tidsskrift for matematikkundervisning 33. årgang

tangenten 3/2022

Tidsskrift for matematikkundervisning

Utgitt av Caspar Forlag AS
Kopiering fra tidsskriftet er ikke tillatt uten redaksjonens godkjenning

ISSN 0802-8192

Adresse
Caspar Forlag/Tangenten
Kanalveien 51
5068 Bergen

tangenten@caspar.no
www.tangenten.no

Abonnementspriser

Ordinært	479,– per år
Studenter	279,– per år
Klassesett	250,– per år
(ved minimum 15 studenter)	
Utland	500,– per år

Utgivelsesdatoer
20. februar, 20. april
20. september, 20. november

Layout
Caspar Forlag / Aasmund Kvamme

Grafisk produksjon
John Grieg, Bergen

Artikler til bladet sendes til
tangenten@caspar.no

Omslaget
Utforming: Sigrun Werner

Adresseendringer
Medlemmer i LAMIS må bruke
post@lamis.no
for å melde fra om adresseendinger.
Direkteabonnenter hos Caspar Forlag bruker
post@caspar.no

Retningslinjer for vanlige artikler
tangenten.no/for-bidragsytere/retningslinjer-for-forfattere/

Retninglinjer og informasjon for fagfellevurderte artikler
tangenten.no/for-bidragsytere/retningslinjer-for-niva-1-artikler/

Fagfellevurderte artikler er merket som dette i boksen med forfatteropplysninger.

Urettferdig?

For LAMIS, og for meg som LAMIS-medlem, startet det nye skoleåret på best mulig måte, med sommerkonferanse i Sandefjord. Engasjerte lærere var samlet i tre dager. I plenumsaktiviteter og verksteder delte vi ideer, erfaringer og tanker om matematikkundervisning. Vi har felles utfordringer når det gjelder å konkretisere kjerneelementene og de tverrfaglige temaene, og disse dagene ga oss nye impulser. Jeg skulle ønske at alle matematikklærerne i Norge hadde mulighet til å delta på slike dager, men heldigvis har flere deltakere allerede varslet at de vil sende artikler til Tangenten, slik at ideene når flere.

Tangenten ønsker å sette søkelys på rettferdighet og matematikk, og derfor vil Tangenten nr. 2 i 2023 være et temanummer om dette. Vi vil gjerne få illustrert en stor bredde av temaer. Matematikk kan brukes til å belyse urettferdighet, som at fordeling av de materielle godene i verden er så ulik, at mange barn ikke får skolegang og at makten er på så få hender. Matematikk kan også brukes i en interessekamp, som når lærerorganisasjoner og KS slår hverandre i hodet med regnestykker om hva rettferdig lønn for lærere er. Også skolefaget matematikk kan være mer eller mindre rettferdig, for eksempel ved å gi elever ulike muligheter for å ta del i matematikken. Se eget oppslag på side 9 om hvordan du kan bidra til temanummeret.

I denne utgaven kombinerer Eriksen og Vos temaene kjerneelementer og rettferdighet når de tar et kritisk blikk på hvordan kjerneelementene ivaretas i en del av Udirs eksempeloppgaver. Gode læreplanintensjoner kan undergraves dersom eksamen ikke trekker i samme retning. Det er alvorlig om eksamen på studiespesialisering i liten grad inkluderer modellering og anvendelser, og om nesten alle kjerneelementene er lite synlige på eksamen i yrkesfag. For elevene kan resultatet bli urettferdig, dersom lærerne lojalt jobber med kjerneelementene i sin undervisning, mens eksamen i mindre grad ivaretar disse.

Denne utgaven av Tangenten berører også en rekke andre spørsmål: Hvordan kan matematikkundervisning utvikle elevenes språkkompetanse? Hvordan kan kroppslig læring berike undervisningen? Kan Dragonbox Skole eller OneNote gi gode digitale bidrag? Hvordan kan man arbeid med kjerneelementet resonnering og argumentasjon på barnetrinnet? Kan figurtall bygge bro mellom hovedområder i matematikken? Og hva skjer egentlig når over 600 ungdommer fra 104 land samles i Oslo for matematikkolympiade? Jeg håper at bladet gir inspirasjon nå når høsten kommer!

Aune, Enge, Hindkjær, Iversen, Reitan, Valenta

Hvorfor blir det slik?

Resonnering og argumentasjon er et av kjerneelementene i matematikk i LK20, og skal dermed være innlemmet i matematikkundervisning på alle trinn og i alle matematiske temaer. Hva dette innebærer, og hvordan det kan gjøres i barneskolen, er imidlertid ikke klart (Valenta & Enge, 2020). Med prosjektet Resonnering og bevis på barnetrinnet (ProPrimEd) setter vi søkelys på denne utfordringen.

Tellef Ellingsen Aune
Huseby barneskole
tellef.aune@trondheim.kommune.no

Ole Enge
Institutt for lærerutdanning, NTNU
ole.enge@ntnu.no

Christer Løkås Hindkjær
Huseby barneskole
christer.lokas@trondheim.kommune.no

Sigrid Iversen
Institutt for lærerutdanning, NTNU
sigrid.iversen@ntnu.no

Lars Espen Reitan
Huseby barneskole
lars-espen.reitan@trondheim.kommune.no

Anita Valenta
Institutt for lærerutdanning, NTNU
anita.valenta@ntnu.no

ProPrimEd er et samarbeidsprosjekt mellom forskere ved NTNU og Trondheim kommune, og er finansiert gjennom Norges forskningsråds FINNUT-program. Lærere fra to barneskoler arbeider sammen med forskere i utprøving og utvikling av undervisningsressurser som kan fremme matematisk resonnering, argumentasjon og bevis i barneskolen.

Våren 2021 jobbet vi, tre lærere og tre forskere, med å finne ut hva arbeid med resonnering, argumentasjon og bevis kan være i barneskolen. Et av målene var å finne ut hvordan slikt arbeid kan styrkes innenfor rammene av «vanlig» undervisning, altså uten at det er nødvendig at man gjør om på hele sin matematikkundervisning. Vi brukte noen oppgavetyper som kan tilpasses ulike trinn og matematiske temaer, og som kan brukes flere ganger. I denne artikkelen presenterer vi noen av oppgavetypene vi har prøvd ut på mellomtrinnet. Før vi presenterer oppgavene, skal vi se nærmere på begrepene resonnering, argumentasjon og bevis.

Resonnering, argumentasjon og bevis

Ordene resonnering, argumentasjon og bevis kommer ofte sammen, men brukes på ulike måter. Vi velger her å bruke begreper utviklet av Jeannotte og Kieran (2017). I Jeannotte og Kierans rammeverk er matematisk resonnering et overordnet begrep som omfatter ulike typer prosesser, deriblant argumentasjon og formulering av bevis.

I skolen arbeider man med mange ulike prosesser i matematikk. Man arbeider for eksempel med å:

- definere ulike matematiske objekter, som sirkel og areal
- utvikle matematisk notasjon: hvordan skriver vi tall, hva bruker vi parentes til
- gjennomføre prosedyrer, som arealberegning og multiplikasjon av tall
- undersøke egenskapene til og relasjoner mellom matematiske objekter, for eksempel å finne ut hvilke tall som er med både i tre- og firegangen, eller om 3/4 er mer enn 4/5

Matematisk resonnering er tett knyttet til den siste typen. Man kan, noe forenklet, si at matematisk resonnering handler om å lage matematiske *påstander* og å undersøke om de er sanne. Med matematiske påstander mener vi her påstander som handler om egenskaper ved matematiske objekter og/eller relasjoner mellom ulike objekter. Dette skiller seg fra prosedyrer der vi gjerne *gjør* noe med matematiske objekter, som å dele opp, flytte, velge ut og markere.

Å resonnere handler om å finne ut hvordan matematiske objekter *er* eller *ikke er*. Innenfor matematisk resonnering kan man skille mellom to ulike typer prosesser:

Prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter – prosesser der man utleder matematiske påstander gjennom å se etter likheter og forskjeller. Det kan skje gjennom for eksempel identifisering av mønster, generalisering, sammenligning, klassifisering, eksemplifisering og hypotesedanning.

Prosesser relatert til validering – prosesser som har som formål å finne ut om en matematisk påstand er sann eller ikke. Det skjer gjennom at man argumenterer for eller imot. Gode argumenter som er matematisk gyldige (vi ser på hva gyldig betyr, under), kaller vi bevis.

La oss se på noen eksempler på de ulike prosessene. Vi kan tenke oss at noen elever på 5. trinn har fått følgende «Hvem skal ut?»-oppgave[1] (se figur 1).

Oppgaven legger opp til at elevene ser etter likheter og ulikheter mellom tallene. Det kan være forskjellige tall som skal ut, og forskjellige egenskaper som legges til grunn for valget. Man kan prøve å identifisere et mønster gjennom å sammenligne tallene og klassifisere dem ut fra ulike egenskaper (partall/oddetall, primtall/ikke-primtall, én-/flersifrede, delelighet osv.). Det kan lede til påstander slik som:

9, 18, 27, 15, 3, 98

Vi synes at ___ skal ut, fordi alle de andre er ______________________________.

Andre tall som passer inn, er ___, ___, ___ og ____.

De passer inn fordi ______________________________________.

Figur 1

– Tallene 18 og 98 er partall, de andre er oddetall
– Tallet 3 er et primtall, de andre er ikke det
– Tallet 9 er et kvadrattall, de andre er ikke det

Gjennom søk etter likheter og ulikheter rettes elevenes oppmerksomhet mot egenskaper til og relasjoner mellom tall, noe som er sentralt for matematisk resonnering. Aktiviteten kan stoppe her, men den kan også fortsette mot andre prosesser innenfor matematisk resonnering. Man kan se for seg en samtale som dette:

Lærer Hvordan visste dere at 18 og 98 er partall?
Elever De slutter på 8. Alle tall som slutter på 8, er partall.

Her kommer det en matematisk påstand: *Alle tall som slutter på 8, er partall.* Den er ikke åpenbart sann, og den er i hvert fall ikke lett å sjekke siden den handler om uendelig mange tall (alle mulige tall som slutter på 8). Det kan være at dette er en påstand man har undersøkt før i klassen, og at alle vet at det stemmer, og hvorfor det stemmer. Men hvis det ikke er tilfellet, så bør denne påstanden undersøkes nærmere. En matematisk påstand som vi tror er sann, men som bør undersøkes nærmere for å finne ut om den stemmer, og hvorfor, kaller vi en *hypotese*. Når vi skal finne ut om en hypotese er sann eller ikke, og hvorfor, utvikler vi et *argument*. Det kan være mange ulike argumenter for en hypotese. Alt vi sier og gjør for å overbevise oss selv eller andre om at hypotesen er sann eller ikke, er et argument. Eksempler på ulike argumenter for at *alle tall som slutter på 8, er partall*, altså at de kan deles i to like heltall, kan være:

A Det har broren min sagt, og han er god i matematikk.
B 8 er partall (kan deles i 4 og 4), 18 er partall (kan deles i 9 og 9). 28 er partall (kan deles i 14 og 14). Derfor er det alltid slik at du kan dele tallet i to like store deler når det slutter på 8.
C Mikkel og jeg har prøvd å dele forskjellige tall som slutter på 8, på to. Vi gjorde det på kalkulator. Vi har prøvd mange små og store tall, og alle kan deles på to uten at man får komma. Da er det sikkert sant.
D Et tall som slutter på 8, har noen tiere, hundrere, tusener osv., og så har den åtte enere. Hver tier kan man dele i to like store deler (fem og fem). Hundrere, tusener osv. er bare masse tiere, så de kan også deles i to like store deler. De åtte enerne kan også deles i to like store deler (4 og 4). Et tall som slutter på 8, kan altså deles i to tall som begge kan deles i to. Da har man delt tallet i to like store deler, så det må være et partall.

Argument A kan kanskje gjøre det mer sannsynlig at hypotesen er sann, men det er ikke et matematisk argument siden det ikke argumenteres ut fra noe vi vet om de involverte tallene. Argumentene B og C er matematiske og går ut på at hypotesen alltid er sann fordi den stemmer for noen eksempler vi har sjekket. Det er en type argument som ofte kalles *empirisk argument*. Det bekrefter *at* hypotesen stemmer i noen tilfeller. Det å sjekke eksempler er viktig for undersøkelsen, og vi kan bli mer overbevist om at hypotesen stemmer, men det er ikke et bevis. For at argumentet skal være matematisk gyldig og vi kan kalle det et bevis, bør det vise *hvorfor* det stemmer. Argument D er et slikt argument, fordi det viser hvorfor alle tall som slutter på 8, kan deles på to, ved at vi bruker egenskaper ved tallene. Mer om matematisk gyldige argumenter som kan passe i barneskolen, kan leses om i Arnesen (2022).

I arbeidet vårt våren 2021 utviklet og prøvde vi ut oppgaver der elevene arbeidet med matematisk resonnering, blant annet ved å gi oppgaver der elevene skulle lete etter likheter og ulikheter, utvikle hypoteser og lage argumenter.

Oppgavene ble utviklet med bakgrunn i prosessene beskrevet av Jeannotte og Kieran (2017) og ble testet ut i tre elevgrupper. Videre i teksten skal vi se på tre av oppgavetypene vi arbeidet med.

Hvilket tall tenker jeg på

Aktiviteten handler om at læreren tenker på et heltall mellom 1 og 30, og at elevene skal prøve å finne ut hvilket tall det er, ved å stille ja/nei-spørsmål. Det er noen regler for spørsmål som skal presenteres for elevene:

Spørsmål som «Er tallet større enn ...?» og «Er tallet mindre enn …?» kan stilles kun én gang.

Det er ikke lov å spørre «Er tallet (et konkret tall)» før man er sikker. Dersom noen stiller spørsmålet, er spillet ferdig. Dersom det er riktig tall, vinner klassen, men dersom det er feil tall, vinner læreren.

Det kan være fint å notere spørsmålene og svarene underveis på tavla.

Lærerens erfaringer fra utprøvinger på 7. trinn: Denne aktiviteten er blitt gjennomført flere ganger, i begynnelsen av en time, og også i matpausen. Selv om jeg ikke presenterte noen eksempler på spørsmål elevene kunne stille, kom elevene med mange forskjellige spørsmål, slik som om tallet er partall, om det er primtall, om det første sifferet er større enn det andre, om tallet er i tregangen, osv. Etter hvert introduserte jeg begrepet tverrsum, og elevene fikk da enda et verktøy å bruke for å finne riktig tall. Samtalen kunne forløpe slik som dette:

Lærer	Jeg tenker på et tall mellom 1 og 30
Elev A	Er tallet partall?
Lærer	Ja
Elev B	Er tallet høyere enn 16?
Lærer	Ja
Elev C	Finnes tallet i tregangen?
Lærer	Ja
Elev D	Er tverrsummen 9?
Lærer	Ja

Da finnes det bare én mulighet igjen. Tall høyere enn 16, partall, tall som er i tregangen, og tverrsum som er 9. Tallet er 18.

Elevene ville også selv være den som «eide» tallet, og vi rullerte slik at mange fikk mulighet til det. Noen ganger økte vi verdien på tallene slik at utfordringen ble større.

I klassen var det elever med ulik bakgrunn, og språk og begrepstilegnelse var ulik. Da var denne aktiviteten fin for å øve på de matematiske begrepene. I tillegg bidro aktiviteten til å skape nysgjerrighet for tall og utforskning av deres egenskaper, slik den nye læreplanen oppfordrer til.

Matematisk resonnering i denne aktiviteten handler først og fremst om prosesser relatert til søk etter likheter og ulikheter, kanskje mest klassifisering – vi klassifiserer et tall ut fra noen egenskaper (partall, primtall, tverrsummen større enn 5 o.l.) og sammenligning – tallet 5 er mindre enn 15 o.l. Det er nokså enkle prosesser, men aktiviteten er likevel viktig for klassens arbeid med matematisk resonnering siden den retter elevenes oppmerksomhet mot tallenes egenskaper – hvilke egenskaper et tall har og ikke har, hvilke egenskaper av tall som er interessant i matematikk. Det å være oppmerksom på egenskaper og relasjoner er en viktig forutsetning for matematisk resonnering.

Alltid, aldri, noen ganger

Aktiviteten handler om å argumentere for om noen matematiske hypoteser holder alltid, holder aldri eller holder noen ganger.[2] Oppgaven ble gitt som en gruppeoppgave der elevene fikk 15 minutter til å arbeide sammen før det ble en helklassediskusjon.

Lærerens erfaringer fra utprøvinger på 6. trinn: Er hypotesen sann alltid, aldri eller noen ganger? Hvorfor?

- Tall i tregangen er partall
- Jeg kan legge sammen to partall og få sju

– Tall i tigangen slutter på 0
– Tverrsummen til tallene i nigangen er 9

Utforske, representere og diskutere er begreper som går igjen i de nye læreplanene på mellomtrinnet. Det betyr at det er en forventning om at jeg som matematikklærer går mer i dybden av matematikken i min undervisning. For eksempel er det en fordel om elevene har en forståelse av hvordan tregangen er bygd opp, og ikke bare kan den utenat. Å finne ut om hypoteser alltid, aldri eller noen gang stemmer, har i så måte vært en god oppgave.

Jeg har erfart at når vi arbeider med utforskende oppgaver, er det en del elever som synes de blir for omfattende, og heller etterspør mer konkrete oppgaver. Dette var ikke tilfellet da vi jobbet med «Alltid, aldri eller noen ganger»-oppgavene. Alle ble engasjert i en konkret utforskning og fikk til noe. Elevene måtte overbevise hverandre ved hjelp av skriftlig argumentasjon, og for å skulle overbevise hverandre/læreren måtte de utforske hypotesene grundig. Det var enklest for elevene å komme til bunns i hypotesene som stemte noen ganger, der det holdt å finne et eksempel og et moteksempel. Litt vanskeligere var det å overbevise om eller akseptere at hypotesen alltid eller aldri stemte. «Det kan jo finnes et eksempel der hypotesen ikke stemmer!» Det var i disse oppgavene at vi virkelig fikk jobbet med matematiske representasjoner og bevis. Mange elever fikk noen «eureka»-øyeblikk og så en større sammenheng. Jeg mener likevel at det noen ganger, til noen elever eller aldersgrupper, er hensiktsmessig å avgrense tallområdene de skal jobbe med. For eksempel kan jo hypotesen heller være om tall i tregangen fra 0 til 30 eller 0 til 100 er partall. På den måten kan man avvente spørsmålet om uendelighet, som kan være krevende for noen, og heller innføre det etter hvert. I arbeid med hypotesen «Jeg kan legge sammen to partall og få sju» unngikk man også uendeligheten. Der hadde elevene en forståelse for at det var et avgrenset antall addisjonsstykker som ble 7, og de kunne prøve ut alle og bekrefte at ikke begge tallene kunne være partall.

Kort oppsummert synes jeg oppgavetypen innbød til gode matematiske diskusjoner der man ble tvunget til å gå i dybden i de ulike hypotesene og utforske ulike matematiske sammenhenger. Gjennom arbeidet så elevene nytten av matematiske representasjoner og bevis, og de kunne se sammenhenger som også er til hjelp ellers. Det er for eksempel nyttig å forstå hvorfor tall i tigangen alltid slutter på 0. Elevene på 6. trinn var veldig ivrige i arbeidet med disse oppgavene, og det oppsto heftige matematiske diskusjoner. Jeg har gjennomført flere lignende oppgaver i ettertid og erfart at oppgavetypen kan favne mange ulike temaer og nivåer i matematikken. Man kan også differensiere ved å endre antall tilfeller, og dermed dra inn uendelighet eller ikke.

Matematisk resonnering i denne oppgaven handler først og fremst om validering, der man argumenterer for eller imot en hypotese. Først må elevene undersøke hypotesene, og i det arbeidet vil det ofte forekomme eksemplifisering (for å bli kjent med hva hypotesen innebærer, og om den stemmer i noen eksempler). Det er forskjell på hva som godtas som et gyldig matematisk argument, det vi kaller bevis, avhengig av hypotesen. I tilfellet med tall i tregangen kan elevene ved å sjekke eksemplene 9 og 12 kunne si at hypotesen noen ganger er sann. I tilfellet med at en kan legge sammen to partall og få sju, kan man undersøke alle mulige summer for å avkrefte hypotesen. Når det er snakk om hypoteser med uendelig mange tilfeller, som tallene i tigangen, må man argumentere for hvorfor det alltid vil være slik.

Mønster i regning

I denne oppgaven skal elevene utforske mønster i regnestykker. Først skal elevene regne ut noen par med regnestykker, før de skal lage lignende par selv. Når de har gjort dette, skal de ta stilling til hva som er likt, og hva som er ulikt, før de skal gi en forklaring på dette mønsteret.

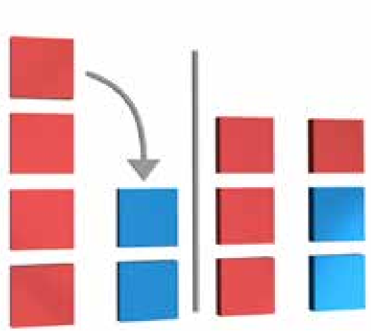
Lærerens erfaringer fra utprøvinger på 4. trinn: I utprøving på 4. trinn brukte vi blant annet oppgaven i figur 2. Elevene laget regnestykker som kan deles i tre kategorier:

Noen elever laget regnestykker som passet med det de hadde observert tidligere: at selve regnestykkene var forskjellige, men at summen var lik. Eks.: 10 + 4 = 14 og 3 + 11 = 14. Altså har en observert at forskjellige addisjonsstykker kan få samme svar, uten at det knyttes noen konkret nytteverdi til denne oppdagelsen.

Andre elever oppdaget at dersom en øker den ene addenden med 1 og reduserer den andre addenden med 1, får man samme sum, for eksempel 19 + 6 = 25 og 18 + 7 = 25. Vi er stadig vekk ikke kommet noe nærmere en nyttig strategi, ettersom ingen av uttrykkene inneholder tall som er enklere enn den andre å addere.

Den tredje gruppen laget eksempler hvor en unngår tieroverganger og får enklere uttrykk å regne med, for eksempel 29 + 8 = 37 og 30 + 7 = 37. Dette kan gi opphav til en nyttig strategi.

Her kan man forklare hva som skjer, på forskjellige måter. Elevene som har forstått prinsippet, forklarer gjerne muntlig: at dersom det ene tallet blir én mindre og det andre tallet én større, må svaret bli det samme. Elevene ble også introdusert for forklaringsmodellen i figur 3, hvor en ser for seg to stabler med kvadrater. Om vi flytter ett kvadrat fra den ene stabelen og til den andre, vil antallet kvadrater totalt forbli det samme. Dette gjelder uansett hvor høye stablene er, altså hvilke tall vi har.



Figur 3

Oppgaven kan knyttes til forskjellige regnearter. I subtraksjon må begge tallene reduseres eller økes med samme verdi for at vi skal få samme differanse. I multiplikasjon kan en benytte halvering og dobling av faktorene og få samme produkt, mens man ved divisjon kan halvere eller doble dividend og divisor og fremdeles få samme kvotient.

10 + 5 = 9 + 6 =	15 + 70 = 16 + 69 =	20 + 33 = 19 + 34 =	200 + 200 = 199 + 201 =

Lag flere slike par av regnestykker:

___+___=____ ___+___=____ ___+___=____

___+___=____ ___+___=____ ___+___=____

Hva er likt og hva er ulikt i regnestykkene?

Hvorfor blir det slik?

Figur 2

Oppgaven kan tilpasses på flere forskjellige måter. Ut over å knytte den til andre regnearter er det også mulig å utvide den med bruk av konkreter, som tellebrikker, multilinks og lignende. Man kan også tilpasse vanskegrad ved å bruke ulike tall.

Denne oppgaven inneholder både søk etter likheter og ulikheter og validering. Ved arbeid med de to første delene av oppgavene må elevene undersøke tall og løsninger for å finne hva som er likt og ulikt, noe som kan gi opphav til en hypotese. Ved at elevene blir bedt om å begrunne det de har funnet ut, nemlig at denne hypotesen stemmer, blir de invitert inn i en valideringsprosess der de må utvikle et argument. I dette tilfellet vil det være hypoteser med uendelig antall tilfeller, og et gyldig argument må derfor vise hvorfor hypotesen alltid er sann. Som det vises i eksempelet over, ble ikke ordene hypotese og argument brukt i oppgaven, men etter hvert som elevene blir kjent med disse begrepene, kan de innføres.

Avslutning

Vi har her vist eksempler på hvordan oppgavene «Hvilket tall tenker jeg på?», «Alltid, aldri eller noen ganger» og «Mønster i regning» er blitt brukt i utprøving på ulike trinn. Oppgavene legger opp til at en skal arbeide med ulike sider ved matematisk resonnering: søk etter likheter og ulikheter, og validering i form av bevis. De fremmer resonnering ved å sette søkelys på matematiske objekter: hva de er, hvilke egenskaper de har, og hvilke relasjoner som finnes mellom ulike objekter. På den måten kan vi arbeide med matematiske objekter som noe som *er*, framfor matematikk som noe vi *gjør*. Et annet fellestrekk er at de kan tilpasses til ulikt matematisk innhold og ulike klassetrinn, samt at de krever lite tid til forberedelse og gjennomføring. På den måten er dette oppgaver som egner seg godt for å skape muligheter for resonnering, argumentasjon og bevis i klasserommet.

Noter

1 Erfaringer fra bruk av denne typen oppgaver på barnetrinnet er beskrevet av Nordheim (2021).

2 Nordheim (2021) har prøvd ut lignende oppgaver på barnetrinnet.

Referanser

Arnesen, K. K. (2022). Generiske eksempler som argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, *33*(4), 2–8.

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Nordheim, T. K. (2021). Resonnering og argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, *32*(2), 2–7.

Valenta, A. & Enge, O. (2020). Bevisrelaterte kompetanser i læreplanen LK20 for matematikk i grunnskolen. *Acta Didactica Norden, 14*(3). http://dx.doi.org/10.5617/adno.8195

Temanummer (Tangenten 2/2023)

Rettferdighet og matematikk

Tangenten nr. 2/2023 blir et temanummer om **Rettferdighet og matematikk**. Vi inviterer lærere og andre med greie på skole om å sende inn artikler. Vi vil gjerne ha mange artikler som er basert på konkrete erfaringer fra skole og undervisning, men alle trenger ikke være det.

Med «matematikk» mener vi både skolefaget matematikk, som kan være mer eller mindre inkluderende og rettferdig, og matematikken som verktøy, som kan brukes både som et maktspråk og til å utfordre makten. Det finnes mange koblinger mellom rettferdighet og matematikk – noen er inkludert i ordskya over, men vi regner med at det finnes mange flere som vi ikke engang har tenkt på. For ordens skyld: Ordenes størrelse i ordskya er ikke ment å signalisere hvor viktige vi mener ordene er.

Manuskript leveres helst inn elektronisk. Maksimal lengde er seks sider. Det tilsvarer omtrent 3300 ord med bare tekst. Vanlig levering er via e-post til redaksjonen (tangenten@caspar.no). Vi vil gjerne ha artiklene innen 15. januar 2023. Les mer om retningslinjer for forfattere her: http://tangenten.no/for-bidragsytere/retningslinjer-for-forfattere/

Vi er også interessert i vitenskapelige artikler om temaet (altså artikler som skal fagfellevurderes), men siden dette er en lengre prosess, vil slike artikler neppe være klare til nr. 2/2023.

Lekaus, Lossius

Språksensitiv matematikkundervisning

Denne artikkelen tar utgangspunkt i observasjoner fra studenters praksis, hvor matematikk i flerspråklige klasserom har vært et tema. Målet er å øke studenters, læreres og lærerutdanneres oppmerksomhet om det flerspråklige matematikklasserommet slik at kunnskapen om flerspråklige elevers læring blir en naturlig del av studentenes lærerutdanning i matematikk.

Aamaas og Duesund (2016) fant at lærerstudentene mener de har fått for lite konkret kunnskap om det flerkulturelle klasserommet i sin utdanning. Iversen (2020) fant i sin doktorgrad at lærerstudentene betrakter seg selv som enspråklige og er usikre på hvordan de kan tilnærme seg det flerspråklige klasserommet. Likevel viser avhandlingen at lærerstudentene har mangfoldige erfaringer med språk og en vilje til å arbeide med det flerspråklige klasserommet, noe som kan utnyttes i lærerutdanningen.

Flere studier har vist at språkferdigheter i undervisningsspråket påvirker læringsmulighetene i matematikkundervisningen (Prediger & Wessel, 2013; Planas, 2016). Språksensitiv matematikkundervisning søker å innlemme språklæring i matematikklæringen istedenfor å betrakte disse som to adskilte deler. Ifølge Prediger og Wessel (2013) er denne typen undervisning en styrke for flerspråklige elever, men også for enspråklige elever som ikke har et så rikt språk.

