tangenten 4/2022

tidsskrift for matematikkundervisning 33. årgang

tangenten 4/2022

Tidsskrift for matematikkundervisning

Utgitt av Caspar Forlag AS

ISSN 0802-8192

Adresse
Caspar Forlag/Tangenten
Kanalveien 51
5068 Bergen

tangenten@caspar.no
www.tangenten.no

Abonnementspriser

Ordinært	479,– per år
Studenter	279,– per år
Klassesett	250,– per år
(ved minimum 15 studenter)	
Utland	500,– per år

Utgivelsesdatoer
20. februar, 20. april
20. september, 20. november

Layout
Caspar Forlag / Aasmund Kvamme

Grafisk produksjon
John Grieg, Bergen

Artikler til bladet sendes til
tangenten@caspar.no

Omslaget
Utforming: Sigrun Werner

Tangenten retter
Artikkelen om kroppslig læring i Tangenten 3/2022 er skrevet av Antje Meier. Vi beklager at forfatterens navn var skrevet feil.

Adresseendringer
Medlemmer i LAMIS må bruke
post@lamis.no
for å melde fra om adresseendinger.
Direkteabonnenter hos Caspar Forlag bruker
post@caspar.no

Retningslinjer for vanlige artikler
tangenten.no/for-bidragsytere/retningslinjer-for-forfattere/

Retninglinjer og informasjon for fagfellevurderte artikler
tangenten.no/for-bidragsytere/retningslinjer-for-niva-1-artikler/

Fagfellevurderte artikler er merket som dette i boksen med forfatteropplysninger.

Ansvar for felles læring

Holmboeprisvinnerne er gode matematikklærere for sine elever. Kanskje er det like viktig at de inspirerer oss andre; skriver artikler, holder kurs og drar prosjekter i gang. Tangentens virksomhet er basert på at mange lærere ønsker å bidra til at vi alle blir flinkere. Jeg er glad for at det har blitt en tradisjon at Holmboeprisvinnere skriver tekster til Tangenten som en markering av prisen. I dette bladet er det tekster både fra prisvinneren og fra de som fikk hederlig omtale.

Klarer vi å framelske den samme holdningen i klasserommet – at elevene ikke bare skal være opptatt av egen læring, men også av å gjøre hverandre bedre? Får de oppleve at de er viktige medskapere av læringsmiljøet – i kontrast til samfunnets rettighetsfokus og individretting, hvor elever kan få en rolle som kunder som alltid har rett? For meg er det et tankekors at alle kompetansemålene i LK20 er formulert ut fra enkelteleven: «Mål for opplæringa er at eleven skal kunne …» Ordet samarbeid er ikke nevnt i kompetansemålene, selv om vi vet hvor viktig det er å lære å samarbeide.

Holmboeprisvinneren Tor Espen Kristensen sitt klasserom er preget av engasjerte elever som samarbeider og hjelper hverandre. Dette er viktig når de for eksempel arbeider med resonnering og argumentasjon. Det er sikkert *mulig* å øve på å argumentere og begrunne for seg selv, men dynamikken blir en helt annen når elevene argumenterer, stiller spørsmål til hverandre, forsøker å forstå og overbevise hverandre, er kritiske og utfordrende. De gode misforståelsene er viktige bidrag, de fører til oppklaringer. Slik lærer elevene at deres engasjement gjør undervisningen bedre for alle.

Når overordnet del av LK20 legger vekt på elevmedvirkning, kan ikke enkeltelevens interesser være det eneste utgangspunktet. Elevmedvirkningen må baseres på at alle har et felles ansvar for alles læring. Når noen elever faller utenfor og er passive i klasserommet, henger det ofte sammen med at de føler de ikke har noe å bidra med. Når matematikkselvtilliten først er borte, kan det ta tid å bygge den opp. Da er det viktig å vise fram at alle har verdifulle bidrag å komme med.

Hva gjør du i din undervisning som får elevene til å gjøre hverandre bedre? Bidra til å gjøre andre lærere bedre ved å sende en tekst om det til Tangenten!

Bjørn Smestad

Munthe-Kaas

Holmboeprisen 2022

Etter to år med begrensninger og digitale prisutdelinger på grunn av covid-19-pandemien var det stor stas å kunne feire utdeling av årets Holmboepris i en fysisk seremoni. Tor Espen Kristensen fra Stord vidaregåande skule mottok prisen den 23. mai ved Oslo katedralskole, der Holmboeprisen ble delt ut for attende gang i historien. Etter en kort innledning og begrunnelse for prisen av leder for Norsk matematikkråd, Antonella Zanna Munthe-Kaas, var det kunnskapsministeren, Tonje Brenna, som overrakte prisen og talte til prisvinneren. Vinnerne fra årets UngeAbel (9. trinn fra Birralee International School i Trondheim) presenterte deretter sitt vinnerprosjekt og fikk æren av å bli tildelt en premie fra selve Abelpris-vinneren, Dennis Sullivan, som også deltok i seremonien.

Tor Espen Kristensen omtales av elever og kollegaer som en svært motiverende, lun, engasjert og meget faglig kompetent lærer. Kristensen har en mastergrad i algebraisk geometri fra Universitetet i Bergen. Han vet hva som fungerer i et klasserom, og hva som ikke fungerer. Hans ledige og morsomme undervisningsstil går hånd i hånd med høye faglige krav og et gjennomgående fokus på gode tilbakemeldinger og tett kommunikasjon med elever og studenter.

Kristensens klasseromsundervisning er preget av variasjon og nivåtilpassede utfordringer. Inspirert av den matematikkdidaktiske forskningen til Peter Liljedahl[1] er Kristensen ivrig i å aktivisere elevene og stimulere dem til å bli gode problemløsere: Matematikklassen blir tilfeldig inndelt i grupper på 3–4 elever, som deretter jobber sammen for å løse problemer på tavler spredt rundt i klasserommet. Dette skaper engasjement: Studentene diskuterer, hjelper hverandre og presenterer løsningsforslag. Ikke bare trener de på å kommunisere med matematisk språk, men de trenes også i viktige generiske kompetanser som er grunnleggende for å

Antonella Zanna Munthe-Kaas
leder, Norsk matematikkråd
antonella.zanna@uib.no

kunne løse dagens og fremtidige samfunnsutfordringer.

Kristensen er også i front når det gjelder å ta i bruk digitale hjelpemidler. Som for alle nyttige verktøy krever fornuftig bruk av disse underbyggende matematisk kunnskap og forståelse, samt det å kunne vurdere resultatene med et kritisk blikk: Kristensen er spesielt opptatt av å vurdere hvordan slike hjelpemidler kan knyttes til relevante oppgaver, slik at hjelpemidlene bidrar til å øke den matematiske forståelsen.
Kristensen er en stor ressurs og en verdsatt mentor og endringsagent på egen skole og utad. På skolen bidrar han aktivt i realfagsseksjonen, og han deler gjerne egen erfaring og kompetanse. Han har vært en nøkkelperson i etablering av skolens prosjekt «Matematikk for framtida» med målet å styrke fellesskapet blant lærerne og å ta i bruk et bredere spektrum av metoder for læring og evaluering.

Nasjonalt bidrar Kristensen til Matematikksenteret, har vært engasjert i fagfornyelsen (LK20), og han er også leder av eksamensnemnda for programfagene i matematikk i Utdanningsdirektoratet. Han har utgitt læremidler i bruk av digitale hjelpemidler (GeoGebra, programmering i Python for matematikkfaget), samt holdt en rekke kurs og innlegg om de nye læreplanene i matematikk, bruk av digitale hjelpemidler, modellering og problemløsning i matematikkfaget.

Kristensen er også en viktig bidragsyter til etter- og videreutdanning av lærere og har ansvar for flere kurs ved Universitetet i Bergen, blant annet om algoritmisk tenkning og programmering i matematikkfaget.

