnstad, 2022). Dette kan samanliknast med kontinuerleg forrenting (sjå t.d. Bjørnestad et al., 2018, s. 271–273). Denne «feilen» gjer at dersom vi brukar same verdi for p og λ i dei to modellane, så vil den enkle modellen underestimere talet på atom som er igjen. Feilen vert ikkje særleg stor om ein reknar med ei tidseining som er kort i forhold til halveringstida. For ein isotop som radium-226 med halveringstid på 1620 år vil det relative avviket vere på under 0,2 promille etter 1700 år dersom vi i den første modellen reknar n som talet på år. Begge modellane får fram hovudpoenget, den eksponentielle nedgangen. Det er også eit didaktisk poeng at skal ein modellere røyndomen så vil ein ofte, også med så pass enkle ting som konstant prosentvis reduksjon, få utfordringar med at matematikken ein meistrar, ikkje heilt strekker til. Modellen $N_n = N_0(1 - p)^n$ er intuitivt langt enklare å forstå korleis vert til, enn modellen $N_n = N_0 e^{-\lambda t}$. Han er også god nok til å kunne utforske eigenskapane ved radioaktivitet som til dømes halveringstid.

Modellar bør testast mot røyndomen for å sjå om dei gir resultat som er i samsvar med observasjonar og målingar vi gjer av røyndomen. Ingen av desse modellane kan testast i klasserommet. Då må ein ha tilgang til radioaktivt materiale med dei sikkerheitskrav det medfører. Høvelege måleinstrument må vere på plass. Ikkje minst må den radioaktive isotopen ein nyttar, ha kort nok halveringstid til at ein kan måle reduksjon i løpet av ein tidsperiode på maksimalt eit skuleår. Slike isotopar finst ikkje naturleg. Dei har eksistert, men har forsvunne for lenge sidan. Dei kan framstillast kunstig ved at ein til dømes bombarderer enkelte ikkje radioaktive atom med stråling, men det krevst både for mykje utstyr og for mykje sikringstiltak til at det er realistisk å gjere i grunnskule eller vidaregåande skule. Kva kan vi då gjere?

Jau, vi kan ta terningane fatt.

Fysisk simuleringsmodell

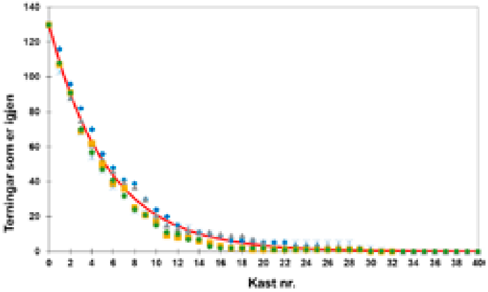
Tenk deg at du deler ut 130 terningar til elevane dine og fordeler dei utover slik at alle får vere med. Elevane trillar så terningane sine nokolunde samstundes. Alle terningane som viser éin, vert tekne ut og lagde til sides. Dei er de ferdige med. Terningane som ikkje viste éin, vert talde og gjorde klare til å verte kasta på nytt. For å sleppe å telje alle som ikkje viste éin, kan det vere eit tips i staden å telje dei som viste éin, og subtrahere dei frå dei 130 som vart kasta. Kast så dei som er igjen, og legg på nytt til sides dei som viser éin. Gjenta til alle terningane har vist éin og det dermed ikkje er terningar igjen.

Ein modell for kor mange terningar som er igjen etter kvart kast, bygger på at kvar terning har eit sannsyn på $\frac{1}{6}$ for å vise éin ved eit gitt kast. Ein vilkårleg terning sitt sannsyn for å overleve og verte kasta på nytt er då $\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{6}$. De starta med 130 terningar. Etter eitt kast vil det teoretisk vere $\frac{5}{6}$ av desse som ikkje har vist éin. Etter to kast vil det vere $130\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$ terningar igjen som ikkje har vist éin, og slik held det fram. Etter n kast vil det teoretisk vere $N_n=130\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n$ som har overlevt så langt. Generelt, om vi startar med N_0 terningar, så kan vi enkelt byte ut 130 med N_0 i uttrykket over, og vi får at talet på terningar som ikkje har vist éin etter n kast, vil vere $N_n=N_0\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Vi har fått ein matematisk modell som beskriv korleis mengda av terningar som ikkje har vist éin, utviklar seg etter kvart som dei vert kasta. Terningkastinga er i seg sjølv ein ganske god modell av det som skjer med dei radioaktive atoma. Einaste prinsipielle skilnad er at terningkastinga ikkje gir ei kontinuerleg utvikling, men den går i hopp med eitt kast, éi tidseining, i gangen. Terningkastinga er dermed ein modell for den forenkla versjonen av radioaktivt sundfall. Dei største praktiske skilnadane er at med terningane er vi bundne til sannsyn som er multippel av $\frac{1}{6}$, eventuelt andre brøkar om vi har andre typar terningar, og at det ikkje er praktisk mogleg å gjennomføre med like mange terningar som det er atom sjølv i den minste synlege klump av eit radioaktivt stoff. Vi har altså modellar av ulik type. Vi har ein forenkla fysisk modell av det faktisk fysiske fenomenet, så har vi ein fysisk modell, terningane, som modell av det forenkla fysiske fenomenet. Til slutt har vi matematiske modellar av både terningane og av dei to variantane av det fysiske fenomenet. Ein kan også hevde at den beskrivinga av radioaktivt sundfall eg starta med, som noko som er tilfeldig styrt av sannsyn, også er ein modell, ein modell basert på kvantemekanikken. Ja, at med ein gong ein prøver å beskrive røyndomen med ord eller på annan måte, så er det ikkje røyndomen lenger, men ein modell.

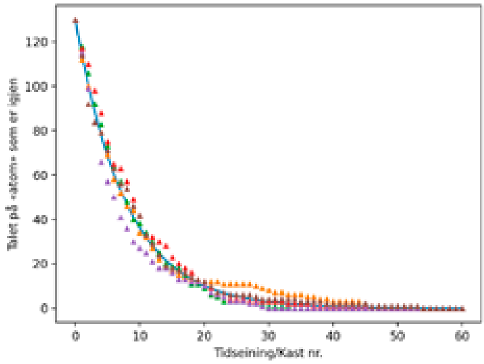
Figur 1 viser resultatet etter at ein har starta med 130 terningar og kasta til alle har vist 1. Dette er gjennomført fem gongar. Etter vel 30 kasteomgangar er der ikkje terningar igjen. Den matematiske modellen $N_n=130\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n$ er vist med heiltrekt line og resultat etter faktisk kasting med ulike markørar for kvar serie. Vi ser at ein av kastseriane etter nokre få kast la seg litt under den teoretiske modellen og heldt fram med det heilt ut. Andre seriar legg seg over, og atter andre varierer meir. Dette er typisk for tilfeldige prosessar. Det er sjølve naturen til slike prosessar og nyttig for elevar å oppleve gjennom å prøve sjølv og ikkje berre ved å rekne reint teoretisk. Dette let det seg gjere å utforske med terningane, men det kan ikkje gjerast i skulen med radioaktivitet (figur 1).

Programmert simuleringsmodell

I læreplanen for matematikk i LK20 står følgjande kompetansemål for 9. trinn: «simulere utfall i tilfeldige forsøk og berekne sannsynet for at noko skal inntreffe, ved å bruke programmering» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 13). Fenomenet med atomsundfall er godt eigna til



Figur 1: Resultat av fem kastseriar med 130 terningar.



Figur 3: Ti seriar med N_0 = 130 og p = 0,12.

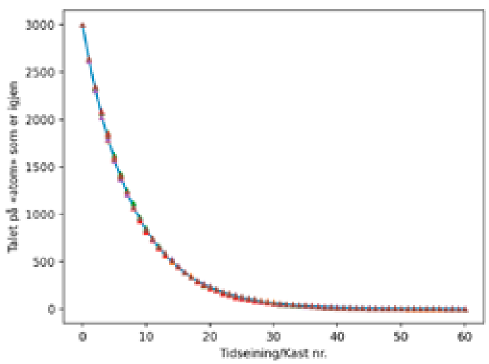
å simulere med programmering. Ein nyttar då programmeringsspråket sine innebygde generatorar for tilfeldige tal. Eit slikt program kan vere bygt opp ved at ein begynner med eit gitt tal atom. I ei ytre løkke gjennomgår programmet kvar tidseining. For kvar tidseining sjekkar ein for kvart av dei atoma som er att om sannsynet for sundfall «slår» til. Dette gjer ein i ei løkke som vert gjenteken like mange gongar som det er atom igjen. Etter eit høveleg tal tidseiningar stoppar programmet og gir resultat i form av tabellar, diagram eller liknande. Dette er ei simulering, eller ein digital modell, av den forenkla varianten av radioaktivt sundfall der sundfalla skjer på slutten av kvart tidsintervall. Til kortare tidsintervall ein vel, til nærare den kontinuerlege varianten vil ein kome.

Figur 2 viser døme på eit slikt program skrive i Python. Dette programmet er litt meir enn ein minimumsversjon. Det startar med å lese inn talet på startatom og sannsyn for sundfall. Deretter køyrer det simuleringa fem gongar for så å plotte utviklinga til dei fem seriane.

Figur 3 viser resultatet etter ei slik gjennomkøyring med N_0 = 130 og p = 0,12. Dette programmet gir ein rask måte å simulere mange seriar med varierande tal på startatom og varierande sannsyn slik at ein kan sjå kva inn-

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
atom = int(input("Skriv inn talet på «atom» [20, 1000000]: "))
atom = min(atom, 1000000)
atom = max(atom, 20)
sannsyn = float(input("Skriv inn sannsyn <0, 1>: "))
sannsyn = min(sannsyn, 1.0)
sannsyn = max(sannsyn, 0.0)
X  =  np.linspace(0, 60, 61)  # x-verdiar
Y_teori = atom*(1.0-sannsyn)**X # Teoretisk utvikling
plt.plot(X, Y_teori)  # Plottar teoretisk kurve
Y_simul = np.zeros(len(X),dtype = int)  # Array for simulert
for ii in range(0, 5):   # løkke for 5 simuleringar
    Y_simul[0] = atom
    for i in range(1, len(X)):  # Løkke fo tal kast
        Y_simul[i] = Y_simul[i-1]
        for j in range(0,Y_simul[i-1]):   # Løkke over tal «atom»
            if np.random.rand() <= sannsyn:
                Y_simul[i] = Y_simul[i] - 1
    plt.plot(X, Y_simul, "^",ms=3.5) #   Plottar denne kastserien
# Simulering ferdig. Gjer ferdig plotta.
plt.xlabel("Tidseining/Kast nr.")
plt.ylabel("Talet på «atom» som er igjen")
plt.show()
```

Figur 2: Python-program som simulerer radioaktivitet.



Figur 4: Fem seriar med N_0 = 3000 og p = 0,12.

verknad ulike verdiar gjer. Figur 4 viser simulering av fem seriar med $N_0 = 3000$ og $p = 0{,}12$.

Vi ser tydeleg at utviklinga følgjer godt den teoretiske modellen i begge tilfelle, men at variasjonane og avviket frå teoretisk modell vert relativt sett langt mindre med det høgare talet på atom.

Kan dette bidra til auka forståing av radioaktivitet?

Ein viktig del av modelleringsprosessen er å vurdere modellane mot røyndomen. Dette inneber å vurdere kor gode modellane er til å beskrive røyndomen og ikkje minst å vurdere kva modellane kan lære oss om røyndomen. Eg skal avslutte med nokre betraktningar rundt dette siste. Kva kan modellane eg har presentert, lære elevar om radioaktivt sundfall?

Det første og mest opplagde er den eksponentielle utviklinga. Ho følgjer direkte av konstant prosentvis reduksjon, men vert tydeleggjord gjennom både dei matematiske formlane og resultata av simuleringane. Der får vi også synleggjort kva den tilfeldige naturen til dette fenomenet har å seie for utviklinga av det radioaktive materialet, og korleis talet på atom påverkar den relative variasjonen. Stort tal på atom gir liten relativ variasjon.

Dei fleste har høyrt om karbon-14 (C-14) datering. C-14 er ein radioaktiv variant (isotop) av karbon med halveringstid på om lag 5700 år. Nivået av C-14 i luft er rimeleg konstant og har med små variasjonar vore det lenge. Det medfører at det i alle levende organismar, også i menneske, er eit konstant forhold mellom C-14 og «vanleg» karbon, C-12. Når ein organisme døyr, sluttar utvekslinga av karbon med omgivnadane. C-12-mengda i den døde organismen held seg konstant, men C-14 vert redusert på grunn av radioaktiviteten. Ved å måle forholdet mellom C-14 og C-12 i dødt organisk materiale kan vi rekne ut om lag kor mykje av opphavleg C-14 som er igjen, og dermed kor lenge det er sidan organismen døydde (NTNU, u.å.). Vi kan bruke modellane til å illustrere korleis dette vert gjort. I prinsippet dreier det seg om å løyse ei likning. Ein veit y-verdien i modellen, kor mykje radioaktivt materiale som er igjen, og skal finne kva x-verdi, kor mange tidseiningar, det svarar til. Dette kan gjerast ved å bruke dei matematiske formlane, eller ein kan bruke dei grafiske framstillingane. For terningkastinga svarar det til å få oppgitt kor stor del av opphavleg tal på terningar som er igjen, og så skulle estimere kor mange kast som er gjennomført. Bruker ein dei grafiske framstillingane og simuleringane, vert det også lett å vise kvifor slik datering vert meir og meir usikker til eldre det organiske materialet er. Det eine er at den relative variasjonen som følgjer av den tilfeldige naturen til radioaktivitet, vert større til mindre som er igjen av stoffet. Det andre er at målinga av C-14 alltid er hefta med ei viss uvisse. Når denne uvissa i målt y-verdi skal overførast til uvisse i x-verdi, så vert uvissa i x større til «flatare» kurva er. Dette er enkelt å sjå frå til dømes figur 3. Det er også slik at C-14-nivået i lufta faktisk har variert ein del. Dette må det takast omsyn til av dei som gjer slike dateringar (NTNU, u.å.), men eg går ikkje inn på det her.