I norsk sammenheng gir Vigdis Flottorp (2010) oss et innblikk i deltakelse og uttrykksmåter i flerspråklige klasserom ved å illustrere noen utfordringer under klasseromssamtaler med elever. Hun løfter frem gester og kroppsspråk som sentrale i arbeid med flerspråklige elever. Rangnes og Meaney (2021) har forsket på lærerstudenters læring etter å ha undervist flerspråklige klasserom i modellering i matematikk. De peker på at lærerutdannere må arbeide videre med å støtte lærerstudenter i å bruke elevers flerspråklige identiteter som en positiv ressurs i deres læring av matematikk. Rangnes og Meaney (2021) gir oss et tilbakeblikk på undervisningen fra et lærerstudentperspektiv, mens vi i denne artikkelen vil arbeide med et teoretisk rammeverk (Prediger & Wessel, 2013) for å synliggjøre et mulig redskap for å *planlegge* oppgaver og kommunikasjon i flerspråklige klasserom.

Silke Lekaus
Høgskulen på Vestlandet
silke.lekaus@hvl.no

Magni Elen Hope Lossius
Høgskulen på Vestlandet
magni.elen.hope.lossius@hvl.no

Kommunikasjon på mange måter

En student i praksis jobber med måling ute i skolegården sammen med en gruppe elever på 2. trinn. Vi følger to av elevene, her kalt Frode og Ann, hvor Frode har norsk som morsmål og Ann nylig er ankommet til Norge med engelsk som morsmål. Studenten spør Frode hvor mange linjaler han trenger for å måle rundt hele bordtennisbordet. Frode svarer: «33.» Ann sier ingenting, og studenten henvender seg til henne og spør: «How many?» Ann svarer: «I don't know.» En litt bekymret Frode henvender seg til studenten: «Vi kan ikke være på gruppe. Jeg kommer ikke til å forstå så mye, for hun snakker bare engelsk.» Studenten beroliger: «Jeg kan hjelpe dere», men så setter elevene i gang alene.

Ann tar linjalen og legger den oppå bordtennisbordet slik at den ene enden av linjalen starter ved enden av bordet, og slik at linjalen ligger kant i kant med enden av bordet, se figur 1. Deretter legger hun en finger ved enden av linjalen med venstre hånd, løfter opp linjalen med høyre hånd og forsøker å legge den ned ved siden av fingeren. Frode ser at det ikke er så lett å flytte linjalen med den ene hånden og holde fingeren imellom med den andre hånden, så han går bort til Ann for å hjelpe. Langs hele langsiden måler de lengden ved at Ann holder i linjalen, mens Frode legger sin finger ved enden av linjalen. Deretter løfter Ann linjalen foran fingeren, og Frode følger etter og flytter sin finger. 1–2–3–4–5–6 … De teller sammen på norsk i kor. Ved enden av bordet bytter de roller. Frode overtar linjalen, mens Ann holder fingeren imellom. De spør ikke om de skal bytte roller. Det skjer automatisk ved at Ann gir Frode linjalen. De fortsetter og kommer til slutt til at det er nesten 38 linjaler rundt bordtennisbordet.

I denne observasjonen benytter elevene og studenten seg av ulike uttrykksformer som er viktige for matematikklæring: muntlig språk på både norsk og engelsk, tallord på norsk, et bordtennisbord og en linjal som tjener som konkretiseringsmateriell for å innlede en målingsaktivitet. Der de to elevene mangler felles muntlig språk, blir muntlig kommunikasjon erstattet med gester, der den ene peker på stedet der linjalen må flyttes til. Her viser elevene forståelse for at en måleenhet kan gjentas. Gjennom felles telling i kor støtter Frode Ann i å bli trygg på å telle på norsk. De to elevene og studenten bringer ulike ferdigheter med inn i samtalen for å uttrykke seg om måling. Det er et fantastisk samarbeid mellom de to. Matematikkspråket i form av tallordene 1–38 har de felles, og de har felles kroppsspråk. Kanskje fordi de har få muntlige ord felles, så er de så flinke til å følge opp hverandre ved hjelp av kroppsspråk. De er tydelig engasjert i å løse dette sammen, til tross for at Frode påpeker i starten at han ikke kommer til å forstå så mye fordi Ann snakker engelsk.

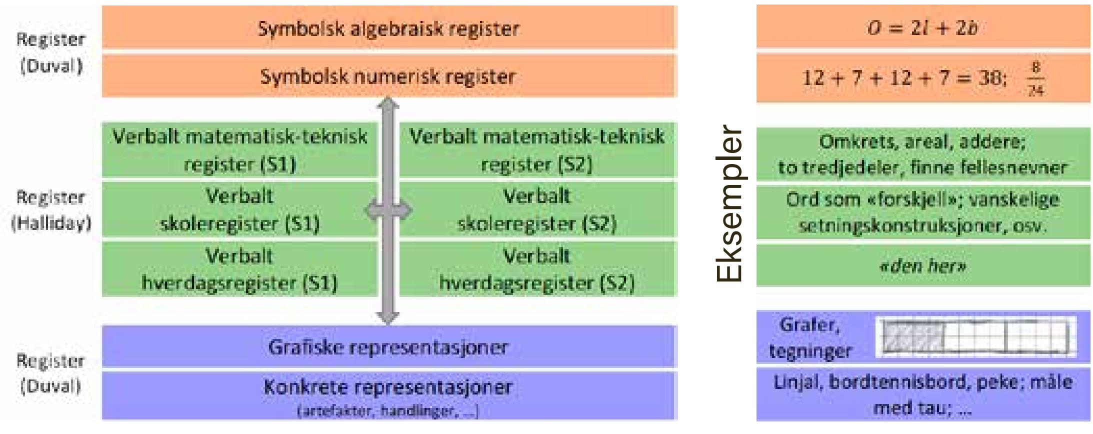
Figur 1: Måling av omkrets.

Språklige registre

Prediger og Wessel (2013) har utviklet en modell som samler ulike uttrykksmåter (muntlig og skriftlig språk, grafiske representasjoner, matematiske symboler, konkreter osv.) og representerer disse i flere lag, se figur 2. Modellen kan være et redskap for å konstruere varierte læringsmuligheter som vi gir noen eksempler på senere i artikkelen. Modellen drar nytte av kunnskaper fra forskningstradisjoner fra tre ulike felt: lingvistikk, forskning på flerspråklighet og bruk av representasjonsformer i matematikk. Med forankring i forskning av matematikkdidaktikeren Raymond Duval og lingvisten Michael Halliday bruker de ordet register istedenfor representasjonsform. Duval skiller mellom multifunksjonelle og monofunksjonelle registre. Verbalt språk, dvs. språk uttrykt med ord enten muntlig eller skriftlig, utgjør den grønne delen av figuren. Det er et multifunksjonelt register fordi verbalt språk har mange funksjoner. Vi kan snakke og skrive om matematikk, men også bruke språket til å skrive en roman, en matoppskrift eller fortelle en venn om hva vi gjorde i helgen. Tallsymboler eller matematisk formelspråk derimot er monofunksjonelle registre som er utviklet for å kunne beskrive antall/mengde eller algebraiske sammenhenger. På figur 2 utgjør disse de to øverste lagene i oransje farge. Det er typisk for monofunksjonelle registre at de gir mulighet for en regelbunden eller algoritmisk fremgangsmåte som vi kjenner for eksempel fra divisjonsalgoritmen eller fra regler for ligningsløsning. Det er også vanlig i matematikk å tegne (for eksempel brøksirkler, grafer eller mer uformelle tegninger) og å bruke konkreter. Disse uttrykksformene er markert nederst i modellen i blått. De to andretrinnselevene fra praksisobservasjonen arbeider med konkreter (bordtennisbord og linjal), og de peker med fingrene for å markere hvor linjalen må flyttes til. De bruker også tallord til felles telling. Hvis de hadde vært eldre, hadde det vært aktuelt å bruke formelspråk til å uttrykke omkretsen: $O = 2l + 2b$.

Forskningen til Halliday ligger til grunn for oppdelingen av den grønne delen på figuren, altså den delen av figuren som gjelder naturlig språk og er multifunksjonell, i tre horisontale lag: tekniske registre, skoleregistre og hverdagsregistre. Ettersom Prediger og Wessel er interessert i flerspråklige klasserom, knytter de disse til to språk (S1 og S2), som vil være en flerspråklig elevs hjemmespråk og undervisningsspråket, slik at den grønne delen av figuren til slutt har seks felt. Frode og Ann snakker hvert sitt språk i observasjonen med unntak av telling på norsk. De kan ikke enda veksle selv mellom norsk og engelsk, men de erstatter en del muntlig språk med gester.

Ifølge definisjonen til Halliday er et språklig register valg av ord og uttrykksformer som man typisk bruker under bestemte forutsetninger eller i bestemte situasjoner. Tenk på en fagtekst og sammenlign språket med uttrykkene som barn bruker når de roper beskjeder til



Figur 2: Relasjoner mellom ulike registre og representasjoner fra Prediger og Wessel (2013).

hverandre på fotballbanen. Både setningsoppbygning (lange og korte setninger, hele eller uferdige setninger) og ordforrådet vil være forskjellig.

Hverdagsregisteret består av ord og uttrykksmåter som brukes i uformelle kontekster i hverdagen, og består først og fremst av muntlige uttrykk. Ord og uttrykk som er typiske for matematikken og beskriver begreper, objekter eller handlinger som bare forekommer i matematikkens verden (som omkrets, siffer, tallsystem eller å utvide en brøk), hører til i det matematisk-tekniske registeret. Skoleregisteret ligger mellom hverdagsregisteret og det tekniske registeret. Prediger og Wessel (2013) mener at dette registeret i midten ikke vies nok oppmerksomhet i didaktisk forskning og i undervisningsplanlegging. Skoleregisteret er ikke knyttet til et bestemt fagområde. Det består av mer formelle ord og uttrykksmåter enn hverdagsregisteret og benytter seg også av mer komplekse setningskonstruksjoner som setninger i passiv verbform. Dette brukes for eksempel i tekstoppgaver (Flottorp, 2005), der uttrykk som «hva er forskjellen i høyde mellom de to mennene?» kan forekomme istedenfor en mer hverdagslig uttrykksmåte som benytter seg av korte og enkle setninger: «Hvem er høyest av Per og Pål? Hvor mye høyere?» Ifølge Prediger og Wessel møter enkelte elever skoleregisteret bare på skolen, enten fordi de snakker et annet språk enn undervisningsspråket hjemme, eller fordi de kommer fra hjem der en slik formell språklig uttrykksmåte ikke brukes i samtaler. Samtidig fant Wessel et al. (2018) at skolen ofte betrakter skoleregisteret som et medium for matematikklæring, mens det for noen elever burde være et læringsmål i seg selv å lære å uttrykke seg gjennom skoleregisteret i planlagte aktiviteter og støtte i læringssamtaler. Dette mener de er spesielt viktig når matematikkundervisningen vektlegger utforskning, diskusjon og argumentasjon. Det krever at elever i stor grad kan forklare sine resonnementer gjennom bruk av ulike representasjonsformer som tegninger eller konkreter. Når en forenkler språket, kan en redusere språkproblemer på kort sikt, men det vil redusere elevenes læringsmuligheter på lang sikt. Derfor foretrekker Wessel et al. (2018) matematikkundervisning som utvider elevenes språklige uttrykksferdigheter, som del av matematikklæringen.

Det er viktig å være klar over at de tre ovennevnte språklige registrene ikke er strengt adskilte fra hverandre. De kan til og med blandes i en og samme setning når man forklarer et fagord gjennom hverdagslige begreper, for eksempel: *En meter er det samme som et langt skritt*. Det kan også skje at samme ord brukes i forskjellig betydning i de ulike registrene: *sentrum* av en sirkel eller av en by, eller fra skoleregisteret: *å stille noe i sentrum*. Figur 2 illustrerer de ulike lagene av registre som er relevante for matematikkundervisningen, med noen eksempler i tabellen til høyre. Pilene symboliserer at det er overganger mellom alle registre.

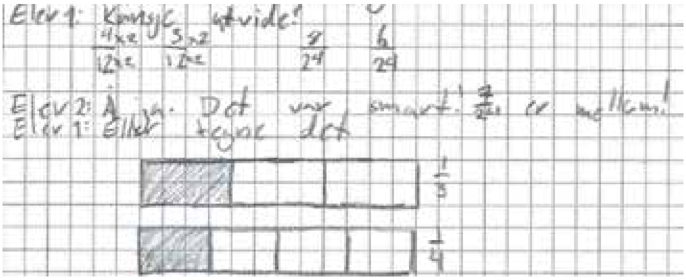
Resonnere og argumentere på undervisningsspråket

Språk er et redskap for å kommunisere med andre, men også et verktøy for tenkning og for å konstruere begrepsforståelse. For at alle elever skal kunne lykkes i den matematikkundervisningen som vektlegger resonnering, forståelse for matematiske sammenhenger og argumentasjon, må de få øve seg på ulike uttrykksformer og ikke minst relatere disse til hverandre. Dette kan gjøres gjennom oppgaver og samtaler.

Figur 3 på neste side viser et utdrag fra en elevløsning fra 7. trinn. Elevene ble spurt om å skrive ned en fiktiv samtale mellom to tenkte elever som prøver å finne en brøk mellom 1/4 og 1/3. Vi ser at eleven vet hvordan man utvider brøk, først til 12-deler og så til 24-deler, og at eleven kan representere dette i det symbolsk-numeriske registeret: $\frac{4 \times 2}{12 \times 2}$. Forklaringene til

Ordnivå	Kjennskap til ord og uttrykk fra ulike registre. «Problemløsning, samarbeide, teller, nevner, utvide, finne fellesnevner.»
Setningsnivå	Å bygge og forstå setninger som beskriver matematiske sammenhenger, inkludert komplekse konstruksjoner med leddsetninger og passiv verbform innenfor skoleregisteret. «For å finne omkretsen må man måle rundt hele bordet.»
Tekstnivå	Å skrive og forstå lengre tekster; innebærer også å ha oversikt over sammenhenger mellom setningsledd, som for eksempel blir tatt opp igjen gjennom pronomen. «Da vi skulle finne en brøk mellom 1/4 og 1/3, valgte jeg først 12 som fellesnevner og utvidet brøkene, men jeg fant fortsatt ingen brøk imellom. Derfor utvidet jeg brøkene til 24.»
Diskursnivå (muntlig)	Å kunne delta i muntlige læringssamtaler, vite hva det innebærer å beskrive, begrunne eller argumentere, og ha de språklige uttrykksmåtene for å gjennomføre dette.

Tabell 1: Ulike språklige utfordringer med skoleregister og matematisk-teknisk register.



Figur 3: Tenkt samtale mellom fiktive elever

utregningene er korte og nesten i stikkord: *Kanskje utvide! …* $\frac{7}{24}$ *er mellom!* Vi ser at eleven kjenner til ord som hører til det matematisk-tekniske registeret («utvide»), men at han uttrykker seg også med hverdagsspråk («er mellom») for å få fram tanken. Eleven har også laget tegninger som representerer 1/3 og 1/4, samtidig som de representerer 8/24 og 6/24, gjennom at helheten har 24 ruter og 8 respektive 6 av disse er skravert. Vi kan ikke vite med sikkerhet om dette er en tilfeldighet, for eleven har ikke forklart sin tegning gjennom verbalspråk. Å forklare hele informasjonen som ligger i tegningen, er språklig komplekst. Man må kunne bruke bestemte matematikkfaglige ord som *enhet*, *helhet*, *rute*, *dele opp i like deler*. Disse må man kunne sette sammen til setninger som: *Jeg tegnet et rektangel med 24 ruter. Jeg delte rektangelet i 4 like store deler. Jeg skraverte en av delene. Den består av 6 ruter.* Man trenger også grammatiske ferdigheter for å kunne forstå sammenhengen mellom setningene, for eksempel hvem «den» i siste setning peker tilbake til. I de siste setningene kom det inn viktige ord som ikke bare brukes i matematikkfaget: *skravere* og *består av*. De kan regnes til skoleregisteret. Elevens løsning kunne være et utgangspunkt for en klasseromssamtale der man forklarer tegninger og formler med verbalspråk og gjør de ulike språklige uttrykksmåtene tilgjengelig for alle elevene, både norske og flerspråklige. Utfordringer med skoleregisteret og det matematisk-tekniske registeret kan oppstå på ulike språklige nivåer. Derfor bør man som lærer gi oppgaver hvor elevene arbeider med *ord*, men også med å formulere *setninger*, og forstå og skrive *sammenhengende tekst* og delta i *muntlige læringssamtaler*, se tabell 1, som er inspirert av Wessel et al. (2018). Tabellen utdyper den grønne delen av figur 2. I eksempelet over med brøkoppgaven har vi sett

Et rom er 2 meter langs den ene veggen og 4 meter langs den andre veggen.

Trine: «Det er 8 kvadratmeter fordi $2 \times 4 = 8$, men jeg kunne også ha regnet $2 + 2 + 2 + 2$ eller $4 + 4$.»
Tom protesterer: «Nei, for å regne areal må vi alltid gange.»

Lag tegninger av rommet som viser arealene $2 + 2 + 2 + 2$ og $4 + 4$ og forklar tegningene. Bruk tegningene for å begrunne hvilken enhet du tenker du må bruke her:
$8\ m^2 = 2\_\_ + 2\_\_ + 2\_\_ + 2\_\_$

Figur 4: Oppgave

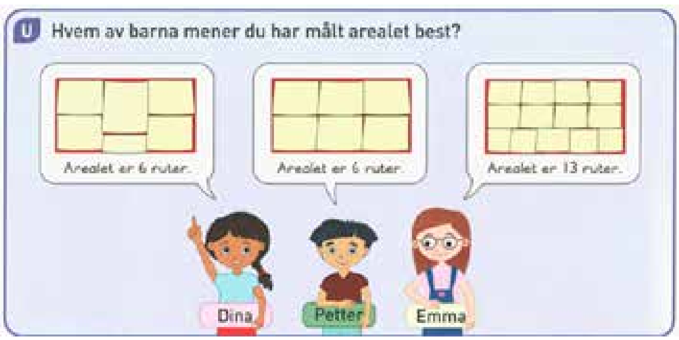
hvordan verbalspråklig uttrykksmåte henger tett sammen med å uttrykke seg gjennom både formler og tegninger.

Overganger mellom registre

I dette avsnittet skal vi gi eksempler på aktiviteter der man jobber med overganger mellom ulike registre innenfor temaet måling.

En typisk oppgave innenfor areal er: «Et rom er $2\,\text{m} \times 4\,\text{m}$. Finn arealet.» Oppgaveteksten benytter seg av symbolsk numerisk register og teknisk register. Svaret som forventes, ligger også innenfor symbolsk numerisk register. Her benyttes bare 2 av 7 registre slik at det er mange språkformer elevene går glipp av. Ser vi på oppgaven i figur 4, vil oppgaveteksten benytte seg av tegning, hverdagsregister («vegg», «rom»), skolespråk («langs»), teknisk språk («enhet», «8 kvadratmeter», «areal»), numerisk symbolsk register («8 m^2»). Elevsvarene som oppgaveteksten oppfordrer til, vil kreve en utdyping og forståelse av tegningen, overganger mellom verbalspråk og tegning («Lag tegninger av rommet som viser …») og symbolsk numerisk register ($2 + 2 + 2 + 2$). Læreren kan oppfordre elevene til å presentere sine tegninger på tavlen. Vi vet ikke om elevene vil benytte hverdagsspråk, skolespråk eller teknisk språk for å begrunne tegningene sine. Det vil avhenge av elevenes individuelle språklige muligheter. Ved å vise og forklare at ulike tegninger kan være svar på oppgaven kan elevene utvikle sine språkferdigheter på diskursnivå. En felles oppsummering gir elevene som ikke behersker skolespråket og det tekniske språket så godt, en mulighet til å bli fortrolige med det. I et vanlig klasserom har vi ordplakater, men disse kan også erstattes med språkplakater som viser setninger eller uttrykk i sammenheng med tegninger, og som letter overgangen til diskursnivå.

Det er ikke nødvendig å lage alle oppgaver selv for å arbeide på denne måten. Figur 5 viser en oppgave fra Multi 2B som kan brukes som utgangspunkt til å øve på overganger mellom ulike registre. Her får elevene arbeidet med å oversette tegning til verbalt språk (hverdagsspråk, skolespråk og/eller teknisk språk). Viktige ord og uttrykk fra matematikkspråket blir *enhet* eller *like stor*. Det er også viktig å tenke på hvordan disse kan inngå i hele setninger som beskriver en tankegang: «enhetene må dekke hele overflaten, men de må ikke overlappe». Her



Figur 5: Oppgave fra Multi 2B (s. 90), av B. Alseth et al., 2020, Gyldendal

er for eksempel «overlappe» ikke et typisk matematikkord, men det hører til skoleregisteret og er viktig for å forklare resonnementet.

Språksensitiv matematikkundervisning tar utgangspunkt i den språkkompetansen eleven har, enten den kommer til uttrykk ved hjelp av gester, tegning, ulike typer verbalt språk eller symboler. For noen elever er hjemmespråket en naturlig ressurs å benytte i skolesammenheng. For andre elever er det gester og tegninger som er en ressurs. Begge deler må anerkjennes og bygges på gjennom aktiviteter som arbeider både med ulike representasjonsformer og ulike typer verbalspråk. Vi har gitt noen eksempler på oppgaver som kan stimulere overganger mellom ulike registre, og som støtter et syn på språk som en ressurs. Lignende oppgaver kan styrke læringsmulighetene for alle elever i en resonnerende og argumenterende matematikkundervisning.

Flere eksempler på oppgaver finner dere på nettressursen til LATACME: Se https://prosjekt.hvl.no/latacme/ressurser/laererkonferanse-nye-laereplaner-i-matematikk-med-fokus-pa-1-til-7-trinn/ og velg ressursene:

– Er vi «ferdige» med brøk nå, eller kan vi lage oppgaver på andre måter?
– Språksensitiv matematikkundervisning

Referanser:

Alseth, B., Arnås, A.-C. & Røsseland, M. (2020). *Multi 2B Elevbok*. Gyldendal.

Flottorp, V. (2005). Matematikk og språk i en flerkulturell skole. *Tangenten – tidsskrift for matematikk i grunnskolen*, *16*(3), 19–23.

Flottorp, V. (2010). Deltakelse og uttrykksmåter i flerspråklige klasserom. *Tangenten – tidsskrift for matematikk i grunnskolen*, *21*(4), 41–47.

Iversen, J. Y. (2020). *Pre-service teachers' first encounter with multilingualism in field placement* [Doktorgradsavhandling]. Høgskolen i Innlandet.

Planas, N. (2016). Matematikkundervisning og flerspråklighet: elevenes språk som ressurs. I R. Herheim & M. Johnsen-Høines (red.), *Matematikksamtaler – Undervisning og læring – analytiske perspektiv* (s. 23–38). Caspar Forlag.

Prediger, S. & Wessel, L. (2013). Fostering German-language learners' constructions of meanings for fractions—design and effects of a language-and mathematics-integrated intervention. *Mathematics Education Research Journal*, *25*(3), 435–456.

Rangnes, T. E. & Meaney, T. (2021). Preservice teachers learning from teaching mathematics in multilingual classrooms. I N. Planas, C. Morgan & M. Schütte (red.), *Classroom Research on Mathematics and Language* (s. 201–218). Routledge.

Wessel, L., Büchter, A. & Prediger, S. (2018). Weil Sprache zählt – Sprachsensibel Mathematikunterricht planen, durchführen und auswerten. *Mathematik lehren*, 206, 2–7.

Aamaas, Å. & Duesund, K. (2016). Lærarutdanninga i ei tid prega av mangfald. I V. Solbue & Y. Bakken (red.), *Mangfold i skolen – fra politisk vilje til flerkulturell virkelighet?* Fagbokforlaget.

Mejer

Kroppslig læring

Mange lærere erfarer at elever trenger fysisk aktivitet i læringsarbeidet. I denne artikkelen vil jeg presentere noen sentrale aspekter ved kroppslig læring og gi noen eksempler på aktiviteter som kobler fysisk aktivitet og læring av matematikk.

Fysisk aktiv læring (FAL) er i Norge blitt kjent gjennom arbeidet til Senter for fysisk aktiv læring (SEFAL). For å forebygge risikoen for sykdom senere i livet anbefalte Folkehelseinstituttet i sin Folkehelserapport fra 2018 (FHI, 2018) mer fysisk aktivitet i skolen. For at fysisk aktivitet ikke bare blir begrenset til timene med kroppsøving, utviklet SEFAL eksempler på fysiske aktiviteter som læreren kan innføre i sin undervisning, for eksempel i matematikk.

Forskning viser at fysisk aktivitet øker blodgjennomstrømningen i hjernen (Sneck et al., 2019). Men økt kroppslig aktivitetsnivå fører ikke automatisk til mer læring (Tran et al. 2017). Stafetter, skattejakt eller aktivitetsbingo med matematikkoppgaver kan engasjere og motivere elevene til å jobbe med matematikk. Mange av disse aktivitetene er slik at det er lett for læreren å bytte matematikkoppgaver ut med oppgaver i et annet fag. Det virker arbeidsbesparende, men viser samtidig at det ikke er noen sammenheng mellom den fysiske aktiviteten og matematikken som skal læres. Spørsmålet er da om det er mulig å lage aktiviteter der selve den kroppslige aktiviteten kan bidra til læring av matematikk? Hva kjennetegner en slik aktivitet, og hvordan kan vi utforme den?

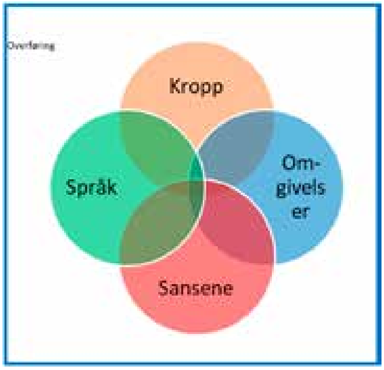
Antje Else Hete Frieda Meier
Høgskulen i Volda
antje.else.hete.frieda.meier@hivolda.no

Lærerutdannere fra Høgskulen i Volda har utviklet og gjennomført et opplegg med varierte kroppslige aktiviteter innenfor temaet symmetri (rotasjons- og speilingssymmetri). Grunnlaget for designet av aktivitetene var læringsteori om kroppslig læring (embodied cognition). På bakgrunn av litteratur om kroppslig læring (blant annet Alibali & Nathan, 2012; Radford mfl., 2017; Wilson, 2020) har jeg utviklet en modell med fem sentrale aspekter: sansene, kropp, omgivelsene, språk og overføring til matematikkverden.

Figur 1 visualiserer sammenhengene mellom de ulike aspektene.

I hver kroppslig aktivitet er ett eller flere aspekter i varierende grad til stede og kan overlappe med andre aspekter. Overføring av kunnskap til matematikkverdenen er det femte aspektet som må være til stede hvis læring skal skje.

Videre vil jeg forklare hva som ligger i disse fem aspektene.



Figur 1: Fem sentrale aspekter.

Sansene: Vi tenker (praktisk eller kognitivt) gjennom våre sanser, skrev Radford mfl. (2017, s. 717). Sansene omfatter syn, hørsel, luktesans, smakssans og følesans. Visuelle erfaringer, men også akustiske signaler (språk og annet) er viktig i undervisningen. I tillegg kan den taktile og den kinestetiske sansen (følesansen) få betydning, f.eks. når vi tar på konkreter, og når vi kjenner posisjonen av kroppen med lukkede øyne. Vi kan «tenke» gjennom sansene, men for at vi skal kunne forstå skolematematikken, er også andre aspekter, for eksempel språk, vesentlig.

Kropp: Gester med hender og fingre og bruk av hele kroppen kan hjelpe i tankeprosessen og til å forstå (Wilson, 2020, Alibali & Nathan, 2012). Vi kan for eksempel visualisere begrepet av en rett vinkel med hendene eller begge armer, sammen med verbale forklaringer. Eller vi kan gå fremover og bakover for å visualisere positive og negative tall.

Omgivelsene: All læring skjer gjennom et samspill mellom elevens kognitive prosesser og omgivelsene (Wilson, 2020). Om undervisningen foregår i et tradisjonelt klasserom eller i et uteområde, kan ha innvirkning på læreprosessen. Temaet symmetri blir ofte undervist med papir og blyant inne i et klasserom. Et utradisjonelt klasseromsoppsett eller bruk av uteområdet kan være et alternativ for å sette matematikken i en mer praktisk kontekst.

Språk: Matematikkundervisningen er multimodal, mener Anna Sfard (2015, s. 134). Det inkluderer både muntlig og skriftlig språk, hverdagsspråk og matematikkspråk med få ord og symboler. Kommunikasjon kan også foregå med ikke-verbale uttrykk gjennom gester, mimikk og kroppsbevegelser.