I tillegg til Holmboeprisen til Kristensen ga Matematikkrådet hederlig omtale til matematikklærerne i 1P-Y for helse- og oppvekstfag og 2P-Y fra Holtet videregående skole, blant annet for å tilpasse undervisningsopplegg til elever med begrensede ferdigheter i norsk, noe som styrker elevenes motivasjon og opplevelse av at matematikken er yrkesrettet og dermed relevant til yrkeslivet.

Omtalene kan leses i sin helhet på holmboeprisen.no.

Note

1 Professor i matematikkdidaktikk ved Simon Fraser University, forfatter av boken «Building thinking classrooms». Han var for øvrig hovedforedragsholder på Holmboesymposiet senere samme dag.

Utforsking av kvadratiske funksjoner

Tor Espen Kristensen fikk Holmboeprisen for 2022. Se begrunnelsen side 2.

I denne artikkelen vil jeg dele erfaringer og tanker fra et opplegg jeg har gjennomført med elever i Matematikk 1T. Et av målene i læreplanen er at elevene skal kunne

> utforske og beskrive eigenskapane ved polynomfunksjonar, rasjonale funksjonar, eksponentialfunksjonar og potensfunksjonar

Målet med opplegget er at elevene i første omgang skal kunne utforske og beskrive viktige egenskaper til andregradsfunksjoner. Som en utvidelse av opplegget skal vi også se på egenskaper til rasjonale funksjoner.

Med dynamisk geometriprogram har vi fått nye muligheter til å gjøre utforskinger av ulike objekter. En vanlig måte å utforske andregradsfunksjoner på er å gi elevene følgende oppgave:

> Bruk GeoGebra til å utforske hvordan ulike verdier av a, b og c påvirker grafen til funksjonen
>
> $f(x) = ax^2 + bx + c$
>
> Hva skjer når vi endrer c? Hva med b og a?

Tor Espen Kristensen
Stord vidaregåande skule
Tor.Espen.Kristensen@vlfk.no

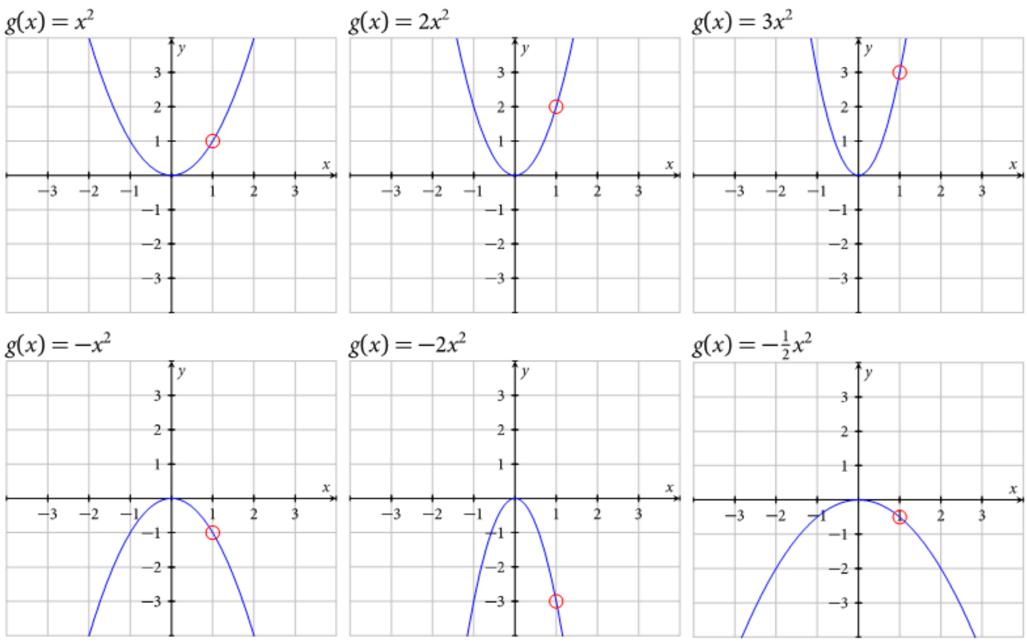
Her kan elevene lage glidere for a, b og c og så kunne beskrive hvordan disse påvirker grafen til f. En slik tilnærming har sin verdi, men den har sine begrensninger. I en studie fant Dikkartin Ovez (2018) at elever som hadde jobbet med GeoGebra til å utforske kvadratiske funksjoner, viste bedre forståelse for viktige begreper knyttet til andregradsfunksjoner enn en tilsvarende kontrollgruppe. Elevene får se mange eksempler og kan oppdage sammenhenger. En svakhet med et slikt opplegg er at det fort kun blir en beskrivelse av disse egenskapene. Elevene *ser* at grafen flyttes opp/ned når c endres. Elevene *ser* at grafen flytter seg når b endres, og at a påvirker formen til grafen. Men slik oppgaven er formulert, inviterer den ikke så mye til resonnement og forklaringer. Dersom denne oppgaven brukes ved innføring av andregradsfunksjoner, så er elevene ennå ikke introdusert for funksjonens symmetriegenskaper, nullpunkter og ekstremalpunkt, noe som gjør det svært vanskelig for dem å begrunne hvorfor for eksempel grafen flyttes langs en parabel når b endres. Å utforske hva som for eksempel skjer med topp-/bunnpunktet når a og b endres, er først interessant å se på når elevene har jobbet med og fått mer innsikt i slike funksjoner.

I opplegget ba jeg elevene først om å tegne grafen til $f(x) = x^2$. For å gjøre dette brukte de kun papir og blyant. Målet her er at elevene skal bli kjent med selve funksjonstypen, og at de skal oppdage at grafen er symmetrisk. Dette er ikke så vanskelig med denne grafen, siden $f(-x) = f(x)$.

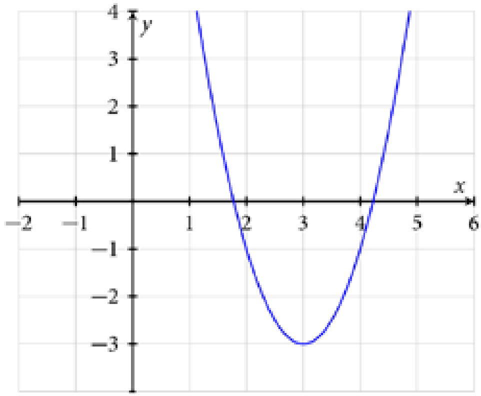
Da elevene var blitt kjent med denne grafen, utfordret jeg dem til å si noe om hvordan de tenkte grafen til $p(x) = x^2 + d$ ville se ut for ulike verdier av d. Her er det viktig at elevene ikke utforsker dette med GeoGebra, siden jeg ønsker at de skal resonnere seg fram til hva som skjer. Her møter de en viktig matematisk idé, nemlig å flytte/transformere grafer. Det er viktig at elevene får tid til å tenke, og at elevene får diskutert dette sammen, både i små grupper og i et klasseromsfellesskap.

Neste utfordring var å se på $h(x) = (x + r)^2$ for ulike verdier av r. Også her er det snakk om å flytte grafen, men nå i horisontal retning. Her ble det en del gode diskusjoner i klassen. Mange av elevene hevdet at dersom r endres fra 0 til 4, så vil grafen flytte seg 4 enheter mot høyre. Noen elever argumenterte for hvilken verdi av x som gjør at vi får 0 som svar. Dersom r er 4, må x være -4 for at y-verdien skal bli 0. Det er min erfaring at det er viktig å bruke god tid på denne delen. Det vil betale seg senere, siden en god forståelse for dette vil hjelpe elevene med mange andre funksjoner. Hvordan vil for eksempel grafen til $F(x) = \sqrt{x-4}$ se ut? Den vil se ut nøyaktig som grafen til $G(x) = \sqrt{x}$, men er forskjøvet 4 enheter mot høyre. Vi har samme idé når vi i statistikk går fra en normalfordelt variabel til standard normalfordeling. Vi flytter på grafen slik at toppunktet blir der hvor $x = 0$.