Radioaktiv datering med C-14-metoden kan brukast til å datere så langt tilbake i tid som ein stad mellom 30 000 år (Mangerud, 2023) og 50 000 år (NTNU, u.å.), eller mellom 5,3 og 8,8 halveringstider. Då sit vi igjen med 0,2 % til 2,5 % av opphavleg mengde C-14. Samanlikna med terningkastinga, som har ei teoretisk halveringstid på 3,8 kast, så svarar det til ein stad mellom 20 og 33 kast. Frå til dømes figur 1 ser vi at då har den teoretiske kurva for terningane flata ut, og uvissa i estimering av x-verdi ut frå gitt y-verdi vert ganske stor.

Kort oppsummert kan ein seie at arbeid med enkle middel, nokre terningar, kan gi innsikt i eit komplisert fysisk fenomen.

Noter

1 Eg held her utanfor kunstig konsentrerte mengder av slike stoff som til dømes i reaktorar og atombomber. Dei oppfører seg annleis.

Referansar

Bjørnestad, H., Olsson, U. H., Søyland, S., Tolcsiner, F., Foldnes, N. & Grønneberg, S. (2018). *Matematikk for økonomi og samfunnsfag* (9. utg.). Cappelen Damm Akademisk.

Erfjord, I. (1998). Matematisk modellering og bruk av matematikk i videregående skole. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 9*(2), 27–35.

Holtebekk, T. & Bjørnstad, T. (2022). Radioaktivitet. *Store norske leksikon* på snl.no. Henta 29. desember 2022 frå https://snl.no/radioaktivitet

Mangerud, J. (2023). C-14-datering. *Store norske leksikon* på snl.no. Hentet 25. januar 2023 fra http://snl.no/C-14-datering

NTNU (u.å.). *Karbondatering*. NTNU. Henta 21. desember 2022 frå https://www.ntnu.no/museum/karbondatering

Topphol, A. K. (1997). Monte Carlo simulering. Terningar ikkje berre til Ludo? *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 8*(2), 8–21.

Torkildsen, H. A. & Gjøvik, Ø. (2021). Modellering som kjerneelement. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 32*(1), 35–41.

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk (MAT01-05). Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020*. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Opsal, Smestad

Norske læreplaner (del 2)

Den første artikkelen i denne serien (Opsal & Smestad, 2022) omhandlet matematikkfaget for «allmuen» i norske skolelover og læreplaner fram til 1889. Med skoleloven i 1889 hadde faget *regning* fått et innhold som det i hovedsak skulle beholde langt inn på 1900-tallet. Som vi skrev i samme artikkel, ble det også laget lokale planer knyttet til 1889-loven. Ut i 1920-årene ble det imidlertid utformet nasjonale normalplaner for de to skoleslagene landsfolkeskolen og byfolkeskolen.

1922/25: Normalplaner for land og by

Det er naturlig å se *Normalplan for landsfolkeskolen* av 1922 (NL22) og *Normalplan for byfolkeskolen* av 1925 (NB25) i sammenheng. Mye er felles i disse to planene, men det er også forskjeller som er verdt å merke seg. Matematikkplanen i NL22 er lengre enn NB25-planen (ni sider mot sju sider). Dette kan kanskje anses som litt paradoksalt, siden timeomfanget var langt større i byfolkeskolen enn i landsfolkeskolen. De to ekstra sidene i planen for landsfolkeskolen er hovedsakelig knyttet til at den har flere detaljer om hvordan en kan undervise.

Hilde Opsal
Høgskulen i Volda
ho@hivolda.no

Bjørn Smestad
Høgskulen i Volda
smestadb@hivolda.no

Målet for faget *regning* er felles i begge planene. Vekten er på oppgaver som en får bruk for i hverdagslivet, som skal løses «sikkert, raskt og på en praktisk måte» (s. 22 i NL22 og s. 21 i NB25). I tillegg skulle elevene gjøre rede for løsningene sine ved en «korrekt og grei oppstilling» (s. 22 i NL22 og s. 21 i NB25). Innholdet i begge planene er innenfor temaene tall, tallregning og måling. For 1. klasse fokuserer begge planene på tallrekken, i NL22 tallrekken 1–20 og i NB25 tallrekken 1–30. Senere skulle elevene lære enkel addisjon og subtraksjon og også litt om økonomi. I landsfolkeskolen skulle elevene regne på areal i 6. klasse og volum i 7. klasse, mens i byfolkeskolen skulle elevene alt i 4. klasse ha en «innledning til flatemålsutregning». Algebra var ikke et tema i 1. til 7. klasse.

En kuriositet: Planen NB25 inneholder også tips til hvordan læreren kan introdusere elevene for skrivemåten til de ulike sifrene: «Det vil more barna å legge figurene med pinner og så tegne dem» (s. 21) (se figur 1). Legg merke til tallsymbolene 2 og 3, hvorfor de har valgt å skrive dem slik, vet vi ikke.

De to planene har en del «vink» som vi ser som anbefalte arbeidsmåter. Det første vinket i NL22 er at barna ikke bare skal lære å forstå det de gjør, de skal også arbeide seg fram til en

Figur 1: Illustrasjon av hvordan sifrene kan risses opp «på veggtavlen», NB25, s. 21.

forståelse og løsningsmåte selv. I de neste to vinkene blir blant annet bruken av konkretiseringsmateriale og ulike representasjoner vektlagt (se figur 2).

VINK.

1. I undervisningen må læreren alltid ha for øie at barna skal lære å regne på en slik måte at de øves op til tenksomme mennesker. Derfor skal de ikke bare lære å forstå det de gjør, slik som barn på hvert trin kan forstå det. Men de skal også bli vent til å arbeide sig frem til forståelsen og løsningsmåten ved egen hjelp.
2. Til å begynne med må læreren legge hovedvekten på å få frem klare, tydelige forestillinger hos barnet om hvad et tall e r (tallverdien). Som midler bruker han ting som barnet kan ta i hendene, og helst ting som barnet selv kan skaffe sig, f. eks. pinner, knapper, mynter, små steiner, skjell o. s. v. Kuleramme må også barna selv få lov til å arbeide med. Anskuelsesmidler må en nytte gjennem hele skolen; men det er aller viktigst at de blir flittig brukt ved den første undervisningen i regning.
3. For tallene lager en først tegn med streker, ringer, prikker o. l. Når barna skal lære sifrene, skriver både lærer og barn ringer (streker, prikker) ved siden av det siffer som skal læres, f. eks. oo 2, oooo 4. (Til støtte for undervisningen kan læreren f. eks. lage en planche av almindelig tykk papp, med et siffer og det tilsvarende tall ringer ved siden av. Det må ikke være mer enn ett siffer på hver planche, og planchen må være så stor at hele klassen lett kan lese ringene og sifferet).

Figur 2: Vink i NL22, s. 28.

NL22 har i alt tolv vink til lærerne. Et av disse vinkene dreier seg om lekser. Her blir det presisert at lærerne skal gi elevene skriftlige oppgaver til hjemmearbeid fra andre skoleår. Oppgavene skal være lette og ikke for mange, og elevene skal regne dem i kladdebøkene sine og lese opp svaret på skolen. «Fra 3. skoleåret av fører de inn heimeoppgavene i en særskilt regnebok med penn og blekk, en eller to ganger i uken, og læreren retter disse opgavene omhyggelig, nøiaktig og vakkert» (NL22, s. 30). Med overskriften vink er det naturlig å tenke at dette er forslag til hvordan lærerne skal undervise i faget, men siden flere av vinkene inneholder ord som «må» og «bør», legger dette klare føringer på undervisningen.

Tilpasset opplæring er også beskrevet i NL22 og da med spesiell vektlegging på de elevene hvor «det skorter svært på regnedyktighet» (s. 27). Her blir det foreslått at en kan avgrense antallet oppgaver innenfor temaene brøk, deling, renteregning og regnskapsføring. Det er ikke en tilsvarende beskrivelse i NB25.

Også NB25 presenterer noen vink til lærerne (se Figur 3), men disse har av en eller annen grunn ikke mange fellestrekk med vinkene i NL22. I begge settene med vink vektlegges riktignok bruk av konkretiseringsmateriell, men sterkere i NL22. Hvordan bruken av konkretiseringsmateriell er vektlagt i ulike planer, er noe som det kunne vært interessant å studere videre. Vinkene i NB25 dreier seg ellers om muntlig regning, hvor kompliserte oppgaver en bør gi, hvor rimelige svarene er, lekser, bruken av penn og papir og hva slags ruter skriveboken bør ha.

VINK.

1. Undervisningen bør bygge på iakttagelse og støtte sig til enkle og instruktive anskuelsesmidler.
2. Enhver ny regneoperasjon blir forberedt ved muntlig regning. Derefter går muntlig og skriftlig regning hånd i hånd. En venner barna til å løse alle lettere operasjoner uten særskilt opstilling.
3. Til øvingsopgaver velger en små eller lette tall i enkle forbindelser, så barna kan makte å løse opgaven snøgt og sikkert. Særlig gjelder dette opgaver for muntlig regning. De bør ikke være vanskeligere enn at de fleste barn i klassen kan løse dem uten særlig strev.
4. Av og til øver en barna i å sette prøve på svarene. Hvor det faller naturlig, bør en også øve dem i å sammenholde opgave og svar for å finne ut om svaret er rimelig eller sannsynlig.
5. På alle trin gir en regelmessig skriftlige opgaver til hjemmearbeid, men de må være lette og ikke mange om gangen. En må alltid kreve at løsningen skal være riktig opstillet, og at den er ordentlig og pent utført. Dette gjelder følgelig også den skriftlige fremstilling på skolen.
6. Til skriftlig regning må barna bruke papir og blyant eller penn og blekk, ikke steintavle.
7. Regneheftene for 1.—3. kl. bør ha kvadratiske ruter, for 4.—6. kl. avlange ruter, for 7. kl. kan de være enkeltlinjet.

3 — Normalplan for byfolkeskolen.

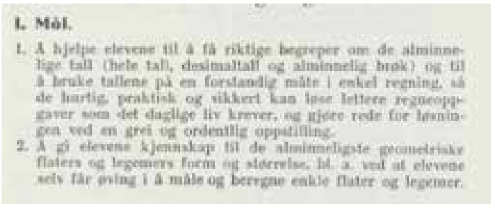
Figur 3: Vink i NB25, s. 27.

1939: Normalplaner for land og by

I 1939 kom det nye normalplaner for hvert av de to skoleslagene – landsfolkeskolen (NL39) og byfolkeskolen (NB39) – etter at det kom nye folkeskolelover i 1936. Disse planene er kjent for *arbeidsskoleprinsippet*. I NB39-planen ble det skrevet at den tidligere skolen, med innprenting av lærestoff med leksehøring og sånt, ikke fungerte: «Omfattende undersøkinger har bl.a. vist at det etter noen tid sitter forholdsvis lite igjen av det lærestoff som elevene etter planene skulle ha lært» (s. 16). Løsningen som ble foreslått, var denne:

> Overalt der det er hensiktssvarende, må en legge arbeidet slik an at elevene selv blir mest mulig aktive. Elevøvinger, elevforsøk og andre arbeidsoppgaver må derfor få en framtredende plass i skolen, men arbeidsmåten må selvsagt tilpasses slik at den best mulig høver for elevenes evner og utviklingstrinn og for de emner en arbeider med (NB39, s. 16–17).

Planene er svært detaljerte. Delen om regning er på 28 sider i NB39 (s. 141–168). Målet for faget er dog kort, og knyttes fortsatt til det som «det daglige liv krever»:

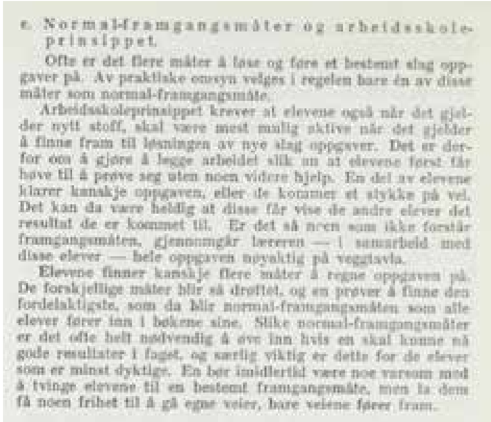


I. Mål.

1. Å hjelpe elevene til å få riktige begreper om de alminnelige tall (hele tall, desimaltall og alminnelig brøk) og til å bruke tallene på en forstandig måte i enkel regning, så de hurtig, praktisk og sikkert kan løse lettere regneoppgaver som det daglige liv krever, og gjøre rede for løsningen ved en grei og ordentlig oppstilling.