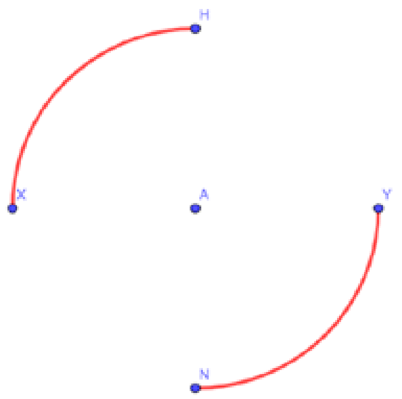
Overføring: Sanseerfaringer og kroppslige erfaringer er noe en kan forbinde med taus kunnskap, en slags kroppslig kunnskap. Skolematematikken utvikler seg fra kroppslig kunnskap til kognitiv kunnskap, fra fysiske og konkrete aktiviteter og representasjoner til å bli mer abstrakt (Tall, 2008). For å kunne oppnå en dyp forståelse må vi «oversette» den kroppslige kunnskapen til kognitiv kunnskap. Språket og visualiseringer er viktige redskap i denne prosessen.

Med utgangspunkt i denne teorien har vi utviklet et opplegg med kroppslige aktiviteter for lærerutdanningsstudenter, knyttet til temaet symmetri. Selv om dette opplegget er gjennomført med studenter, er aktivitetene like godt egnet for lærere og elever i grunnskolen.

Før vi begynte med opplegget, tok 17 studenter en liten test med noen oppgaver om rotasjons- og speilingssymmetri. Også etter opplegget tok studentene en test. Resultatene (figur 3) gir oss et hint om hvorvidt det har skjedd overføring til kognitiv matematikkunnskap.

I noen oppgaver brukte vi hele kroppen, i noen hender og konkreter og i noen dynamiske programvarer. Jeg presenterer her fire av aktivitetene som enten er helkroppslige eller der det er brukt hender og konkreter. Resultatene vil bli presentert i etterkant.

Rotasjon med tau: En student stiller seg på punktet H (markert på gulvet), med et tau i hånden som er festet i punkt A (markert på gulvet). Studenten skal gå slik at bevegelsen blir



Figur 2: Rotasjon med tau

en rotasjon 90 grader mot klokka rundt punkt A (figur 2). Marker sluttplassering på gulvet med en X. Hvordan må hen gå? I hvilken retning peker nesen, før og etter rotasjonen? Beskriv bevegelsen og sluttplassering.

Utvidelse: Gjenta samme bevegelsen, med punkt N som utgangspunkt. Marker sluttposisjonen på gulvet med en Y. Beskriv hvordan punkt X er plassert i forhold til punkt Y og i forhold til utgangspunktene H og N. I denne aktiviteten bruker studenten hele kroppen ved å gå og stå. Men også steds-, retnings- og synssansen er aktivert. Omgivelsene kan være et klasserom med fri plass på gulvet eller et uteområde. Studenten kommuniserer prosessen og svar på oppgaven både nonverbalt (med kroppen) og verbalt (med språket). Hele kroppen og sansene, sammen med språket, bidrar til at en kan forstå noen sentrale aspekter ved rotasjon (sentrum i rotasjon og avstand til sentrum blir bevart, rotasjonsretning kan være mot eller med klokka).

Speiling med stort speil: En student står eller sitter foran et stort speil og inntar en posisjon, f.eks. løfter studenten én arm og lar den andre henge ned. Studentene som ser på, beskriver så nøyaktig som mulig forholdet mellom speilbildet og originalen, f.eks. avstander person – speil – speilbildet, størrelse til original- og speilbildet, plassering (høyre/venstre). Deretter bytter de rollene.

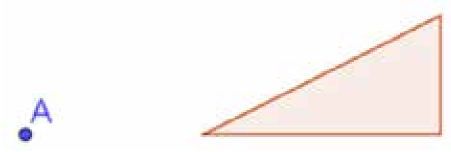
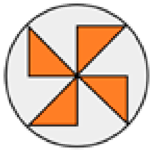
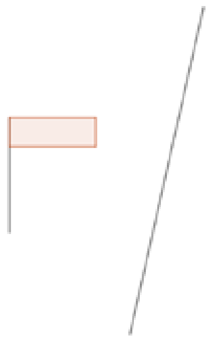
I denne aktiviteten blir hele kroppen brukt. De som ser på og skal beskrive forholdene, må bruke synssansen for å observere. Her er det ikke den samme personen som utfører den kroppslige bevegelsen og forklarer. Samarbeid og språket er viktig for å få fram en bevisstgjøring om viktige egenskaper ved speiling rundt en speilingslinje: Bildet i speilet er en kongruensavbildning, og avstanden fra personen til speilet er like langt som den virtuelle avstanden fra speilet til avbildningen. Omgivelsene, dvs. oppsettet i klasserommet, er utradisjonelle, dvs. skiller seg fra et «bussoppsett». Det kan hjelpe elevene til å oppleve at matematikken er å finne i noe så hverdagslig som et speil.

Rotasjon med konkreter: To studenter jobber sammen. Én student velger en figur fra en kasse og plasserer den på en sponplate. En stift skal settes i et fritt valgt punkt A. Figuren skal roteres rundt A, og studenten beskriver denne bevegelsen. Studentene drøfter hva som gjør at denne bevegelsen er en rotasjonssymmetri.

Aktiviteten går ut på å bruke konkreter og hendene. Følesansen blir brukt. Det er ikke noe krav til omgivelsene (vanlig klasserom eller annet). Språket er viktig, både for å beskrive hva som skjer fysisk med figurene, og for å overføre det en ser, til matematikken. I denne aktiviteten kan studenten komme fram til sentrale kjennetegn for rotasjon:

1. at den opprinnelige og den roterte figuren har samme avstand fra rotasjonssentrum A,
2. at den roterte figuren har samme retning som før,
3. at den opprinnelige og roterte figuren er like stor.

Speiling med et lite speil og konkreter/papir: Vi gjennomførte to aktiviteter med et lite speil. Begge aktivitetene kunne utføres i et vanlig

Oppgave	Figur til oppgaven	Resultat førtest (% riktig)	Resultat ettertest (% riktig)
Roter figuren 90° med klokka rundt A		23,5	53,3
Er figuren ymmetrisk? Beskriv i tilfelle alle symmetrier på en presis måte		17,6	93,3
Speil figuren om speilingslinjen		0	52,9

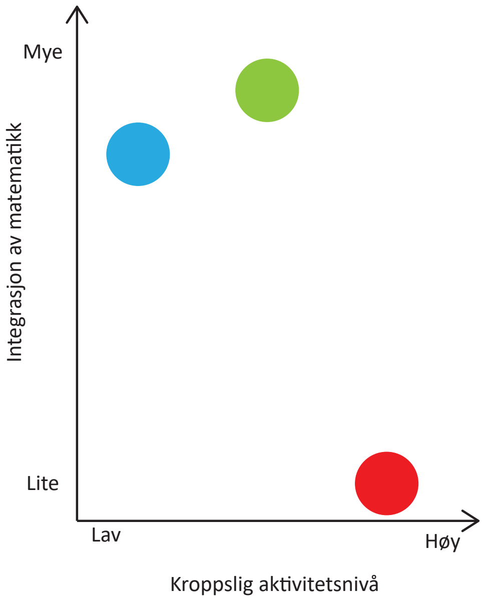
Figur 3: Oppgaver og svarprosenten før- og ettertest.

klasserom. I den *første aktiviteten* jobber to studenter sammen. Uten at den andre studenten ser (bak en skjermvegg av ringpermer), velger den første studenten en figur og plasserer den og et speil på en sponplate med ruteark på. Studenten beskriver plassering av speilbildet i forhold til speilet og originalen. Den andre studenten skal tegne en skisse av plasseringene. Her er det viktig at beskrivelsen er så nøyaktig som mulig, slik at den andre studenten kan lage skissen.

I aktiviteten bruker en konkreter og hendene, og samtidig følesansen og den visuelle sansen. Språket er her et verktøy for å både øke forståelsen og for å kommunisere det studenten ser, til den andre (som ikke ser). Overføringen til matematikk kan skje gjennom å sette ord på det en gjør med hendene, og det en ser. Det er ikke nødvendig at den første studenten har forstått viktige prinsipp for speilingssymmetri, for å kunne beskrive posisjonen til konkretene. På den andre siden kan det verbale språket hjelpe i prosessen mot forståelse og overføring til matematikkverdenen. Spesielt dersom tegningen blir feil og studenten må forbedre beskrivelsen, kan læringen skje. Det må komme tydelig fram at avstanden fra figuren til speilingslinjen må være lik avstanden fra avbildningen til speilingslinjen. Dessuten er det viktig at en tenkt linje mellom to like punkt på figuren og speilbildet må stå vinkelrett på speilingslinjen.

I den *andre aktiviteten* med et lite speil utforsket studentene egenskaper til speilingssymmetri ved å plassere et lite speil på figurer trykt på papir. Symmetriene til figurene skulle beskrives.

Også her ble hendene brukt, i tillegg til synssansen. Språket er her et verktøy i matematiseringsprosessen. For at en skal kunne beskrive



Figur 4: Kroppslig aktivitet og integrasjon av matematikk

symmetriene, må det ha skjedd en overføring fra den kroppslige aktiviteten til forståelse av matematiske egenskaper og begrep.

At **overføringen** fra den kroppslige kunnskapen til kognitiv kunnskap har skjedd, tyder resultatene fra ettertesten på. Oppgavesvarene om rotasjon og speilsymmetri (figur 3) viser en tydelig forbedring i prosentandel riktige svar.

For at en skulle få riktig svar i oppgave 1, måtte rotasjonen være utført i riktig retning, avstanden til A måtte være omtrent, riktig og figurens form måtte være lik, men rotert. For at oppgave 2 skulle bli riktig, var det krevd at studenten nevnte og beskrev rotasjonssymmetrien. Oppgave 3 viser en typisk misoppfatning om speiling (Ball, 1993, s. 131): Vertikale linjer blir avbildet i vertikale linjer (samme for horisontale). Alle studenter hadde denne misoppfatningen i starten, men mange lærte i løpet av undervisningen hvordan en speiling om en skrå linje skulle utføres.

I vårt opplegg er det ikke mulig å finne ut hvilken aktivitet som har ført til mest læring. Studentenes egne utsagn kan gi oss et hint. Én student mente det hjalp å forstå rotasjon bedre når «eg brukte meg sjølv enn (å rotere) figurar». Dette er i samsvar med Fyhn (2002, s. 12), som fant at «forståelsen av rotasjon øker ved kroppslig erfaring, ved aktiv bruk av egen kropp».

Når det gjelder aktivitetene som var knyttet til læring av speilsymmetri, uttalte en student slik: «… (det) fungerte fint med de små figurene, men fikk ikke noe ut av å gjør det med kroppen.» For denne studenten var læring av speilsymmetri enklere ved hjelp av små speil og konkreter enn ved å bruke hele kroppen og et stort speil.

I planleggingen av en kroppslig aktivitet som skal bidra til læring i matematikk, stiller en seg mange spørsmål: Er det slik at ulikt læringsinnhold (f.eks. rotasjons- og speilingssymmetri) kan og bør kobles til ulik grad av kroppslig aktivitet? Fører ikke et høyere aktivitetsnivå nødvendigvis til mer læring? Hvor høyt skal aktivitetsnivået ideelt være for at læring skjer? Et annet viktig spørsmål er på hvilken måte aktiviteten henger sammen med matematikk i oppgavene. En modell (figur 4) kan hjelpe til å forstå ulike typer kroppslige aktiviteter i relasjon til grad av integrering av matematikk. Modellen er inspirert av taksonomien til Skulmowsko & Rey (2018). Noen eksempler:

1. I en stafett der elevene må springe til en bestemt plass for å hente en matematikkoppgave som skal løses, har ikke oppgavene noen sammenheng med aktiviteten. Det kunne like godt være norsk- eller samfunnsfagoppgaver. Det er ingen integrasjon av matematikk i aktiviteten (se figur 2). Stafettaktiviteten kan plasseres i det røde punktet.

2. Den beskrevne aktiviteten med tau (rotasjon) har en middels grad av kroppslig aktivitet og en høy grad av integrasjon av matematikk. Her bidrar den kroppslige bevegelsen til en bedre og dypere forståelsen av begrepet rotasjon. Plasseringen kan tenkes i det grønne punktet.

3. I aktiviteten med et lite speil og konkreter er det hendene og sansene som er i aktivitet,

altså et heller lavt kroppslig aktivitetsnivå. Den kroppslige bevegelsen er nødvendig for å forstå begrepet speilingssymmetri, og vi har et nokså høyt nivå av integrasjon (se blått punkt). At en matematikkoppgave er godt integrert i aktiviteten, er viktig for overføring av kunnskap fra det kroppslige til det kognitive nivået. I tillegg gjør aktiviteten i en tydelig sammenheng med læringsinnholdet at læringen blir mer helhetlig og meningsfull.

Selv om oppgavene ikke er integrert i den kroppslige aktiviteten, vil den øke hjertefrekvensen og blodgjennomstrømningen i hjernen, og eleven kan bli mer engasjert og motivert til å jobbe med matematikkoppgaver. Dette kan være egnet for å få repetisjon og mengdetrening og kan være positivt for klassemiljøet. Men læreren som velger eller designer oppleggene, må være bevisst på at oppgavene som ikke er integrert i aktiviteten, ikke kan bidra til bedre og dypere læring.

Referanser

Alibali, M. W. & Nathan, M. J. (2012). Embodiment in mathematics teaching and learning: Evidence from learners' and teachers' gestures. *Journal of the Learning Sciences, 21*(2), 247–286.

Ball, A. (1993). Some Experiments in Diagnostic Teaching. *Educational Studies in Mathematics, 24*(1), 115–137.

Folkehelseinstituttet (2018). *Folkehelserapporten – kortversjon: Helsetilstanden i Norge 2018*. FHI. https://www.fhi.no/publ/2018/fhr-2018/

Fyhn, A. B. (2002). Har jenters og gutters fysiske aktivitetsnivå sammenheng med deres romforståelse? *Fysioterapeuten 8*, 9–13.

Radford, L., Arzarello, F., Edwards, L. & Sabena, C. (2017). The Multimodal Material Mind: Embodiment in mathematics education. I Cai J. (red.), *First compendium for research in mathematics education*, (s. 700–721), NCTM.

Sfard, A. (2015). Learning commognition and mathematics. I D. Scott & E. Hargreaves (red.). *The SAGE Handbook of Learning* (s. 129–138). SAGE.

Sneck, S., Viholainen, H., Syväoja, H., Kankaapää, A., Hakonen, H., Poikkeus, A.-M. & Tammelin, T. (2019). Effects of school-based physical activity on mathematics performance in children: a systematic review. *International Journal of Behavioral Nutrition and Physical Activity*, *16*(109).

Skulmowski, A. & Rey, G. D. (2018). Embodied learning: introducing a taxonomy based on bodily engagement and task integration. *Cognitive Research, Springer Open, 3*, 6. https://doi.org/10.1186/s41235-018-0092-9

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics, *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 5–24.

Tran, C. Smith, B. & Buschkuehl, M. (2017). Support of mathematical thinking through embodied cognition: Nondigital and digital approaches. *Cognitive Research: Principles and Implications, 2*(16).

Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition, *Psychonomic Bulletin & Review, 9*(4), 625–636.

Holo

Figurtal som bru

Det vert venta at me lærarar skal greie å legge til rette for at elevane kan opparbeide djupnekunnskap og sjå samanhengar innanfor og mellom fag (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 11). At dette er ei krevjande oppgåve, er det ingen tvil om, og i alle fall når det gjeld å skape djupare forståing for dei abstrakte bokstavane i algebraen. Det er ikkje reint få elevar som opp gjennom tidene har rive seg i håret i frustrasjon over kvifor $2x^2 + 3x$ ikkje kan trekkast saman til $5x^2$, eller kanskje til og med $6x^3$, med alle moglege samansurium av rekneregler for variablar, koeffisientar og eksponentar. Mi opplevingsom matematikklærar er at bokstavane og tala enklare gir meining for elevane dersom dei vert kopla til element frå geometrien. I kryssingspunktet mellom tal, algebra og geometriske figurar finn me figurtala.

Figurtal vert ifølgje Store norske leksikon skildra som «… følger av hele tall som dannes ved at man summerer leddene i en følge av naturlige tall der differensen mellom de påfølgende tallene er konstant» (Vatne, 2022). I skulematematikken er figurtala ofte illustrerte ved hjelp av sirklar, firkantar eller kryss, som er sette saman slik at dei skal likne på ein kjend figur.

Odd-Eivind Holo
Kvåle skule og Høgskulen på Vestlandet
oeho@hvl.no

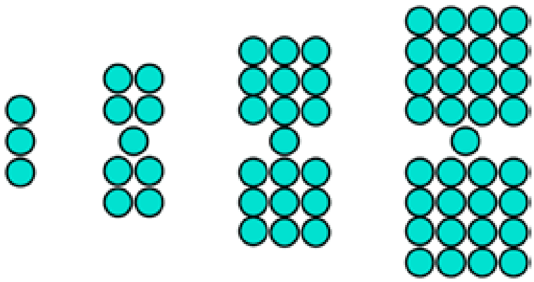
Arbeidet inneber då å forstå utviklinga i mønsteret, dessutan å finne ein eksplisitt formel for den n-te figuren. Eit av dei viktigaste verktøya for å meistre dette er å ha kjennskap til variabelen n, då ein treng å kunne forklare delane i figurtalet i forhold til plassen figuren har i rekka (n). Andre verktøy ein vil få bruk for, er mellom anna dei generelle uttrykka for partal, oddetal, trekanttal, kvadrattal, oblongtal (rektangeltal), og ikkje minst bruk av konstantar. Gjennom å arbeide med figurtal får elevane utvikla og nytta kunnskap om algebraiske uttrykk, og sidan arbeidet vert gjort i ein visuell kontekst, kan det vere ein god måte å få gjort om abstrakt matematikk på til noko meir konkret og handfast for elevane.

Figurtal som ein introduksjon til algebra

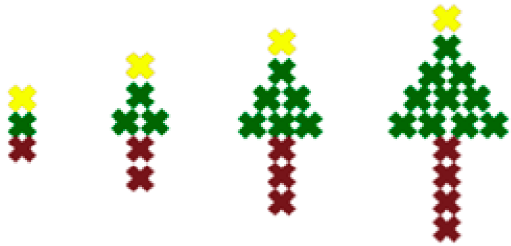
I eiga undervising har eg erfart at arbeid med figurtal kan vere med og bygge bru mellom fleire ulike hovudområde i matematikken. Som lærar i ungdomsskulen og i lærarutdanning har eg erfart at figurtal både engasjerer og skaper forståing for omgrep og bokstavar som til tider kan vere vanskelege å få grep om. Mange elevar møter algebraen i form av instrumentelle prosedyrar der ein skal trekke saman variablar, utan at dei nødvendigvis greier å kople variablane til noko større enn nettopp det å gjennomføre prosedyren. Algebra vert dermed forstått som ein prosedyre som skal gjennomførast, meir enn som eit verktøy for å forstå og forklare eit fenomen. Eit tradisjonelt algebrauttrykk som $2n^2 + 1$, utan noka visualisering, kan for alltid berre verte ståande som «toenniandreplussein» – eit uttrykk utan innhald. Når eleven derimot står framfor ei rekke med figurar som utviklar seg i eit mønster, vil tala og bokstavane som tidlegare var abstrakte og gjerne lausrivne frå ein kontekst, no vere knytte til ein figur og dermed kontekstualisert. $2n^2 + 1$ er gjerne enklare å få ei forståing for når ein ser ei rekke figurar beståande av to kvadrat skilte av med ein enkelt prikk imellom seg (figur 1). Det er mogleg for elevane å sjå kva som varierer frå eitt steg til det neste, og kva som held seg konstant. Kanskje vert det òg forståeleg at variabelen n har ein samanheng med kvar i rekka figuren er, at variablar som er opphøgde i andre, alltid kan forstååast som eit kvadrat, og at me her faktisk har to slike kvadrat – dermed $2 \cdot n^2$. Spørsmål som *kvifor kan ein ikkje legge saman n-ar i andre med n-ar og reine tal*, kan på fleire måtar verte tydeleggjorde gjennom arbeid med figurtal.

Juletretalet (J_n, figur 2) er eit eksempel på figurtal eg har lagt fram for både elevar i grunnskulen og lærarstudentar, med stort hell. Figuren liknar på eit juletre, sett saman av ein stamme, greiner og ei stjerne. Øvst på treet finn me stjerna, og ved å følgje utviklinga vil ein fort sjå at stjerna er uendra frå eitt steg til neste, altså konstant med verdi 1. Greinene får etter kvart forma som ein trekant, der kvar figur får lagd til ei rekke med kryss som er lik nummeret som Juletretalet har i rekka. Tal på grøne kryss vil dermed vere lik summen av dei naturlege tala frå 1 og opp til figurnummeret, n. Her får me dermed trekt inn trekanttala, som er gitt ved formelen $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Det å «oppdage» formelen for trekanttal er nok ikkje noko dei fleste ungdomsskuleelevar gjer heilt utan vidare. Derfor brukar eg å presentere nokre formlar og verktøy for arbeid med figurtal i forkant (som nemnt innleiingsvis), for på den måten å legge til rette for at elevane får



Figur 1: Ei visualisering av $2n^2 + 1$.



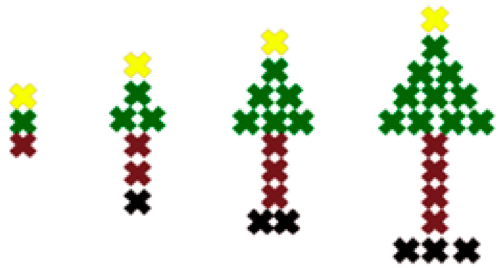
Figur 2: Dei fire fyrste juletretala.

moglegheit til å oppdage *samanhengar* der dei ulike formlane og uttrykka kan høve. Nedst på treet finn me stammen, som utviklar seg ved at det fyrste treet har stamme lik eitt kryss, det andre treet har stamme lik to kryss, osv. Stammen aukar med eit nytt kryss for kvart steg og heng dermed saman med kva plassering Juletretalet har i rekka, altså n. Det kan vere krevjande å skulle lage eit samla uttrykk for ein figur, men kanskje mindre krevjande dersom ein tek føre seg figuren del for del, for så å setje uttrykka saman. Ein kan då sjå at uttrykka gir meining uansett kva nummer i rekka du testar formelen på. Eit generelt uttrykk for det n-te Juletretalet finn ein ved å setje saman dei ulike uttrykka, $\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$. Her kjem den nyttige brua over til algebraen til syne. For på same måte som at heile figuren er sett saman av dei tre geometriske delane (stjerne, granbar og stamme), må også ein generell formel for heile figuren vere sett saman av dei algebraiske uttrykka for kvar av dei tre delane. Det å legge saman polynom og konstantar kan for mange vere ein komplisert affære, men kanskje kan operasjonane gi meir meining når dei er knytte til figurar i eit mønster der ein kan kople kvar av dei algebraiske uttrykka til ein del i figuren. Øvingsmoment som det å trekke saman uttrykk, parentesrekning og det å utvide konstantar og variablar med lik nemnar, vert no sette inn i ein kontekst. Det endelege uttrykket, og den generelle formelen for juletretalet, er gitt ved $J_n = \dfrac{n^2 + 3n + 2}{2}$.

Juletretalet kan òg få eit nytt aspekt dersom ein utvidar juletreet til også å innehalde ein juletrefot (figur 3). Utfordringa i dette dømet er at treet ikkje vert sett på juletrefoten før figur to i rekka. Med eit kjapt blikk ser me at juletrefoten òg aukar med *ein* for kvart steg i mønsteret, men tal på kryss i juletrefoten heng ikkje heilt saman med figurnummeret, for det er nemleg *ein mindre* enn figurnummeret. Ein kan dermed ikkje putte inn ein allereie etablert formel, slik som for dei naturlege tala (n) eller trekanttala ($\dfrac{n(n+1)}{2}$). Ein må derimot lage eit matematisk uttrykk sjølv. Mange vil då sjå at dette kan uttrykkast som *ein* mindre enn dei naturlege tala, og få uttrykket (n – 1). Den nye formelen for *Juletretalet med fot* (F_n) finn ein nok ein gong ved å addere alle delane, altså $\dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 + (n-1)$, noko som kan trekkast saman til den generelle formelen $F_n = \dfrac{n^2 + 5n}{2}$.

Det å finne ut kor mange kryss neste figur i mønsteret skal ha, kan òg utforskast ved å setje opp ein systematisk tabell. Det å nytte tabellar vert mellom anna trekt fram som ein av fleire gode strategiar når ein driv med matematisk problemløysing (Kongelf, 2011). Døme på ein tabell kan vere som i tabell 1.

Her har eg sett på dei fire juletrefigurane med fot, og telt opp kryss. Ved å sjå etter fyrstedifferansen mellom verdiane til kvar etterfølgjande figur kan ein få ei aning av eit mønster. Denne aninga kan verifiserast ved å sjekke ut andredifferansen mellom tala. Dersom denne er konstant, får ein eit rimeleg sikkert hint om at ein er på rett veg. Ein kan dermed anta (blå tal), temmeleg sikkert, at utviklinga skal halde fram i same mønster. Slik kan ein finne dei neste tala og figurane i mønsteret, og forsøke å utleie ein formel for det n-te talet i rekka.



Figur 3: Juletretalet med fot.

Nummer i rekka	1		2		3		4		5
Tal kryss (verdi)	3		7		12		18		**25?**
Fyrstedifferanse		4		5		6		**7?**	
Andredifferanse			1		1		1		**1?**

Tabell 1: Utforsking ved verditabell.

Figurtal og funksjonar

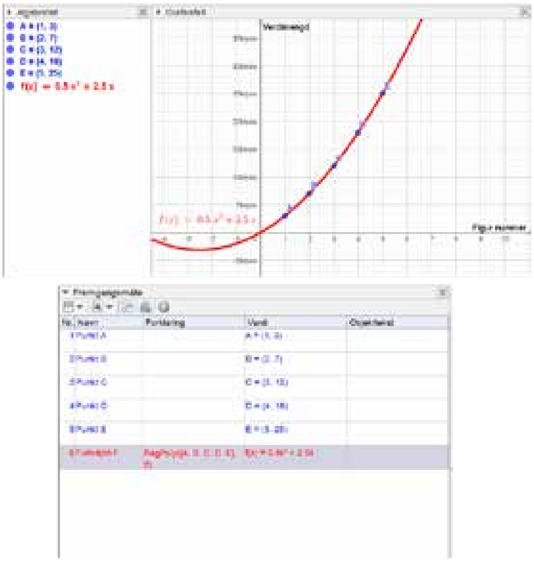
Ved å arbeide med verditabellen for figurtalet kan ein òg trekke inn kunnskapen ein har om korleis ein nyttar verditabellar når ein teiknar funksjonar. Slik kan ein få fram endå ei bru frå figurtal over til eit anna hovudområde i matematikken. Det er nemleg slik at for kvart nummer i rekka finst det berre eitt tal på kryss på figuren. Dette samsvarar med definisjonen av funksjonar, at verdien til y avheng av verdien til x, og at du for kvar verdi av x berre vil finne ein verdi av y (Bjørnestad et al., 2013, s. 324). Det kan skape gode augneblikk for ein matematikklærar dersom ein er til stades i læringssituasjonar der elevar eller studentar gjer nettopp denne oppdaginga; at figurtal kan verte behandla som funksjonar. Frå tabellen ovanfor kan me då gjere kvart nummer i rekka (x) og tilhøyrande tal på kryss (y) om til koordinat: $A = (1, 3)$, $B = (2, 7)$, $C = (3, 12)$, $D = (4, 18)$ og $E = (5, 25)$. Dette er tilstrekkeleg til å kunne gjere ein polynomregresjon i GeoGebra, eller forsøke å lage ei beste tilpassa kurve for hand. Elevane vil då få fyrstehandserfaringar med å teikne andregradsfunksjonar, då mange figurtal vert nettopp det, andregradsuttrykk.

Å nytte regresjon i GeoGebra til å finne både dei neste verdiane og den eksplisitte formelen for figurtalet er eit særs godt verktøy. Sjølv om regresjon ikkje er nemnd i læreplanen for matematikk opp til 10. klasse, finn eg det nærliggande å kople dette inn som ein del av det å gjere matematiske modelleringar. Regresjon gjer ein i GeoGebra ved å til dømes nytte kommandoen RegPoly(<Liste med punkt>, <Polynomgrad>). Elevane har blitt både begeistra og forbløffa over kor enkelt dette er, og eg har opplevd at det har gitt elevane og meg sjølv ei større forankring i bruk av andregradsuttrykk i grunnskulen.