Det er utfordrende for elevene å kunne forklare hva som skjer med grafen til $g(x) = ax^2$ når



Figur 1: Utforsking av funksjonen $f(x) = ax^2$ for ulike verdier av tallet a.



Figur 2: Her ser du grafen til en funksjon *f*. Bruk grafen til å bestemme funksjonsuttrykket *f*(*x*).

vi har ulike verdier for a. I slike tilfeller ønsker jeg at elevene skal kunne bruke ulike strategier. I dette tilfellet er det lurt å se på flere eksempler og se etter et mønster. Jeg vil med andre ord at elevene skal utforske hvordan grafen ser ut for ulike verdier av a.

På figur 1 ser du seks slike grafer. Jeg ønsker at elevene ut fra slike eksempler skal oppdage sammenhengen mellom tallet a og punktet på grafen som befinner seg 1 enhet til høyre for bunnpunktet.

Når elevene har oppdaget en slik sammenheng, er det viktig å utfordre dem til å argumentere generelt for resultatet. I den nye læreplanen er resonnering og argumentasjon et eget kjerneelement. Det er min erfaring at dette er noe som elevene opplever som krevende. I eksempelet med parabelen er det egentlig bare å regne ut

$$g(1) = a \cdot 1^2 = a.$$

Her er det ikke selve algebraen som er det vanskelige, men å kunne jobbe med det generelle tilfellet og konkludere ut fra det.

Etter å ha brukt god tid på rollen til tallene a, r og d var det på tide å se på eksempler der disse blir kombinert. Vi ville med andre ord se på ulike funksjoner på formen

$$f(x) = a(x + r)^2 + d \tag{1}$$

for ulike verdier av a, r og d. Elevene hadde så langt gått fra ulike algebraiske representasjoner av funksjonen (ulike funksjonsuttrykk) til hvordan grafen ser ut. Nå ville jeg at vi skulle gå andre veien, fra graf til funksjonsuttrykk.

Elevene fikk nå oppgaver som i figur 2. Etter litt diskusjon kom elevene fram til at grafen er flyttet 3 enheter mot høyre og 3 enheter ned. Videre så de at om vi gikk 1 enhet til høyre for bunnpunktet, så måtte de gå 2 enheter opp for å komme til grafen. Ut fra dette måtte

$$f(x) = 2(x - 3)^2 - 3.$$

Neste steg var å knytte alt dette til den andre måten å representere andregradsfunksjoner på, nemlig som

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{2}$$

Å gå fra den ene formen til den andre vil bare si å multiplisere ut uttrykket som her:

$$f(x) = 2(x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2) - 3 = 2x^2 - 12x + 15$$

Å gå den andre veien handler om å fullføre et kvadrat. Fordelen med skriveformen elevene utforsket, er at de der lett kan se hvor grafen har et topp- eller bunnpunkt. De kan også lett bestemme nullpunktene til funksjonen. Disse er nå gitt ved

$$x = r \pm \sqrt{-\frac{d}{a}}$$

Nå var ikke veien lang til å argumentere for *abc*-formelen.

Alt dette synes jeg henger veldig fint sammen med kompetansemålet om at elevene skal kunne

> utforske samanhengar mellom andregradslikningar og andregradsulikskapar, andre-

gradsfunksjonar og kvadratsetningane og bruke samanhengane i problemløysing

Den viktigste kompetansen elevene fikk med seg, var kanskje ideen om at du kan flytte på grafer. De strategiene elevene brukte i dette opplegget, ble senere dratt fram når de skulle jobbe med rasjonale funksjoner. Da startet vi med å se først på funksjonen $f(x)=\frac{1}{x}$. Etter å ha studert denne en stund kom elevene fram til asymptoteegenskapene til grafen. Så var det bare å gjenta opplegget, men denne gangen så vi først på

$$r(x)=\frac{1}{x}+c$$

for ulike verdier av *c*. Deretter tok vi for oss funksjoner på formen

$$h(x)=\frac{1}{x+r}$$

for ulike verdier av *r*. Til slutt så vi på

$$g(x)=\frac{a}{x}$$

Her oppdaget elevene at også nå kan vi bestemme tallet *a* ut fra grafen. Det er bestemt av hvor langt du må gå opp fra krysningspunktet til asymptotene når du går 1 enhet til høyre. På den måten kan vi ut fra grafen bestemme *a*, *r* og *c* i funksjonsuttrykket

$$f(x)=\frac{a}{x+r}+c \tag{3}$$

Dette er en litt annen tilnærming til slike rasjonale funksjoner enn det lærebøkene legger opp til. Der blir det ofte tatt utgangspunkt i formen

$$f(x)=\frac{Ax+B}{Cx+D} \tag{4}$$

Også her er det fint å kunne veksle mellom disse måtene å skrive opp funksjonsuttrykket på. Å gå fra formen (3) til den i (4) handler om å finne felles nevner og skrive som én brøk. Å gå andre veien kan gjøres ved å bruke polynomdivisjon (som er sentralt i 1T).

Min erfaring er at det er vel verdt å bruke god tid på slike opplegg. Elevene får oppdage mange sammenhenger, de får utviklet ulike strategier, og de blir utfordret til å resonnere og argumentere.

Referanser

Dikkartin Ovez, F. T. (2018). The Impact of Instructing Quadratic Functions with the Use of Geogebra Software on Students' Achievement and Level of Reaching Acquisitions. *International Education Studies*, *11* (7), 1. https://doi.org/10.5539/ies.v11n7p1

Furu

Plaster på såre erfaringer

Matematikklærerne i 1P-Y for helse- og oppvekstfag og 2P-Y fra Holtet videregående skole fikk hederlig omtale av Norsk matematikkråd ved tildelingen av Holmboeprisen 2022.

Vi setter stor pris på den hederlige omtalen vi fikk i forbindelse med Holmboeprisen 2022, og her kommer et lite innblikk i hvordan vi jobber med elevene våre. Jeg har skrevet dette på vegne av Siv Vestneshagen Andresen, Anne Kristin Furu, Ottar Hals, Øzlem Hellmann, Darshan Kirupamurthy, Nisha Sankhayan og Thomas Skjærbekk.

Hvert år begynner ca. 200 elever i 1P-Y på studieprogram for helse og oppvekst og 2P-Y påbygg til studiekompetanse. Elevdata og kartlegging i begynnelsen av året viser at størsteparten av disse presterer lavt i faget.

Vi er derfor godt vant med å møte elever som aldri har opplevd å mestre skolefaget matematikk. Mange elever har gitt opp faget. Noen har ikke opplevd seg selv som «flinke elever» siden barneskolen og kjenner også mindre tilhørighet til skolekulturen. Skolefaget matematikk fremstår som uforståelig og abstrakt, med problemstillinger som ligger lysår fra elevenes livsverden. Elevene vi møter, har ofte lave inntakspoeng, og i tillegg har mange svake grunnleggende skrive- og leseferdigheter. Anslagsvis 85 % av elevene har et annet førstespråk enn norsk. Skolefaget matematikk vekker lett dårlige følelser. Vi er vant til elever som gjerne refererer til at matematikkvansker er noe som ligger i familien: «Pappa har heller aldri skjønt matte.» Da er det ikke så rart at de er skeptiske til å gjøre en innsats nå, når det ikke har gitt resultater før. Våre elever trenger derfor å bli møtt av voksne som jobber etter prinsippet «alle kan lære matematikk».