2. Å gi elevene kjennskap til de alminneligste geometriske flaters og legemers form og størrelse, bl. a. ved at elevene selv får øving i å måle og beregne enkle flater og legemer.

Figur 4: Mål for faget i 1939-planene (NB39, s. 141, NL39, s. 136).

Planene for de to skoleslagene har samme innhold: De inneholder fortsatt enkel regning, måling og noe geometri (areal og volum). Planene legger vekt på at oppgavene må være tilpasset den enkelte elevs evner og anlegg (NB39, s. 144), og det blir lagt vekt på å ha med oppgaver fra elevenes interesser og fra samfunnslivet (NB39, s. 145). Men det understrekes også at «Neppe i noe fag har en bedre høve til å lære elevene orden og nøyaktighet enn i regning» (NB39, s. 153). Bruk av konkreter blir fortsatt



e. Normal-framgangsmåter og arbeidsskoleprinsippet.

Ofte er det flere måter å løse og føre et bestemt slag oppgaver på. Av praktiske omsyn velges i regelen bare én av disse måter som normal-framgangsmåte.

Arbeidsskoleprinsippet krever at elevene også når det gjelder nytt stoff, skal være mest mulig aktive når det gjelder å finne fram til løsningen av nye slag oppgaver. Det er derfor om å gjøre å legge arbeidet slik an at elevene først får høve til å prøve seg uten noen videre hjelp. En del av elevene klarer kanskje oppgaven, eller de kommer et stykke på vei. Det kan da være heldig at disse får vise de andre elever det resultat de er kommet til. Er det så noen som ikke forstår framgangsmåten, gjennomgår læreren — i samarbeid med disse elever — hele oppgaven nøyaktig på veggtavla.

Elevene finner kanskje flere måter å regne oppgaven på. De forskjellige måter blir så drøftet, og en prøver å finne den fordelaktigste, som da blir normal-framgangsmåten som alle elever fører inn i bøkene sine. Slike normal-framgangsmåter er det ofte helt nødvendig å øve inn hvis en skal komme nå gode resultater i faget, og særlig viktig er dette for de elever som er minst dyktige. En bør imidlertid være noe varsom med å tvinge elevene til en bestemt framgangsmåte, men la dem få noen frihet til å gå egne veier, bare veiene fører fram.

Figur 5: Normalframgangsmåter og arbeidsskoleprinsippet i 1939-planene (NB39, s. 150).

understreket (NB39, s. 145–146), og også oppgaver hvor elever selv stiller spørsmålene og samler det nødvendige materialet (NB39, s. 147–148). «Også fra opplæringa i de ymse skolefag vil elevene finne et stort materiale til oppgaver» (NB39, s. 148).

En kan også merke seg at det skal jobbes med ulike løsningsmåter (se figur 5) – drøfting av ulike måter å gjøre oppgaver på er jo noe som fremdeles blir lagt vekt på. Arbeidsskoleprinsippet var begrunnet i å få mer varig forståelse.

Planene fra 1939 inneholdt minstekrav som skulle gjelde for alle elevene i den sjuårige folkeskolen. Men i retningslinjene ble det lagt opp til noe differensiering ut fra kjønn blant annet i regning. «I regning og naturfag var kravene til guttenes prestasjoner satt høyere enn kravene til jentenes prestasjoner; dette hadde blant annet sammenheng med at det på jentenes timeplan også skulle være plass til faget skolekjøkken» (Engelsen, 2003, s. 87). I et foredrag av rektor Brinek Lund i 1939 ble dette problematisert. Han syntes det var ulogisk og urettferdig at jentene skulle få mindre opplæring i regning enn guttene og «attpå til skal få ord på seg for å være dårlige regnemestre» (Binek Lund, 1939, s. 635).

Planene beskriver også ganske detaljert hvordan elevene skal føre regneoppgavene. Her blir dobbeltstrek under det endelige svaret beskrevet, hvordan korrekt bruk av benevning bør være, og hvordan likhetstegnet brukes. Planene hadde dessuten fotnoter med henvisning til forskning – dette er noe man har sluttet med senere.

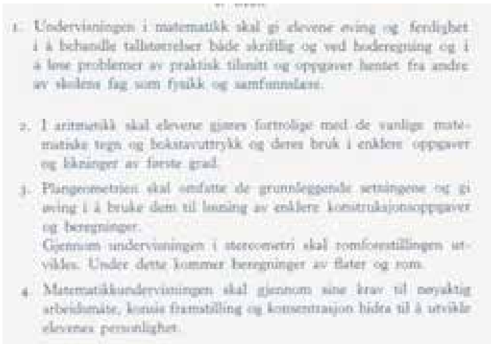
1960: Forsøksplan med niårig skole

Før 1960 var folkeskolen sjuårig, og mange avsluttet sin skolegang etter 7. klasse. Alternativet var å gå realskolen og deretter eventuelt gymnaset og – for de færreste – å fortsette med høyere utdanning. Man kunne også gå *framhaldsskolen*, som ikke kvalifiserte for gymnaset. Den niårige skolen skulle gjøre realskolen og framhaldsskolen overflødig, og kvalifisere direkte for gymnaset.

Innføringen av niårig grunnskole skjedde ikke brått og plutselig. Tvert imot: I 1960 kom læreplan for forsøk med niårig skole (LF60), som ble brukt av de kommunene som ønsket det fram til niårig grunnskole ble obligatorisk fra 1969. Forsøksplanen var også den første som ikke skilte mellom by og land (en naturlig konsekvens av at det kom en felles folkeskolelov i 1959). Man var redd for at det skulle bli for stort faglig sprik i klassene på ungdomsskolen, derfor ble det der innført nivådeling i norsk, matematikk og engelsk: Plan 1, Plan 2 og Plan 3.

Navnet på faget var endret fra regning til matematikk fra 1. klasse, og faget beskrives over mer enn 40 sider (s. 98–139). «I samsvar med det nye navnet skulle elevene allerede tidlig i skolen arbeide med et matematisk tegnspråk» (Dokka, 1988, s. 175). På Østlandsk lærerstevne i 1960 ble det holdt en rundebordskonferanse der en diskuterte innføring av matematikk i 1. klasse. Her ble det vist til Maria Montessori, som fant at barn på 7–8 år kan løse oppgaver i elementær algebra (Gjester, 1960, s. 706).

Solvang og Mellin-Olsen (1980, s. 1:1) pekte på at «en rekke emner [ble] flyttet nedover i skoleklassene». For eksempel ble «bokstaver som betegnelse for tall og størrelser» (LF60, s. 116), introdusert for elever i 5. klasse og negative tall



1. Undervisningen i matematikk skal gi elevene øving og ferdighet i å behandle tallstørrelser både skriftlig og ved hoderegning og i å løse problemer av praktisk tilsnitt og oppgaver hentet fra andre av skolens fag som fysikk og samfunnslære.
2. I aritmetikk skal elevene gjøres fortrolige med de vanlige matematiske tegn og bokstavuttrykk og deres bruk i enklere oppgaver og likninger av første grad.
3. Plangeometrien skal omfatte de grunnleggende setningene og gi øving i å bruke dem til løsning av enklere konstruksjonsoppgaver og beregninger.
Gjennom undervisningen i stereometri skal romforestillingen utvikles. Under dette kommer beregninger av flater og rom.
4. Matematikkundervisningen skal gjennom sine krav til nøyaktig arbeidsmåte, konsis framstilling og konsentrasjon bidra til å utvikle elevenes personlighet.

Figur 6: Mål for ungdomstrinnet i forsøksplanen 1960 (LF60, s. 119–120).

for elever i 6. klasse. Dette var nye tema i grunnskolen etter at faget forandret navnet fra regning til matematikk.

For barnetrinnet var det i 1960-planen lagt vekt på koblingen til det praktiske liv (LF60, s. 99), at praktiske oppgaver skulle ligge innenfor elevenes «erfarings- og kunnskapsområde» (LF60, s. 99), og at de ulike delene av faget skal «gå hånd i hånd og støtte hverandre gjensidig» (LF60, s. 99). Samtidig la planen vekt på at «ren regneferdighet, og løsning av uoppstilte oppgaver må komme i annen rekke» (LF60, s. 99). Kravene til hva elevene skulle kunne etter 6. klasse, inneholdt en del nye elementer i forhold til tidligere planer, som enkle likninger og grafisk framstilling av enkle funksjoner (LF60, s. 101).

I målene for ungdomstrinnet (figur 6) blir sammenheng mellom fag framhevet i punkt 1, og i punkt 4 framheves det dannende formålet ved matematikkfaget. Innholdet på ungdomstrinnet var blant annet «likninger og likningssystemer av første grad med en og to ukjente, samt rene kvadratiske likninger» og «Den pytagoreiske setning med anvendelser» (LF60, s. 121), som ikke var i læreplanene for folkeskolen tidligere. Det var lagt vekt på at Plan 3 skulle gi den samme kunnskapen som det man fram til da fikk etter 2. realskoleklasse (LF60, s. 131).

Matematikkfaget ble altså begrunnet både i tilknytning til det praktiske liv og i å bidra til elevenes danning. Innholdet ble noe utvidet sammenliknet med den sjuårige skolen, med mer avanserte likninger, blant annet. Sammenhenger innad i faget og på tvers av fag ble understreket.

I 1964 kom 2. utgave av forsøksplanen. Den viktigste endringen for matematikks del var at Stortinget hadde bestemt at de første sju skoleårene skulle være udifferensiert, altså kunne plandelingen bare gjelde 8. og 9. klasse.

Fra begynnelsen av 1900-tallet og fram til 1960 skjedde det store endringer i folkeskolen i Norge; en gikk fra å ha lokale læreplaner, via ulike læreplaner på landet og i byene, til en felles læreplan. Samtidig gikk en fra en sjuårig til en niårig skole. Norge hadde altså fått de samme matematikkplanene for alle elever helt til og med 9. klasse – hvis man ser bort fra plandelingen. Fagets innhold var også noe endret. Fra 1960 og fram til i dag har det imidlertid kommet en rekke nye fagplaner, med til dels store endringer av det faglige innholdet. Dette ser vi mer på i neste artikkel.

Note

1 En side med lenker til alle læreplanene vi ser på i denne artikkelserien, ligger her: https://www.tangenten.no/laereplaner

Referanser

Binek Lund, B. (1939). Samarbeidet mellom folkeskolen og den høgre skolen. Foredrag på N. L.s landsmøte i Larvik 1939. *Norsk skoleblad, 6*(32), 633–636.

Dokka, H.-J. (1988). *En skole gjennom 250 år. Den norske allmueskole – folkeskole – grunnskole 1739–1989*. NKS-Forlaget.

Engelsen, B.U. (2003). Ideer som formet vår skole. *Læreplanen som idébærer – et historisk perspektiv.* Gyldendal Akademisk.

Gjester, U. (1960). Østlandsk lærerstemne 1960. Åpningen. *Vår skole, 46*(44), 703–708.

Opsal, H. & Smestad, B. (2022). Norske læreplaner (del 1). *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(4), 34–40.

Solvang, R. & Mellin-Olsen, S. (1980). *Matematikk fagmetodikk.* NKI Forlaget.

Shockey

Hva er problemet? (del 2)

I forrige nummer så vi på to versjoner av ei kjent oppgave:

> Forestill deg at du binder et tau rundt jordas ekvator (vi antar at jorda er ei kule med jevn overflate). Hvis du knyter opp dette tauet og legger til 10 meter med ekstra tau, slik at tauet er like langt fra jordas ekvator overalt, ville ei flue være i stand til å gå under tauet?

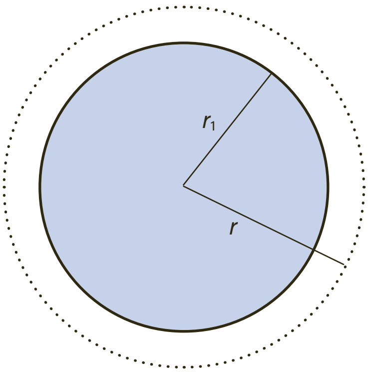
> Forestill deg at du binder et tau rundt jordas ekvator (vi antar at jorda er ei kule med jevn overflate). Hvis du knytter opp dette tauet, hvor mye tau må du legge til slik at når tauet er like langt fra jordas ekvator overalt, vil mellomrommet være stort nok til at du kan spasere under tauet?

Denne oppgaven ble gitt til mine lærerstudenter tidlig i semesteret som en mulighet til å komme i gang som problemløsere i matematikk.[1] Som klasse hadde vi allerede løst mange oppgaver, og diskutert problemløsningsstrategiene til Polya (1971): 1) forstå problemet; 2) lage en plan; 3) utføre planen; og 4) se tilbake. Studentene fikk oppgaven i ei undervisningsøkt, og før økta var over, hadde de også sett ei skisse på tavla av figur 1. De tok oppgaven med hjem, og ei uke senere leverte de sine personlige løsninger. Siden ingen av studentene i klassen min hadde sett oppgaven før eller hadde løst liknende oppgaver, kan denne oppgaven ifølge Malone mfl. (1980) kategoriseres som ei ikke-rutine-oppgave for disse studentene.