Digitale hjelpemiddel, som GeoGebra, kan tilføre arbeidet med figurtal nok eit moment som kan bidra til å utvide den matematiske forståinga hjå elevar og studentar. Eit spørsmål som gjerne dukkar opp, er kvifor GeoGebra gir oss ein annan formel enn det me sjølv har funne, når me er svært så sikre på at me har gjort alt rett? I tilfellet vårt med *juletretalet med fot* har me sjølv kome fram til formelen $F_n = \dfrac{n^2 + 5n}{2}$, medan GeoGebra gir oss formelen $f(x) = 0{,}5x^2 + 2{,}5x$. Her ser me både at våre n-ar har blitt bytte ut med x-ar, men òg at brøken har forsvunne, og at koeffisientane har blitt endra. Dette kan vere gode utgangspunkt for ein samtale om bruken av symbol og bokstavar i algebraen, og om verdiane av ulike uttrykk.

Avslutning

Eit av hovudargumenta for å gjennomføre fagfornyinga var at elevane trong meir tid til fagleg fordjuping, slik at dei i større grad kunne sjå



Figur 4: Regresjon av juletretalet med fot, gjort i GeoGebra.

samanhengar innanfor og mellom fag (NOU 2015:8). Mantraet vart *djupnelæring*, noko me som lærarar skal legge til rette for, og noko elevane skal oppnå. Så korleis kan arbeid med figurtal bidra til at elevane får ei djupare læring i matematikk?

Nokre avgjerande faktorar for å skape ei djupare forståing i eit fag er mellom anna at elevane får oppleve fleire representasjonar av eitt og same fenomen (Skaalvik & Skaalvik, 2018, s. 63–67). Som vist kan arbeid med figurtal gjere til at elevane får nytta verktøy frå både algebra, geometri og funksjonar. Slik kan dei erfare at kunnskapen om fenomen og operasjonar frå eitt område i matematikken også kan nyttast innanfor andre. Carpenter & Lehrer (1999) hevdar at ei djupare forståing av matematikk vert skapt i bruken av og skiftet mellom ulike representasjonar. Til dømes kan dei ulike representasjonane av fenomenet «kvadrat» (både algebraisk som n^2, geometrisk som ein figur i eit mønster og numerisk som tal på einingar kvadratet består av) vere med og forsterke den aktuelle kunnskapen. Difor kan eit rikt arbeid med figurtal gi nettopp slike overgangar mellom representasjonar som trengst for å styrke elevane si djupneforståing innanfor matematikk.

Dersom me som lærarar skal greie *å legge til rette* for ei djupare læring, må også dei didaktiske vala me gjer, peike i ei djupare retning. Ifølgje Biggs (1996) er det fyrst og fremst viktig at me justerer undervisinga vår slik at ho *utfordrar* elevane til å måtte bruke kunnskapen på eit djupare nivå. For å få til dette må læraren ha eit godt utval av læringsfremjande aktivitetar. Dette er aktivitetar som utfordrar elevane til å vere *aktive deltakarar* i læringsprosessane, i staden for passive tilskodarar i undervisinga. Slike læringsprosessar inneber ofte at elevane må arbeide gjennom eitt eller fleire av kjerneelementa, til dømes *utforsking og problemløysing* eller *resonnering og argumentasjon*.

For å verte gode *problemløysarar* trekker Cuoco et al. (1996) fram kor viktig det er at elevar vågar å 'fikle' med problema. Dei må tore å bryte problema ned i bitar og undersøke kva som skjer dersom bitane endrar seg. I tillegg er det viktig at elevane er 'mønstersniffarar' som er på utkikk etter å finne samanhengar. Cuoco et al. (1996) nemner òg kor viktig det er å ha fleire perspektiv å betrakte eit problem frå, og trekker høvesvis fram det å ha eit geometrisk eller algebraisk perspektiv som gode utgangspunkt. Når ein arbeider med figurtal, er alle desse komponentane med, både det å leite etter mønster, finne samanhengar og å nytte seg av både algebraiske og geometriske tilnærmingar. Slik sett kan arbeid med figurtal vere ein god arena for å trene på matematisk problemløysing.

Som nemnt er det viktig at læraren byr på læringsfremjande aktivitetar som utfordrar til å gå i djupna (jf. Biggs, 1996). Døme på dette kan vere at elevane får nytte eigen fantasi til å lage figurtal, og at dei får presentere desse for klassen. I presentasjonen kan elevane få forklare korleis figuren er bygd opp, og basert på figuren argumentere for ein generell formel. Ein annan innfallsvinkel kan vere at læraren på førehand har laga til eit algebraisk uttrykk som elevane skal forsøke å lage ein passande figur til. Elevane må då nytte fleire problemløysingsstrategiar, som å bryte uttrykket ned i bitar, prøve seg fram i fleire omgangar, og ikkje minst våge å «fikle» med uttrykket (jf. Cuoco et al., 1996; Kongelf, 2011). I ei klasse vil ein kunne få fleire ulike figurar som likevel kan stemme overeins med eitt og same uttrykk. Elevane kan dermed få trening i å *argumentere* for gyldigheita av figuren sin opp mot uttrykket. Desse aktivitetane kan vere gode utgangspunkt for fruktbare gruppe- og heilklassediskusjonar, der elevane får øvd på å dele *resonnement* og tankerekker, grunngi framgangsmåtane sine, og ikkje minst nærme seg eit matematisk språk både munnleg og skriftleg.

Det er altså fleire sider av arbeid med figurtal som harmonerer godt med tankane om å skape ei djupare læring og matematisk forståing hjå elevane. Figurtal kan ein arbeide med gjennom heile skuleløpet, med ulike vinklingar, på ulike nivå og med ulik vanskegrad. Det kan fungere som ein god kontekst for å få øvd inn og nytta fleire matematiske operasjonar i lag, og kan såleis fungere som ei bru mellom fleire sentrale hovudområde i matematikken. Når ein *siktar mot djupna* med dei didaktiske vala som vert gjorde, kan arbeid med figurtal bidra til å styrke elevane si djupnelæring i matematikk.

Kjelder

Biggs, J. (1996). Enhancing teaching through constructive alignment. *Higher Education*, *32*(3), 347–364. https://doi.org/10.1007/BF00138871

Bjørnestad, Ø., Kongelf, T. R. & Myklebust, T. (2013). *Alfa. Lærebok: Matematikk for grunnskolelærerutdanningene 1–7 og 5–10* (2. utg.). Fagbokforlaget.

Carpenter, T. P. & Lehrer, R. (1999). Teaching and Learning Mathematics With Understanding. I *Mathematics classrooms that promote understanding* (s. 19–32). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410602619-9

Cuoco, A., Paul Goldenberg, E. & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(4), 375–402. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90023-1

Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? *Nordic Studies in Mathematics Education*, *16*(4), 5–44.

NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole: Fornyelse av fag og kompetanser*. https://www.regjeringen.no

Skaalvik, E. M. & Skaalvik, S. (2018). *Selvoppfatning, motivasjon og læringsmiljø* (3. utg.). Universitetsforlaget.

Utdanningsdirektoratet (2020). *Overordna del – verdiar og prinsipp for grunnopplæringa*. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/

Vatne, J. E. (2022). *Figurtall*. Store norske leksikon. https://snl.no/figurtall

Bjerke, Johansen

Matematikkolympiaden 2022

Var du i Oslo en gang mellom 8. og 16. juli i sommer? Da fikk du kanskje med deg at Karl Johans gate var pyntet til fest. En prestisjetung matematikkfest. Da var nemlig Oslo vertsby for over 600 matematikkfrelste ungdommer fra hele verden – eller nærmere bestemt fra 104 land. Oslo og Norge var for første gang arrangør for den Internasjonale matematikkolympiaden, IMO. Matematisk institutt ved Universitetet i Oslo var vertskap og hadde alt ansvar for de tilreisende fra de satte bein på norsk jord til de reiste igjen – inkludert all logistikk og økonomi. Det er få ungdomsarrangementer i Norge som er så internasjonale som IMO, til sammenligning samler Norway Cup 50–60 nasjoner og Ungdommens vinter-OL på Lillehammer 71 nasjoner.

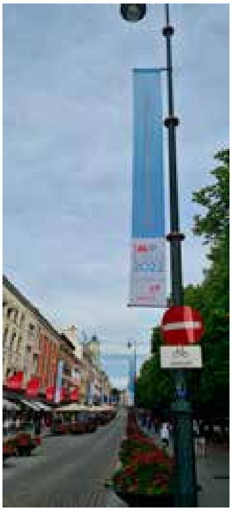
IMOs hemmelige oppstart i Drammen

I begynnelsen av juli gjorde over 150 frivillige og en rekke organisatorer av ymse slag seg klare til å fylle hele fire hoteller i Oslo sentrum med matematikkungdom. Samtidig var det forberedelser på flere hold. Det norske landslaget var på treningsleir i Danmark med sine venner (og konkurrenter) fra Danmark, Finland, Island og Sverige. I Oslo ble deltagersekker pakket, akkrediteringskort printet og utstyr kjørt hit og dit. En mottakerdesk ble rigget på Gardermoen, og et hovedkontor ble satt opp på Scandic St. Olavsplass. Festtaler ble innøvd og Oslos storstuer ble klargjort for storinnrykk.

Mens den siste «finpussen» foregikk i Oslo, var IMO allerede godt i gang i Drammen. Her var ledere fra alle deltakerlandene samlet fra 6. juli for å forberede konkurransen. IMO er organisert som en stor dugnad, og i Drammen skulle oppgavesettene for de to konkurransedagene lages. Alle land

Annette Hessen Bjerke
IMO Organizer
anetsen@oslomet.no

Nils Voje Johansen
IMO Organizer, Site leader Drammen
nilsvo@math.uio.no



deltar i utformingen for å forankre dem best mulig og for å sikre at oppgavene som velges ikke likner oppgaver som allerede har vært brukt. I tillegg skal man bli enige om settenes vanskegrad, retteskjemaer skal utformes og poengfordelinger bestemmes. Hva må til for å få ett poeng? To poeng? Sju poeng (som forresten er full score)? Det er opplagt at dette er krevende. Og som om ikke det var nok – når alt dette er gjort, igangsettes et omfattende oversettingsarbeid. Oppgavene oversettes til alle språk som deltakerne benytter, i år 53 forskjellige språk. I tillegg starter et internasjonalt sensorkorps på drøyt 80 personer forberedelsen for effektivt å kunne rette og bedømme alle besvarelsene i løpet av 2–3 dager.

Vanskelige oppgaver – dyktige deltakere

Du lurer kanskje på hvordan et oppgavesett i IMO ser ut? Siden selve konkurransen foregår over to dager, er det et todelt sett. Hvert sett består av tre oppgaver med en lett (!), en middels og en vanskelig oppgave (du kan prøve deg på den lette oppgaven fra dag 1 i boksen til høyre). Temaene som skal dekkes er tallteori, kombinatorikk, algebra og geometri. Det knyttes alltid stor spenning til hvilke tema det blir på de ulike oppgavene – alle har sine favorittemaer. Hver oppgave gir maksimalt syv poeng. Det vil si at en deltager maksimalt kan sitte igjen med 21 poeng etter hver dag. Det er det vanligvis veldig få som gjør. For her er nivået høyt – og de som lager oppgavene etterstreber å skille mellom de beste av de beste.

Apropos høyt nivå. Det skal litt til å få være en av de seks som får det ærefulle oppdraget det er å representere Norge i IMO. Første bøyg er å komme seg til finalen i Abelkonkurransen. Abelkonkurransen går over tre runder. I år deltok over 3000 elever i runde 1. Av disse kvalifiserte ca. 10 % seg til runde 2, mens kun 27 gikk videre til finalen som ble avholdt i Trondheim 8. mars i år. De tre som får pallplassering i Abelfinalen blir belønnet med direkte plass på det norske IMO-laget, mens de tre resterende plassene blir tildelt etter gjennomføringen av den Nordiske matematikkonkurransen som i år ble arrangert av Sverige og avholdt 4. april. Så det er lov å være stolt når IMO-plassen er sikret. Det ligger mye arbeid bak!

Oppgave 1. Norges Bank utsteder to typer mynter: aluminium (betegnet A) og bronse (betegnet B). Marianne har n mynter av aluminium og n mynter av bronse som ligger på en rekke, i en vilkårlig rekkefølge. Definer en kjede som en sekvens av påfølgende mynter av samme type. For et gitt positivt heltall $k \leq 2n$, gjentar Marianne følgende operasjon:

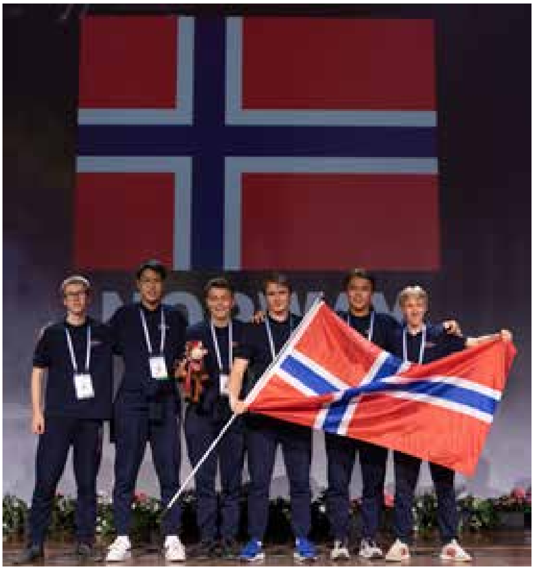
Hun finner den lengste kjeden som inneholder den k'te mynten fra venstre, og flytter alle myntene i denne kjeden helt til venstre i rekken. For eksempel, hvis $n = 4$ og $k = 4$ og myntene starter i rekkefølgen AABBBABA, er prosessen AABBBABA → BBBAAABA → AAABBBBA → BBBBAAAA → BBBBAAAA → · · · .

Finn alle par (n, k) slik at $1 \leq k \leq 2n$, slik at det for hver start-rekkefølge finnes et tidspunkt hvor de første n myntene til venstre er av samme type.

Kombinatorikkoppgaven fra dag 1. NB! «Marianne» i oppgaven er Oslos ordfører Marianne Borgen.

En grandios åpning

9. juli. Men tilbake til Oslo. Den 9. juli var den store ankomstdagen, da ankom elevene sammen med deputy leader, eller nestleder, for det gitte landslaget. At dette ble alt annet enn kaotisk – det kan en takke gode, strukturerte planleggingshoder for. De fleste kom når de skulle, fikk hentet det de trengte og ble innlosjert som planlagt. Det er ikke fritt for at det formelig kokte på St. Olavsplass noen hektiske timer denne dagen – det viser seg nemlig å være begrenset hvor mange det er plass til i en hotellfoaje – selv med gode mengder tålmodig venting, raushet og hjerterom. Men det gikk fint! Alle lag fikk tildelt en egen lagvert eller guide som hjalp dem



Fra åpningsseremonien i Oslo Konserthus, fra venstre: David Eikeland, James Jia, Oliver Ruden, Andreas Notøy, Noah Hessen Bjerke og Maxim Scherbakov.

å finne seg tilrette, en viktig person som skulle følge laget gjennom hele den kommende uken. Stemningen var upåklagelig.

10. juli. Åpningsseremoni**.** Oslo konserthus var pyntet til åpningsseremoni og den røde løperen var lagt ut for de 600 elevene. I tillegg kom ytterligere 600 personer (ledere, nestledere, sensorer, frivillige, arrangører og gjester). Det sydet av stemning både ute og inne i minuttene før det hele startet. Det ble en flott seremoni ledet av unge Iben Indrevær. Her var spennende musikalske innslag, taler av rektor Svein Stølen, viseordfører Abdullah Alsabeehg og IMO-president Geoff Smith. Men viktigst var selvsagt ungdommen. To deltakere, en fra Australia og en fra Japan, holdt IMO-flagget og fremsa IMO-eden på vegne av alle deltakerne. Deretter defilerte land etter land over scenen og ble hyllet av de andre – en utrolig fin gjeng med ungdommer som heiet hverandre frem på tvers av landegrenser og som viste hverandre respekt. Det er ikke så mye mer å gjøre enn å si: Her skulle dere vært!

En konvolutt full av problemer

11. og 12. juli. Konkurransedager**.** I UiOs eksamenslokaler i Silurveien, på vei ut av Oslo i retning Drammen, skulle selve konkurransen foregå. Oppstart var 08.30 sharp, begge dager. Og dette måtte overholdes! Pandemien har dessverre ikke sluppet like godt taket verden over, så noen lag (Kina, Hong Kong, Maccau og Mongolia) var forhindret fra å komme til Oslo. De deltok på ‘remote sitting’, som i praksis betyr at de deltok i egnede lokaler i sine respektive hjemland. Da blir det viktig at alle starter samtidig – rett skal være rett.

Dette betydde at hundrevis av vekkerklokker i Oslo sentrum begynte å ringe allerede før

klokka 06.00 disse to dagene. På St. Olavsplass var det hektisk aktivitet. Over 600 spente ungdommer skulle først få frokost og så fraktes i buss til Silurveien. Den første bussen kom rundt klokka 07.30. Og tro det eller ei, etter 20–25 hektiske minutter med avkryssing på lister, løping etter gjenglemte passere, og en og annen «fashionable late» deltager var alle avgårde.

I Silurveien hadde hver deltaker sin predefinerte plass. Her lå allerede oppgavene i forseglet konvolutt på de (opp til tre) språkene deltageren hadde ønsket. På slaget 08.30 startet konkurransen og deltakerne kunne sprette konvolutten og med spenning lese oppgavene. Den første halvtimen hadde de adgang til å stille skriftlige spørsmål som så ble scannet og sendt til Drammen der ledere og sensorer fortløpende besvarte spørsmålene. Omlag 100 spørsmål i løpet av en halv time genererte mye arbeid. Deretter var det kun intenst arbeid med oppgavene. Om alle returnerte fra Silurveien like blid og fornøyde – nei, det ville være en overdrivelse. Men de fleste er innerst inne klar over at denne konkurransen er og skal være krevende.

Gull, sølv og bronse

13. og 14. juli. Etter andre konkurransedag flyttet alle som var i Drammen til Oslo. Nå skulle alle lands ledere møte sensorene og diskutere seg frem til hva som var rett bedømmelse og poenggivning på hver enkelt besvarelse. Etter en godt gjennomtenkt og nøye planlagt instruks ble en hel etasje i UiOs lokaler i Domus Juridica i Oslo sentrum rigget for retting og poenggiving. Hver av de seks oppgavene hadde sitt eget rom. Hvert rom hadde seks sensorbord, og på hvert bord var det plass til to sensorer og leder og nestleder. Dersom man ikke kom til enighet, hadde hver oppgave sin egen hoveddommer, «problem captain». I foajeen viste en storskjerm når de ulike landene skulle innfinne seg for å sensurere de ulike oppgavene. Seks oppgaver betyr at hvert land hadde seks ulike møter med seks ulike sensorteam. For en utenforstående var systemet for så vidt lett å forstå – men at dette ble gjennomført uten nevneverdige forsinkelser og misforståelser – det er ikke annet enn imponerende.

Etter at alle besvarelser var sensurert og poeng var bestemt, var det på tide å sette poenggrenser for de ulike medaljene. Reglene til IMO tilsier at 1/12 skal ha gullmedalje, 1/6 skal ha sølvmedalje og 1/4 skal ha bronsemedalje. Litt rask brøkregning tilsier da at halvparten av alle deltakere skal ha medalje. Selvsagt fordeler ikke poengene seg slik at dette går opp i praksis. Alle lederne samles derfor i et fellesmøte og avgjør hvor poenggrensene for medaljene skal gå. Da det var avgjort var ledernes lange arbeidsuke over. I tillegg må nevnes at alle som ikke får medalje, men som har løst minst én oppgave helt korrekt, får såkalt «Honorable mention».

Et sosialt liv med en myriade av tilbud

Og hva gjorde deltagerne mens alt dette foregikk i to intense dager på Domus Juridica? Jo, et viktig aspekt ved IMO er å møtes på tvers av landegrenser, lære hverandre å kjenne og få nye venner. Disse dagene var derfor avsatt til sosiale aktiviteter. I teknologihuset Rebel, ved St. Olavsplass, hadde sponsorene og Macsimum rigget til to etasjer med sosiale møteplasser der deltakerne kunne ta del i ulike spill og aktiviteter. Dette var en ubetinget suksess og en nyvinning i IMO-sammenheng. Her var det mulighet til å spille brettspill, kort, prøve seg på flipperspill, tenkospill, forsøke seg på logiske nøtter – ja det var en myriade av tilbud og til tider ekstatisk stemning og mye latter. Det var masse aktiviteter på tvers av nasjonaliteter, akkurat slik det skal og bør være. Deltagerne ble dessuten tatt godt vare på av guidene sine, og veiledet rundt på museer og severdigheter som var åpne for dem – og ordfører Marianne Borgen hadde generøst organisert en mottakelse på Oslo rådhus der hun stilte som vert. Den andre dagen var alle deltakere invitert med på Tusenfryd.

Medaljeseremoni

15. juni. Medaljeseremonien ble holdt i Oslo rådhus der en strålende opplagt ordfører Marianne Borgen ønsket velkommen. IMO-president Geoff Smith styrte seremonien med sikker hånd, noe som for øvrig var hans siste handling som president etter åtte år i rollen. Norge og Andreas Notøy fikk bronsemedalje og flere norske deltakere fikk «Honorable mention». Og sist, men ikke minst – i god olympisk stil ble IMO-flagget overlevert fra de norske deltagerne til de japanske deltagerne. For i 2023 sees verdens unge lovende matematikere i Chiba i Japan! Etterpå var det avslutningsmiddag i ungdommens tegn på Rebel ved St. Olavsplass.

En pussig organisering

Det underlige med IMO er at det ikke eksisterer noe skriftlig om hva en arrangør må forberede og ha klart før innrykket av nærmere 1000 personer. Arrangøren må selv besøke IMO-er i forkant av sitt arrangement og på den måten lære hva som forventes. Vi var fire personer fra Matematisk institutt, UiO, som besøkte England i 2019, og en større delegasjon skulle besøkt Russland i 2020 og USA i 2021. Men pandemien satte en stopper for fysiske IMOer disse årene. Med god hjelp av eventbyrået Macsimum og over 150 frivillige, lot det seg likevel gjøre å få i havn et vellykket IMO 2022. En stor takk til dere alle – og til Kunnskapsdepartementet og alle sponsorene.

Vi håper også at de 20 observatørene fra Japan følte at de lærte noe av vårt arrangement og ønsker dem lykke til med IMO i Chiba om et snaut år.

Ønsker du å se åpningsseremonien og medaljeseremonien finner du dem på hjemmesiden til IMO2022:
https://www.imo2022.org/imo/Stream

Ønsker du å se alle oppgavene og resultatene:
https://www.imo-official.org

Fiskerstrand

Digital veiledning i pandemitid

Introduksjon

I mars 2020 stengte skoler og universiteter over hele landet på grunn av covid-19-pandemien. I den første fasen av nedstengningen var søkelyset rettet mot å erstatte de fysiske matematikkforelesningene og øvingstimene med et digitalt tilbud. Det viste seg at det var relativt enkelt å flytte tradisjonell tavleundervisning over til digitale flater, utfordringene lå i å skape engasjement og god veiledning av studentene digitalt. Denne artikkelen omhandler hvordan undervisningsopplegget «bruk av OneNote-klassenotatblokk» kan brukes for digital oppfølging av studenter i, og etter, pandemitid.

Bakgrunn

Etter den første nedstengningen av campus fulgte en periode preget av ulike restriksjoner både nasjonalt og lokalt. De tiltakene som preget semestrene høsten 2020 og våren 2021, var énmetersregelen og full nedstengning og gjenåpning på kort varsel. Énmetersregelen gjorde at i øvingstimer måtte større studentgrupper deles over flere klasserom. Ny teori ble gjennomgått i digitale undervisningstimer eller i auditorium.

Tonje Vedde Fiskerstrand
Institutt for IKT og realfag, NTNU
Tonje.v.fiskerstrand@ntnu.no

I periodene med full nedstengning var all undervisning digital. Mange av de pedagogiske utfordringene digitalt er de samme som i fysiske klasserom (Hampel & Stickler, 2005). For eksempel er det en utfordring å få studenter til å ta ordet, stille spørsmål eller engasjere seg i det som blir undervist, på en måte som er synlig for andre. Damsgaard (2020) var den første til å benytte begrepet «svarte skjermer». «Svarte skjermer» har blitt et begrep som ikke bare beskriver det manglende engasjementet læreren møter digitalt, men som også dekker den usikkerheten læreren opplever ved å ikke få noen form for tilbakemeldinger underveis i en undervisningsøkt (Tonning, 2022).

Undervisningsopplegget i OneNote-klassenotatblokk ble utarbeidet etter dette studieåret. Behovet var å ha et opplegg som fungerte både under nedstengning og ved fysisk undervisning, og som ga studentene mulighet for oppfølging også på oppgaver de jobbet med utenfor timeplanfestede øvingstimer. Vi ønsket et opplegg som ga lærerne tilbakemelding på hvordan studentene forstod temaene som var gjennomgått.

Undervisningsopplegg i OneNote-klassenotatblokk

Det ble utarbeidet frivillige øvingsoppgaver til hvert kapittel i læreboka i matematikk for forkurs til ingeniør, se figur 1. Disse bestod av to oppgaver. Den ene skal være på et inngangsnivå som de fleste studenter skal få til hvis de har jobbet med kapittelet, mens den andre er mer utfordrende og utforskende og også kan utfordre studenter med vilje og interesse til å gå dypere inn i stoffet. Disse var ofte tatt fra tidligere eksamener.

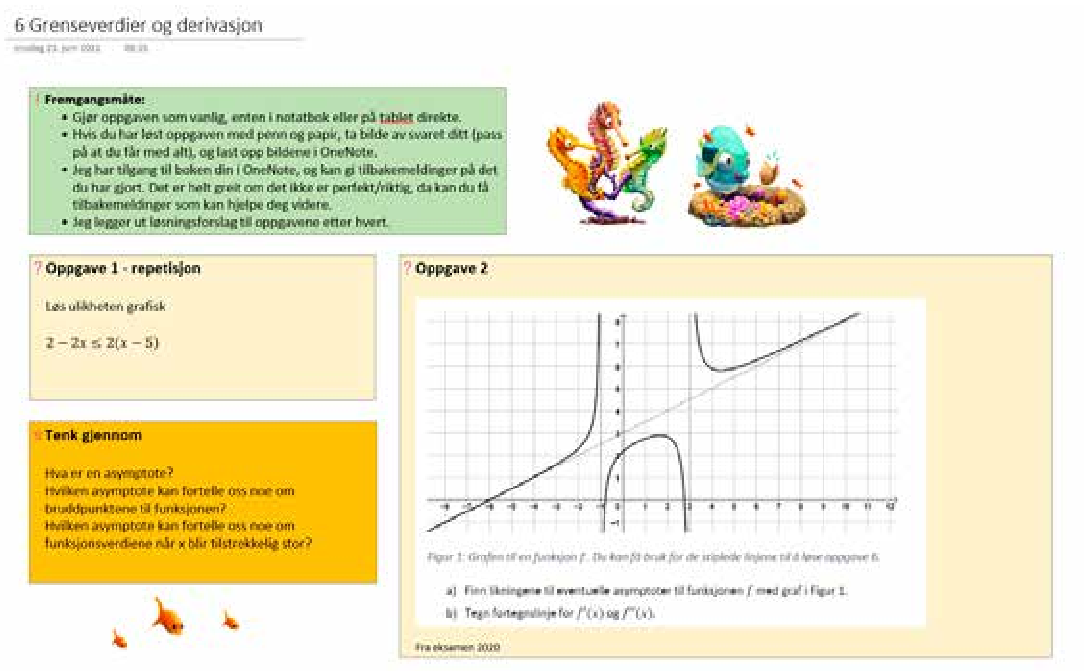
Klassenotatblokk i OneNote fungerer slik at hver student har sin egen bok med undersider, som både student og lærer har tilgang til. Begge kan både lese og skape innhold. Læreren kan distribuere innhold til studentenes bøker.

Studentene velger selv om og når de jobber med oppgavene. Oppgavene løses direkte i OneNote med nettbrett eller i egen notatbok, og bilde av besvarelsen lastes opp. Dette gjøres enkelt med smarttelefon med OneNote-appen installert.

Læreren vurderer besvarelsene som studentene har lagt inn, på et senere tidspunkt. Det er et poeng at studentene og læreren ikke nødvendigvis jobber i den samme boka samtidig. Ved at en gjør dette opplegget ikke-samtidig eller asynkront, er målet å senke terskelen for å delta, og å gjøre det mulig for studentene å arbeide når det passer for dem uten at de er avhengige av at læreren er tilgjengelig.