Arbeidet vårt må derfor begynne med at vi viser interesse og forståelse for elevenes erfaringer. Det øker sannsynligheten for at elevene tør å plukke opp blyanten og gjøre en innsats for sin egen læring. Før læring kan skje, må elevene forstå seg selv som aktører, og de må erfare at det er trygt å delta i undervisningen sammen med andre.

Vi vet at læring skjer i et sosialt samspill. Elevene gjør best begreper og konsepter til sine egne gjennom å ta del i et læringsfellesskap der de matematiske begrepene knyttes til noe som allerede er kjent.

Læreplanenes forventning om mer relasjonell forståelse og mindre innlærte fremgangsmåter gjelder i like stor grad for oss. Å sette ord på tanker, resonnere og argumentere er ferdig-

Anne Kristin Furu
Holtet videregående skole
Anne.Furu@osloskolen.no

heter som er nye og ukjente for mange i vår elevgruppe.

Hvordan gjør vi det?

For å legge til rette for mestring trenger vi også i stor grad å tilpasse undervisningen til elevenes forkunnskaper. Opplever ikke eleven å komme noen vei, synker motivasjonen raskt. Å legge til rette for oppgaver med lav inngangsterskel og samarbeidsaktiviteter kan derfor være med og styrke troen på egne krefter. Ofte innleder vi timen med en liten oppvarmingsoppgave som «Hvem skal ut?» eller noe som kan sette i gang matematiske tanker og få elevene i gang.

Skal elevene tørre å delta i faglige aktiviteter, må de tro på at det nytter. Elevene må få erfare at de har lært noe. Samtidig må de få vite hva de må arbeide mer med for å kunne nå nye læringsmål. Å anerkjenne alle tegn på mestring og gjøre dette synlig for elevene er derfor av stor betydning.

Fordi mange elever oppfatter skolefaget matematikk som vanskelig og utilgjengelig, vil de typisk streve med å bruke det de kan fra før. Elevene kan ofte utmerket godt regne ut hva de skal ha i vekslepenger, eller finne ut hvor lenge det er til bussen går, når de er utenfor klasserommet. Det er når liknende problemstillinger dukker opp i en oppgavekontekst, at det blir vanskelig. Det er sannsynligvis flere årsaker til dette. Det handler kanskje om at eleven generelt mangler trening i å uttrykke egne erfaringer med tall og mengder. Noen tror også at det kreves én spesiell fremgangsmåte, som gjerne ligger langt unna hvordan eleven selv løser problemer uten blyant og papir. Arbeid med grunnleggende tallforståelse og hoderegningsstrategier kan derfor være med og bygge bro mellom hverdagslivets regnestrategier og skolefagets oppgavediskurs.

Elevene må bli klar over at de har forkunnskaper som er nyttige og relevante for faget, og at det finnes mange veier til et riktig svar. Å lære å kommunisere sin egen tankegang og egne strategier er vesentlig.

Relevans

I praksis er det ikke alltid så enkelt å motivere 15–16-åringer til å jobbe med et tema fordi de kanskje kan få bruk for det en gang i fremtiden. Ofte opplever vi mer engasjement rundt praktiske aktiviteter som matlaging, fysisk aktivitet eller mer lek- og konkurransepregede aktiviteter. Vi erfarer også et større engasjement rundt læringsmålene når elevene får bruke god tid på læringsarbeidet, og når de kan få en vurdering som er basert på noe annet enn den klassiske matteprøven.

På Holtet har vi forsøkt ulike måter å organisere vurderinger på. Noen eksempler er parprøver og «skyggeprøver» der karakterer ikke føres. Den klassiske heldagsprøveformen er borte. Elevene får sitte i grupper og diskutere oppgavesettet før de begynner å løse dem på egen hånd. Vi erfarer at dette styrker begrepsforståelsen, og elevene forteller at denne vurderingsformen senker stressnivået.

Elevene gjennomgår og vurderer sine egne prøver. Dette etterarbeidet foregår med egne notater og lærebok. Vi tenker det ligger mye læring i å rette egne feil, en mulighet som ville gått tapt om prøven kom tilbake ferdig vurdert med karakter.

Elevene møter ofte temaer og problemstillinger fra yrkepraksis, men vi mener at også å meste grunnleggende matematikk fra hverdagslivet hører med. Vi forstår dette som å kunne gjøre et enkelt overslag over eget forbruk, kunne justere en oppskrift og å måle opp ingredienser, regne ut et skattetrekk eller å kunne lese og tolke statistikk.

I begynnelsen av året tilbys elevene «startblokk-kurs». Elevene får da mulighet til å styrke det grunnleggende i faget. I tillegg vurderer vi hele tiden behovet for å sette inne ekstra undervisningstilbud.

Vi mener at læreplanenes forventninger om at elevene selv skal finne sammenhenger og jobbe utforskende, krever særlig tett oppfølging fra pedagoger. Skal elevene oppdage sammenhenger og diskutere disse, trenger de å arbeide mye med grunnleggende ferdigheter.

Språklig tilpasning

Vi opplever ofte at eksempeloppgaver og lærebøker er formulert i en for avansert språkdrakt. Vi bruker derfor mye tid på å tilpasse lengre tekstoppgaver, slik at elevene øver seg i lesing og tolkning. Elever kan ofte ikke slå opp i en lærebok, og da er det jo lite nyttig med alle hjelpemidler tilgjengelig. På skolen har vi høy tetthet av andrespråklærere, og dette samarbeidet sikrer at språket ikke blir et hinder for elevene.

Elevgruppa vår trenger å trene på å lese en tekstoppgave, og vi trenger å løfte frem høyfrekvente ord og begreper, slik at svake norskkunnskaper ikke blir et hinder for å vise hva elevene kan. Det kan bety at vi tar frem markeringstusj, studerer struktur i tekst og trener elevene i å jakte på nøyaktig hva i teksten vi skal gjøre matematikk med. Å kunne lese en tekstoppgave blir på den måten ikke bare en strategi for å forstå oppgaver på en prøve, men gir elevene trening i å forstå fremstillinger av matematikk i andre faglige sammenhenger.

På begrepsnivå har vi stor nytte av å gå systematisk til verks. Elevene trenger kjennskap til både fagets grunnleggende begreper og høyfrekvente analysebegeper som beskriver mengder og relasjoner. Elever som i mindre grad har tatt del i et læringsfellesskap tidligere, vil også trenge konkret modellering av hva det vil si å delta muntlig i en samtale med medelever. Hvordan kan vi beskrive, begrunne og argumentere? Våre elever skal også jobbe uforskende og argumentere for sine strategier, og for at de skal mestre dette i noen grad, trenger de mye trening i språklige uttrykksmåter.

For mange av våre elever ligger det mye hardt arbeid bak karakteren 2. Grunnleggende tallforståelse og regneferdigheter må på plass. Det er ikke bare som fremtidige helsefagsarbeidere elevene våre trenger matematikk, de skal også treffe gode valg i sine egne liv. For de av elevene våre som tar 2 P-Y, vil også målet om videre studier kreve en stor innsats fordi utvalget av studieplasser for dem med lave søkerpoeng er magert.

Vi ser behovet for å jobbe kontinuerlig med elevenes faglige selvtillit. Elevenes hverdagserfaringer må gjøres synlige for elevene, slik at de i større grad tror på sine egne utregninger. Ikke alle elevene fullfører med bestått, men vi mener likevel at året med matematikk på Holtet gir god ballast.

Det systematiske arbeidet med motivasjon og mestring av grunnleggende ferdigheter er en støttende faktor for elevene, samtidig som de forstår at vi har tydelige forventninger til at de gjør en innsats. Støttelærerne tar sjelden ut elevene fra elevgruppa, men gir læringsstøtte i timen. Når vi er to lærere, vil det derfor variere etter elevenes ønsker og behov hvordan vi velger å organisere elevene.