Temaet for denne artikkelen er de nitten lærerstudentenes løsninger på den andre versjonen av oppgaven og noen problemstillinger som disse reiser. Selv om det finnes mye litteratur om problemløsning og problemløsningsstrategier, tyder studentenes løsninger på at det kanskje er et behov for å arbeide mer med selve utregningene i problemløsningsprosessen.

Tod Shockey
University of Toledo
todshockey@gmail.com

Oversatt av Bjørn Smestad



Figur 1: Jorda, med jordradius r_1, og tauet, med radius r.

Studentenes løsninger

Med unntak av to studenter som ikke kom med noen løsning, viste alle studentene at løsningen lå i å få differansen mellom r og r_1 til å bli lik høyden deres. Alle studentene fant, ved hjelp av mobiltelefon eller PC, numeriske verdier for enten omkretsen av jorda, radien til jorda, eller begge deler. Men deretter var det tre varianter av løsningsmetoder:

Variant 1: Flertallet, tolv studenter, fant et anslag for sin egen høyde i miles eller kilometer, avhengig av måleenheten de fant på nett for jordas dimensjoner.

Variant 2: Én student gjorde om måleenhetene for jorda til måleenheten for høyden sin, som ble målt i fot.

Variant 3: To studenter arbeidet symbolsk med π, uten en tilnærmet verdi.

Jeg skal presentere utvalgte studentsvar for hver versjon.[2]

Variant 1

Studentene i denne kategorien endret høyden sin fra fot og tommer (noen rundet av til nærmeste fot) til den måleenheten som de hadde funnet for jordas omkrets eller radius. Når de gjorde det, måtte de håndtere små tall, store tall og avrunding i utregningene.

Student 1 (S1) slo opp og fant først at omkretsen på jorda var 24 901 miles. Det ser imidlertid ikke ut som studenten brukte denne verdien til å regne ut radien. Hvis man deler dette på 2π, får man ca. 3 963 miles, mens studenten isteden brukte 3 958,8 miles i utregningen. Et internettsøk viser at på noen nettsider er jordas radius angitt til å være 3 958,756 miles. Studenten har sannsynligvis funnet denne verdien og rundet av. Omgjøringen av studentens høyde (5 fot 4 tommer) til miles ble trolig gjort med en online-kalkulator. Svaret «0,001010101» er verdien studenten brukte i utregningen:

$$2\pi(3\,958{,}0 + 0{,}001010101) = 24\,873{,}88034$$

I sin første utregning har S1 introdusert to avrundinger, først avrundingen av jordas radius fra tre til én desimal og deretter avrundingen av det endelige produktet fra ni til fem desimaler. Studenten regnet med samme antall siffer etter komma når omkretsen på den innerste sirkelen skulle regnes ut:

$$2\pi(3\,958{,}8) = 24\,873{,}88034$$

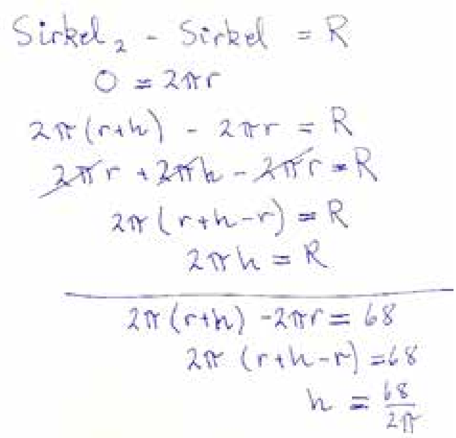
Videre beholdt S1 fortsatt fem desimalplasser i utregningen av differansen

$$24\,873{,}88034 - 24\,873{,}87399 = 0{,}00635$$

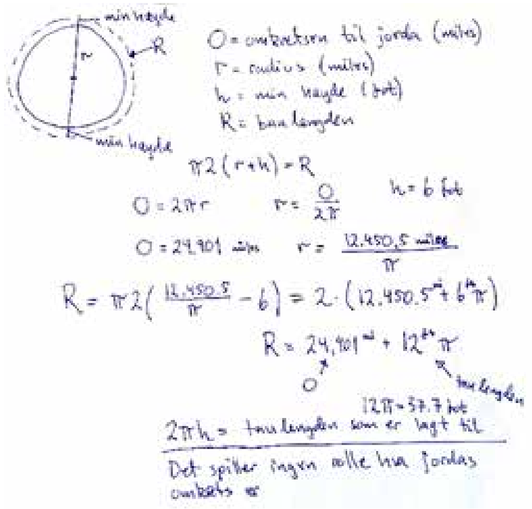
helt til studenten til slutt regnet om til fot, rundet av igjen og fikk et svar: ca. 33,5 fot.

Studenten benyttet seg ikke av muligheten til å bruke den distributive loven når differansen mellom $2\pi(3\,958{,}0 + 0{,}001010101)$ og $2\pi(3\,958{,}8)$ skulle regnes ut.

S1 kom til riktig løsning basert på sin oppgitte høyde. Det at studenten startet med en høydetilnærming med ni desimaler og en avrunding av den utregnede omkretsen til fem desimaler, påvirket ikke svaret. Studenten brukte ikke en tilnærmingsverdi for π fra starten av. Om S1 er oppmerksom på vanen sin med å avrunde løpende, er uklart. Det var tre andre studenter som også rundet av høyden sin til et tall med ni desimaler etter komma. Hadde studentene vært vant til å bruke regneark (eller annen teknologi) til å «se tilbake» (jf. Polya 1971), kunne de fått en bekreftelse av at løsningen var riktig, og de kunne ha sett at det ikke er nødvendig å runde av gjennom hele utregningen.



Figur 2: S18s løsningsforslag. (Oversatt til norsk)



Figur 3: S17s løsingsforlag. (Oversatt til norsk)

Variant 2

Det var bare én student i denne kategorien. S14 gjorde verdiene for jordradiusen om til fot, noe som resulterte i at omkretsene også ble utregnet i fot. Studenten rapporterte sin høyde som 5 fot 6 tommer, men brukte 6 fot i utregningene, sannsynligvis fordi det var enklere. Dette ga en utregning av differansen mellom $2\pi(20\,902\,000)$ og $2\pi(20\,902\,006)$, som ble oppgitt som 37,7 fot, som stemmer med det vi får hvis vi setter tallet 6 direkte inn i formelen $2\pi h$.

Variant 3

Jeg hadde kanskje for høye forventninger når jeg trodde at de fleste studentene ville havne i denne kategorien. Bare to av nitten studenter løste oppgaven med symbolsk notasjon, og det var dette som var årsaken til at jeg ville undersøke denne studentgruppas tilnærming til problemløsning. S18 løste oppgaven som vist på figur 2.

Skribleriene til S18 inneholdt også numerisk verdi for jordradien, men denne verdien ble ikke brukt. Studenten konverterte dessuten høyden sin til tommer på slutten (68), men denne verdien ble heller ikke brukt.

S17 hadde en liknende løsning (se figur 3), men det spesielle der var at verdien av π ikke ble avrundet. S17 brukte numeriske verdier for jordas omkrets og regnet ut jordradien på basis av det, men det at π ikke ble avrundet, gjorde utregningene penere. S17 tok seg heller ikke bryderiet med å konvertere enheter, men passet på å skrive at målene på jorda var i miles, og deretter legge til 6 fot. Studenten endte opp med en numerisk verdi for «taulengden», men deretter så studenten at dette kunne generaliseres til $2\pi h$. S17 ga en avsluttende kommentar om at «det spiller ingen rolle hva jordas omkrets er». Min tanke da jeg leste gjennom innleveringene, var: «Hvorfor er dette den eneste studenten som kommer med denne kommentaren?»

Diskusjon og konklusjon

Ved å studere denne studentgruppas innleveringer så jeg at det ble gjort noen aritmetiske feil, noe som kanskje var ventet hos de tolv studentene som konverterte høyden sin til miles eller kilometer. For eksempel fant S13 jordas omkrets som 24901 miles, men istedenfor å dividere med 2π for å finne radius fant S13 en annen radiusverdi på nettet (3958,8011 miles), noe som introduserte en feil i utregningen av hvor mye tau som måtte legges til.

Jeg tenker at det er viktigere å diskutere med lærerstudentene hva som er effektivt og hensiktsmessig? Er det effektivt å konvertere høyden din til «jordenheter» eller jordenheter til enhetene høyden din er gitt med? En annen ting er hvorfor man skal multiplisere med π ved hjelp av en numerisk tilnærming? Kan det å bruke π i $2\pi(r + h) - 2\pi r$ isteden hjelpe studentene til å se hvordan de kan bruke distributiv lov, noe som leder til generaliseringen $2\pi h$?

Denne oppgaven krevde nok litt mer enn «direkte bruk av ideer eller algoritmer» (Brady, 1991, s. 145). Med unntak av de to som ikke leverte noe arbeid eller løsninger, tilnærmet kanskje resten seg oppgaven «som forventet». For de to studentene som brukte variant 3 og utviklet en symbolsk generalisering, påstår jeg at studentenes «se tilbake»-fase skjedde i løpet av utledningen. Resten av studentene viste ikke noen sjekk av arbeidet sitt og at svaret var rimelig. Disse studentene gjorde oppgaven, skrev opp hva de hadde gjort, og leverte den påkrevde innleveringen.

Noter

1 Studentene i artikkelen er amerikanske, og bruker til dels måleenheter som miles, fot og tommer. Men også norske elever kan komme borti slike enheter når de leter opp informasjon på nettet. (O.a.)

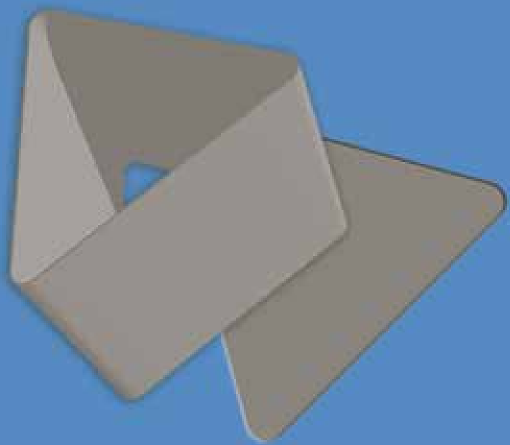
2 Besvarelsene er skrevet med norsk notasjon. (O.a.)

Referanser

Brady, R. J. (1991). A close look at student problem solving and the teaching of mathematics: Predicaments and possibilities. *School Science and Mathematics, 91*(4), 144–151.

Malone, J. A., Douglas, G. A., Kissane, B. V. & Mortlock, R. S. (1980). Measuring problem-solving ability. I S. Krulik & R. E. Reys (red.), *Problem solving in school mathematics* (s. 204–215). NCTM.

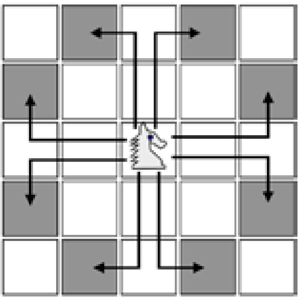
Polya, G. (1971). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.



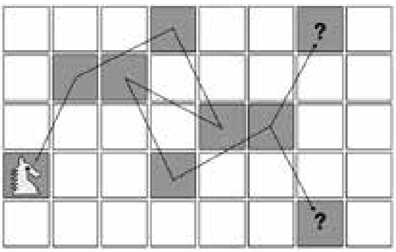
Mike Naylor

Springerlabyrinter

En springer i sjakk beveger seg på en spesiell måte. Den flytter i en liten «L»-form – to ruter vannrett og en rute loddrett, eller to ruter loddrett og en rute vannrett som i figur 1.

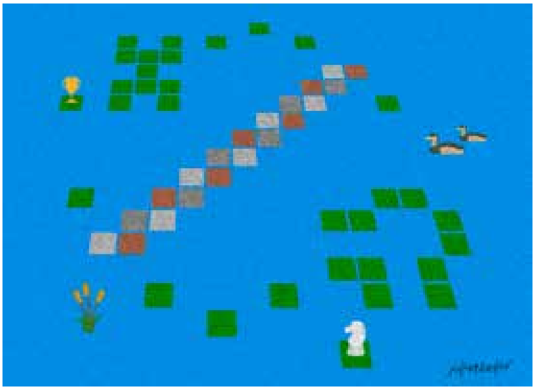


Figur 1



Figur 2

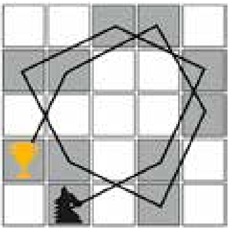
Mike Naylor
DragonFjord puzzles
mike@dragonfjord.com



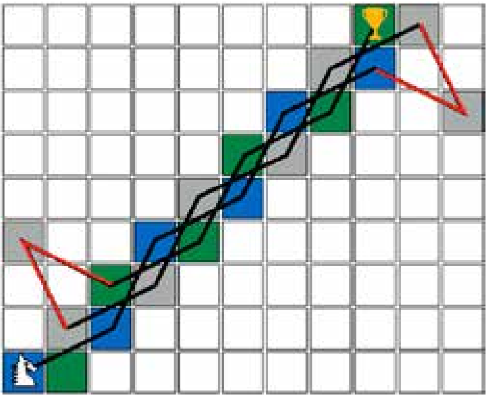
Figur 3: Springerlabyrint 1.