I kommentarene fra læreren blir det lagt vekt på utviklingspotensialet i besvarelsen, og studentene har mulighet til å levere flere ganger. Det er prosessen og dialogen mellom student og lærer som er det viktigste, og vurderingen kan dermed sies å være formativ (Popham, 2008). Studentene blir oppfordret til å jobbe mer med oppgaver der de har møtt motstand, men de kan også oppfordres til å tenke gjennom begreper eller jobbe med strukturen på besvarelsen (figur 1).

Studentene velger selv om de ønsker å arbeide mer med oppgavene, og om de i så fall velger å levere oppgaven inn på nytt. Det er et viktig premiss at læreren fortsetter å gi tilbakemeldinger hver gang studentene leverer. På denne måten fungerer opplegget som prosess-



Figur 1: Typisk eksempel på frivillige oppgaver til et kapittel

orientert skriving i matematikk og gir studentene en formativ vurdering.

Forventninger

Opplegget ble utarbeidet våren 2021, etter et semester som var preget av hyppige endringer i restriksjoner. Emnet ble i flere perioder undervist digitalt, etterfulgt av perioder med mer fysisk undervisning, men de aller siste ukene ble gjennomført utelukkende digitalt etter et lokalt smitteutbrudd. Det betydde at læreren fikk veldig lite innsikt i hvordan studentene forberedte seg til eksamen. Det var vanskelig å vite om de som sjelden søkte hjelp, ikke gjorde det fordi de ikke trengte hjelp, eller om det var fordi terskelen for å få hjelp digitalt ble for høy.

Det var derfor behov for å lage et opplegg der studentene får mulighet til å jobbe med oppgaver på et tidspunkt som passer dem, og fortsatt få tilbakemelding fra læreren. Studentene får relevante oppgaver med tilpasset hjelp underveis, helt uavhengig av endringer i pandemirestriksjonene.

Det gir også studentene en mulighet til å få jobbe med mer kreative og eksamensrelevante oppgaver, med tilbakemelding fra læreren på både innhold og struktur. Samtidig får læreren bedre oversikt over kunnskapsnivået i klassen, og en mulighet til å tilpasse undervisningen etter dette.

Gjennomføring

Det var åtte studenter som leverte første frivillige innlevering, og dette varierte noe i første del av første semester. Alle fikk tilbakemelding innen en uke. Det var også kommunisert til studentene. Antallet som leverte, sank i løpet av semesteret, og etter hvert var det stort sett én til to studenter som leverte.

Pandemisituasjonen i skoleåret 2021/22 var preget av at énmetersregelen fortsatt var gjeldende, og studentene var ofte delt mellom flere klasserom. Dette gjorde at læreren hele tiden måtte dele tiden sin mellom rommene og på den måten var mindre tilgjengelig for studentene enn i en normalsituasjon der alle er samlet i samme rom hele tiden. Spørsmålene i klasserommene var preget av ønske om hjelp til å forstå fremgangsmåter og retting av småfeil. I klasserommet var det de studentene som presterte middels eller lavere, som fikk mest hjelp.

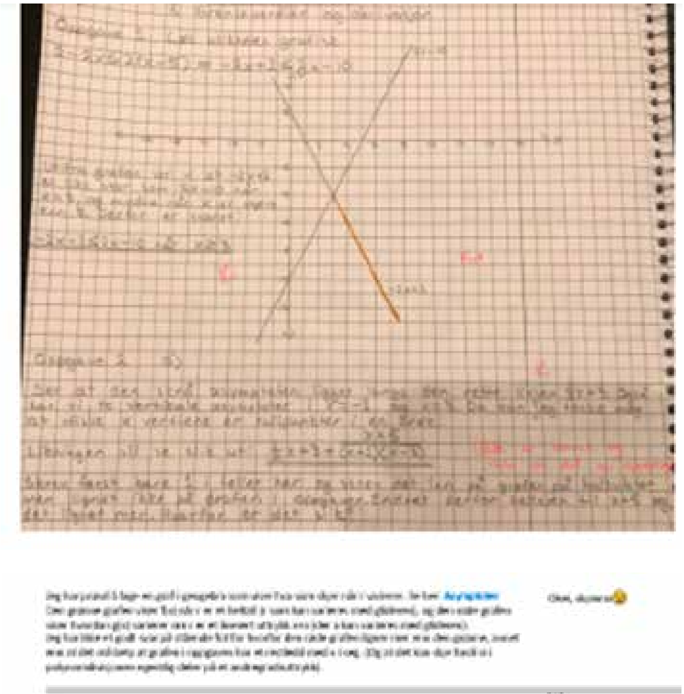
De studentene som fikk mest hjelp i klasserommet, leverte aldri noen av de frivillige oppgavene. De høyt presterende studentene brukte opplegget som en mulighet til å stille spørsmål som gikk ut over innholdet i oppgavene, og som kanskje kunne oppleves for omfattende til å kunne bli stilt i de fysiske undervisningstimene. Et typisk spørsmål kunne være: «Men hvorfor er det sånn?», som innledet til dialog mellom lærer og student. Ofte var spørsmålene av en sånn art at de satte i gang en utforskende tilnærming også for læreren.

Figur 2 (neste side) viser hvordan opplegget har fungert på sitt beste. Her har studenten løst oppgaven i sin egen notatbok og lastet opp bilde av sin løsning. Læreren har vurdert besvarelsen på nettbrett og kommentert med rødt. Studenten har kommet med en påstand litt utenfor oppgaveteksten, og lurer på hvorfor påstanden stemmer. Dette har læreren kommentert under bildet, og lagt inn direktelenke til Geogebra i OneNote, der studenten kan se to ulike grafer med glidere. Disse to grafene viser påstanden studenten har kommet med, og kan sammenlignes med oppgaveteksten, se figur 1. Studenten har til slutt skrevet en siste kommentar.

Diskusjon

Frivillighet Et av premissene for opplegget har vært at det har vært frivillig for studentene å levere inn. Den viktigste grunnen til det er at studentene allerede har mye obligatorisk aktivitet i studiet. Det kan se ut til at studenter som synes det er vanskelig å holde følge i alle emner og levere obligatoriske oppgaver innenfor fristene, nedprioriterer disse oppgavene.

Det at oppgavene er frivillige, ser ikke ut til å påvirke de faglig sterke studentene i like stor



Figur 2: Interaksjon mellom student og lærer der studenten har levert oppgaven i OneNote, som har ledet til en diskusjon mellom lærer og student.

grad. Kanskje kan vi dele denne typen studenter i to grupper: Én, de pliktoppfyllende som helst vil gjøre alt av tilgjengelige oppgaver og opplegg for å være sikker på at de har gjort nok, og to, de som reflekterer over egen læring og velger ut hvilke oppgaver og opplegg de ønsker å utføre for å nå sine læringsmål. Der de første kan bli overveldet og utbrente i sitt første møte med akademia, vil de som tilhører den andre gruppen, kunne bli mer engasjert i emnet (Olwage & Mostert, 2014). Dersom opplegget blir videreført som et frivillig opplegg, kan det være interessant å spisse det enda mer mot de faglig interesserte studentene og tenke enda mer utforskning og prosessorientert skriving i utarbeidingen av oppgavene.

Det blir også vurdert å gjøre dette opplegget til en del av de obligatoriske arbeidskravene. Da blir studentene tvunget til å levere i hvert fall deler av oppgavene, og alle får tilbakemelding fra læreren. Argumentene mot å gjøre dette kjenner de fleste til: Det krever mye arbeid fra læreren å gi gode tilbakemeldinger, og dessuten er det en bekymring for at flere studenter bare vil se på den endelige konklusjonen: godkjent eller ikke godkjent. På den måten blir prosessen mindre viktig, og vurderinj61gen kan gå fra å være først og fremst formativ til å bli mer summativ.

Engasjement fra lærer Å innføre nye undervisningsopplegg, i tillegg til etablerte opplegg, krever et visst engasjement fra læreren. Dette var ett av premissene for å gjøre opplegget frivillig. Da krever man også et visst engasjement fra studenten som velger å levere, og det ligger en forventning om at studenten ønsker tilbakemeldinger på arbeidet sitt. I møte mellom engasjerte studenter og engasjerte lærere er det gode forutsetninger for utforskende læring for begge parter.

Pandemisituasjon Opplegget ble utarbeidet med tanke på en pandemisituasjon med hyppige nedstengninger som gjorde undervisningen digital over lengre perioder. Dette scenarioet slo ikke til i særlig stor grad, og studentene møtte i stor grad læreren daglig og hadde mulighet for å få veiledning i klasserommet. Dette gjorde nok at mange studenter ikke hadde samme behov for digital veiledning som studentene i tidligere pandemiår.

Det er viktig å vurdere om opplegget dekker de behovene man har for veiledning og dialog med studentene i normalår, og om det er noe som bør videreføres når det ikke er noen pandemirestriksjoner. Samtidig er det flere matematikkemner på universitetene som har mindre studentnær undervisning som kan ha nytte av et tilsvarende opplegg også i normalår.

Tilbakemelding fra studenter

Det ble gjennomført spørreundersøkelser ved oppstart av undervisningsopplegget og omtrent halvveis i undervisningsåret. Ved undervisningsslutt ble det gjennomført uformelle samtaler med de som hadde brukt opplegget jevnt gjennom året. På grunn av det lave antallet som leverte de frivillige oppgavene, sier ikke spørreundersøkelsene noe generelt om hvordan studentene opplevde det, men det kommer frem at de fleste er fornøyd med bruken av OneNote. Da trekkes det spesielt frem å ha forelesningsnotater med god struktur tilgjengelig.

I samtaler med studentene som har levert de frivillige oppgavene gjennom hele året, kommer det frem at det er tilbakemelding og dialog med læreren som har vært hovedmotivasjonen for å levere inn oppgavene. I tillegg nevnes det at oppgavene ikke har en lett tilgjengelig fasit som en viktig grunn til å levere oppgavene. Om de kunne sjekket løsningen selv, hadde de ikke hatt like stort behov for tilbakemelding fra læreren.

Konklusjon

Det lave antallet studenter som har tatt i bruk opplegget, gjør at det foreløpig ikke er mulig å dra noen generelle konklusjoner om hvordan opplegget har påvirket læringsutbyttet for studentene. Vi ønsker likevel å videreutvikle tilbudet. Første steg er å tilpasse oppgavene enda mer til formatet, og åpne for mer utforskende oppgaver. Oppgavene fungerer på sitt beste når de tenner nysgjerrigheten i studenten, og tilbakemeldingene fra læreren kan være med på å drive denne videre.

Referanser

Damsgaard, H. L. (2020). Svarte skjermer i digitale undervisningsrom. *Khrono*. https://khrono.no/svarte-skjermer-i-digitale-undervisningsrom/482814

Hampel, R. & Stickler, U. (2005). New skills for new classrooms: Training tutors to teach languages online. *Computer Assisted Language Learning, 18*(4), 311–326. https://doi.org/10.1080/09588220500335455

Olwage, D. & Mostert, K. (2014). Predictors of student burnout and engagement among university students. *Journal of Psychology in Africa, 24*(4), 342–350. https://doi.org/10.1080/14330237.2014.978087

Popham, W. J. (2008). *Transformative assessment*. Association for Supervision and Curriculum Development.

Refleksjonsnotat

Tonning, E. (2022), *Refleksjon over noen pedagogiske komponenter av «flipped classroom» i digitaliseringsprosjekter for ENG 100 (H2015/H2016) og ENG 125 (V2021)* [Refleksjonsnotat i universitetspedagogikk, Universitetet i Bergen], BORA. https://bora.uib.no/bora-xmlui/bitstream/handle/11250/2990001/Erik%20Tonning%20SoTL.pdf?sequence=1

Lorange, Carlsen

DragonBox Skole: muligheter og begrensninger

Læreverket DragonBox Skole ble lansert i 2018 og brukes i dag av 550 skoler i Norge. DragonBox ble i sin tid lansert som et digitalt spill, der hensikten var å gi elever erfaring med likningsløsning, se Spurkeland (2013) og Kluge & Dolonen (2014) for en beskrivelse av spillet DragonBox.

DragonBox Skole består av digitale ressurser, lærebøker og konkreter som er beregnet for småskoletrinnet. De digitale ressursene består av læringslaber og interaktive oppgaver som er beregnet for nettbrett og bærbare PC-er med berøringsskjerm. Læringslabene legger til rette for at elevene kan utforske matematiske begreper og sammenhenger ved hjelp av interaktive visualiseringer. Disse læringslabene er utformet slik at elevene kan bruke dem med liten eller ingen hjelp fra læreren. De interaktive oppgavene består av læringslaber som er kombinert med oppgaver. Måten læreverket er utformet på, er nyskapende, og det er relevant og spennende å undersøke nærmere på hvilke måter denne utformingen kan legge til rette for læring av matematikk. I denne artikkelen skal vi derfor undersøke læringsmuligheter og begrensninger ved den tilnærmingen DragonBox har valgt. Vi skal gjøre dette ved å analysere én av læringslabene, som er kalt *Mengdelinja*. Grunnen til at vi valgte denne læringslaben, er at den kan brukes til å visualisere addisjon med veksling, noe som er et sentralt tema på småskoletrinnet. Teksten er basert på en vitenskapelig artikkel om det samme temaet (Lorange et al., i trykk).

Andreas Lorange
NLA Høgskolen
andreas.lorange@nla.no

Martin Carlsen
Universitetet i Agder
martin.carlsen@uia.no

Hvordan bruke DragonBox Skole?

DragonBox Skole introduserer elevene for DragonBox-universet. De viktigste karakterene i dette universet er de ti noomene, som står for de hele tallene fra 1 til 10, se figur 1. Disse noomene finnes også som fysiske konkreter.

Figur 1: Noomene i DragonBox Skole

Det er meningen at læreverket skal brukes i henhold til «DragonBox-metoden». I lærerveiledningen[1] blir hver økt bygget opp etter denne metoden. Hver økt består av fire faser: (1) utforskning; (2) samtale; (3) øving; og (4) oppsummering. I utforskningsfasen skal elevene utforske en læringslab individuelt, sammen med en medelev eller med læreren i en klassesamtale. I samtalefasen får elevene tid til å tenke, diskutere med en læringsvenn og dele tankene sine med læreren og resten av klassen. I øvingsfasen blir det anbefalt at elevene begynner å arbeide med de interaktive oppgavene og deretter løse oppgaver i lærebøkene. I oppsummeringsfasen skal læreren legge til rette for en klassesamtale om læringsmålene for timen og hvordan aktiviteten i timen er knyttet til disse målene.

Læringsmuligheter og begrensninger

Begrepet *relasjonell forståelse* spiller en viktig rolle når vi skal beskrive hvordan vi skal bruke begrepene *læringsmulighet* og *begrensning* i denne artikkelen. Relasjonell forståelse innebærer at elevene vet hva de skal gjøre, og hvorfor de skal gjøre det (Skemp, 1976). Dette står i motsetning til det Skemp kaller *instrumentell forståelse*, som innebærer at elevene kjenner til regler og fremgangsmåter, men de forstår ikke hvorfor reglene og fremgangsmåtene er slik de er.

Innenfor matematikkdidaktisk forskning på ulike typer undervisningsmateriell og digitale verktøy brukes ofte begrepene *affordance* og *constraint* (se for eksempel Carlsen et al., 2016; David & Watson, 2008; Lorange et al., i trykk). Betegnelsen affordance ble først lansert av Gibson (1979) og omfatter de muligheter til handling som miljøet tilbyr dem som skal handle. For eksempel vil en kalkulator «afford» aritmetiske operasjoner som addisjon og multiplikasjon av tall. Disse handlingsmulighetene finnes i miljøet uavhengig av brukerne. Derfor må brukerne oppfatte og utnytte de handlingsmulighetene som miljøet tilbyr. I forbindelse med læringslaben Mengdelinja handler affordances om de mulighetene for handling og interaksjon som læringslaben tilbyr, sett i sammenheng med elevenes kompetanse i å bruke dette verktøyet. I denne artikkelen bruker vi affordances om de handlingsmulighetene i Mengdelinja som kan legge til rette for utvikling av relasjonell forståelse av matematiske begreper og sammenhenger.

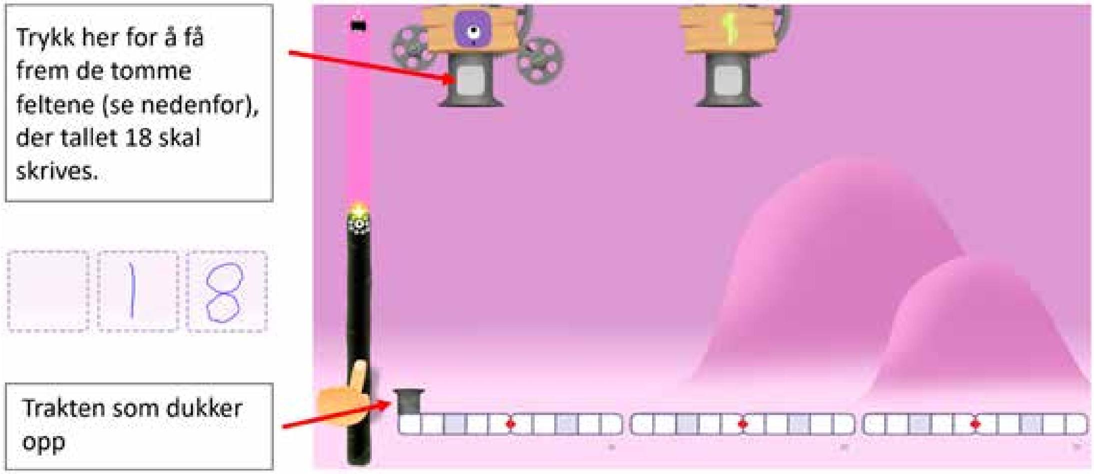
Constraint er et begrep som omfatter de faktorene som begrenser brukernes handlinger og interaksjoner med miljøet. Slike begrensninger skal ikke oppfattes som en utelukkende negativ relasjon mellom miljøet og brukerne. For eksempel vil begrensningene i Mengdelinja kunne hjelpe elevene til å fokusere på det som det er meningen at de skal fokusere på. I denne artikkelen skal vi imidlertid bruke constraints om de restriksjonene i Mengdelinja som kan begrense utviklingen av relasjonell forståelse av matematiske begreper og sammenhenger.

Begrepene affordance og constraint har ikke fullt ut dekkende oversettelser til norsk. I denne artikkelen har vi oversatt disse begrepene til *læringsmulighet* og *begrensning*.

Læringslaben Mengdelinja

Vi skal analysere Mengdelinja i sammenheng med oppgaven «Regn ut 18 + 6». Vi valgte denne oppgaven fordi den kan føre til at 6 deles opp i 2 og 4. Slike oppdelinger er selve kjernen i den «vekslingen» som utføres i forbindelse med tierovergang i addisjonsalgoritmen.

For å kunne utføre addisjonen av 18 og 6 kan eleven begynne med å lage tallet 18. For å gjøre dette må eleven trykke på det grå feltet på røret øverst til venstre i skjermbildet, se figur 2. Når dette gjøres, dukker det opp tre tomme felter. I de to siste av disse må eleven skrive 18 med fingeren sin på skjermen. Da kommer en 10-noom (svart) og en 8-noom (rosa) ut av røret, se til venstre på figur 2. Mengdelinja oversetter altså tallet 18 til en visuell representasjon av dette tallet, det vil si en 10-noom og en 8-noom.

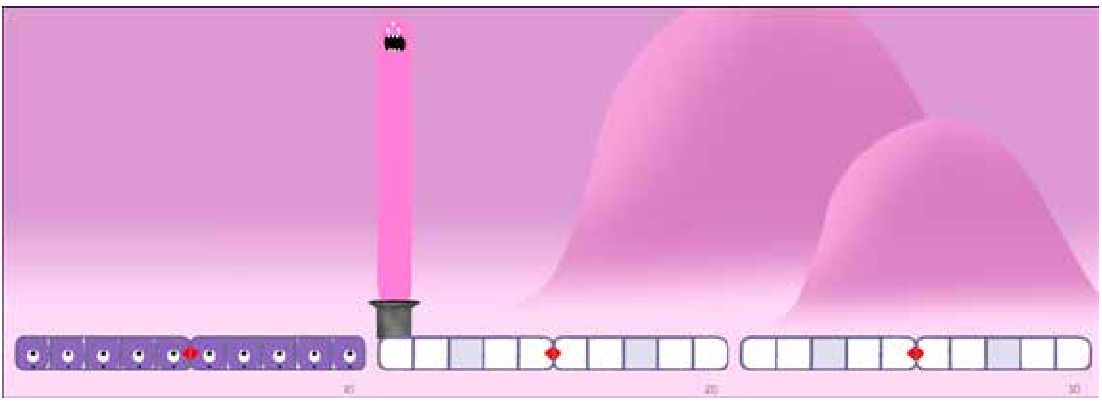


Figur 2: Laging av tallet 18. Tekstboksene og pilene er lagt til av forfatterne.

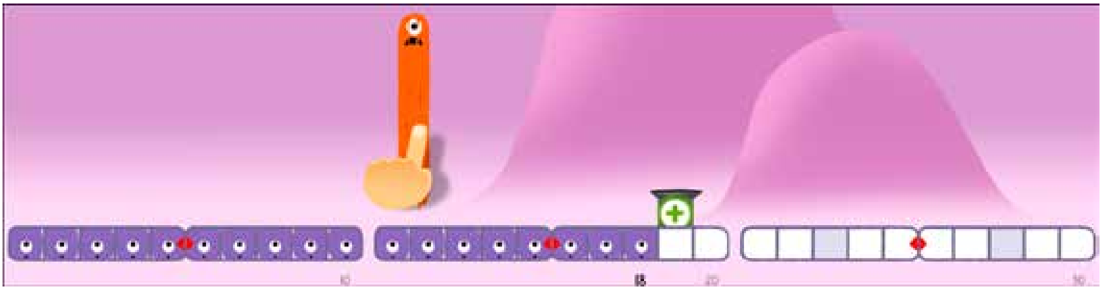
Denne oversettelsen kan legge til rette for utvikling av relasjonell forståelse av tallet 18 og utgjør derfor en læringsmulighet.

Eleven må så trykke på 10-noomen og 8-noomen med fingeren. Når dette blir gjort, dukker en trakt opp på venstre side av den første beholderen, se figur 2. Trakten blir automatisk plassert på rett sted, det vil si på den første ledige plassen i den første beholderen. Dette instruerer eleven om hva som skal gjøres, nemlig at 10-noomen og 8-noomen skal settes nedi trakten. Når dette blir gjort, blir ti 1-noomer matet inn i beholderen én for én samtidig som man hører en bankelyd hver gang en 1-noom mates inn. Når denne prosessen er ferdig, blir 8-noomen automatisk flyttet til den neste beholderen. Altså blir 10-noomen omformet til ti 1-noomer. Dette er en læringsmulighet fordi visualiseringen av denne prosessen kan legge til rette for utvikling av relasjonell forståelse av at en 10-noom består av ti 1-noomer.

Når den gjenværende 8-noomen blir flyttet til den andre beholderen, dukker en trakt automatisk opp i den første ledige cellen i den andre beholderen, se figur 3. På denne måten blir eleven instruert om hva som skal gjøres, nemlig at 8-noomen skal mates inn i den andre beholderen. Når eleven trykker på trakten, blir 8-noomen matet inn i beholderen på den samme måten som 10-noomen ble matet inn i den første



Figur 3: Den gjenværende 8-noomen blir flyttet til den andre beholderen, og en trakt dukker opp.



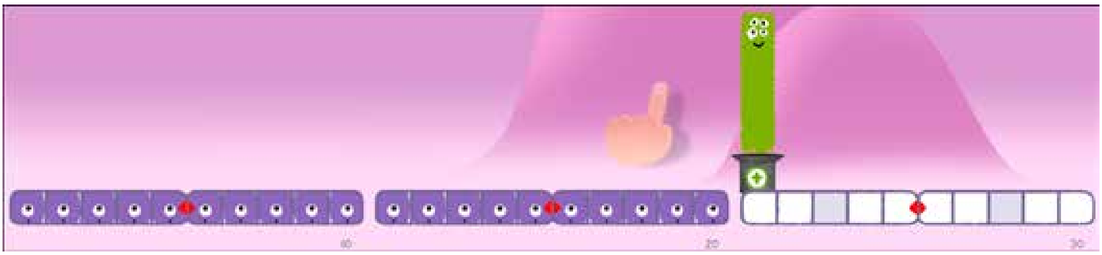
Figur 4: En trakt med plusstegn dukker opp på den første ledige plassen i den andre beholderen.

beholderen. De to automatiske handlingene som vi nå har beskrevet, kan utgjøre en begrensning i elevenes læringsprosess. Det eneste eleven trenger å gjøre, er å mate 10-noomen og 8-noomen i de to traktene. Dette kan gjøres uten at en har relasjonell forståelse av oppbygningen av tallet 18. Derfor kan disse to automatiske handlingene begrense utviklingen av relasjonell forståelse.

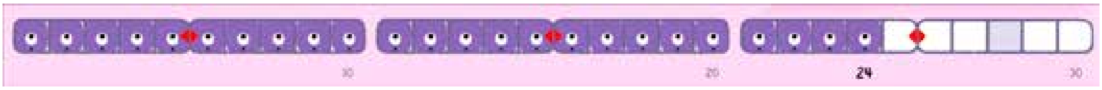
For å fortsette med utregningen av 18 + 6 må eleven trykke på det grå feltet på røret øverst til venstre en gang til og skrive 6 i det tomme feltet som da dukker opp. Da kommer en 6-noom (oransje) ut av røret. Denne noomen må deles opp i en 2-noom og en 4-noom. Dette kan gjøres enten automatisk eller manuelt. Vi begynner med å forklare hvordan dette kan gjøres automatisk. Først må eleven trykke på 6-noomen. Når dette er gjort, dukker en trakt med et plusstegn automatisk opp på den første ledige plassen i den andre beholderen, se figur 4.

Plasseringen av denne trakten instruerer eleven om å sette 6-noomen inn på rett sted, det vil si på den første ledige plassen i den andre beholderen. Dette indikerer at den andre beholderen skal fylles opp først. Når eleven flytter 6-noomen til trakten og trykker på trakten, begynner 6-noomen å bli matet inn i beholderen, men prosessen stopper etter at de to første 1-noomene er matet inn i beholderen. Da er den andre beholderen full, og den gjenværende 4-noomen (grønn) og trakten flyttes automatisk til den første ledige plassen i den tredje beholderen, se figur 5. Eleven må så trykke på trakten for å mate 4-noomen inn i den tredje beholderen.

På denne måten får eleven en mulighet til å legge merke til hvordan 6-noomen deles opp i en 2-noom og en 4-noom. Visualiseringen av oppdelingen legger til rette for utvikling av relasjonell forståelse av oppdelingen og kan derfor utgjøre en læringsmulighet. Den automatiske plasseringen av de to traktene kan imidlertid utgjøre en begrensning for utvikling av relasjonell forståelse, fordi det eneste eleven trenger å gjøre for å fortsette å utføre beregningen, er å mate noomene inn i traktene. Dette kan gjøres uten å ha relasjonell forståelse av oppdelingen av 6 i 2 og 4.



Figur 5: En trakt med plusstegn dukker opp på den første ledige plassen i den tredje beholderen.



Figur 6: Tallet 24 dukker opp under den siste 1-noomen i den tredje beholderen.

Når eleven trykker på trakten som er avbildet på figur 5, blir 4-noomen matet inn i den tredje beholderen, og tallet 24 i fet skrift dukker automatisk opp under den siste 1-noomen i den tredje beholderen, se figur 6. Altså blir de 24 1-noomene i de tre beholderne oversatt til tallet 24. På denne måten visualiserer læringslaben at tallet 24 består av to beholdere som hver er fylt med ti 1-noomer, og en beholder som er fylt med fire 1-noomer. Denne visualiseringen kan legge til rette for utvikling av relasjonell forståelse av tallet 24. Derfor kan oversettelsen fra 24 1-noomer til tallet 24 utgjøre en læringsmulighet.

Oppdelingen av 6-noomen i en 2-noom og en 4-noom kan en også utføre manuelt ved å føre fingeren tvers over 6-noomen litt over eller under midten av denne noomen. Da blir 6-noomen delt opp i en 2-noom og en 4-noom. Så må eleven mate 2-noomen inn i den andre beholderen og 4-noomen i den tredje beholderen. Denne manuelle oppdelingen kan også utgjøre en læringsmulighet fordi den legger til rette for utvikling av relasjonell forståelse av oppdelingen av 6 i 2 og 4.