Matematikkfaget forventer mye av elevene. Ikke bare skal de forstå og tenke selv, men også mestre ferdigheter og fremgangsmåter. For å blir gode nok må de selv tro på at det nytter å gjøre en innsats. Vi har ofte en mistanke om at elevene våre har blitt vant til at ingen rundt dem har noen særlig tiltro til at de kan lære. Om elevene erfarer at ingen stiller krav, blir jo også innsatsen deretter.

Vi vet at altfor mange elever går ut fra skolen uten grunnleggende ferdigheter i matematikk, og det er rimelig å tenke at dette begrenser muligheten til å gjøre gode valg for seg selv og til å delta i samfunnslivet. Vi reparerer mangelfull tallforståelse, får mange til endelig å fikse divisjon, og vi setter plaster på såre erfaringer fra matematikkundervisning. Mange av våre elever fortsetter videre i yrkesopplæring og kommer seg til høyskoler og universiteter.

Vi er stolte over å ha fått hederlig omtale i Holmboeprisen 2022, og takker pent for anerkjennelsen fra Holmboepris-komiteen/LAMIS. Å undervise elevgruppa vår er hardt arbeid, og vi kan trygt slå fast at det er bruk for oss i Oslo-skolen også i åra som kommer.

Oppgåver for utforsking og problemløysing

Då eg for ei tid sidan leia eit webinar om utforsking og problemløysing, var ei av utfordringane som lærarane tok opp, å «finna opne oppgåver som stimulerer til problemløysing [og utforsking]». Det syntest eg sjølv òg er utfordrande, men etter mykje prøving og feiling med inspirasjon frå forsking, naturressursar og læreverk har eg lært meg fleire verdifulle «hacks». Eitt av dei er å skilja mellom ulike oppgåvetypar og bruka den varianten som passar best for det aktuelle temaet, dei elevane det gjeld, og den situasjonen dei står i.

I det følgande vil eg dela eit forslag til inndeling i fem arketypar av oppgåver med kvar si forankring i forskingslitteraturen. Desse får følgje av kvart sitt eksempel for matematikk på vidaregåande og forslag til kor ein kan finna fleire. Etter det drøftar eg kva ulike situasjonar dei passar best i, og presenterer nokre tips til korleis ein kan tenka for å laga dei. Aller først må eg likevel komma med ei åtvaring:

I forkant av det same webinaret var det ein annan lærar som var innpå ei anna utfordring knytt til utforsking og problemløysing: «Synes det er vanskelig, de vil ha forklaring på alt de skal gjøre. Vet ikke hvor de skal begynne.» Og enda ein gong kjenner eg meg godt igjen. For å lukkast med denne typen undervising må læraren justera dei fleste praksisane i undervisinga si, ikkje berre kva oppgåver han eller ho gir (Andreassen, 2017; Liljedahl, 2021). Å gå inn på dette fell diverre utanfor omfanget av denne artikkelen.

Håvard Andreassen
Valle Hovin videregående skole.
lektorhaavard@gmail.com

Utforsking og problemløysing

I skildringa av kjerneelementa i den nye læreplanen kan ein lesa at «*utforsking* i matematikk handlar om at elevane leiter etter mønster, finn samanhengar og diskuterer seg fram til ei felles forståing.». Vidare står det at *problemløysing* går ut på at elevane «utviklar ein metode for å løyse eit problem dei ikkje kjenner frå før» (Utdanningsdirektoratet, 2020). I begge tilfella må elevane læra seg strategiar for å orientera seg i ny og ukjend matematikk, men der problemløysing som regel tar utgangspunkt i ei spesifikk oppgåve som skal løysast, er det meir opent kva ein kan oppdaga gjennom utforsking. Ei heilskapeleg tilnærming til undervising i matematikk som bygger på begge desse, blir ofte kalla *inquiry-basert undervising* (Maaβ & Reitz-Koncebovski, 2013; Andreassen, 2017).

Utforsking og problemløysing og inquiry-basert undervising står i sterk kontrast til det Skovsmose (1998) kallar *oppgåveparadigmet*, der undervisinga gjerne blir bygd opp slik: Læraren innleier ved å gjennomgå nytt stoff og viser eksempel på korleis elevane skal løysa bestemte oppgåver. Etterpå øver elevane på nokså like oppgåver – det Liljedahl (2021) kallar «nå er det dykkar tur»-oppgåver. Solvang (1992) definerer ei *rutineoppgåve* som ei utfordring elevane har løysingsmetodar for å meistra, og *problem* som ei utfordring der elevane *ikkje* har det.

Tabell 1 inneheld ei oversikt over dei fem oppgåvetypane som snart blir presenterte. Som det går fram av tabellen, er somme meir orienterte mot problemløysing, andre utforsking. Oppgåvene er òg kategoriserte etter om dei gir elevane stor fridom (opne oppgåver) eller har eit nokså fastlagt løp (styrte oppgåver).

	Utforsking		**Problemløysing**
Open	A. Undersøkings-landskap		C. Rike problem
		E. Alltid – nokre gonger – aldri	
Styrt	B. Stegvis utforsking		D. Stegvis problemløysing

Tabell 1: Oppgåvetypar

A. Undersøkingslandskap

Definisjonen av utforsking i førre avsnitt harmonerer med det Skovsmose (1998) kallar *undersøkingslandskap*, ein klasseromspraksis der elevane blir lærte opp til å stilla spørsmål som «kva viss …?» og «korfor det?». Målet er å finna mønster og samanhengar i ein open situasjon utan at det nødvendigvis er eit spesifikt problem som skal løysast. Eksempel 1 er tilpassa frå Jensen og Wæge (2010).

Denne oppgåvetypen er nokså ukjend og gir såpass stor fridom at mange elevar blir paralyserte. Difor er han ofte best eigna som ein plenumsaktivitet, gjerne med veksling til arbeid individuelt eller i grupper.

Læreverka som har komme ut i samband med fagfornyinga, inneheld ein del oppgåver som kan brukast som undersøkingslandskap, anten direkte eller med tilpassingar. Liknande oppgåver er dei som går under namn som «Snakke matte», «Diskuter» og «Reflekter».

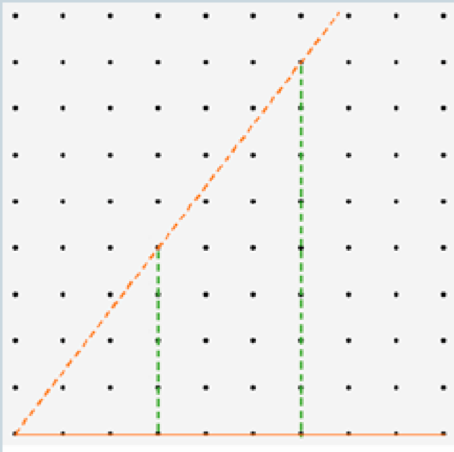
Eksempel 1: Forstå grunnlaget for trigonometri

Lag kvar dykkar vinkel på geobretta de har fått utdelt (sjå figuren under). Det eine vinkelbeinet skal gå langs den nedre kanten, og toppunktet skal vera i venstre hjørne (heiltrekt, oransje linje). Det andre vinkelbeinet vel de sjølve (stipla, oransje linje).

Lag tre rettvinkla trekantar som inneheld denne vinkelen (dei stipla, grøne linjene er eksempel). Det kan gjerast på ulike måtar.

Finn ut kva desse trekantane har til felles. (Hint! Linjal og divisjon kan komma vel med.)

Gjenta prosessen for andre trekantar.



Mange andre oppgåver går under den neste kategorien.

B. Stegvis utforsking

Det er ikkje alltid det passar med den opne utforskinga i eit undersøkingslandskap. Viss ein har mindre tid tilgjengeleg eller trur at elevane treng meir støtte for å bli kjende med temaet, kan det lønna seg å bygga opp oppgåva med fleire steg. I eksempel 2 har læraren lagt fleire føringar.