Ved å fargelegge «lovlige» ruter som springeren kan hoppe på, kan vi lage morsomme løyper som den kan følge som i figur 2. Løypa kan splitte seg i flere retninger for å skape mange forskjellige ruter – en morsom måte å lage en labyrint på! Stien kan krysse seg selv og fargede ruter kan lage interessante former – og gi en fin sjanse til å utforske og analysere topologiske former!

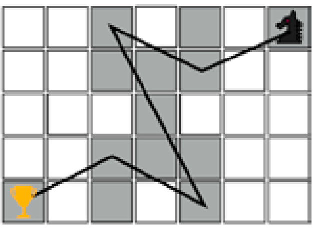
Noen slike interessante former finnes i figur 3. En springer sitter alene på en liten øy i en dam. På den andre siden av dammen venter en pokal. Bildet er et puslespill! Målet for springeren er å hoppe fra øy til øy og nå pokalen uten å falle i vannet. Kan du finne veien?



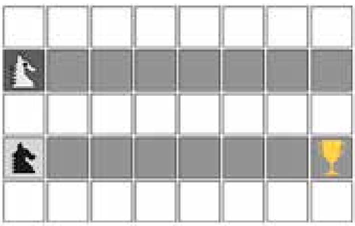
Figur 4: Dobbel-loop.



Figur 5: Tredobbel stige.



Figur 6: Dobbel-Y.



Figur 7: Gangen

Denne labyrinten er laget av tre elementer. Den første formen er en dobbel-loop. Springeren må hoppe i en loop mot klokken to ganger før den kan dra fra området (figur 4). Den neste formen er en tredobbelt vevet stige, med rutene fargelagt for å hjelpe til å følge løypa (figur 5). Springeren må hoppe opp stigen på ruter av en farge, hoppe fra stigen og tilbake på den andre fargen, hoppe ned igjen og bytte til den tredje fargen for å komme opp og hoppe videre. Den siste delen er en dobbel-Y (figur 6) som inneholder en blanding av muligheter før du kommer til enden.

Springerlabyrinter er morsomme å designe! Det kan være utfordrende å skape former som er både attraktive og samtidig interessante å løse. Utforsk litt med rutepapir og fargede blyanter og se hva slags former du kan lage!

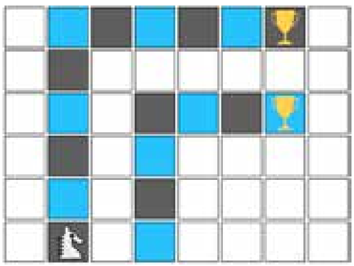
Her er noen få former som kan gi deg noen ideer:

1. Gangen

To rader med ruter som i figur 5 er en enkel og morsom form å hoppe på. Hvilken springer i figur 7 kan nå pokalen?

2. Rundt hjørnet

Gangen går rundt et hjørne i figur 8. Hvilken pokal kan springeren nå?

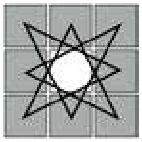


Figur 8: Rundt hjørnet.

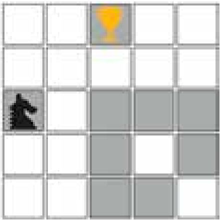
Med fargelegging er det ganske lett å se at springeren kan hoppe på de grå rutene og nå pokalen på toppen. Men se nøye... finnes det en plass hvor springeren kan bytte til de blå rutene? Finn plassen, og du kan få *begge* pokalene!

3. Kvadratet

En springer kan hoppe på alle 8 rutene som lager et kvadrat som i figur 9. Fjern en av disse rutene for å bryte loopen og skape start- og endepunkter som kan bli koblet til ruter utenfor kvadratet. Prøv den lille oppgaven i figur 10!



Figur 9: Kvadrat



Figur 10: Kvadrat blir til oppgave.

4. Åttekanter

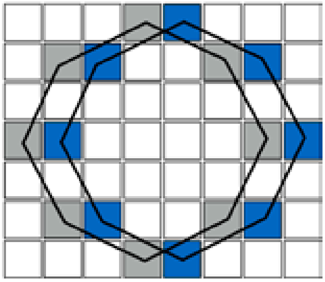
Bevegelsen til springeren lar stier krysse seg selv og veve rundt hverandre uten å bli koblet sammen. Se på de to åttekantene i figur 11. Springeren kan hoppe på alle ruter i en farge, men kan ikke bytte til den andre fargen. Formen er fylt ut i figur 12 for å lage en ganske tett form med to stier som er ikke koblet til hverandre.

Formen i figur 12 kan brukes til å lage en oppgave slik: springeren starter på en av fargene og pokalen er på den andre fargen. Legg til ruter utenfor formen slik at springeren kan hoppe på ruten fra en farge og bytte til en annen farge. Da blir de to stiene koblet og springeren kan nå pokalen.

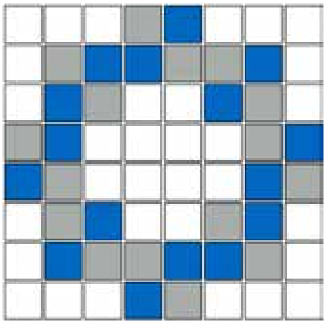
Se på figur 13 for en slik oppgave. Kan du finne løsningen? (Tips: let etter en del som bryter symmetrien i designet.)

Utvidelse: Destruktiv konstruksjon

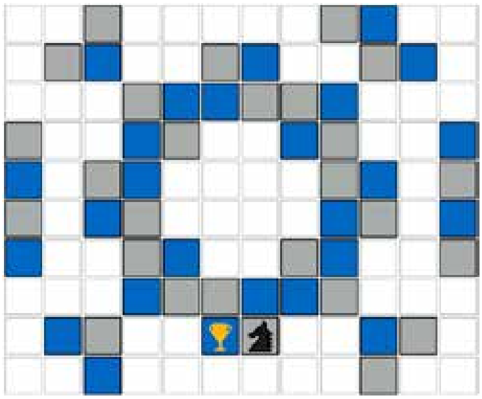
Figur 14 viser kunst med en veldig vanskelig springer-labyrint. Se om du kan finne løsning før du leser detaljer om strukturen.



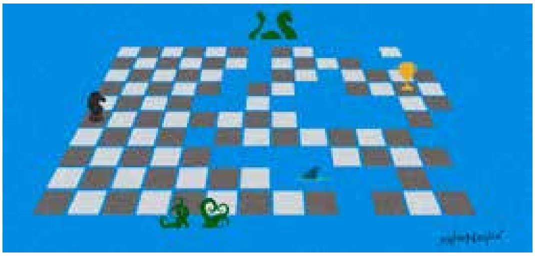
Figur 11: To åttekanter.



Figur 12: Ukoblete stier.



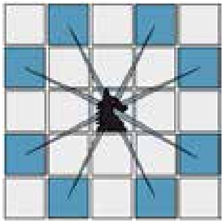
Figur 13: Oppgave med flere åttekanter.



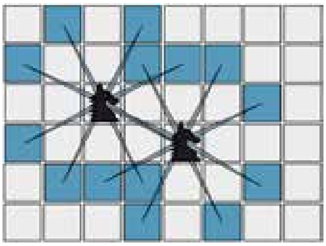
Figur 14: Springerlabyrint 2.

Med de tidligere eksemplene har vi bygget stiene ved å legge til ruter. Vi kan gjøre labyrinter vanskeligere ved å bygge *destruktivt* og ta bort ruter for å hindre fremgang.

En springer i midten av en blank brett har 8 plasser den kan hoppe til (figur 15). Hvis vi blokkerer alle 8 rutene kan ikke springeren flytte. Fjern én av disse «blokkeringsrutene» og blokker alle posisjoner springeren kan flytte til fra den nye posisjon som vist i figur 16. En springer på en av de to rutene i midten kan flytte frem og tilbake mellom de to rutene, men kan ikke flytte videre.



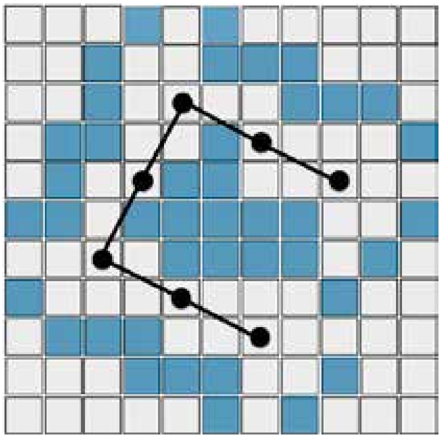
Figur 15: Blokkert!



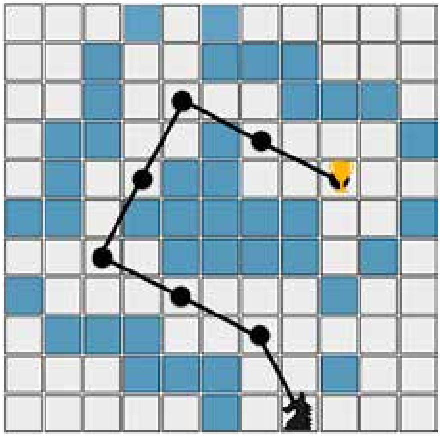
Figur 16: Starten av en tvungen vei.

Fortsett å koble sammen slike elementer og vi kan bygge en lang vei uten innganger eller utganger. Figur 17 viser en kjede med 7 koblede ruter som er isolert fra resten av brettet. De fargede rutene som ikke kan hoppes på er både nødvendige og tilstrekkelige for å isolere stien.

For å fullføre labyrinten, kan du sette pokalen på enden av denne stien og fjerne en av de blokkerende rutene fra den andre enden. Kjeden er nå åpen for resten av brettet og klar for å løses (figur 18). Designet ble brukt til å lage *Springerlabyrint 2*, med ekstra ruter lagt til på venstre side for å gi en (kunstig!) følelse av frihet.



Figur 17: Sju lenkede, men isolerte ruter.



Figur 18: Kjeden er åpen.

Sluttspill

Springerlabyrinter kan være morsomme og overraskende. De gir muligheter for å leke med visualisering, analyse, form og romforståelse. Her er flere ideer du kan ta med videre:

Lag fine springerlabyrinter ved å klippe farget papir. Heng på veggen, eller legg på gulvet sammen med en sjakkspringer.

Som et gruppeprosjekt kan mange deltakere lage elementer som kan kobles sammen for å skape en stor labyrint.

Kanskje du kan lage en springerlabyrint i menneskestørrelse utendørs med uteflis, eller ved å tegne med kritt?

NYTT FRA MATEMATIKKSENTERET

Matematikksenteret er en partner i lokalt utviklingsarbeid, vi forsker på matematikkundervisning og tilbyr forskningsbasert etter- og videreutdanning.

I dette nummeret skriver vi om:

- Støttemateriell til nasjonale prøver
- Utforsking med bruk av penn i GeoGebra
- Database med fagartikler om matematikkdidaktikk

Vi har spisskompetanse på matematikkdidaktikk og jobber tett på lærere og elever. Vi er et bindeledd mellom praksis, forskning og utvikling. Vårt mål er at alle barn og unge skal erfare at matematikk er engasjerende, utfordrende og meningsfullt.

Besøk våre nettsider:

Matematikksenteret.no
Fagstoff og læringsressurser

MatteLIST.no
Oppgaver og aktiviteter for utforskning og problemløsning

Matematikk.org
Spill, oppgaver og fakta om matematikk

Alleteller.no
Vurderingsverktøy for talloppfatning og tallforståelse

Realfagsloyper.no
Kompetanseutvikling i realfagene

NTNU

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Nytt støttemateriell: Hvordan bruke resultater og innhold fra nasjonale prøver i regning?

Olav Tokle Dalsegg, prosjektleder for Nasjonale prøver

Omtrent 180 000 elever i Norge gjennomførte nasjonale prøver i høst. Vil du vite mer om hvordan du kan følge opp resultatene, og hvordan du kan bruke oppgaver fra nasjonale prøver i undervisningen? På matematikksenteret.no/nasjonaleprøver finner du støttemateriell som kan være nyttig i dette arbeidet.

Oppgaver fra nasjonale prøver i regning har høy kvalitet, gjennom at de er nøye kvalitetssikret og prøvd ut i flere omganger. Dette gjør at de egner seg godt til bruk i klasserommet.