Avsluttende kommentar

Analysen vår viser at Mengdelinja kan medføre både læringsmuligheter og begrensninger i elevenes læringsprosess. Vi begynner med å oppsummere læringsmulighetene. Disse er knyttet til hvordan Mengdelinja kan legge til rette for utvikling av relasjonell forståelse ved å visualisere addisjonsprosessen på en interaktiv og dynamisk[2] måte: Tallet 18 blir oversatt til en 10-noom og en 8-noom, 10-noomen blir delt opp i ti 1-noomer, og 6-noomen blir delt opp i en 2-noom og en 4-noom for å dra nytte av tiergruppering i tallsystemet vårt. Altså kan Mengdelinja medføre vesentlige læringsmuligheter knyttet til visualisering av det grunnleggende tallbegrepet og vekslingen som inngår i addisjonsalgoritmen.

I analysen vår har vi beskrevet de operasjonene som blir automatisk utført av Mengdelinja. Disse operasjonene kan legge til rette for læring fordi elevene blir instruert om hva som skal gjøres for å utføre addisjonen. Derfor er det sannsynlig at elevene i stor grad kan være i stand til å bruke Mengdelinja uten å få hjelp av læreren. Dette er et viktig poeng fordi en hensikt med læringslabene er at elevene skal kunne utforske matematiske begreper og sammenhenger på egen hånd. Samtidig kan disse automatiske handlingene medføre begrensninger i læringsprosessen fordi elevene blir forhindret fra å utføre disse handlingene på egen hånd. Disse automatiske handlingene kan gjøre det mulig for elevene å løse ulike oppgaver uten å ha relasjonell forståelse av det de gjør. Elevene kan skrive tallene som inngår i oppgaven, uten å måtte reflektere over hva disse tallene betyr. De kan flytte noomene til traktene uten å måtte reflektere over hvorfor dette gjøres, og uten å legge merke til hva visualiseringene innebærer. Hvis oppdelingen av 6-noomen i en 2-noom og en 4-noom blir utført automatisk, kan elevene bli forhindret fra å bestemme hvordan denne oppdelingen skal utføres. Altså kan de handlingene som blir automatisk utført, utgjøre begrensninger i elevenes læringsprosess.

Vår konklusjon er at arbeid med Mengdelinja kan utgjøre både læringsmuligheter og begrensninger i elevenes læringsprosess. Utfallet er i stor grad avhengig av hvordan læreren legger til rette for at elevene kan reflektere omkring de dynamiske representasjonene og de operasjonene som utføres på noomene.

Noter

1 Se https://trinn2.dragonbox.no/discover.html.
2 Med en dynamisk visualisering mener vi at figurene forandrer seg med tiden. Dette vil ofte kunne illustrere prosesser og endringer bedre enn statiske figurer.

Referanser

Carlsen, M., Erfjord, I., Hundeland, P. S. & Monaghan, J. (2016). Kindergarten teachers' orchestration of mathematical activities afforded by technology: agency and mediation. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 1–17. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-016-9692-9

David, M. M. & Watson, A. (2008). Participating in what? Using situated cognition theory to illuminate differences in classroom practices. I A. Watson & P. Winbourne (red.), *New directions for situated cognition in mathematics education* (s. 31–57). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-71579-7_3

Gibson, J. J. (1979). *The ecological approach to visual perception*. Houghton Mifflin.

Kluge, A. & Dolonen, J. A. (2014). Algebra som spill. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 25*(3), 23–31. http://www.caspar.no/artikkel_pdf/t-2014-3-8.pdf

Lorange, A., Sjaastad, J. & Carlsen, M. (i trykk). Affordances and constraints of the DragonBox School teaching material. I *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bolzano University and ERME.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*(1), 20–26.

Spurkland, S. (2013). Spillrevolusjonen er her – ta den i bruk. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 24*(2), 17–20. http://www.caspar.no/tangenten/2013/spurkland0213.pdf

Eriksen, Vos

Kjerneelementer og eksempeloppgaver

I august 2020 ble den nye læreplanen (LK20) iverksatt for grunnskolens 1.–9. trinn og videregående skoles 1. trinn (vg1). For vg1 skulle det utvikles nye kjerneelementer tilpasset den nye læreplanen. Det var uklart hvordan eksamen ville bli. Prosessen fram mot LK20 var i stor grad åpen, med høringer og mye informasjon sendt ut av Utdanningsdirektoratet (Nordbakke, 2018). Eksamensordningen og eksempeloppgavene ble imidlertid ikke gjenstand for samme åpenhet, selv om dette også er viktige ressurser for å kommunisere til lærere, lærebokforfattere og andre om ønskede aktiviteter i klasserommet (Morgan & Sfard, 2016). Da eksempeloppgavene forelå, ble det uttrykt bekymring fra lærere og organisasjoner (Utdanningsforbundet, 2020; Munthe-Kaas et al., 2021). Fried og Amit (2016) skriver at myndigheter kan støtte implementeringen av læreplanen gjennom obligatoriske nasjonale eksamener, særlig når det handler om inngripende endringer. Kjerneelementene kom som en slik endring, og de skal vise oss hva som er viktigst i LK20 (Smestad, 2018).

Stig Eriksen
Universitetet i Agder
stig.eriksen@uia.no

Pauline Vos
Universitetet i Agder
pauline.vos@uia.no

Vi har analysert hvordan oppgavesett publisert i september 2020 og januar 2021 samsvarer med kjerneelementene. Begge settene inkluderte 1P og 1T, mens bare januar 2021 inkluderte 1P-Y og 1T-Y. Nedenfor forklarer vi analysen vår med et eksempel og viser resultatene. I denne artikkelen beskriver vi hva vi har funnet, og gir eksempler på hvordan oppgaver kunne justeres for å gi elevene bedre muligheter til å vise kompetanse knyttet til kjerneelementene.

Eksempel på analyse

LK20 endte opp med de nå godt kjente seks kjerneelementene som vi har laget forkortinger for til bruk i denne teksten: *utforsking og problemløsing* (UP), *modellering og anvendelser* (MA), *resonnering og argumentasjon* (RA), *representasjon og kommunikasjon* (RK), *abstraksjon og generalisering* (AG), *matematiske kunnskapsområder* (MK).

I beskrivelsene av kjerneelementene framgår det hva elevene må være i stand til å *gjøre*, og eksamensoppgaver er noe elevene må løse, en aktivitet som elevene *gjør*. Dette var vårt utgangspunkt for å analysere oppgavene i lys av alle kjerneelementene. Vi tok handlingsaspektene i kjerneelementene og sammenliknet dem med vår tolkning av de handlingene eksempeloppgavene åpner for. Sammenlikningen ble tallfestet for å illustrere og registrere sammenhengene, og for å samkjøre med kvalitative analyser. Vi illustrerer analysen med ett kjerneelement og én oppgave.

I vårt valgte eksempel, RK, har vi her uthevet det eleven skal gjøre:

> Representasjoner i matematikk P er måter å uttrykke matematiske begreper, sammenhenger og problemer på. Representasjoner kan være konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske. Kommunikasjon i matematikk P handler om at elevene **bruker matematisk språk** i samtaler, argumentasjon og resonnementer. Elevene må få mulighet til **å bruke matematiske representasjoner** i ulike sammenhenger gjennom egne erfaringer og matematiske samtaler. Elevene må få mulighet til å forklare og **begrunne valg av representasjonsform**. Elevene må kunne oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket og **veksle mellom ulike representasjoner**. (Utdanningsdirektoratet, 2020)

Ut fra dette valgte vi fire kategorier: (1) Bruke matematisk språk, (2) Bruke matematiske representasjoner, (3) Begrunne valget av representasjonsform og (4) Bytte mellom representasjoner. Vi har valgt å ikke ta med å «oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket» som kategori, fordi dette ligger implisitt i de fire kategoriene vi har valgt.

Vi kvantifiserte våre koder slik:

0 poeng	Oppgaven gir ikke eleven mulighet til å vise dette.
1 poeng	Oppgaven kan gi mulighet til å vise litt av dette.
2 poeng	Oppgaven krever dette.

Kodingene ble pilotert i starten. Hver kategori ga anledning til generelle diskusjoner om tolking. For RK-kategoriene over bestemte vi f.eks. at det å kunne *lese* tall i en oppgave ikke i seg selv er å bruke en matematisk representasjon. Å *tolke* et Python-program som gir funksjonsverdier, kan imidlertid være det. Dersom man må tegne grafen som hører til, og bruke grafen til å si noe om formelen, en figur eller programmet, eller omvendt, bytter man mellom representasjoner, dvs. at oppgaven får 2 poeng i kategori (4). Men dersom man greit kan løse oppgaven uten å bytte mellom representasjoner på denne måten, får oppgaven bare 1 poeng i denne kategorien.

> Adil er med i et orienteringsløp. Postene som er satt ut, gir enten 2 poeng eller 5 poeng. Han finner 13 poster og får til sammen 38 poeng. Hvor mange av de 13 postene gir 2 poeng?

Trenger en elev her å bruke matematisk språk for å løse oppgaven? Elevene kan bruke algebra, men de kan også finne svar ved å gjette tallpar til postene. Å gjette og sjekke er dekket av kategori (4), og bruk av algebra blir dekket av kategori (2), for denne oppgaven. Derfor kodet vi her med 0 poeng for kategori (1). Både å prøve seg fram med tall og bruke algebra er bruk av representasjoner, så for kategori (2) fikk oppgaven 2 poeng. Oppgaven spør ikke om å begrunne valget av representasjonsform, så det bli 0 poeng for kategori (3). For å bytte mellom representasjoner, kategori (4), diskuterte vi at oppgaven oftest ville omhandle tre representasjoner: tall, verbal/tekstuell og algebraisk/symbolsk. Vi krevde mer av denne kategorien enn bare det å tolke teksten i oppgaven over til noe annet, det ville ført til at alle oppgaver ville få 2 poeng her. Men det er slett ikke usannsynlig at en elev her ville bruke tall for deretter å bruke innsikten fra tallbehandlingen til å bytte til algebra. I denne kategorien fikk oppgaven da 1 poeng.

Kategorier fra resten av kjerneelementene

På tilsvarende måte så vi hvilke elevhandlinger som inngår i beskrivelsene av de andre kjerneelementene, og vi endte opp med denne listen av kategorier:

UP: (1) Avdekke mønster og sammenhenger, (2) Dele et problem opp i delproblem, (3) Vurdere bruk av digitale hjelpemidler eller ei og (4) Utvikle en metode i en ukjent situasjon.

MA: (1) Knytte til dagliglivet, arbeidslivet eller samfunnet, (2) Matematisere – lage en modell, (3) Kritisk vurdere en modell og (4) Bruke en modell i en annen kontekst.

RA: (1) Utvikle en tankerekke og (2) Begrunne eller bevise.

AG: (1) Bruke formelt symbolspråk eller formelle resonnementer, (2) Oppdage matematiske sammenhenger, generalisere og (3) Utforske begreper og symboler for å uttrykke resultater og sammenhenger algebraisk og formelt.

MK: (1) Bruke matematisk innhold fra ett av kompetansemålene og (2) Utforske sammenhenger på tvers av kompetansemålene.

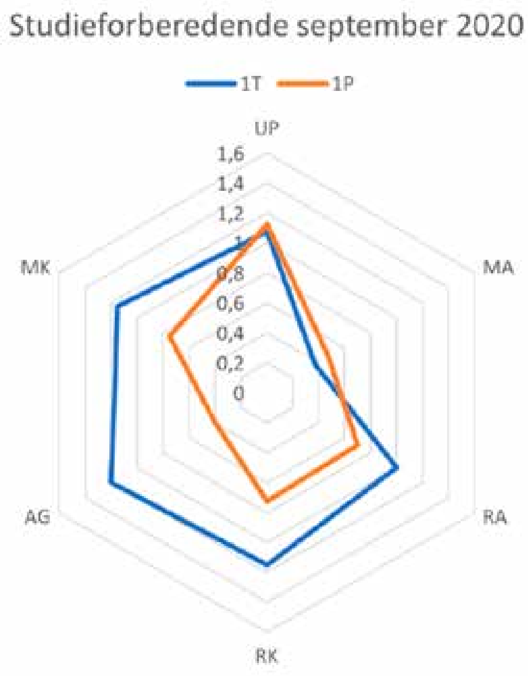
I samsvar med framgangsmåten som er vist til over, kodet vi oppgaver hver for oss, sammenliknet og arbeidet oss fram til en felles forståelse av kategoriene. For hvert sett av oppgaver endte vi opp med store matriser med tallene 0, 1 og 2. Poengene kunne så summeres for hvert kjerneelement, for hvert sett. Poengene ble vektet ved at vi dividerte med antall kategorier i hvert kjerneelement før vi regnet ut gjennomsnittet. Verdien i diagrammene våre er dette gjennomsnittet, som altså vil ligge i intervallet [0, 2].

Resultater

Vi presenterer her to tråder ved hjelp av radardiagram. Først viser vi hvordan eksempeloppgaven for det enkelt fag er knyttet til kjerneelementene på forskjellig vis, og deretter ser vi på utviklingen fra de første oppgavene i september 2020 til de som kom i januar 2021.

Figur 1 viser de første oppgavene der Udir for første gang viste hvordan de nye eksamensoppgavene kunne bli.

Gjennomsnittstallene viser at fem av kjerneelementene i 1T holder seg i området rundt eller over 1. Poenggivingen vår viser at disse oppgavene samlet gir mulighet til å vise kompetanse knyttet til alle disse fem kjerneelementene. For 1P kan vi trekke den samme konklusjonen bare



Figur 1: Studieforberedende september 2020.

når det gjelder UP, mens tre andre kjerneelementer har verdier i området 0,6–0,8.

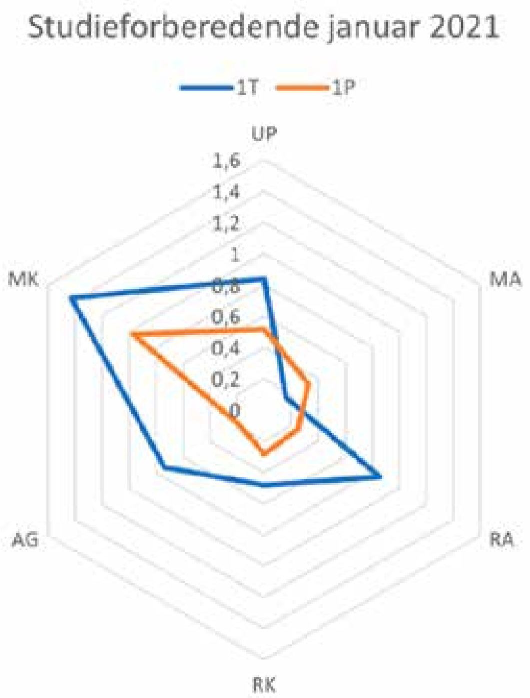
MA reflekteres i eksempeloppgavene i mindre grad enn de andre kjerneelementene. Dette gjelder for både 1T og 1P. Størst forskjell mellom fagene finner vi for AG, der 1P har en mye lavere verdi enn 1T.

Figur 2 viser analyseresultatet fra oppgavene fra Udirs første eksempler på komplette eksamenssett, som kom i januar 2021.

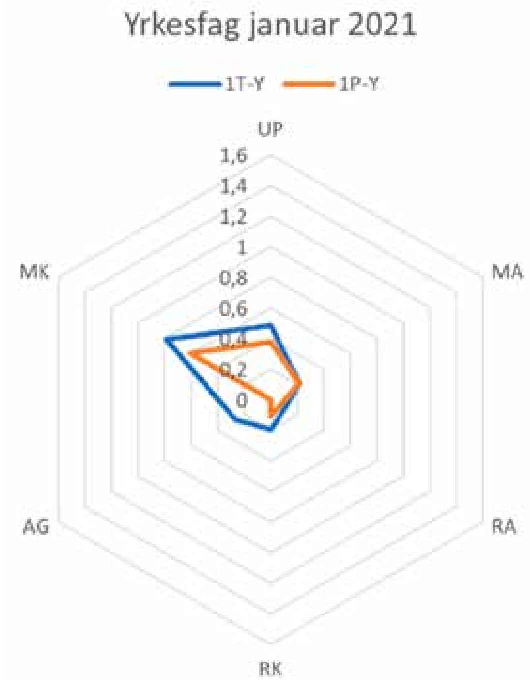
1T og 1P har høyere verdier for MK enn for de andre kjerneelementene. Det er fremdeles slik at kurven til 1T stort sett ligger utenfor kurven til 1P, MA har lav verdi for begge fagene, og forskjellen er stor for AG. I tillegg er det nå større forskjell for kjerneelementet RA.

Figur 3 viser analyse av oppgavene for yrkesfagene som det ikke er publisert oppgaver for i 2020.

Oppgavene for yrkesfag gir elevene i langt mindre grad muligheter knyttet til å vise ferdigheter knyttet til kjerneelementene enn det opp-



Figur 2: Studieforberedende januar 202.:



Figur 3: Yrkesfag januar 2021.

gavene for studieforberedende gjør. Alle verdiene i diagrammet er mindre enn 0,6. Vi ser likevel tre av de samme tendensene: Grafen til den teoretiske matematikken viser større verdier for alle kjerneelementene; begge grafene strekker seg mot MK; og differansen mellom de to fagene er størst for AG.

Vi vil nå se på den andre tråden i analysen vår, utviklingen fra de første eksempeloppgavene til de neste. De to oransje grafene fra figur 1 og figur 2 viser de to settene med oppgaver for matematikk 1P. Analysen viser at de sist publiserte oppgavene har lavere gjennomsnittsverdier for de fem første kjerneelementene enn de først publiserte, men oppgaven har blitt tettere knyttet til kompetansemålene i læreplanen gjennom MK.

Vi ser tilsvarende på de to blå grafene fra figur 1 og figur 2, altså de to oppgavesettene for matematikk 1T. På samme måte som for 1P er det kun for MK at grafen for januar 2021 har høyere verdier enn den for september 2020. Her har imidlertid tre kjerneelementer, UP, MA og RA, bare en mindre endring mot lavere gjennomsnittsverdier.

Oppsummert viser analysen at det elevene blir bedt om å gjøre i eksempeloppgaver for den teoretiske matematikken, ligger nærmere det som er formulert i kjerneelementene, enn for den praktiske matematikken. Den yrkesfaglige matematikkens oppgaver viser i enda mindre grad til handlinger som er kommunisert i kjerneelementene.

Diskusjon

De første samlingene med enkeltoppgaver fra september 2020 kommuniserte en tydelig sammenheng mellom de fleste av kjerneelementene og eksamensoppgavene. Udir brukte disse oppgavene til å vise fram oppgavetyper vi ikke har sett på norsk eksamen før. Gjennom oppgavene fortalte de tidlig i skoleåret hva som kan forventes, men midt i skoleåret trakk de tilbake litt av dette da de publiserte de komplette settene med eksempeloppgaver. Disse var ikke så tett koblet til kjerneelementene, men tettere til matematisk innhold i kompetansemålene. Vi tolker det som at Udir først ville fortelle om alt som var helt nytt, eller at de med oppgavene i september 2020 ville berede grunnen for en aksept for oppgavene som kommer senere.

Undersøkelsen vår viser at forsøket på å redefinere målsettingene for skolens matematikkundervisning med kjerneelementer er vanskelig å realisere innenfor gjeldende rammer og ressurser for utarbeiding av eksamen. Når det skal utarbeides oppgaver som er tettere knyttet til praksisen i skolen og de skal være eksempler på komplette eksamenssett, faller man tilbake til velkjente måter fra tidligere læreplaner for å forstå matematisk kompetanse. Det kan synes som om elevenes muligheter til å vise kompetanse i fagets prosesser beskrevet i de fem første kjerneelementene har måttet vike til fordel for fagets innholdsside.

En av endringene fra tidligere eksamensoppgaver var oppgaver som ikke ber om begrunnelser, men bare et svar. Det ble uttrykt bekymring om dette i mediene (Stensland, 2020). Disse oppgavene kommuniserer stor frihet i metodebruk, siden løsningsmetoden ikke blir vurdert. Samtidig sier Udir med disse oppgavene at det bare er resultatet som er viktig. I vår koding blir noen kategorier ekskludert ved slike oppgaver. Eleven kan f.eks. ikke «Begrunne eller bevise» i slike oppgaver. Allikevel, dersom vi går tilbake til Adil og orienteringsløpet, ser vi at åpenheten i valg av metode, inkludert valg av å bruke digitalt hjelpemiddel eller ei, er med på å gi denne oppgaven 16 poeng i vår analyse, mot 13,4 som gjennomsnitt for oppgavene i 1P i september 2020. Vi vil foreslå at oppgaven endres slik at den knyttes tettere til kjerneelementene.

Slik oppgaven med Adil var gitt, har den et design som er kjent for lærere. Vi mener at Udir med denne oppgaven kommuniserer at likningssett med to ukjente bør være med i matematikk 1P fremdeles. Selv om oppgaven er presentert med tekst og den kan løses både algebraisk, grafisk, numerisk og digitalt, så er oppgaveformuleringen knyttet til en tradisjon i faget. Erfarne lærere vil nok kunne se for seg hvordan opplæringen knyttet til dette spilles ut i en lærebok og et klasserom. Likninger eller likningssett er ikke nevnt i kompetansemålene til matematikk 1P. Vårt forslag til en omformulering fører elevene inn i en annen prosess hvor alternative resultater fra en utregning eller utforsking må vurderes, og dette gjøres innenfor rammene for oppgaver med bare ett svar.

> Adil er med i et orienteringsløp. Postene som er satt ut, gir enten 2 poeng eller 5 poeng. Han finner 9 poster med 2 poeng og 4 poster med 5 poeng, og får til sammen 38 poeng.
> Vennen sa at han også fikk 38 poeng, men med færre poster. Hvor mange poster fant han?

Med denne nye formuleringen passer oppgaven ikke inn i en tradisjon hvor lærere like lett ser for seg løsningsmetoder og undervisning knyttet til dette. Når antall poster er ukjent, må elevene utforske flere alternativer, og det må vurderes hvilket valg som er riktig for å gi det endelige svaret.

Denne oppgaven har i utgangspunktet fire mulige løsninger for 38 poeng, (19, 0), (14, 2), (9, 4) og (4, 6). Oppgaven tilfredsstiller likevel kravet om bare ett svar ettersom elevene må velge den siste og svare 10 for å få rett. I denne versjonen ville den være tettere knyttet til kjerneelementene fordi den oppfordrer til utforsking og bruk av forskjellige representasjoner eller digitale hjelpemidler. Udir ville derfor med vårt forslag kommunisere et ønske om en annen praksis i klasserommet enn de gjør med eksempeloppgaven.

I eksemplet over viste vi hvordan en oppgave av type 1 kan knyttes til flere av kjerneelementene, med mange valg av metoder og med muligheter for utforsking. Den neste oppgaven er av type 2 og fikk kun 4 poeng i vår analyse, alle poengene hadde tilknytning til arbeidslivet. Dette var en av eksempeloppgavene for yrkesfag:

Stine har deltidsjobb med timelønn på 214 kr. I april jobbet hun 57 timer. Hun trekkes 16 % i skatt. Resten av lønnen får hun utbetalt.
Lag et regneark som vist til høyre. Legg inn tall fra oppgaveteksten i de hvite cellene og formler i de lyseblå cellene slik at du finner riktig bruttolønn, skattetrekk og nettolønn for Stine i april.
Kahlid er kollega med Stine. Han jobber fulltid og har høyere prosentvis skattetrekk enn Stine. I april jobbet han 160 timer med timelønn på 214 kr. Nettolønnen til Khalid i april ble 25 680 kr. Hvor mange prosent trekkes Khalid i skatt?

For å gjøre oppgaven mer i tråd med intensjonen i kjerneelementene og inkludere utforsking, problemløsing, representasjon og kommunikasjon foreslår vi en annen oppgave b:

b) Stine får tilbud om å jobbe opptil 100 timer i mai, men får beskjed om at hun da bør få nytt skattekort med en høyere skattesats. Hun sender en melding til deg og spør hva hun bør gjøre. Gjør beregninger og bruk disse i en forklaring til Stine for å vise henne hva hennes valg betyr økonomisk.

Argumentasjon og generalisering har vært svært lite synlig i oppgavene for den praktiske matematikken. Denne oppgaven kan knyttes til dette kjerneelementet ved at vi legger til en oppgave.

Forklar hva som skjer med nettolønn når skattesatsen (forskuddstrekket) øker.

Denne oppgaven ber om en generalisering og ser tilsynelatende enkel ut, men også denne kan løses på mange nivåer. På et lavt nivå kan eleven rett og slett slå fast at nettolønnen minker når skattesatsen øker. Elevene kan også regne ut et eksempel. Med et talleksempel kan de vise at når skattesatsen øker med f.eks. 5 prosentpoeng fra 10 %, så minker nettolønna med 5,6 %. Elevene kunne for eksempel bruke representasjoner gjennom regneark eller grafiske framstillinger, der skattesats vises på førsteaksen og nettolønn på andreaksen. Oppgaven åpner også for mer generelle løsninger, og kunne vært gitt i kurs med større vekt på generelle løsninger. En slik eksamensoppgave vil kommunisere at det bør arbeides med gode forklaringer i klasserommet.

Konklusjon

Kjerneelementene er ikke likt representert i eksempeloppgavene: Modellering og anvendelser er klart underrepresentert sammenliknet med de andre kjerneelementene. Det har imidlertid aldri blitt klart hvordan kjerneelementene burde være fordelt. Burde de alle være like mye til stede? Og hvis ikke, hvordan burde fordelingen være, og hvordan skulle de fordeles forskjellig for den praktiske, teoretiske eller yrkesfaglige matematikken?

Matematikk P og T har forskjellige mål, så det er forståelig at det er lettere å tilnærme seg AG fra 1T, men den tankegangen skulle tilsi at MA var mer til stede i 1P. Dette er ikke tilfellet. Eksempelet om skatt viste hvordan AG kan tilnærmes til et mer praktisk nivå i 1P enn i 1T, og oppgavene kunne aktualisere andre kjerneelementer når det ble stilt et mer generelt spørsmål.

Det har vært en lang politisk prosess for å utvikle kjerneelementene, med flere runder med høringer i praksisfeltet. Disse prosessene ga informasjon og gjennomsiktighet. Utvikling av eksamensoppgaver ser derimot ut til å være gjennomført under tidspress, og uten den samme graden av åpenhet. Oppgavene for yrkesfag ser i størst grad ut til å være knyttet til en tradisjon mer enn til kjerneelementene i LK20. Det er påfallende at de første eksempeloppgavene bedre reflekterte kjerneelementene enn de som kom senere, og at det synes mer krevende å utvikle oppgaver som møter intensjonene i kjerneelementene for den praktiske matematikken.

Vi håper å se kommende eksamensoppgaver som støtter opp under læreres arbeid med kjerneelementene, og at de viser vei mot en mer spennende hverdag i klasserommet.

Referanser

Fried, M. N. & Amit, M. (2016). Reform as an issue for mathematics education research: Thinking about change, communication, and cooperation. I L. English & D. Kirshner (red.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, 3rd ed* (s. 257–274). Routledge.

Morgan, C. & Sfard, A. (2016). Investigating changes in high stakes mathematics examinations: A discursive approach. *Research in Mathematics Education*, *18*(2), 92–119.

Munthe-Kaas, A. Z., Rønquist, E., Rypdal, M., Erfjord, I., Strømskag, H., Helgesen, R., Handal, S., Randeberg, L. L., Raustøl, H. M. (2021, 9. mai). Eksamen i matematikk er på ville veier. *Aftenposten*. https://www.aftenposten.no/meninger/debatt/i/x3LVdX/eksamen-i-matematikk-er-paa-ville-veier

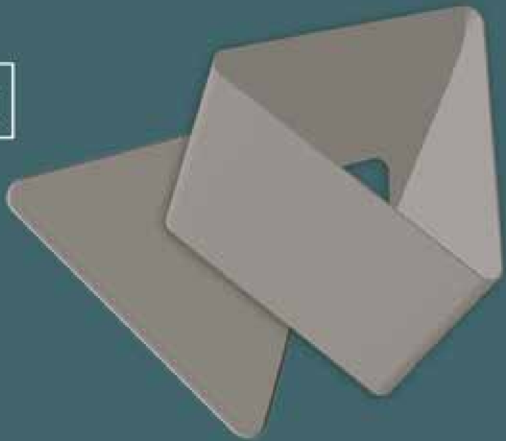
Nordbakke, M. (2018). Utvikling av kjerneelementer. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(4), 35–40.

Smestad, B. (2018). Dybdelæring. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(4), 31–34.