Denne tilnærminga har mykje til felles med det Solvang (1992, s. 109) kallar *den induktive arbeidsmåte*. Metoden går ut på å la elevane eksperimentera seg fram til ei rekke resultat som peikar i ei bestemt retning. Læraren styrer

Eksempel 2: Oppdaga sinussetninga

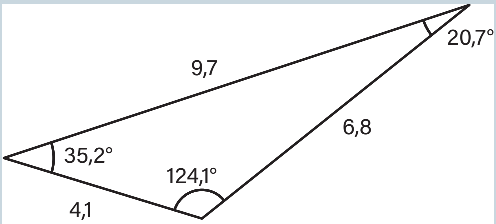
Under ser de ein trekant med mål for sidelengder og vinklar.

Fyll ut tabellen. (Hugs at sidelengda *a* og vinkelen *A* er på motsett side av kvarandre i trekanten.)

Ser de nokon mønster?

Teikn ein trekant ulik den førre og undersøk om dei same mønstera gjeld.

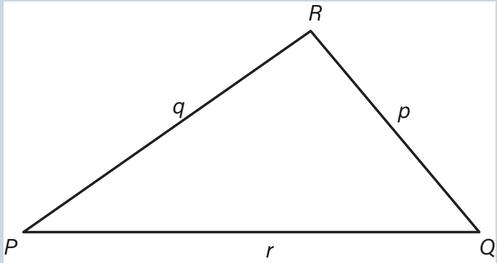
Teikn ein ny trekant og skriv på generelle sidelengder (*a*, *b*, *c*) og hjørne (*A*, *B*, *C*). Bruk denne til å sette opp ein generell regel for mønsteret de har funne.



Sidelengde	Sinus	Forhold 1	Forhold 2
a	sin A =	$\frac{\sin A}{a} =$	$\frac{a}{\sin A} =$
b	sin B =	$\frac{\sin B}{b} =$	$\frac{b}{\sin B} =$
c	sin C =	$\frac{\sin C}{c} =$	$\frac{c}{\sin C} =$

Eksempel 3: Forstå stega i beviset for sinussetninga

På figuren ser de ein generell trekant.



Forklar at arealet av trekanten er lik

$$\frac{1}{2} \cdot r \cdot q \cdot \sin P \,.$$

Finn eit tilsvarande uttrykk for arealet, men denne gongen med vinkel *Q*.

Vurder om følgande likning gjeld alltid, nokre gonger eller aldri:

$$\frac{1}{2} \cdot r \cdot q \cdot \sin P = \frac{1}{2} \cdot r \cdot p \cdot \sin Q$$

Vis korleis denne likninga kan skrivast om til:

$$\frac{q}{\sin Q} = \frac{p}{\sin P}$$

Forklar kva dette har med sinussetninga å gjera.

aktivitetane eller formulerer meir eller mindre sjølvinstruerande oppgåver slik at elevane får grunnlag for kvalifisert gjetting.

Matematikksenteret har utvikla to hefte som inneheld aktivitetar med stegvis utforsking for vidaregåande skule (Jensen & Wæge, 2010; Stengrundet m.fl., 2015). Dei nye læreverka, og særleg Sinus-serien, har òg eit gjennomgåande innslag av dette.

Framgangsmåten kan òg brukast i ei påfølgande deduktiv fase for å for eksempel utleia eit bevis for samanhengen ein oppdaga (Eksempel 3, Solvang, 1992).

C. Rike problem

Ein tredje inngang til utforsking og (særleg) problemløysing er gjennom *rike problem*. Hedrén, Taflin og Hagland (2005) definerer dette som oppgåver som tar utgangspunkt i viktige matematiske idear eller løysingsstrategiar, som kan løysast på ulike nivå med ulike metodar, og som legg til rette for lærerike samtalar og formulering av spørsmål og nye problem. Fleire av desse kjenneteikna gjeld sjølvsagt (og heldigvis) for dei andre oppgåvetypane òg, men til forskjell frå dei to føregåande typane er det eit spesifikt problem som skal løysast. Dette kan vi sjå i Eksempel 4.

Eksempel 4: Kunna rekna med gjentakande prosentvis endring

Lærar: «For 40 år sidan sette eg 50 000 kr i banken, og sidan då har eg fått 5 % renter kvart år. Nå har eg tatt ut pengane og lagt dei i denne konvolutten her. Jobben dykkar er å finna ut kor mykje det er i konvolutten, før me opnar han.»

Eksempel 5: Kunna finna omvende funksjonar (og forstå kva ein omvend funksjon er)

Frå før veit me at funksjonen $f(x) = 3x$ tredoblar alle tal x som me puttar inn. For eksempel er $f(1) = 3$, $f(2) = 6$, $f(3) = 9$ og $f(-4) = -12$.

a) Finn eit uttrykk for ein funksjon $g(x)$ som gjer det motsette av $f(x)$. Uttrykket skal altså vera slik at $g(3) = 1$, $g(6) = 2$, $g(9) = 3$ og $g(-12) = -4$.

Det er mange funksjonar som har slike motsette funksjonar. Finn $g(x)$ viss

b) $f(x) = 3x + 1$

c) $f(x) = 3x - 1$

d) $f(x) = \frac{x}{3} + 1$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$

f) $f(x) = e^x + 1$

g) ...

I utgangspunktet framstår dette som ei tradisjonell lærebokoppgåve, og dét er det viss elevane i forkant har fått demonstrert ein metode for å løysa problemet. La oss derimot seia at elevane frå før kan rekna med prosent, kan finna vekstfaktorar, er kjende med hjelpemiddel som GeoGebra, Excel og Python. Då kan dei eksperimentera seg fram til fleire ulike måtar å finna summen i konvolutten på.

Rike problem har mykje til felles med det Matematikksenteret kallar LIST-oppgåver, altså oppgåver med «låg inngangsterskel og stor takhøgd» (Mattelist, 2021), og på nettstaden www.mattelist.no har dei publisert mange oppgåver for både grunnskule og vidaregåande skule. Engelskspråklege sider som nrich.maths.org og www.youcubed.org kan òg vera nyttige. I tillegg kjem fleire av dei tidlege eksempeloppgåvene til eksamen på vg1 og enkelte oppgåver i læreverka. I eit tidlegare nummer av Tangenten har eg skrive om korleis ein kan utforma opplegg for utvikling og vurdering basert på rike problem (Andreassen, 2021).

D. Stegvis problemløysing

På same måte som ein kan dela inn utforsking i fleire steg, kan ein setta saman sekvensar av meir avgrensa rike problem, slik det er gjort i eksempel 5.

Somme vil kanskje meina at tradisjonelle læreverk er bygde opp etter det same prinsippet om oppgåver med aukande vanskegrad, men det er nokre vesentlege forskjellar. Liljedahl (2021) har skrive ei bok om korleis ein gjennom 14 grep kan skapa eit læringsmiljø i matematikk som er gjennomsyra av resonnering. Fleire av desse grepa bygger på stegvis problemløysing, eller «scripted curriular tasks», som han kallar det. Her går det fram at ein, som i eksempelet over, ikkje skal innleia med ein demonstrasjon av korleis ein kan løysa problemet, men heller aktivera relevant forkunnskap. Vidare skal kvart steg berre innføra éi endring i forhold til det føregåande, og den ekstra utfordringa dette inneber, skal vera nokså lita. Dessutan bør elevane berre få eitt steg om gongen, og det bør vera så mange steg at ingen blir ferdige i løpet av undervisingssekvensen, slik at merksemda ligg på prosessen, ikkje å bli ferdig. Til slutt er det verdt å nemna at Liljedahl faktisk vier eit heilt kapittel til korleis ein bør introdusera det første steget, men det fell utanfor rammene for denne artikkelen å gå inn på det.