Matematikksenteret har laget en nettside med støttemateriell til videre arbeid med nasjonale prøver. Støttematerialet gir blant annet informasjon om:

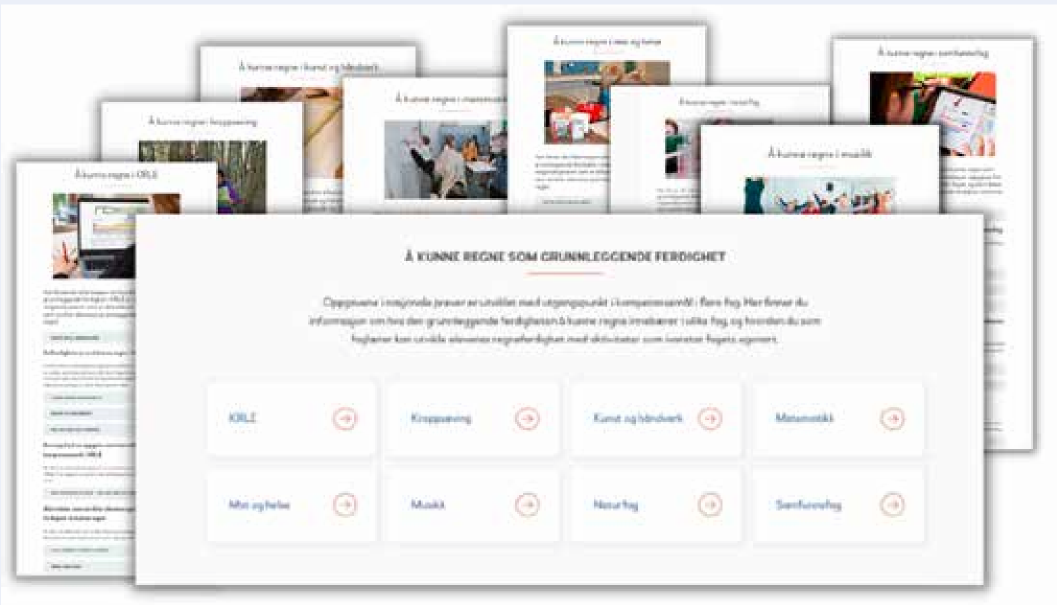
- Hva er å kunne regne som grunnleggende ferdighet?
- Hvordan blir nasjonale prøver i regning utviklet?
- Hvordan bruke oppgaver fra nasjonale prøver i undervisning?
- Hvordan følge opp resultatene i lærerkollegiet?
- Fagsider – Hvordan drive god regneopplæring på fagenes premisser?

Egne sider for hvert fag

Hvert fag hvor å kunne regne er en grunnleggende ferdighet, har fått sin egen side. Her kan du som faglærer lese om hva å kunne regne er i ditt fag, og du finner eksempler på oppgaver fra nasjonale prøver som er relatert til kompetansemål i faget. I tillegg presenterer vi aktiviteter som kan utvikle elevenes regneferdighet samtidig som de ivaretar fagets egenart. Aktivitetene tar utgangspunkt i kompetansemål i faget.

Følg opp resultatene i lærerkollegiet

Selv om matematikklæreren har et spesielt ansvar for å utvikle elevenes grunnleggende ferdighet i å kunne regne, er det enklere å utvikle elever med god kompetanse i å kunne regne hvis alle faglærere drar i samme retning. Vi har derfor utviklet støttemateriell som viser hvordan dere kan analysere resultatene med hensyn til lokale forhold, elevens forutsetninger, undervisning og satsingsområder – og jobbe sammen for å få det beste ut av nasjonale prøver. «Gevinsten» er å utvikle elever med god kompetanse i å kunne regne.



Hvert fag har fått sin egen side med eksempler på relevante oppgaver. Her finner du også aktiviteter som kan utvikle elevene regneferdighet, samtidig som de ivaretar fagets egenart.

Utforsking med bruk av *Penn* i GeoGebra

Lene Grøterud Leer, universitetslektor ved Matematikksenteret NTNU

GeoGebra gir elevene mulighet til å utforske geometriske sammenhenger på måter som ikke er mulig med papir og blyant. Programmet inneholder mange nyttige verktøy, og i denne artikkelen presenterer jeg ett av de mer ukjente, nemlig Penn. Jeg viser også hvordan Penn kan støtte elevene når de utforsker geometriske sammenhenger i GeoGebra.

Verktøyet *Penn* lar elevene tegne i *Grafikkfeltet* (se ikon i figur 1). De kan bytte farge, utseende og tykkelse på tegningene (pennestrøkene) i *Stilmenyen* slik som for andre GeoGebra-objekter. Ved å holde inne høyre museknapp kan de også viske ut dersom noe ble feil. GeoGebra lagrer tegningene som skisser som elevene for eksempel kan flytte, rotere og speile.

Figur 1: Ikonet til *Penn*.

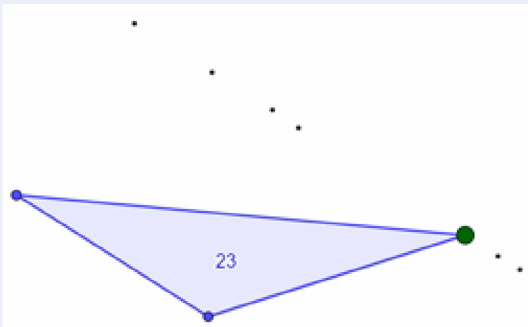
Når elevene skal utforske matematiske sammenhenger i GeoGebra, er *Penn* nyttig for å markere relevante posisjoner. Elevene kan tegne oppå eksisterende objekter, for eksempel et punkt, og deretter flytte på objektet uten at markeringen følger med. Det er spesielt praktisk når elevene utforsker geometri. GeoGebra lagrer ikke koordinatene ved bruk av *Penn*. Hvis elevene trenger koordinatene til markeringene, må de bruke *Punkt* i stedet. Da kan de imidlertid ikke markere oppå andre objekter uten at punktet henger seg på.

For å vise hvordan læreren kan bruke verktøyet i klasserommet, har jeg valgt ut tre aktiviteter. Alle tar utgangspunkt i at elevene lager en egen figur som de bruker som utgangspunkt for utforsking. Brunström (2015) har vist at elever som begynner med blanke ark i GeoGebra, lager hypoteser raskere og er mer utholdende i utforskingsprosessen. Tiden det tar å la elevene lage egne figurer er derfor vel anvendt tid.

Trekanter med samme areal

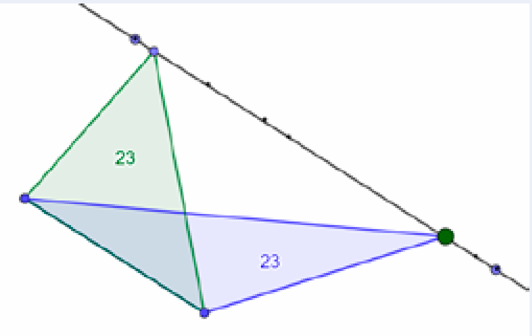
Varierte erfaringer er viktig for at elevene skal utvikle en robust og fleksibel forståelse av matematikk. I et dynamisk matematikkprogram som GeoGebra, kan elevene se mange eksempler basert på én dynamisk figur[1]. For eksempel kan elevene lage en trekant med verktøyet *Mangekant*, og deretter dra i hjørnene for å lage uendelig mange eksempler på trekanter. Men hva om trekanten for eksempel skal ha areal 23? Ved å dra i et eller flere av hjørnene til den samme trekanten kan elevene finne en trekant som har areal 23. Og ved å fortsette slik kan de finne flere. Sørg gjerne for at elevene velger 0 eller 1 desimal som innstilling i GeoGebra.

På jakt etter en matematisk sammenheng, vil elevene raskt få behov for å finne en systematisk måte å utforske trekanten. Å undersøke ett punkt om gangen er en nyttig strategi. Ved å bruke *Penn* for å markere posisjoner hvor arealet til trekanten er 23, kan elevene oppdage et mønster.



Figur 2: Trekanter med samme areal

I begynnelsen vil elevenes bevegelser være vilkårlige, men etter hvert vil de bruke tidligere observasjoner til å forutse hvor de tror at punktet må være for at arealet skal bli 23. Erfaringene kan danne grunnlag for å lage en hypotese. De fleste vil oppdage at punktene ligger på linje. Noen vil også oppdage at linjen ser ut til å være parallell med den ene trekantsiden. Når elevene har laget en hypotese, kan de bruke verktøyene i GeoGebra til å teste om hypotesen stemmer. For eksempel kan de lage en rett linje gjennom markeringene, og deretter lage en ny trekant som har et punkt på linjen (grønn trekant på figur 3).



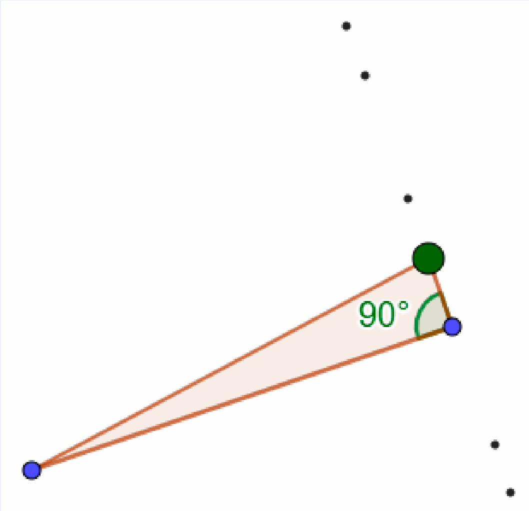
Figur 3: Grønn trekant har et punkt på linjen gjennom markeringene

Etter at elevene har utforsket i GeoGebra, er det viktig med en matematisk klassesamtale for å oppsummere hva elevene har funnet ut. La de dele observasjoner og hypoteser. Hva har elevene oppdaget? Hva er felles for trekantene med areal 23? Hva er forskjellig? Hvorfor blir arealet 23? Dette gir en god anledning til å snakke om sammenhengen mellom grunnlinje, høyde og areal i trekanter.

Trekanter med en rett vinkel

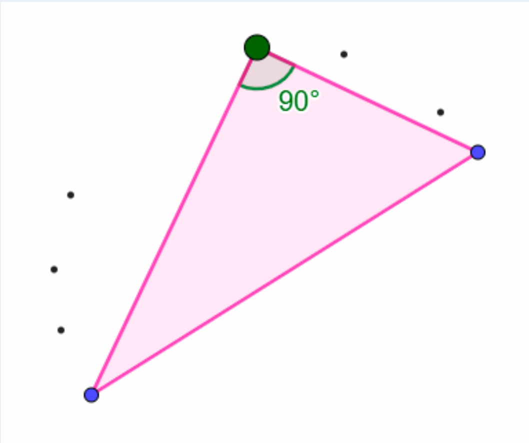
Elevene kan også bruke en trekant som utgangspunkt for å utforske rettvinklede trekanter. De starter igjen med å lage en vilkårlig trekant med *Mangekant*. Klarer de å bevege på trekanten slik at en av vinklene blir 90˚? Kan de finne en ny trekant hvor den samme vinkelen fortsatt er 90˚? Kan de finne flere slike trekanter? Elevene markerer posisjonene som tilfredsstiller kriteriet med *Penn*, og etter hvert kan observasjonene gi et utgangspunkt for å lage hypoteser.

Avhengig av hvilket punkt elevene beveger på, vil de oppdage ulike mønster. For de som beveger et punkt som ikke er toppunkt til den rette vinkelen, vil det se ut som om punktet må ligge på en normal linje til den ene trekantsiden (figur 4). Elevene kan teste om det stemmer ved å lage den normale linjen og en ny trekant.



Figur 4: Trekant med rett vinkel (normal)

For de som beveger på toppunktet til den rette vinkelen, vil det se ut som om punktet ligger på en halvsirkel over den motstående trekantsiden (figur 5). Ved å lage halvsirkelen og en ny trekant kan elevene se om vinkelen alltid blir 90˚.

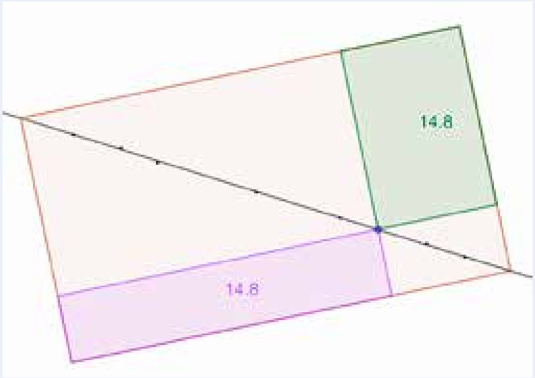


Figur 5: Trekant med rett vinkel (halvsirkel)

Observasjonene elevene gjør i GeoGebra kan være et godt utgangspunkt for en klassesamtale. La de dele observasjoner og hypoteser. Elevene kan teste hypotesene sine ved å lage dynamiske, rettvinklede trekanter i GeoGebra ved hjelp av en normal linje eller en halvsirkel. At en trekant blir rettvinklet hvis de bruker en normal er nok kjent for de fleste elevene. Varianten med halvsirkel vil antakeligvis være en ny oppdagelse for mange. Sammenhengen heter «Tales' halvsirkelteorem».

Rektangler i et rektangel

Rektangler i et rektangel er et godt utgangspunkt for både utforsking og bevis. Elevene lager først et dynamisk rektangel i GeoGebra. Deretter lager de et punkt i rektangelet, og bruker *Parallell linje* og *Mangekant* til å tegne rektanglene (figur 6, lilla og grønt) inni det store rektangelet. Elevene kan så undersøke om det er mulig å bevege punktet slik at lilla og grønt rektangel har like stort areal. Noen vil tenke at det bare er én mulig løsning, nemlig midtpunktet til det store rektangelet, mens andre vil prøve vilkårlig. Etter hvert vil de oppdage at punktet må ligge på diagonalen til det store rektangelet.