Stensland, M. (2020, 27. nov). Matteeksamen blir heldigital. Lærere er redd det vil gå ut over faglig svake elever. *Aftenposten*. https://www.aftenposten.no/norge/i/aPPyLA/matteeksamen-blir-heldigital-laerere-er-redd-det-vil-gaa-ut-over-faglig-svake-elever

Utdanningsdirektoratet (2020). Læreplan i matematikk fellesfag vg1 praktisk (matematikk p). Fastsatt som forskrift. *Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020*. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT08-01.pdf?lang=nob

Utdanningsforbundet (2020). *Lærerne bekymret for nye eksamensoppgaver i videregående.* https://www.utdanningsforbundet.no/nyheter/2020/larerne-bekymret-for-nye-eksamensoppgaver-i-videregaende/

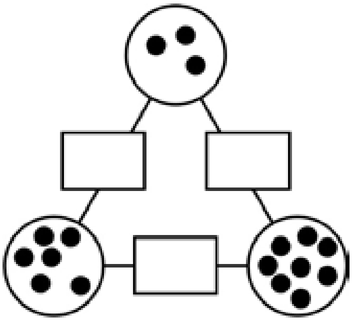


Naylor

Hemmelige tall-trekanter

Her er noen fine aktiviteter for å utvikle tallforståelse og algebraisk resonnement pluss kanskje noen overraskelser? Den første aktiviteten passer godt for barnetrinnet, men kan utvides til videregående også.

Begynn med en trekant med sirkler på hjørnene og rektangler mellom hvert par sirkler. Tegn noen prikker i hver sirkel, som i figur 1.



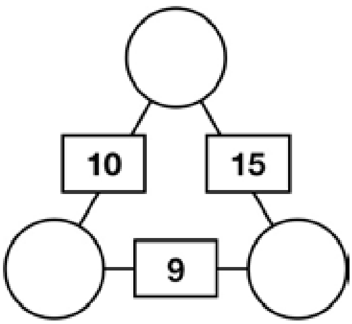
Figur 1

Forklar elevene at hvert rektangel skal inneholde tall som forteller hvor mange prikker det er i de to sirklene på samme side av trekanten.

Mike Naylor
DragonFjord puzzles
mike@dragonfjord.com

Utfordrende? Kanskje ikke, men det hjelper elevene å forstå de neste oppgavene.

Nå kan du gi dem de samme formene, sirkler og rektangler i en trekant, men denne gangen får de bare tallene i rektanglene. De må finne ut hvor mange prikker de må plassere i hver sirkel, slik at rektanglene viser summen til det sirkelparet som tilstøter hvert rektangel. For eksempel, i figur 2 har rektanglene verdi 10, 15 og 9. Kan du finne ut hvor mange prikker det må være i hver sirkel på samme side, slik at sirkelparet har til sammen 10 prikker? Hva med sirkelparet som har summen 15? og det tredje sirkelparet hvor summen er 9?



Figur 2

TIPS: Du kan be elevene kopiere figuren på et ark slik at de kan bruke tellebrikker for å utforske.

Etter hvert når elevene får taket på aktiviteten kan du gi dem flere sett med tall som de kan skrive i rektanglene, f.eks.: (7, 12, 11), (16, 5, 13) eller (3, 11, 14). Be de finne hvilke tall som må være i sirklene. La elevene jobbe to og to. Etterpå kan du la elevene dele tanker og diskutere de forskjellige metodene og strategiene de har kommet frem til.

Del 1: Algebraisk utvidelse

Det fins et nydelig algebraisk mønster i aktiviteten som fører til en metode for å finne tallene i sirklene uten å prøve seg fram med mange forskjellige tall.

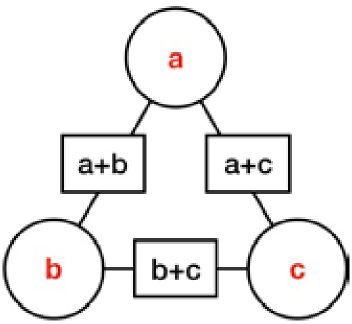
Siden rektanglene er summen av sirkelparene på samme side, kan vi skrive de algebraiske uttrykkene $a + b$, $a + c$, og $b + c$ i de tre rektanglene, hvor a, b og c representerer tallene i de tre sirklene, slik som vist i figur 3.

La elevene få figur 3. Be de utvikle en metode (algoritme) som finner verdien til a, b og c når de bare får verdiene til uttrykkene i rektanglene, dvs. $a + b$, $a + c$, og $b + c$. Hvordan kan de komme direkte til løsninger for alle oppgavene?

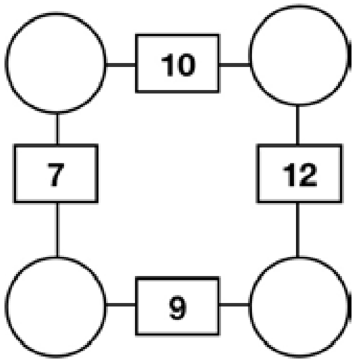
Tenk litt på dette. Svaret finnes nedenfor.

Del 2: Utvidelser av aktiviteten

Utvid aktiviteten ved å endre formen til et kvadrat som i figur 4. Som før, tegn sirkler i hjørnene og rektangler på midten av sidene. Skriv et tall i hvert rektangel. Kan du finne tallene som skal i sirklene? Prøv.



Figur 3



Figur 4

Det var kanskje enkelt? Uavhengig av hvilket tall du skriver først i en sirkel, kan du finne alle de andre tallene som fullfører figuren riktig. Men vil det alltid være slik?

Med trekant-formen som vi begynte med, kan du skrive 3 tilfeldige tall i rektanglene og oppgaven kan løses. Det kan du ikke gjøre ved med kvadrat-formen! Finn et sett med tall som du kan skrive i rektanglene slik at oppgaven ikke kan løses. Hva er det spesielle med tallene som fører til en løsning?

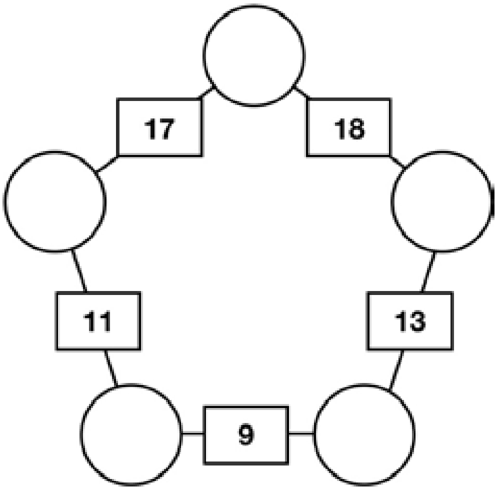
Hva om du starter med en femkant? Kan du finne løsningen til oppgaven i figur 5?

Super-utfordring: Kan du bruke algebra for å finne en snarvei til løsningen?

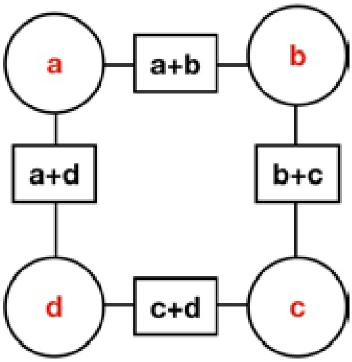
Løsning på del 1

Summen av de to øverste rektanglene i tall-trekanten er $(a + b) + (a + c) = 2a + b + c$. Om vi trekker fra uttrykket i det nederste rektangelet, $b + c$, får vi bare $2a$. Dette er to ganger tallet som skal være i den øverste sirkelen! Del resultatet på 2 for å finne det første tallet i sirkelen.

Strategien er altså at vi legger sammen tallene i de øverste rektanglene, trekker fra tallet i det nederste rektangelet og deler tallet vi får på 2 for å finne tallet som skal være i toppsirkelen! For eksempel, i oppgaven i figur 2 kan vi legge



Figur 5



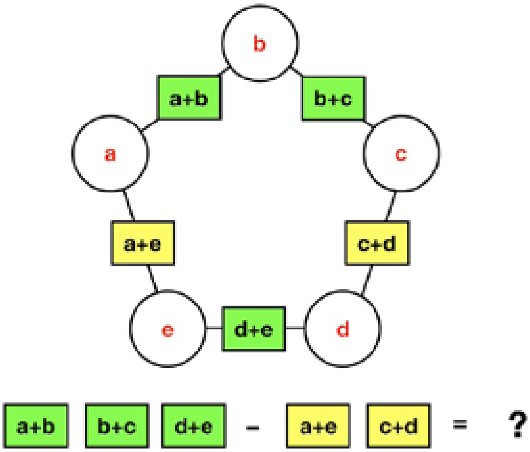
Figur 6

sammen 10 + 15 for å få 25, trekke fra 9 for å få 16. Del 16 med 2 for å få 8, som blir tallet i toppsirkelen! Likedan kan vi finne tallet i den venstre sirkelen med (10 + 9 – 15)/2 = 2, og tallet i den høyre sirkelen med (15 + 9 – 10)/2 = 7.

Løsning til del 2

Hvis vi skriver a, b, c og d i sirklene og uttrykkene til summene i rektanglene, vil rektanglene på «motsatt side» (venstre-høyre og topp-bunn) ha de samme summenene: $a + b + c + d$. Det betyr at summen til topp- og bunn-rektanglene må være det samme som summen til høyre- og venstre-rektanglene for at oppgaven skal kunne løses.

Femkanter er utfordrende! Her er et tips som kan hjelpe (figur 7).



Figur 7

Stian Tømmerdal

Hvorfor er dette riktig, og hvorfor er dette feil?

Resonnering og argumentasjon på småtrinnet med oppgaver fra Kengurukonkurransen

Kjerneelementene skal være bærende elementer i matematikkundervisningen, både i grunnskolen og videregående opplæring, og fremhever viktige aspekter i undervisningen. Ett av kjerneelementene er resonnering og argumentasjon, som er en tilnærming mot det å utvikle matematiske bevis. Hensikten er å tilrettelegge for en progresjon fra uformelle bevisføringer i begynneropplæringen, til en stadig økende grad av formelle matematiske føringer oppover skoletrinnene. Å argumentere kan fungere som en brobygger mellom den uformelle bevisføringen og den formelle bevisføringen.

I denne artikkelen skisseres ulike måter å komme i gang med resonnering og argumentasjon i småtrinnene. Eksemplene er hentet fra årets Kengurukonkurranse.

De viktige spørsmålene

Det er enkelt å spørre elevene hvordan de har tenkt, men hvordan kan vi trekke elevene videre fra å «bare» forklare, til å resonnere og argumentere for sine matematiske løsninger? Dette er noe elevene må lære, det kommer ikke av seg selv. Jaworski (2010) hevder at det å undervise utforskende matematikk ikke er en metode, men en grunnleggende holdning til matematikkfaget. Det samme gjelder for resonnering og argumentasjon, når dette kjerneelementet skal finne sin naturlige plass i matematikkundervisningen. Et enkelt grep er å justere måten du stiller spørsmålene til elevene på. I stedet for å be elevene regne ut 11 – 4, kan man utfordre elevene til å vise *hvorfor* 11 – 4 = 7. Dersom elever i større grad utfordres med spørsmål som «Vis at …» eller «Argumenter for at …», vil elevene resonnere, bruke og bevise de generelle idéene om hvordan matematiske idéer fungerer (Russell, 1999). Elevene må lære å spørre seg selv «Kan dette stemme?» og «Hvorfor er dette riktig?».

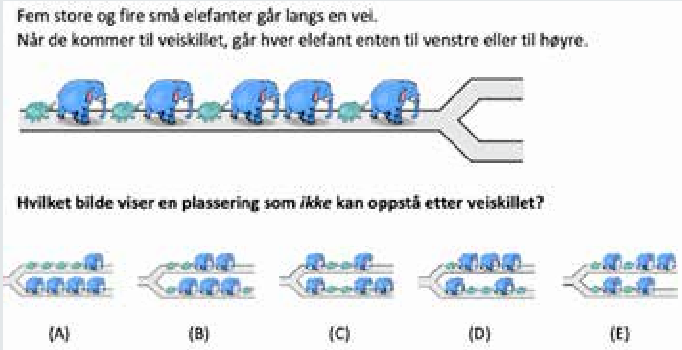
Skap mulighetsrom med kenguruoppgaver

Oppgavene fra Kengurukonkurransen er problemløsningsoppgaver, med fem svaralternativer, hvor flesteparten egner seg til å jobbe med resonnering og argumentasjon. Når elever jobber med problemløsning møter de et problem de ikke kjenner til fra før, som de skal løse, og samtidig vurdere om løsningene er gyldige (LK20). Når de vurderer gyldigheten i sine løsninger kan de utfordres til å argumentere og begrunne hvorfor de mener at svaret er riktig.

Mange kenguruoppgaver bygger på matematiske idéer, og er satt inn i kontekster for å vekke nysgjerrighet og engasjement hos elevene. Det er ikke sikkert at elevene oppdager disse idéene om de jobber med oppgavene alene. Du bør derfor benytte mulighetene som ligger i gode oppgaver, og utnytte mulighetsrommet som åpnes rett etter at elevene har jobbet med en oppgave. Om du løfter frem en «fersk» oppgave i en matematisk samtale gir det elevene flere muligheter til å oppdage den matematiske idéen. Det skaper samtidig et rom for å studere idéen grundigere fra ulike sider. Hva om vi gir oppgaven nye tall? Vil løsningen bli den samme? Kan vi løse oppgaven ved å bruke de samme strategiene? Oppstår det nye mønstre? Resonnering og argumentasjon er nøkkelen i dette arbeidet.

Det å motbevise

Kenguruoppgavene åpner altså opp for matematiske samtaler hvor elevene kan utforske og utvikle sin matematiske argumentasjon. De fem svaralternativene er noe du kan dra nytte av i undervisningen. I svaralternativene ligger det



Figur 1

egnet strategi, hvor resonneringen bak elimineringene vil hjelpe elevene med å forstå hvorfor C er det riktige svaralternativet. Elevene kan benytte seg av konkreter for å modellere handlingen i oppgaven, eller fysisk utføre oppgaven. Elevene kan komme fram til riktig svaralternativ, f.eks. ved prøving og feiling, uten at de nødvendigvis trenger å forstå hvorfor det må være slik.

ett riktig og fire uriktige svar. Det mest nærliggende er å finne og argumentere for riktig løsning til en gitt oppgave. Dette vil naturligvis være den sterkeste triggeren hos elevene når de løser oppgaven, men jeg vil anbefale deg å utnytte nye muligheter som svaralternativene gir. Et viktig aspekt innenfor arbeidet med matematiske bevis er nemlig det *å motbevise*. Dette aspektet må også vies oppmerksomhet i undervisningen, på lik linje med det *å bevise*.

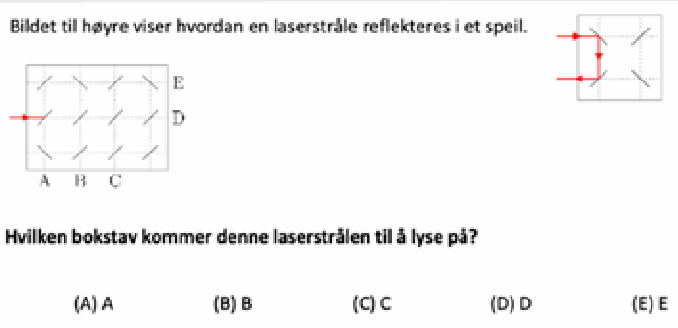
Flere av oppgavene fra Kengurukonkurransen inviterer til ulike måter å resonnere seg frem til riktig svaralternativ. I disse oppgavene vil det å eliminere bort svaralternativer, som ikke kan være riktige, være en effektiv strategi. En slik elimineringsstrategi rører ved det *å motbevise*. Det å utforske *hvorfor* et svaralternativ ikke kan være riktig, gir elevene muligheter til å studere den matematiske idéen fra et nytt perspektiv. Derfor vil elimineringsmetoden i egnede oppgaver gi elevene gode muligheter til også å argumentere mot et svaralternativ. Ved å oppmuntre elevene til å finne et svaralternativ som ikke kan være det riktige, vil de samtidig utfordres til å sette ord på hvorfor. Dette vil støtte elevene når de senere utvikler matematiske argumenter for eller mot matematiske påstander.

I oppgaven med de ni elefantene (figur 1) skal elevene finne en plassering som ikke kan oppstå etter et veiskille, med utgangspunkt i hovedbildet. Å eliminere bort svaralternativer være en

Om du følger opp med spørsmålet: «Argumenter for hvorfor svaralternativ A ikke kan være riktig», vil elevene i større grad bli utfordret til å begrunne og vise forståelse for hvorfor C må være riktig. De må sette ord på hva det er de har funnet ut, og hvorfor det stemmer matematisk. I oppgaven med elefantene vil det å bygge argumentasjon rundt plasseringen til den lille elefanten bakerst i rekken, være viktig. Å vise til at plasseringen må bety at den samme elefanten også må stå bakerst i en av de nye rekkene etter veiskillet, vil være et viktig argument i bevisføringen for hvorfor C må være det riktige svaralternativet.

Overbevis en venn

Det finnes ulike pedagogiske grep for å la resonnering og argumentasjon bli en naturlig del av matematikkundervisningen. På alle trinn kan det *å overbevise en venn* (Boaler & Humphreys, 2005) være et fornuftig grep. Dette da argumentasjonen en elev gir til sin medelev er av slik karakter at medeleven blir overbevist, og forstår hvorfor svaralternativet er det riktige. For å klare dette må eleven først ha overbevist seg selv om hvorfor det valgte svaralternativet må være det riktige. Det *å overbevise en venn* er et forholdsvis enkelt grep, hvor medelevene underveis kan stille oppfølgende spørsmål slik at eleven kan omformulere eller finjustere sin matematiske argumentasjon. Å bruke det *å overbevise en venn* over tid vil hjelpe elevene



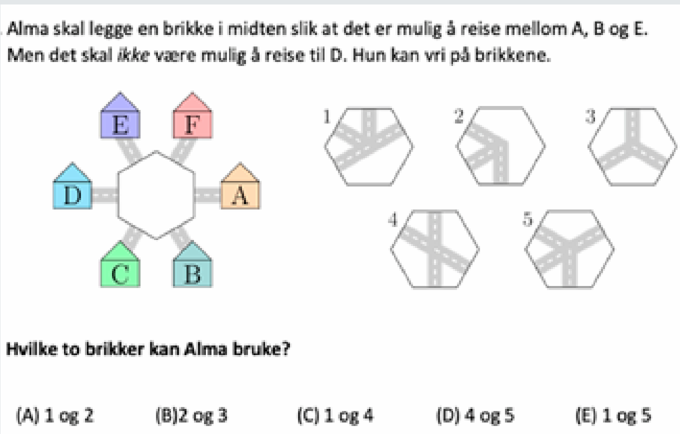
Figur 2

med å beherske aktiviteten, og i større grad dra nytte av argumentasjonen i arbeidet mot en formell bevisføring.

Oppgaven om laserstrålen som reflekteres i speil (figur 2 neste side) har en lav inngangsterskel for å jobbe med det *å overbevise en venn*. Elevene må argumentere for hvordan retningen til laserstrålen vil bevege seg gjennom samlingen med speil. Det å tegne opp retningsendringene til laserstrålen vil støtte elevens argumenter og deres begrunnelse for valg av svaralternativ.

Tegningen vil i tillegg støtte medeleven til å utfordre argumentasjonen om den ikke er overbevisende nok, eller til å danne motargumenter dersom man er uenig med resonnementet og løsningen. Når elevene begynner å beherske det *å overbevise en venn*, kan vennen øke motstanden i det å la seg overbevise. Økende motstand vil kreve en grundigere resonnering for å kunne danne mer presise argumenter. Slik må elevene stadig finjustere sine argumenter. I laserstråleoppgaven kan finjusteringen være at de bruker matematiske begreper i argumentasjonen. Det kan være en overgang fra å bruke fingerpeking og enkel kommunikasjon, til kun å bruke verbal forklaring med matematiske begreper. Et eksempel på formulering kan være: «Laserstrålen kommer inn fra venstre. I det første speilet blir laserstrålen speilet i 90° og sendt oppover. I møtet med det neste speilet brytes strålen på nytt i 90° og sendes mot venstre ...».

Etter hvert som elevene erverver rike erfaringer med å argumentere for og mot matematiske påstander, kan elevene møte større motstand hos eleven som skal overbevises. I stedet for *å overbevise en venn* kan elevene utfordres til *å overbevise en skeptiker* (Volmink, 1990). Denne skeptikeren kan fremdeles være en medelev, som nå er mer øvd i det å argumentere matematisk. Det kan også være en lærer som er skeptikeren. Det *å overbevise en skeptiker* hever nivået på den matematiske argumentasjonen, både til den som argumenterer og til den som er skeptisk. Grepet gir en naturlig progresjon i arbeidet med resonnering og argumentasjon, hvor elevene i stadig større grad må finjustere sine matematiske argumenter. I et lengre progresjonsløp, med stadig sterkere krav til matema-



Figur 3

tisk stringens i argumentene, kan neste steg være å *overbevise en faglig sterk person* eller *en fagperson* (Davis & Herch, 1981). Her kan matematikklæreren, eventuelt en elev fra et høyere klassetrinn, ikle seg denne rollen.

Endre premiss i oppgavene

Et annet pedagogisk grep er å la elevene jobbe i par eller grupper på tre hvor de får tildelt hvert sitt svaralternativ. Parene eller gruppene må enes om argumenter for hvorfor svaralternativet de fikk tildelt, er det riktige eller ikke. Du kan utfordre de elevene som har uriktige svaralternativer, til å argumentere for hvilke premisser i oppgaven som må endres slik at deres svaralternativ vil bli det riktige. I det forrige eksempelet (laserstrålen), kan premissendringene være å endre vinkel på speilflater slik at laserstrålen treffer deres svaralternativ. Elevene kan videre utfordres til å gjøre så få endringer som mulig, og argumentere for at det ikke kan gjøres færre endringer enn det de har kommet frem til.

I oppgaven i figur 3 skal elevene finne de to brikkene som Alma kan legge slik at premissene oppfylles. I likhet med laserstråleoppgaven kan elevene også her få utdelt hvert sitt svaralternativ, og deretter bli utfordret til å argumentere for hvilke premisser i oppgaveteksten som må endres slik at deres brikker blir det riktige svaret.

Å be elevene formulere de nye premissene kan fremme et behov for å finjustere argumentene slik at premissene blir presise. En annen mulighet er å gjøre endringer på brikkene. Elevene kan enten undersøke hvilken brikke som trenger færrest endringer for at deres svaralternativ blir riktige, eller ta utgangspunkt i sin utdelte brikke og argumentere for hvilke endringsbehov som må til. Vil det være nok å flytte på én del av veien på brikken, eller må det større endringer til?

Alle eksemplene jeg har brukt viser hvordan kenguruoppgaver på ulike måter kan benyttes i arbeidet med resonnering og argumentasjon. Ved å utnytte potensialet som ligger i flere av oppgavene, vil elevene med enkle grep kunne oppdage og utforske den matematiske idéen fra flere ulike perspektiver på en grundig måte. Du finner hundrevis av kenguruoppgaver på https://www.matematikksenteret.no/læringsressurser-og-undervisningsopplegg/kenguru Lykke til!

Referanser

Boaler, J., & Humphreys, C. (2005). *Connecting mathematical ideas: Middle school video cases to support teaching and learning* (No. 1). Heinemann.

Davis, P., & Herch, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Birkhauser.

Jaworski, B. (2010). Collaborative inquiry in developing mathematics teaching in Norway. I B. Sriraman et al. (red.), *The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education* (s. 71–90): Information Age Publishing.

Kunnskapsdepartementet (2019). Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01–05). Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf

Russel, S. J. (1999). Mathematical reasoning in the Elementary Grades. I L. Stiff (red.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12. 1999 NTCM Yearbook*. National Council of Teachers of Mathematics.

Volmink, J. (1990). The nature and role of proof in mathematics education. *Pythagoras, 23*, 7–10.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. I J. Kilpatrick et al. (red.), *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 227–236. NCTM.

NOVEMBERKONFERANSEN

2022 | INKLUDERING OG VURDERING I LK20

Meld deg på Novemberkonferansen 2022 – den største konferansen for matematikklærarar i Noreg.

22. og 23. november samlar Matematikksenteret over 500 lærarar frå heile landet til engasjerande og inspirerande dagar med fagleg påfyll på Scandic Lerkendal i Trondheim.

Temaet for årets Novemberkonferanse er «Inkludering og vurdering i LK20».

I LK20 står det at «Skolen skal utvikle inkluderende fellesskap som fremmer helse, trivsel og læring for alle.» Korleis kan matematikkfaget bidra til ein inkluderande praksis?

Vurdering er eit viktig aspekt i all undervisning. Kva seier LK20 om vurdering i matematikk? Korleis kan vi vurdere elevane sin kompetanse i matematikk? Korleis kan vurderinga støtte elevane si læring og forståing i matematikk?

Plenumsforedraga er det i år Matematikksenteret, Edda Óskarsdóttir, Peter Liljedahl og Magnus Dehli Vigeland som står for. I tillegg har vi åtte storverkstadar og 44 verkstadar fullspekka med fagleg innhald som deltakarane kan velje fritt blant. Meld deg på her:

https://www.matematikksenteret.no/konferanser-og-nettverk/novemberkonferansen-2022

ABEL Konkurransen

Har du elever som vil delta i Abelkonkurransen?

Abelkonkurransen er en konkurranse i matematisk problemløsning for elever i videregående skole. Første runde er 17. november 2022. Abelkonkurransen har blitt arrangert i Norge siden 1993, og flere tusen elever i videregående har vært med. Konkurransen består av problemløsingsoppgaver på et variert nivå.

Abelkonkurransen består av to innledende runder som gjennomføres digitalt ute på skolene, og en finale som holdes ved NTNU i Trondheim. Elever som gjør det godt i Abelkonkurransen kan bli invitert til én eller flere internasjonale konkurranser i matematikk.

Slik foregår Abelkonkurransen

Den første og andre runden i Abelkonkurransen foregår digitalt på skolene. I den første runden får deltagerne 20 oppgaver, hver med fem svaralternativer. Oppgavene skal besvares i løpet av 100 minutter. De 10 prosentene som gjør det best, går videre til andre runde. Her får elevene 10 oppgaver, som også skal besvares i løpet av 100 minutter.

Resultatene fra de innledende rundene summeres, og de beste 20, og ofte noen til, blir invitert til finalen som foregår ved NTNU i Trondheim. Her får deltagerne fire timer på å løse fire oppgaver. Det er ingen påmelding i Abelkonkurransen, men alle som skal delta må ha en skolekontakt (en lærer) som registrerer seg på forhånd.

Mer informasjon om registrering av skolekontakt og Abelkonkurransen:

www.abelkonkurransen.no

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
c/o Elin Unstad
Postboks 181
1371 Asker

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det er en demokratisk rett å få en matematikkundervisning som setter en i stand til å delta aktivt som borger i et demokrati. Derfor vil Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) sette fokus på matematikk for alle.

Styret for LAMIS

Leder
Renate Jensen, Vestland

Barnehage
Elisabeth Hast Rønnestad, Møre og Romsdal

Barnetrinnet
Hilde Svendsen, Viken

Mellomtrinn
Inger-Lise Risøy, Viken

Mellomtrinn/Ungdomstrinn
Svend Eidsten, Viken

Ungdomstrinn
Kari-Anne Bjørnø Rummelhoff, Viken

Videregående skole
Odd-Bjørn Lunde, Rogaland

Høgskole/universitet
Mona Røsseland, Vestland

Varamedlem (Barnetrinnet)
Henrik Kirkegaard, Møre og Romsdal

Medlemskontingent

450 kr for enkeltmedlem
200 kr for husstandsmedlemmer
300 kr for studenter/pensjonister
975 kr for skoler/institusjoner

Organisasjonssekretær

Elin Unstad, org.sek@lamis.no

Lederen har ordet

Renate Jensen

Kjære LAMIS kollega!

Tusen takk til alle som var med på å lage en flott og etterlengtet sommerkonferanse i Sandefjord. Vi samlet mer enn 80 deltakere til tre dager med gode faglige og didaktiske innspill og ideer til undervisningen. Det mange satt ekstra pris på var muligheten til å snakke matematikk. Både med de man kjente fra før, men kanskje ikke har møtt på en stund, og med nye man ble kjent med på konferansen.

På en sommerkonferanse opplever vi en dugnadsånd og positivitet som er fantastisk. Dette året var det en del som deltok på sommerkonferanse for første gang, og i tilbakemeldingene etter konferansen svarer mange at dette frister til gjentagelse. Sommerkonferansekomiteen og sentralstyret er veldig fornøyde med at utbyttet av dagene opplevdes inspirerende og nyttig.

De siste årene med færre fysiske møteplasser har gitt både muligheter og utfordringer. Mulighetene har vært å tenke nytt, og det har vært laget både inspirasjonsfilmer og vi har hatt digitale medlemskvelder med deltakere fra hele landet. En av utfordringene har vært å få nye medlemmer. Det å være medlem av LAMIS handler om å treffe andre som brenner for matematikk. Da må vi ha møteplasser der man både får faglig påfyll og hvor det også er rom for å knytte kontakter og tenke nytt sammen. Å være med i LAMIS gir en mulighet til å påvirke hva vi skal jobbe med av ressurser og aktiviteter. En av de viktigste satsingene våre neste skoleår blir å øke medlemstallet. Dette vil vi blant annet gjøre ved å styrke lokallagene og starte nye lokallag. Så hvis du ønsker å være med i et lokallag – send en e-post til leder@lamis.no.