E. «Alltid – nokre gonger – aldri»-oppgåver

Den siste oppgåvetypen (eksempel 6) som får vera med i det gode selskapet denne gongen, «Alltid – nokre gonger – aldri»-oppgåver, ligg i skjeringspunktet mellom dei andre typane. Elevane får eit spesifikt problem, men målet er å utforska ein eller fleire matematiske samanhengar. Rammene er smalare enn for open utfor-

Eksempel 6: Kombinasjonar av vektorar

La $\vec{u}$ og $\vec{v}$ vera to vektorar. Vurder om påstandane gjeld alltid, nokre gonger eller aldri.

a) Ein annan vektor $\vec{w}$ kan då skrivast som ein lineær kombinasjon av desse slik: $\vec{w} = s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$.

b) To vektorar er parallelle viss den eine kan skrivast som eit tal multiplisert med den andre vektoren slik: $\vec{u} = t \cdot \vec{v}$.

sking, men krev meir sjølvstendig utprøving enn eit stegvis opplegg. I eksempelet gjeld ein av påstandane alltid, den andre nokre («dei fleste») gonger.

Ei god kjelde til fleire slike er læreverka til Aschehoug som byrja å bruka denne oppgåvetypen fleire år før fagfornyinga.

Kva type passar best?

Det er vanskeleg å svara kategorisk på dette, men sidan dei fem oppgåvetypane har ulike styrker og veikskapar, vil kjenneteikn ved situasjonen du og elevane dine står i, kunna påverka kva type det er lurt å velja.

I Tabell 1 er oppgåvetypane kategoriserte langs to aksar, der den eine går på om oppgåva vektlegg utforsking eller problemløysing. Viss målet er at elevane skal forstå ein samanheng, er det ofte naturleg å bruka utforsking. Det samsvarar med den siterte definisjonen frå læreplanen. Er det ei ferdigheit dei skal utvikla, kan det fungera betre med problemløysing. Når det er sagt, trengst problemløysing i utforsking og utforsking i problemløysing, og begge delar handlar overordna sett om å læra seg strategiar for å møta ukjend matematikk.

I samband med dette er det òg verdt å merka seg at problemløysing har meir til felles med ei oppgåve innanfor oppgåveparadigmet, enn det utforsking har. I klasserommet kan det komma til syne ved at det er vanskelegare for elevane å forstå kva dei skal gjera når dei bli bedne om å utforska, enn det er når ein gir dei eit ukjent problem.

Den andre aksen i Tabell 1 handlar om kor open eller styrt aktiviteten er. Det kan vera freistande å ty til dei stegvise variantane, sidan det då er mindre risiko for at elevane går seg fast, og ein har meir kontroll på både prosess og utfall. Det gjer det dessutan lettare å disponera tida. På den andre sida bør ein spørja seg: Kva oppgåvetype er det som i størst grad oppfyller krava i læreplanen, forma på eksamen og utfordringane i livet etter skulegangen? Her gir dei opne oppgåvene større måloppnåing fordi elevane må læra seg å bruka strategiar som kan overførast til alle desse situasjonane.

Korleis kan ein laga slike oppgåver?

Det kan vera tidkrevande og vanskeleg å finna ei oppgåve som passar til temaet for neste time. Då er det fint å kunna laga sine eigne. Prestage og Perks (2001) har skrive ei bok om korleis ein kan laga rike problem ved å ta utgangspunkt i tradisjonelle lærebokoppgåver. Dei føreslår å (a) laga tankekart som inkluderer alt frå læringsmål til kreative idear, (b) fjerna, legga til eller endra nokre av avgrensingane i oppgåva, (c) gi svaret i plassen for spørsmålet, og (d) byta ut ressursar (konstruksjonsverktøy, data o.l.) eller format (tekst, figur, gjenstandar o.l.). Som i eksempel 4 kan det fungera like bra å plukka ut eit problem elevane ikkje har lært å løysa på førehand.

Forslaga til Prestage og Perks er nyttige for dei andre oppgåvetypane òg, men særtrekka deira gjer at det òg er naturleg å tenka i litt andre banar. For stegvis problemløysing kan det vera verdifullt å tilpassa eksempel og oppgåver frå læreverket slik at dei blir ein samanhengande kjede som ikkje treng forklaringar undervegs. Eit undersøkingslandskap må romma dei samanhengane ein håper at elevane skal oppdaga, men då utan for mykje «støy» og på ein slik måte at dei har ein reell sjanse til å finna dei. Det er fint om dei må streva først – det er då meistringskjensla kjem! – men viss læraren er nøydd til å gjera noko av jobben, er poenget vekke. Noko av det same gjeld for stegvis utforsking, men her kan læraren setta opp ei rekkefølgje av dei erfaringane han eller ho ønskjer at elevane skal ha for å komma fram til det matematiske mønsteret. For å laga «alltid – nokre gonger – aldri»-oppgåver er det fint å ta utgangspunkt i regelboksar og laga eigne «tullereglar».

Avslutning

Sjølv om denne inndelinga i ulike oppgåvetypar kan vera nyttig for å sjå kva som er mogleg og gunstig i ulike situasjonar, må det ikkje bli eit hinder for å tenka utanfor boksane. For å oppnå framgang i utforsking og problemløysing i klasserommet er det viktigaste å våga å prøva og feila – nett slik me ønskjer at elevane skal gjera. Det inneber å tora å sjå med nye augo på alle dei andre aspekta av undervisingssituasjonen òg.

Referansar

Andreassen, H. (2017). *Utvikling av inquiry-basert undervising i matematikk: Kvalitative erfaringar frå eit intensivt og forskingsbasert utviklingsprosjekt med to lærarar i den vidaregåande opplæringa.* [Masteroppgåve, Universitetet i Agder]. Henta frå https://uia.brage.unit.no/uia-xmlui/handle/11250/2455738

Andreassen, H. (2021). Vurdering av utforsking og problemløysing. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 32*(3), s. 13–19.

Hedrén, R., Taflin, E. & Hagland, K. (2005). Vad menar vi med rika problem og vad är de bra till? *Nämnaren, 32*(1), s. 36–41.

Jensen, A.-M. & Wæge, K. (2010). *Undersøkende matematikkundervisning i videregående skole.* Henta frå https://www.matematikksenteret.no/nettbutikk/unders%C3%B8kende-matematikk-undervisning-i-videreg%C3%A5ende-skole

Liljedahl, P. (2021). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning.* Corwin.

Mattelist. (2021, mai 6.). *Om Mattelist*. Henta frå https://www.mattelist.no/artikkel/om-mattelist

Maaβ, K. & Reitz-Koncebovski, K. (red.). (2013). *Inquiry-based learning in maths and science classes:.* Henta frå https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/primas_final_publication.pdf

Prestage, S. & Perks, P. (2001). *Adapting and extendig secondary mathematics activities: New tasks for old*. David Fulton Publishing.

Skovsmose, O. (1998). Undersøgelseslandskaber. I T. Dalvang & R. V (red.), *Matematikk for alle. Rapport fra LAMIS 1. sommerkurs, Trondheim 6.–9. august 1998* (s. 24–37). Center for Research in Learning Mathematics.

Solvang, R. (1992). *Matematikkdidaktikk.* NKI-forlaget.