Figur 6: Rektangler i et rektangel.

Observasjonene fra utforskingen kan støtte elevene i arbeidet med å bevise sammenhengen. Hva er det som er spesielt med figuren når punktet ligger på diagonalen? Oppfordre elevene til å tegne diagonalen og studere hvordan den deler det store rektangelet.

Oppsummering

De tre eksemplene viser hvordan elevene kan oppdage geometriske sammenhenger med god støtte av *Penn*-verktøyet. Utgangspunktet kan være en enkel figur som en trekant, eller mer avanserte figurer, avhengig av elevenes GeoGebra-kompetanse. Å bruke *Penn* kan gjøre det lettere for elevene å få et visuelt bilde av observasjonene sine, og deretter lage en hypotese. Det er viktig å poengtere for elevene at selv om hypotesen stemmer når de tester den i GeoGebra, så er det ikke et bevis for den matematiske sammenhengen. Slike oppdagelser kan imidlertid gjøre at elevene blir nysgjerrige og har lyst til å bevise sammenhengene selv.

På matematikksenteret.no/GeoGebra har vi publisert flere undervisningsopplegg som viser hvordan elevene kan bruke GeoGebra til å utforske matematiske sammenhenger.

Note

1 En figur er dynamisk hvis jeg kan dra i figuren slik den endrer form, samtidig som den beholder gitte egenskaper. For eksempel vil et dynamisk rektangel alltid være et rektangel, selv om jeg drar i hjørnene.

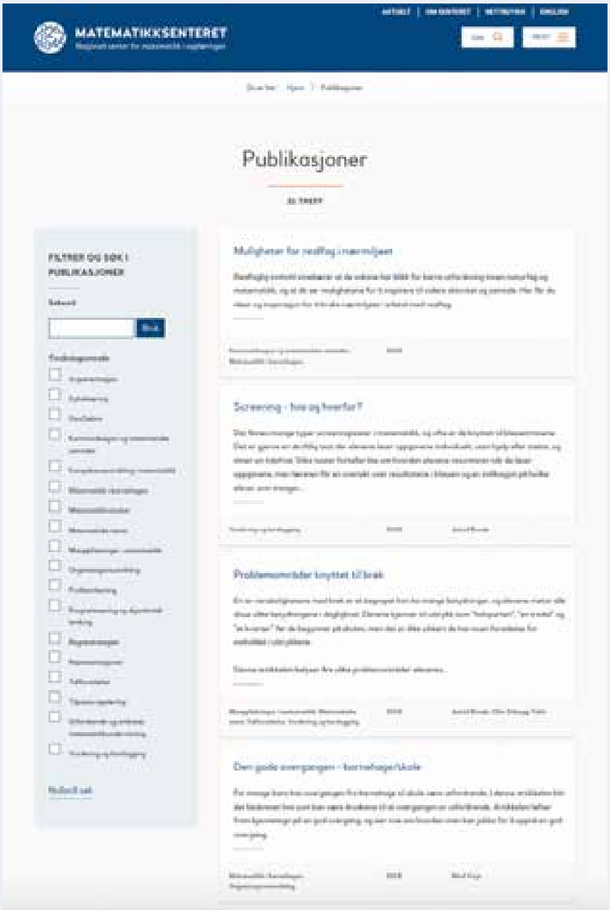
Referanser

Brunström. M. (2015). *Matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiske matematikprogram*. Karlstad University Studies.

Database med fagartikler om matematikkdidaktikk

Vil du lære mer om matematikkdidaktikk? Nå har vi samlet fagartikler og andre publikasjoner fra Matematikksenteret på ett sted!

I databasen finner du fagstoff som er aktuelt for lærere, lærerstudenter og forskere. Foreløpig har vi lagt ut ca. 30 publikasjoner i databasen, og vi fyller kontinuerlig på med flere. Her finner du databasen: www.matematikksenteret.no/publikasjoner



Databasen har fritekst-søk, og du kan filtrere på 16 ulike kategorier som gjenspeiler Matematikksenterets forsknings- og utviklingsarbeid (FoU).

Ordliste med matematiske begrep
Tidligere i år lanserte vi også en ordliste med 400 matematiske ord og begrep. Vi håper ordlista kan være nyttig for elever, lærere og foreldre! www.matematikksenteret.no/ordliste

32

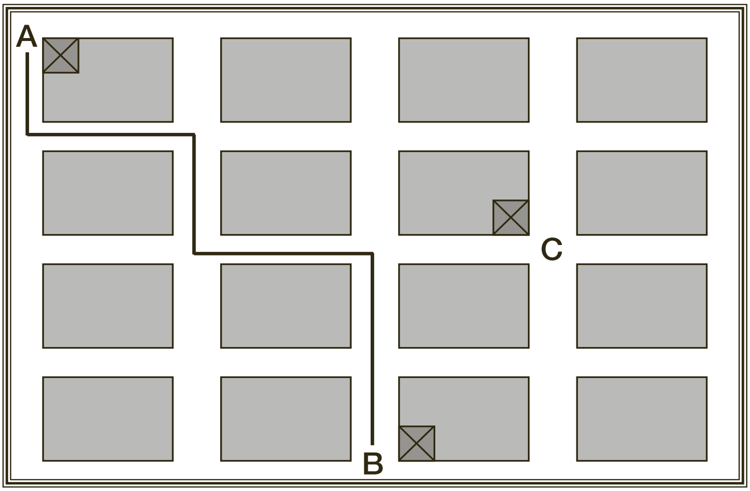
Storbyen

Anne bur i ein by der gatene dannar eit kvadratisk rutenett, alle kvartala er like store.

Huset der Anne bur er merka med A. Ho bur på hjørnet. Berit, veninna til Anne, bur ved B. Kvar gong Anne skal besøke Berit, går ho same ruta. Ruta er teikna inn på kartet. Ein dag ho er på veg til Berit, langs den same ruta, bestemmer ho seg for at ho skal gå ein annan veg neste gong.

- Finn ut kor mange ulike vegar ho kan velje, når ho alltid skal gå den kortast mogelege vegen.
- Kor mange ”kortast mogeleg vegar” er det frå A til C?

NB! Anne føljer alltid trafikkreglane, ho kryssar alltid rett over gata, aldri diagonalt.



MATEMATISKE UTFORDRINGAR — CASPAR FORLAG

Matematiske utfordringar

I 2005 ga Caspar Forlag ut oppgåveheftet «Matematiske utfordringar». Det var oppgåver frå Tangenten og andre kjelder. Oppgåvene (eller «grublisane») vart presentert som ein kopieringsoriginal til elevane, med eit tilhøyrande ark til læraren, med kommentarar om oppgåvene. Innsamlinga og omarbeidinga til dette heftet vart gjort av Mona Røsseland, Mariann Tallis Sandvik, Per Olaf Tangen og Svein H. Torkildsen.

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
c/o Elin Unstad
Postboks 181
1371 Asker

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det er en demokratisk rett å få en matematikkundervisning som setter en i stand til å delta aktivt som borger i et demokrati. Derfor vil Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) sette fokus på matematikk for alle.

Styret for LAMIS

Leder
Renate Jensen, Vestland
Barnehage
Elisabeth Hast Rønnestad, Møre og Romsdal
Barnetrinnet
Hilde Svendsen, Viken
Mellomtrinn
Inger-Lise Risøy, Viken
Mellomtrinn/Ungdomstrinn
Svend Eidsten, Viken
Ungdomstrinn
Kari-Anne Bjørnø Rummelhoff, Viken
Videregående skole
Odd-Bjørn Lunde, Rogaland
Høgskole/universitet
Mona Røsseland, Vestland
Varamedlem (Barnetrinnet)
Henrik Kirkegaard, Møre og Romsdal

Medlemskontingent

450 kr for enkeltmedlem
200 kr for husstandsmedlemmer
300 kr for studenter/pensjonister
975 kr for skoler/institusjoner

Organisasjonssekretær

Elin Unstad, org.sek@lamis.no

Lederen har ordet

Renate Jensen

Kjære LAMIS-kollega!

Helgen 14. og 15. januar var mange fra LAMIS sine lokallagsstyrer samlet i Bergen. Slike samlinger er viktige for lokallagene – og for oss i sentralstyret. Det å være sammen en hel helg der vi både får faglig påfyll og muligheten til å diskutere LAMIS sitt arbeid, er med på å gi retning for arbeidet vårt.

Noe av det viktigste vi snakket om var hvordan det å være medlem av LAMIS kan gjøre en forskjell i arbeidet med matematikk i barnehage og skole.

Da LAMIS ble stiftet for mer enn 20 år siden, var det et stort behov for verksteder og samlinger der vi delte praktiske aktiviteter som gav muligheter for noe annet enn det læreboken kunne tilby. Det var få muligheter for å prøve ut og diskutere aktiviteter i andre fora. Lokallagene som etter hvert ble dannet rundt om i Norge, opplevde stor interesse for lokallagskvelder, matematikkdagshefter og andre arrangementer. Aktive elever og gode matematikksamtaler var sentralt for det arbeidet som ble gjort. De som jobbet ved lærerutdanningene, var sterkt representert i LAMIS sitt arbeid.

De senere årene har behovet endret seg. Sosiale medier, nettsteder fra forlag og andre aktører gir barnehagelærere, lærere og studenter mange muligheter til inspirasjon og ideer. Spesielt de siste årene med pandemi har gitt oss ulike digitale delingsarenaer som vi ikke hadde tilgang til tidligere. Dette er et positivt tilskudd for alle som interesserer seg for læring og fag, og LAMIS er aktiv med både med Facebookgrupper, inspirasjonsfilmer og webinarer som kan inkludere mange – også der det ikke er aktive lokallag. Denne utviklingen utfordrer også LAMIS sin rolle. Hva skal vi gi tilby våre medlemmer? Hvordan beholder vi medlemmene våre? Hvordan får vi aktivitet i lokallag? Hvordan når vi ut med våre ressurser?

Det som kjennetegner LAMIS er medvirkning. Som medlem i LAMIS og i et lokallag kan du påvirke det vi arbeider med. Hva trenger du i din praksis? Det er medlemmene som gir retning for det sentralstyret utvikler og tilbyr av ressurser og tema på fagdager og konferanser. Det er lokallagene sammen som velger hva som skal være innholdet på lokallagskveldene. Medlemmer kan dele sin praksis og får tilgang til andres praksis og ideer.

Når vi samles, gir dette en mulighet til å drøfte og få bekreftelse på det vi prøver ut. LAMIS handler om å dele og utvikle sammen. Et viktig poeng som kom frem på samlingen i Bergen var at de lokallagsstyrene som er mange, opplever at bare det å samles som et styre gir inspirasjon og utvikling. Ta kontakt om du vil bli aktiv i et lokallag som allerede er etablert, eller om du ønsker å få i gang et lokallag der du bor.

Vi er fremdeles i arbeidet med innføring av ny læreplan og ikke minst ny eksamensordning. LAMIS er involvert i nasjonalt utviklingsarbeid fordi vi har stor motivasjon og solid faglig kompetanse. For å være en viktig stemme trenger vi alle medlemmene våre, og vi trenger nye medlemmer. Gi oss derfor tilbakemelding på hva du trenger og hva du kan bidra med – og ikke minst – få med gode kollegaer i et flott fagfelleskap.

Vi i sentralstyret gleder oss nå til å dele ressurser vi utvikler om tverrfaglighet og utforskende arbeid – og ikke minst til en sommerkonferanse i august der vi får lytte til og snakke matematikk.

Ressurser til LAMIS-medlemmer

Den 9. januar sendte vi ut andre e-post med nytt materiell til bruk i undervisningen.

Dette skoleåret kommer vi til å sende ut e-post med ressurser og aktiviteter vi utvikler til alle våre medlemmer. Utsendingen vil skje i oktober, januar, april og juni. Det blir blant annet aktiviteter til FN sine 17. bærekraftsmål og et verktøy for arbeid med utforskende oppgaver. Sentralstyret har samarbeidet med lokallagene i dette arbeidet.

E-posten 9. januar inneholdt aktiviteter med lærerveiledning til disse tre bærekraftsmålene:

FNs bærekraftsmål gir elevene innblikk i den verden vi lever i, og hvordan matematisk kunnskap kan hjelpe oss å forstå og oppnå en fredeligere og mer bærekraftig verden. Den tverrfaglige ressursen har en fyldig lærerveiledning med mange ideer til planlegging av undervisningen. De ulike kapitlene gir en oversikt over kjerneelementer, matematiske kunnskapsområder og tverrfaglige temaer. Aktivitetene er utarbeidet for elever i grunnskolen, men kan også tilpasses barnehage og videregående skole.

Vi ønsker veldig gjerne å høre fra deg og dine elever om dere har prøvd ut en eller flere av aktivitetene om bærekraftsmålene. Du kan da sende oss bilder og en tekst eller noen stikkord, og vi i sentralstyret vil om du ønsker hjelpe med å få dette til å bli klart for Tangenten. Du kan sende dette til leder@lamis.no.