Vi arbeider også med ny hjemmeside som skal være mer oversiktlig og vise hva LAMIS kan tilby. Vi har bestemt å legge alle de ressursene vi til nå har utviklet tilgjengelig for alle. Det gjelder matematikkdagshefter og oppgavebanken som tidligere har vært med innlogging. I tillegg ønsker vi å presentere ressurser som oppgaver fra UngeAbel, inspirasjonsfilmer og presentasjoner fra fagdager og konferanser på en oversiktlig måte slik at mange tar dette i bruk. Det man nå får som medlem i LAMIS er tilgang til nye ressurser som utvikles. Alle medlemmer vil fremover få tilsendt nye ressurser på e-post fire ganger i året. De første utsendingene vil inneholde aktiviteter med lærerveiledninger om FN sine bærekraftsmål. For hvert bærekraftsmål er det aktiviteter og ideer fra barnehage/småtrinn til ungdomstrinn/videregående skole. Les mer om dette på side 65. I løpet av skoleåret vil vi også dele et verktøy om hvordan arbeide med utforskende oppgaver med våre medlemmer. Når vi sender ut vil vi informere om dette både på hjemmeside og i facebookgruppen vår. Gi en lyd om du ikke mottar en e-post – da trenger vi å oppdatere e-postadressen vi har i våre lister.

En jobb fremover er å få LAMIS sitt syn på læring ut til studenter og alle som arbeider i barnehage og skole. Jeg håper derfor at mange vil bidra ved å gjøre kollegaer som interesserer seg for matematikk oppmerksomme på vår hjemmeside, facebook-gruppe, ressurser, lokallagskvelder og konferanser. Jeg vil avslutte med å ønske alle sammen lykke til i møtet med barnehagebarn, elever og studenter.

Velkommen til nye medlemmer i sentralstyret

Elisabeth Hast Rønnestad

Jeg er 49 år og kommer fra Ålesund. Jeg jobber i Fjelltun Barnehage som pedagogisk leder på avdeling for barn fra tre til seks år. Barnehagen er inspirert av Reggio Emilias pedagogikk og vi deltar i nettverk med andre barnehager både lokalt og nasjonalt.

Jeg er utdannet førskolelærer fra Bergen, og har jobbet i barnehage siden 1996. Jeg har erfaring både som styrer og pedagogisk leder. Jeg er aktiv i LAMIS sitt lokallag på Sunnmøre, hvor jeg har vært i styret i mange år. Jeg har også vært med på å skrive matematikkdaghefte og arrangere sommerkonferanse i Ålesund.

I barnehagen er jeg opptatt av å skape en hverdag som preges av barns utforskende tilnærming til verden. Barna er kompetente og nysgjerrige fra fødselen, og dette må vi ta vare på. Vi må lytte til og få øye på hva de er opptatt av, og ta utgangspunkt i det når vi undersøker sammen med dem. I min barnehage arbeider vi prosjekterende og tverrfaglig.

Materialer, det fysiske rommet og det kollektive er viktig i barns læreprosesser, også i matematikkfaget. Jeg tenker at både vår egen og barnas matematiske identitet blir til i møte med andre mennesker, materialer, miljøer og begrep. Det er ikke farlig å gi barna riktige svar, men det undersøkende trengs, ikke minst for at barna skal få kjenne seg fornøyde med egne svar og strategier. Jeg er særlig opptatt av barnehagens og skolens rolle i barnas utvikling av en matematisk identitet. Hva gir vi av verktøy og hvordan skaper vi de beste forutsetninger i denne utviklingen?

Mona Røsseland

Jeg er 57 år og kommer fra Samnanger, nabokommune til Bergen, og arbeider ved lærerutdanningen ved Høgskulen på Vestlandet. Jeg har arbeidet med matematikk i skolen gjennom hele yrkeskarrieren, har bakgrunn som allmennlærer med fordypning i matematikk og har jobbet som lærer i grunnskolen.

I 2003 begynte jeg å arbeide for Matematikksenteret i Trondheim, der hovedoppgaven var å få til et samarbeid mellom det nye senteret og LAMIS. Et av tiltakene var å se i sammenheng senterets satsing på ressurspersoner rundt om i landet med LAMIS sin etablering av lokallag.

Jeg har Mastergrad i undervisningsvitenskap med vekt på matematikk fra Høgskolen i Bergen. Jeg er også medforfatter til læreverket Multi og foredragsholder med fokus på matematikkdidaktikk. Jeg har en PhD i matematikkdidaktikk fra Universitet i Agder. PhD-studien min undersøker hva som kjennetegner læreres utviklingsprosess når de blir utfordret til å anvende en ny didaktisk teori i sin praksis. Bakgrunnen for studien var en interesse for å bygge bro mellom læreres praksiskunnskap og teoretisk og forskningsmessig kunnskap. De siste årene har min forskningsinteresse vært hvordan bruk av drama og rollekategorier kan endre kommunikasjonsmønsteret i matematikklasserom, både mellom elever og lærer og mellom elevene.

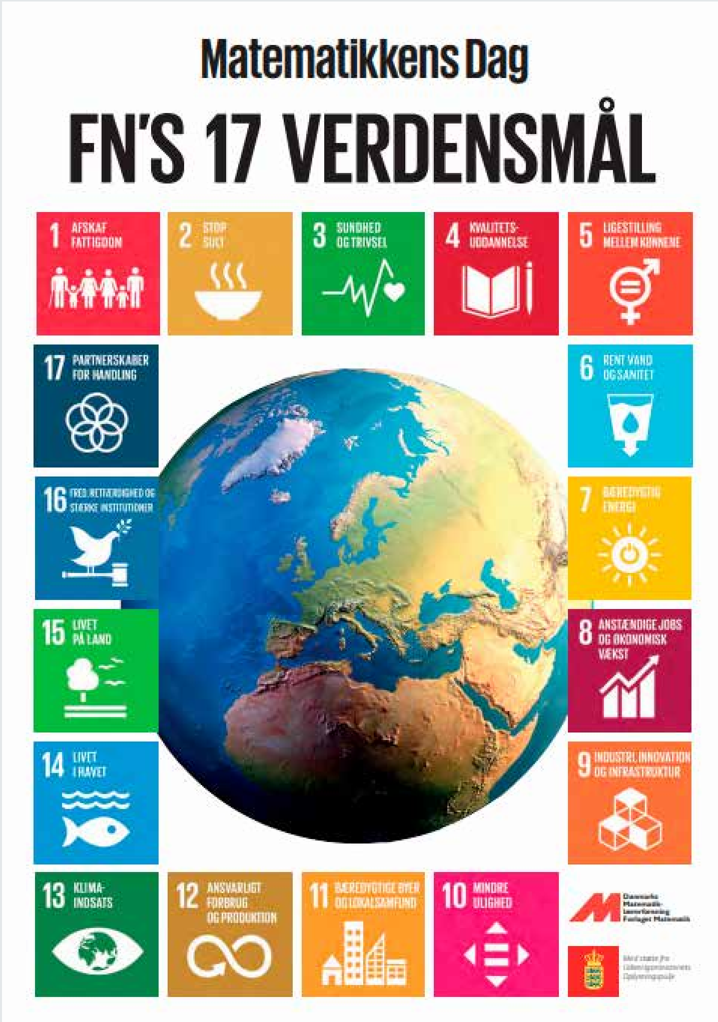
Ressurs om FNs bærekraftsmål

v/sentralstyret

LAMIS ønsker å gjøre matematikk til et fag som oppleves som relevant, nyttig og motiverende for alle elever. Når vi spør elever hva de tenker er viktig å lære for fremtiden er svarene vi får; klima, bærekraft, teknologi, det å forstå andre, økonomi og helse. Gode tverrfaglige oppgaver er relevante for elevene, og når elever opplever læringsarbeidet på skolen som meningsfullt, blir de engasjert i arbeidet, både kognitivt og følelsesmessig.

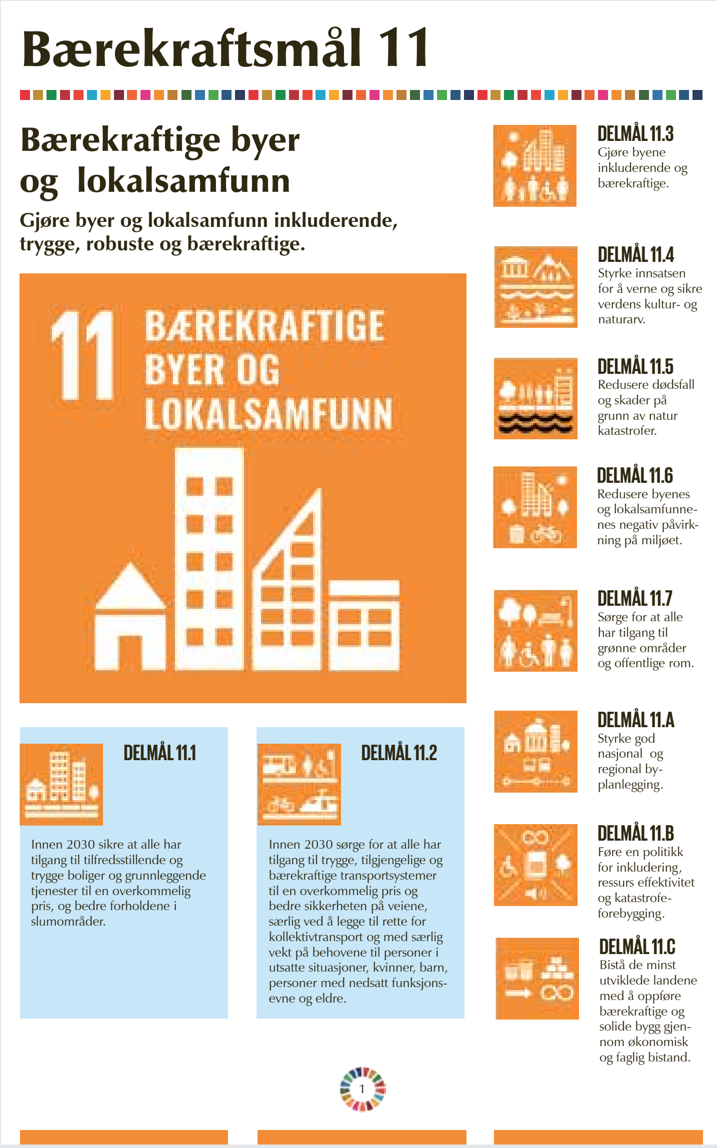
LAMIS fikk i 2020 muligheten til å oversette en ressurs om FN sine 17 bærekraftsmål utarbeidet av Danmarks Matematiklærerforening. Ressursen inneholdt oppdrag til elever og lærerveiledninger til alle trinn i grunnskolen. Vi engasjerte lokallagene våre og satte i gang med å oversette og tilrettelegge ressursen for norsk læreplan. Lokallagene og sentralstyret har jobbet med dette i over et år – både med selve det praktiske arbeidet med å oversette tekstene, men like viktig diskusjoner om hvordan dette kan være gode ressurser for elever. Dette har gitt mange gode samtaler om LK20 og muligheten til å fordype seg i læreplanen.

Hvert av bærekraftsmålene har en forside om delmålene som er felles for alle trinn. På neste side vises forsiden til ett av målene.



Bærekraftsmålene er laget som PDF, og kan både skrives ut eller brukes digitalt.

Deretter følger det oppdrag og lærerveiledning både for småtrinnet, mellomtrinnet og ungdomstrinnet. (Vi mener at mange av oppdragene også passer godt for barnehage og videregående skole). Elevene får gjennom oppdragene mulighet til å jobbe tverr-



Bærekraftsmål 11

Bærekraftige byer og lokalsamfunn

Gjøre byer og lokalsamfunn inkluderende, trygge, robuste og bærekraftige.

DELMÅL 11.1

Innen 2030 sikre at alle har tilgang til tilfredsstillende og trygge boliger og grunnleggende tjenester til en overkommelig pris, og bedre forholdene i slumområder.

DELMÅL 11.2

Innen 2030 sørge for at alle har tilgang til trygge, tilgjengelige og bærekraftige transportsystemer til en overkommelig pris og bedre sikkerheten på veiene, særlig ved å legge til rette for kollektivtransport og med særlig vekt på behovene til personer i utsatte situasjoner, kvinner, barn, personer med nedsatt funksjonsevne og eldre.

DELMÅL 11.3

Gjøre byene inkluderende og bærekraftige.

DELMÅL 11.4

Styrke innsatsen for å verne og sikre verdens kultur- og naturarv.

DELMÅL 11.5

Redusere dødsfall og skader på grunn av natur katastrofer.

DELMÅL 11.6

Redusere byenes og lokalsamfunnenes negativ påvirkning på miljøet.

DELMÅL 11.7

Sørge for at alle har tilgang til grønne områder og offentlige rom.

DELMÅL 11.A

Styrke god nasjonal og regional byplanlegging.

DELMÅL 11.B

Føre en politikk for inkludering, ressurs effektivitet og katastrofeforebygging.

DELMÅL 11.C

Bistå de minst utviklede landene med å oppføre bærekraftige og solide bygg gjennom økonomisk og faglig bistand.

faglig, utforske og fordype seg i diskusjoner og praktisk arbeid. Kjerneelementene og verdier fra overordnet del er sentralt. Oppdragene har mange spennende lenker og filmer som vi mener vil engasjere elevene og få i gang meningsfulle samtaler.

Alle bærekraftsmålene har lærerveiledninger. I disse knyttes oppdragene til LK20 og matematikkfaget. I læreplanen er det lagt vekt på at elevene skal bli gode problemløsere og oppdage sammenhenger i og mellom kunnskapsområder og andre fag sine kunnskapsområder. Det er disse sammenhengene som kan legge til rette for dybdelæring og forståelse i faget. Matematikk legger også til rette for at elevene skal utforske matematikken og kommunisere om den. For å få relevans må temaene elevene arbeider med knytte seg tett til elevenes hverdag og være med på å forberede de på et samfunn og arbeidsliv i stadig endring.

Det står også hvilke andre fag det er naturlig å samarbeide med. Tverrfaglig tilnærming handler om å opprette koblinger mellom ulike skolefag, mellom skolefagene og til livet utenfor skolen.

I oktober vil alle medlemmer av LAMIS motta en e-post med fem av bærekraftsmålene. I løpet av året vil det totalt være fire utsendinger av denne ressursen til medlemmene. Etter et år vil ressurser legges ut på vår hjemmeside for alle slik som vi nå gjør med ressurser som er laget tidligere.

Infrastruktur - Byplanlegging

BÆREKRAFTSMÅL 11
Delmål 11.2

Transportruter

Dere skal designe en by med mulighet til å benytte flere forskjellige transportformer.

Målet er at dere skal kunne:

- Tegne en modell på rutepapir eller i et tegneprogram.
- Planlegge reiseruter.
- Programmere rutene analogt og/eller digitalt.

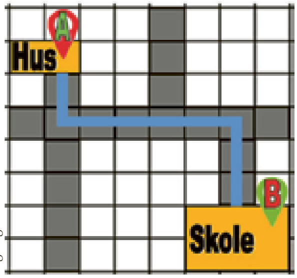
Dere trenger:

- Kartong
- Saks
- Tusjer i forskjellige farger
- Rutenett
- Programmer til blokk-programmering
- Roboter

Byen sett ovenfra

Dere skal designe en by sett ovenfra.
Byen kan tegnes på et rute-papir med store ruter.

Dere skal bestemme hva som skal være i byen f.eks. skole, barnehage, sykehus, bibliotek, kirke, butikker, parkering, boliger, veier, sykkelstier, jernbane og grønne områder.



Tegning Mette Eis-Hansen

Transportmuligheter

Bli enige om hvilke transport-muligheter det skal være i byen, for eksempel bil, sykkel, tog og buss.

Reiseruter

Dere skal beskrive forskjellige mulige transportruter fra et sted til et annet med f.eks. bil, sykkel, tog og buss.
Det kan for eksempel være en skolebussrute med flere stopp underveis til skolen.

Oppdrag

Dere skal tegne byen og programmere transportru-tene enten analogt på papir eller digitalt på pc eller ipad.

Dere undersøker om det kunne vært lurt å bruke selvkjørende busser og tog, samt ladestasjoner til elbiler.

Dere skal regne ut tidene for når offentlig transport skal gå.

Dere skal sammenligne de ulike transportrutenes lengder og tidsintervall.

Flere ideer

Dere kan bruke analoge kode-brikker til å beskrive trans-portrutene. I den forbindel-se kan dere undersøke om det er lurt å bruke løkker.

Hvis dere f.eks. har Kubo roboter, kan dere kode og teste transportrutene direkte på rutenettet med de kodebrikkene som hører til. Deretter kan dere ta opp og spille av rutene forskjel-lige steder i byen.

Blue Bot kan også benyttes.

Hvis dere har Ozobot, kan dere tegne inn fargekoder direkte på rutene i rute-papiret, eller kode dem med blokkprogrammering.

Dere kan også tegne byen digitalt i f.eks. Scratch eller RoboBlockly og program-mere rutene med blokk-programmering.

Lærerveiledning

BÆREKRAFTSMÅL 11
Delmål 11.2

Infrastruktur - Byplanlegging

Hovedtrinn og tidsbruk
Mellomtrinn.
6-7 timer.

Forkunnskaper
Analog programmering:
Elevene må ha kjennskap til symbolene på kodebrikkene, og kunne sette den sammen til kodesekvenser.

Digital programmering:
Elevene skal ha kjennskap til program og roboter som skal benyttes i oppdraget.

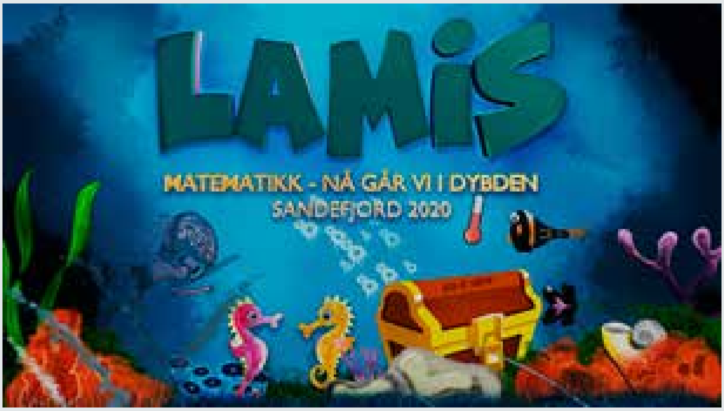
Aktiviteter
Elevene skal, i grupper, anlegge byer med infrastruktur.

De skal programmere reiseruter enten analogt eller digitalt.

Ekstra
Det kan differensieres ved å endre på hvor mange former for transport som skal inngå i byens infrastruktur, eller hvor avansert programmeringen skal være.

Kjerne-elementer	Matematiske kunnskapsområder	Tverrfaglige temaer
● Utforsking og problemløsing	Tall og algebra	Folkehelse og livsmestring
Modellering og anvendelse	● Geometri og måling	Demokrati og medborgerskap
● Resonnering og argumentasjon	Statistikk og sannsynlighet	● Bærekraftig utvikling
● Kommunikasjon og representasjon	**Andre fag elevene kan arbeide med i disse øktene** K&H, samfunnsfag	
Abstraksjon og generalisering		

Stemningsrapport
fra LAMIS Sommerkonferanse i Sandefjord



Tittelen på årets sommerkonferanse var Matematikk – Nå vi går i dybden.

Deltakerne fikk være med på et flott faglig program med mange spennende bidragsytere. Det ble et gjensyn med flinke folk som har bidratt tidligere, men det var også mange nye spennende verkstedsholdere. Konferansen ble åpnet med et plenum der Mona Røsseland snakket om hvordan beholde elevenes engasjement og lærelyst i matematikk gjennom hele skoleløpet.

Det var nye poster på programmet, blant annet et plenum med de mange realfagskonkurransene som arrangeres i løpet av et skoleår. Deltakerne gav tilbakemelding på at det var nyttig å sitte sammen og løse oppgaver og diskutere muligheter for å bruke disse med elevene. UngeAbel, Abelkonkurransen, Kengurukonkurransen, Kikora og Pangealekene har flotte oppgavebanker som ligger tilgjengelig og kan brukes gjennom året.

Det var også et plenum der ressursen om FN sine bærekraftsmål, som nå begynner å ta form ble presentert. Her fikk deltakerne teste metoder der elevene får være aktive. Organisering og valg av metoder er helt sentralt for få relevans og motivasjon

i læringsarbeidet. På bordene ble det blant annet begrepsforhandlet om tverrfaglighet og Walk and talk om hvordan få progresjon i elevenes sine ferdigheter i matematikk i arbeid med tverrfaglige tema.

I en av plenumsøktene fikk deltakerne være med å programmere både med og uten datamaskin. Dette var noe som mange ønsker seg mer av på neste års sommerkonferanse. Et annet tema som ble trukket frem som inspirerende var det å få ideer til matematikk ute der elevene får være i bevegelse.

Det er en spennende tid for fag og læring. Målet er å styrke utviklingen av elevenes dybdelæring og forståelse. Verdigrunnlaget skal løftes fram i læreplanene, og det skal være bedre sammenheng i fag og mellom fag. Det ligger til rette for mange spennende diskusjoner i barnehager og skoler. Presentasjoner fra årets plenum og verksteder finner dere www.lamis.no. Vi håper mange av disse gir inspirasjon og ideer.

Sommerkonferansekomiteen hadde laget et flott sosialt program på konferansen med kulturelle innslag, utflukt og en flott festmiddag. Under middagen ble Marianne Maugesten takket av som medlem av sentralstyret. Hun har med sine faglige styrker og sin flotte personlighet vært en viktig bidragsyter i LAMIS sitt arbeid helt siden starten i 1998. Hun har en ufattelig stor arbeidskapasitet og møter alle bestandig med et smil.

LAMIS er glad for at hun fortsetter som leder av juryen i Unge-Abel.

Årsmøtet er alltid en viktig del av en sommerkonferanse. Her ble blant annet LAMIS sine satsinger for neste skoleår presentert. God stemning og stødig ledelse av møtet ble sikret av den flotte gjengen på bildet under.

Løsningsforslag til UngeAbel-oppgaven i Tangenten 02/22
v/Marianne Maugesten, juryleder i UngeAbel

Prinsessen eller løvene

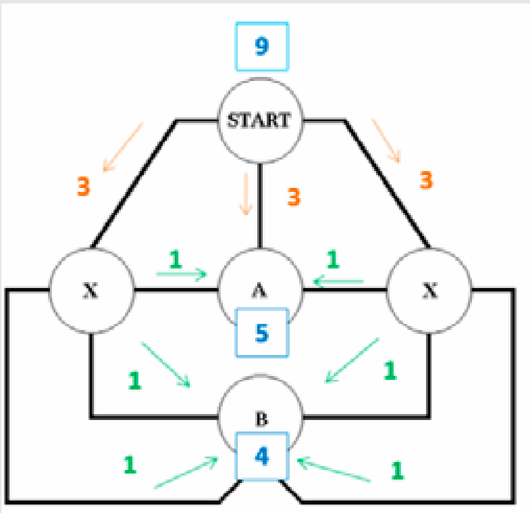
Det er maksimalt to steder hvor den unge mannen skal gjøre et veivalg mellom tre ulike retninger. Når vi antar at veivalgene gjøres helt tilfeldig, vil sannsynligheten for å havne i rom B være henholdsvis $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ (startretning «venstre») og tilsvarende $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ (startretning «høyre»), og dermed totalt $\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$, altså cirka 44 % for å havne i rom B.

Og sannsynligheten for å havne i rom A, er dermed lik $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ altså cirka 56 %.

Mannen har størst sjanse til å nå fram til prinsessen dersom hun velger å vente i rom A.

Det går også an å resonnere mer konkret, ved å tenke seg at vi kan gjøre forsøket 9 ganger, der vi ved første veivalg velger høyre vei 3 ganger, midtre vei 3 ganger og venstre vei 3 ganger. Ved neste veivalg, fordeler valgene seg som 1, 1, 1 på hver side av labyrinten, og til slutt adderer vi hvor mange av de 9 forsøkene som alt i alt fører til henholdsvis rom A eller rom B.

Vi ser da at 5 (= 3 + 1 + 1) forsøk fører inn i rom A, mens 4 (= 1 + 1 + 1 + 1) fører inn i rom B, som igjen betyr at sannsynligheten er $\frac{5}{9}$ for å havne i rom A og $\frac{4}{9}$ for å havne i rom B.



Oppgave fra UngeAbel

v/Marianne Maugesten, juryleder i UngeAbel

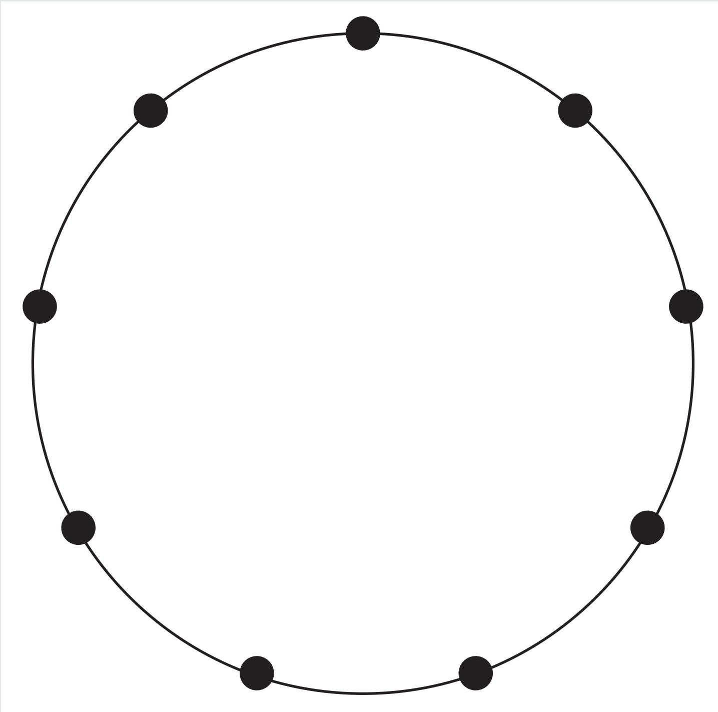
Oppgaven vi har valgt denne gangen, er fra semifinalen i 2021. Oppgaven inviterer til å snakke matematikk.

Hvor mange ulike trekanter kan vi lage på en sirkel markert med ni punkter. Punktene er likt fordelt rundt sirkelen. Hjørnene på trekantene skal alltid være i et av de ni punktene.

NB: Trekantene som er kongruente teller som en trekant.

To figurer er kongruente dersom de kan dekke hverandre fullstendig når de legges oppå hverandre, altså at de både er formlike og har lik størrelse.

Tegn alle løsningene dere finner.



Fosnot-hefter oversatt til norsk

Spill

Utvikling av tidlig tallforståelse

Spill – utvikling av tidlig tallforståelse er et ressurshefte som kan brukes gjennom hele skoleåret. Det består av 24 spill som kan inngå i undervisningsopplegg eller brukes individuelt etter behov. Lek og spill er naturlig del av barns læring og brukes som motivasjon for å utvikle tallforståelse og automatisere tallfakta. Elevene samarbeider i spillene, de må dele strategier med hverandre. For hvert spill gis det oversikt over det aktuelle læringslandskapet og faglige mål. Utdrag fra elevsamtaler viser samspill mellom lærer og elever med muligheter til utvikling. Spillene passer best på første og andre trinn, men kan også brukes for litt eldre elever.

Bearbeidet og tilrettelagt for norsk ved Tore Heggem.

Froskehopp. Algebra gir elevene inngang til algebra og algebraiske uttrykk og symboler. Det er særlig rettet mot mellomtrinnet.
Beste kjøp. Brøk – addisjon og subtraksjon er knyttet til brøk, desimaltall og prosent. Det er særlig rettet mot mellomtrinnet.
Dagligvarer. Multiplikasjon – en innføring er knyttet til multiplikasjon og divisjon. Det er særlig rettet mot elever på 3.–5. trinn.
Køyesenger. Tidlig tallforståelse handler om tallforståelse, addisjon og subtraksjon. Det er særlig rettet mot de tre første skoleårene.
Arkitektprosjektet handler om areal, omkrets og volum. Det passer på grunnskolens mellom- og ungdomstrinn.

Hvert hefte koster 295,–

Caspar Forlag AS · www.caspar.no

Bestill hos ordre@fagbokforlaget.no

B
DISTRIBUERT AV POSTEN NORGE
posten
NORGE P.P. PORTO BETALT

Returadresse: Tangenten / Caspar Forlag AS, Kanalveien 51, 5068 Bergen