VIKTIG

Hvis du som medlem ikke har mottatt denne utsendelsen på e-post, er det viktig at vi får beskjed.

Vi trenger hjelp til å oppdatere våre e-postlister. Hvis du har endret e-post gi oss beskjed. Vi trenger spesielt hjelp til å nå våre skolemedlemmer. Er din skole medlem, gi oss en e-postadresse til både skolen og gjerne også til en kontaktperson som kan formidle videre til alle matematikklærere ved skolen.

Send en e-post til post@lamis.no, eller fyll inn skjemaet for oppdatering av e-postadresse på hjemmesiden vår: www.lamis.no.

LAMIS

Undervisningsressurser til medlemmer i LAMIS.

Andre utsending - Januar 2023

Sendt til Orgsek på post@lamis.no

Aktiviteter til FNs bærekraftsmål

I september 2015 vedtok FN 17 nye bærekraftsmål som gjelder globalt – også for Norge. Danmarks Matematiklærerforening har laget undervisningsressurser basert på disse målene, med faget matematikk som hovedfokus. LAMIS har kjøpt rettighetene, og flere lokallag har oversatt og tilrettelagt dette materialet til norsk.

Under finner du en lenke til aktiviteter med lærerveiledning til tre av FNs bærekraftsmål og et dokument som forklarer ressursen. I tillegg finner du en mappe med link til forrige utsending.

FNs bærekraftsmål gir elevene innblikk i den verden vi lever i, og hvordan matematisk kunnskap kan hjelpe oss å forstå og oppnå en fredeligere og mer bærekraftig verden. Den tverrfaglige ressursen har en fyldig lærerveiledning med mange ideer til planlegging av undervisningen. De ulike kapitlene gir en oversikt over kjerneelementer, matematiske kunnskapsområder og tverrfaglige temaer. Aktivitetene er utarbeidet for elever i grunnskolen, men kan også tilpasses barnehage og videregående skole.

Lokallagene samles for faglig påfyll og erfaringsdeling

Mona Røsseland og Inger Lise Risøy

En viktig del av LAMIS sitt arbeid er det som foregår rundt om i lokallagene. Den andre helgen i januar møttes 21 deltakere fra LAMIS sine lokallag og LAMIS sentralstyre i Bergen for å få faglig oppdatering, erfaringsutveksling og ikke minst hyggelig sosialt samvær. På samlingen ble det arbeidet med flere sentrale deler av LAMIS sine satsingsområder, i tillegg til presentasjon av forskning, glimt fra matematikk i barnehage og søkelys på programmering.

En av de viktigste aktivitetene til LAMIS er UngeAbel. På samlingen ble det presentert en flott film som promoterer konkurransen. Målet er at LAMIS klarer å nå ut med informasjon om UngeAbel til flere ungdomsskoler. Det ble også diskutert at lokallagene kan lage til egne arrangementer der lærere får arbeide med og diskuterer hvordan de kan bruke UngeAbel-oppgaver i undervisningen, samt se verdien av å melde klassene sine på konkurransen. Filmen vil bli delt på LAMIS sin hjemmeside.

En viktig del av lokallagssamlingen var å få innspill fra deltakerne på arbeid som pågår i LAMIS. De to største prosjektene nå er hjemmeside og arbeid med

et verktøy for elever og lærere. LAMIS arbeider dette skoleåret med en ressurs som kan fungere som støtte for lærere og elever i arbeidet med en utforskende innfallsvinkel til matematikkundervisningen. På samlingen ble det arbeidet med utprøving og tilbakemelding på verktøyet. Etter planen skal ressursen være klar for publisering til medlemmene før skolestart til høsten. Det skal bli plakater for både elever og lærere – fysiske og digitale.

LAMIS holder også på med utvikling av ny nettside. Det var fint å få tilbakemeldinger fra de ulike lokallagene på hva de tenker er viktig at en ny hjemmeside skal inneholde og hvordan den skal se ut. Det ble en god arbeidsprosess med mange nyttige innspill.

En lokallagssamling trenger også inspirasjonsøkter. De 21 deltagerne fikk faglig på fyll om praksis i barnehage, om spennende forskningsprosjekt og om programmering.

Teater i Matematikk

Mona Rørsseland (Høgskulen på Vestlandet) presenterte et forskningsprosjekt som har sett på hvordan bruk av prosessdrama kan engasjere elevene og bidra til å gi matematikkundervisningen en mer realistisk tilnærming. Forskning har også sett på hvordan bruke av rollekategorier i undervisningen kan være med å endre den matematiske samtalen. Det handler om å gi elevene roller som å være skeptisk, nysgjerrig, initiativtaker og leder, når de skal løse problemløsningsoppgaver. Foreløpige resultater viser at elevene blir mer undersøkende, resonnerende og argumenterende i sine diskusjoner når de arbeider med roller.

Forskende barn og medforskende pedagoger i barnehagen

Elisabeth Hast Rønnestad (Fjelltun barnehage) hadde et engasjerende innlegg om hvordan de arbeider med utforskning og matematikk i barnehagen. Barnehagen er Reggio Emilia-inspirert, og hun hadde søkelys på hvordan barna får utvikle og bruke sin naturlige og medfødte egenskap for undring og utforskning. I barnehagen er det ofte barnas umiddelbare og impulsive undring som styrer hva som blir fokusert på. Barna får dermed påvirke sin egen hverdag. Elisabeth understreker at «vi vil heller jakte på kunnskap sammen med barna, enn jakte på barna med vår kunnskap». Det ble en god diskusjon på samlingen om skolen klarer å fange opp og videreutvikle denne utforskningskompetansen som barna har med til skolen.

Programmering – EduData

Morten Munthe og Hanne Øygarden (Norges miljø- og biovitenskaplige universitet) presenterte et nettsted som de holder på å utvikle: EduData. Dette er en åpen og gratis nettressurs i programmering for lærere på ungdomsskolen og videregående skole. Ressursene på nettstedet har en tredeling:

1. **Datasett**: EduData bygger en database over datasett som lærere lett kan ta i bruk, tilpasset sine elever og tema.
2. **Kodebiter**: Her ligger rene kodebiter (tekstprogrammering) som gjør ulike funksjoner, som for eksempel kaste to terninger flere ganger.

3. Undervisningsopplegg: Her blir programmering brukt som verktøy i læring av fag. Opplegggene legger til rette for faglig diskusjoner. Hva skjer hvis …?

EduData er en nettressurs til hjelp til lærere når de skal bruke programmering i sine fag. Ressursen er et resultat av ønsker og behov fra lærere og forskning på programmering i skolen. Hensikten med nettressursen er at lærere skal hente inspirasjon til og se nytten av å bruke programmering i sine fag. Siden er for tiden under utvikling, og nye opplegg og datasett legges ut etter hvert. Lærere inviteres til å ønske seg tema for oppgaver.

LAMIS ønsker å være en levende organisasjon der medlemmene skal være med å drøfte og påvirke fremtidas matematikkundervisning. For å lykkes med dette trenger vi aktive lokallag med engasjerte og inspirerte medlemmer. Slike samlinger er derfor viktige, for å få inspirasjon og påfyll. Dessuten får vi satt under lupen hvilken funksjon lokallagene skal ha, gjensidige forventninger til sentralstyret og tanker fra lokallagene om videre drift av LAMIS.

På samlingen viste sentralstyret en ny film som er laget for å gjøre UngeAbel-konkurransen kjent.

LAMIS vil satse på filmer når nye aktiviteter skal gjøres kjent.

Velkommen til årets sommerkonferanse!

v/Sommerkonferansekomiteen

Nedtellingen til årets faglige og sosiale høydepunkt har startet.

Etter tre år med planlegging ser vi fram til endelig å kunne invitere til Sørmarka kurs- og konferansesenter i naturskjønne omgivelser i Nordre Follo, et steinkast sør for Oslo.

Plenumsforelesere og verkstedholdere er i gang med forberedelsene, og sammen med oss i komitéen skal vi gjøre vårt for å leve opp til ambisjonen om å tenke matte på kryss og tvers av det meste vi foretar oss.

Konferansier og verdensmester i hukommelse, Oddbjørn By, vil lede oss gjennom hele helgen med både faglige drypp og matematisk moro. Før Oddbjørn ble hele norges hukommelsesmester regnet han seg som en helt vanlig student med kanskje noe haltende motivasjon for å lære. Da han i 2004 kom over noen teknikker på internett for å huske lange tallserier, skulle dette raskt endre seg. Han begynte til og med å konkurrere i memorering, og satte i 2006 en verdensrekord i å huske flest riktige tall i løpet av et minutt. Han kan også memorere en hel kortstokk på imponerende 43 sekunder.

På lørdagen gjør vi en vri: En matematisk «hinderløype» leder tre kilometer gjennom skog og over en elv til Lillebru Gård.

Det er enkelt: Løser man oppgavene, finner man veien. Bommer man, blir man tatt av ulven. På gården venter lunsj og verkstedholdere med sesjoner tilpasset alle trinn, både ute og inne.

Øktene her vil være praktiske og lett gjennomførbare i og utenfor klasserommet. Etter det faglige, åpnes det for sosialt samvær på Låveloftet, før festmiddag med underholdning på hotellet.

Påmeldingen åpner i midten av mars, og informasjon blir lagt ut på www.lamis.no og i LAMIS sin facebook-gruppe. Når påmeldingen åpner, kan dere også lese mer om innholdet i de ulike plenumsøktene og på verkstedene.

Vi lover faglig påfyll for alle – fra barnehage til videregående skole – og for studenter. LAMIS inviterer studenter til å sende søknad om å få dekket konferansen.

Hold av helgen allerede nå, og snakk med rektor før årets budsjett er brukt opp. Vi sees i august!

Tone, Tove, Hilde, Hanan, Anders og sentralstyret i LAMIS.

Løsningforslag til UngeAbel-oppgaven i Tangenten 4/22

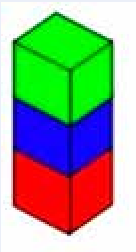
Marianne Maugesten, juryleder i UngeAbel

Stående type

For hver av de n centikubene kan vi i alt se fire sider – unntatt for den øverste centikuben, der vi også ser toppen. Totalt kan vi dermed se $n \cdot 4 + 1$ ($= 4n + 1$) sider på en slik stang.

(En alternativ skrivemåte kan f.eks være $(n - 1) \cdot 4 + 5$.)

Eksempel ($n = 3$): Vi kan i alt se $3 \cdot 4 + 1 = 12 + 1 = 13$ sider.

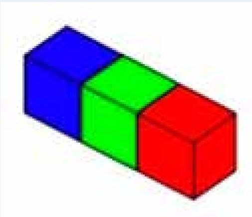


Liggende type

For hver av de n centikubene kan vi i alt se tre sider – unntatt for de to ytterste centikubene, der vi også ser endesidene. Totalt kan vi dermed se $n \cdot 3 + 2$ ($= 3n + 2$) sider på en slik stang.

(En alternativ skrivemåte kan f.eks være $(n - 2) \cdot 3 + 2 \cdot 4$.)

Eksempel ($n = 3$): Vi kan i alt se $3 \cdot 3 + 2 = 9 + 2 = 11$ sider.



Dette gir oss følgende tabell:

Antall kuber	**Bunn (stående)**	**Synlige sider (stående)**	**Bunn (liggende)**	**Synlige sider (liggende)**
1	1	5		
2	1	9	2	8
3	1	13	3	11
4	1	17	4	14
5	1	21	5	17
6	1	25	6	20
24	1	97	24	74
99	1	397	99	299
n		$4n + 1$		$3n + 2$

Oppgave fra UngeAbel

Marianne Maugesten, juryleder i UngeAbel

Denne oppgaven er fra semifinalen i 2021.

Fortløpende summer

Nedenfor ser vi de 21 tallene 0–20 plassert i sju kolonner, hver med tre tall. Summerer vi de tre tallene i hver kolonne, finner vi at første kolonne har sum 21 (= 0 + 7 + 14), andre kolonne har sum 24 (= 1 + 8 + 15) osv.

Vi ønsker nå å flytte om på tallene, slik at de sju kolonnesummene blir «fortløpende tall», altså tall som kommer rett etter hverandre.

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20

Eksempel

Dersom vi velger å plassere tallene 2, 7 og 16 i en kolonne, og 4, 5 og 17 i nabokolonnen vil disse to kolonnesummene være fortløpende tall, nemlig 25 (= 2 + 7 + 16) og 26 (= 4 + 5 + 17).

Hvordan kan vi få det til å bli fortløpende kolonnesummer hele veien fra venstre mot høyre?

Finn én løsning, og skriv den inn på svararket.

	Kolonne 1	Kolonne 2	Kolonne 3	Kolonne 4	Kolonne 5	Kolonne 6	Kolonne 7
Tall nr. 1							
Tall nr. 2							
Tall nr. 3							
Sum kolonne							

B

DISTRIBUERT AV POSTEN NORGE
posten
NORGE P.P. PORTO BETALT

Returadresse: Tangenten / Caspar Forlag AS, Kanalveien 51, 5068 Bergen