Stengrundet, S., Kalvø, T. & Jensen, A.-M. (2015). *Undersøkende matematikkundervisning i videregående skole II.* Henta frå https://www.matematikksenteret.no/nettbutikk/unders%C3%B8kende-matematikkundervisning-i-videreg%C3%A5ende-skole-ii

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT0105)*. Henta frå Kjerneelement: https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i matematikk fellesfag Vg1 teoretisk (matematikk T) (MAT09-01)*. Henta frå https://www.udir.no/lk20/mat09-01?lang=nob

Skåsheim, Brakestad

Borel – eit spel for sannsynsrekning

Sannsyn er eit omgrep mange born har eit forhold til allereie før dei byrjar på skulen. Born uttrykker til dømes at det er bombesikkert at dei skal ete godteri på laurdag, eller at det er heilt sikkert at dei ikkje skal på kino i dag. Dei vurderer om dei trur at noko skjer basert på opplevingane sine i kvardagen. På den måten syner dei erfaring med subjektivt sannsyn. Etter kvart som borna vert eldre, skal dei stadig vurdere sannsyn for nye situasjonar og knyte saman ulike delar av matematikken. På skulen skal elevane få erfaring med teoretisk sannsyn og empirisk sannsyn. Sannsyn, i motsetning til andre matematiske tema, er eit tema som ofte strid mot enkel logikk og slik vi tenkjer kring kvardagslege situasjonar (Borovcnik & Peard, 1996, s. 250). Dermed strid ofte utrekningane i sannsynsrekninga mot intuisjonen, noko som fører til at temaet kan vere vanskeleg både å lære og å lære bort.

Vi vil i denne artikkelen presentere korleis ein kan arbeide med sannsyn gjennom terningspelet Borel. Spelet tar for seg kva ein trur skal skje når ein kastar terningar. Kva som faktisk skjer når ein kastar terningane i spelet, veit ein ikkje på førehand, men dei fleste vil ha ei kjensle av om dei trur eit bestemt utfall kjem til å finne stad. Eksperimenta i spelet er så komplekse at det ofte er vanskeleg å sjå sannsynet for ei hending direkte, men spelarane kan ha fleire strategiar for å vurdere om dei trur hendinga skjer eller ikkje. Vi vil først gi ei innføring i spelereglane og sjå på to eksperimentkort, før vi tar for oss korleis ein kan jobbe med spelet. Døma vi har nytta, er i hovudsak retta mot vidaregåande skule, men det går an å arbeide med spelet i grunnskulen òg.

Gunhild Skåsheim
Høgskulen på Vestlandet
gunhild.skasheim@hvl.no

Inge Hoven Brakestad
Høgskulen på Vestlandet
inge.brakestad@hvl.no

Kort innføring i terningspelet Borel

Terningspelet Borel inneheld fire sekssiders terningar, ein tisiders terning, ein tjuesiders terning og ein trettisiders terning. Spelet består av 100 eksperimentkort. Kvart eksperimentkort skildrar ei hending som tek i bruk minst ein av terningane. Deltakarane skal stemme over om dei trur hendinga vil inntreffe, ved bruk av to tippekort – eit som syner «YES», og eit kor det står «NO». I kvar runde har ein spelar ansvaret for å trekkje eit kort frå eksperimentbunken og lese opp hendinga. Den første som legg ned eit tippekort, får behalde sitt svaralternativ. Alle dei andre spelarane vert tvinga til å leggje ned det motsette tippekortet. Dei som legg ned rett tippekort, får tre poeng. Deretter vert same hending gjenteken på ny. Her må personen som la ned tippekortet sitt først i den første runden, leggje ned same tippekort, medan alle dei andre spelarane får moglegheita til å byte tippekort. I denne runden får dei som legg ned rett tippekort, to poeng.

Figur 1: Slik kan ein runde med Borel sjå ut.
Foto: Gunhild Skåsheim

Vidare vil vi ta for oss to av eksperimentkorta i spelet og vise korleis desse kan koplast opp mot kjerneelementa og kompetansemål på ulike trinn i skulen.

Uavhengige hendingar

På det første eksperimentkortet vi har valt ut, står det: «Trill trettisidersterningen tre gonger. Får ein minimum seks alle tre gongene?». Eksperimentkortet gir opphav til å jobbe med sannsyn på 9. trinn, der det står i læreplanen at dei skal «berekne og vurdere sannsyn i statistikk og spel» (Kunnskapsdepartementet, 2019a, s. 13).

Korleis kan ein rekne ut sannsynet for dette? Vi definerer følgjande hendingar:

H_1 = Trillar ≥ 6 i første kast
H_2 = Trillar ≥ 6 i andre kast
H_3 = Trillar ≥ 6 i tredje kast

Sannsynet for å trille seks eller meir på eit kast er 25⁄30 = 5/6. Dei tre terningkasta er uavhengige av kvarandre, altså slik at resultatet på første kast ikkje verkar inn på resultata på dei neste kasta. Vi kan utnytte dette når vi reknar ut sannsynet for at alle terningane viser minimum seks, og får at

$$P(\text{alle terningane viser minimum seks})$$
$$= P(H_3) \cdot P(H_2) \cdot P(H_1)$$
$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216} = 0{,}579$$

At hendinga som står beskriven på eksperimentkortet, vil inntreffe, er altså det mest sannsynlege utfallet.

Når elevane skal ta stilling til hendinga på eksperimentkortet, må dei gjere vurderingar. Vurderingane kan vere utrekningar som vist over, men det kan òg vere gjennom diskusjon og argumentasjon i gruppe eller i heil klasse. Ein påstand frå ein elev kan vere «Det er fleire tal på terningen som er større enn 5, så da vil det vere *mykje* lettare å få 6 eller meir på alle kasta». Eleven sin påstand er eit eksempel på at intuisjonen bryt med utrekningane. Eleven har rett i at hendinga der alle terningane viser minimum 6 har størst sannsyn, men det er ikkje *mykje* større enn sannsynet for komplementhendinga (å få 5 eller mindre på minst ein av terningane). Før ein lar elevane bestemme seg for kva tippekort dei vil leggje ned, kan læraren gripe fatt i ulike argument og påstandar som elevane har under spelet, for så å snakke om dei for å oppnå felles forståing for ulike hendingar og sannsynet for dei ulike hendingane. Slik kan læraren tilpasse spelet til ulike trinn og elevar.

Forventningsverdi, teoretisk og empirisk sannsyn

På det andre eksperimentkortet vi tar med, står dette: «Trill fire sekssidersterningar, tisidersterningen og trettisidersterningen. Vil summen av talet på augo verte minst 40?»

I læreplan for matematikk i samfunnsfag (MAT04-02) er det fleire læreplanmål som er knytte til sannsynsrekning, forventningsverdi og stokastiske variablar. I Matematikk S2 skal elevane mellom anna «forstå omgrepet forventningsverdi» (Kunnskapsdepartementet, 2019b, s. 7). Eit slikt eksperimentkort kan gi grunnlag for å snakke om både stokastiske variablar og forventningsverdi.

Ein kan betrakte talet på augo på sekssidersterningen, tisidersterningen og trettisidersterningen som uavhengige stokastiske variablar. Vi kan definere dei stokastiske variablane X_1, X_2, … , X_6, og setje den stokastiske variabelen X_1 lik X_1 = «talet på augo ved kast av den første sekssidersterningen». Vi finn forventningsverdien til X_1, mellom anna ved å nytte «store tals lov», og får at

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot P(X_1 = x_i) \\ &= 1 \cdot P(X_1 = 1) + \ldots + 6 \cdot P(X_1 = 6) \\ &= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5 \end{aligned}$$

X_2, X_3 og X_4 omhandlar dei andre sekssidersterningane, og kan definerast på same vis som X_1. Desse vil ha same forventningsverdi som X_1. Vi set X_5 = «talet på augo ved kast av tisidersterningen», og X_6 = «talet på augo ved kast av trettisidersterningen». På tilsvarande måte som for X_1 kan vi rekne ut at X_5 og X_6 vil ha forventningsverdi 5,5 og 15,5, høvesvis. Ein kan deretter utnytte at forventningsverdien til ein sum av stokastiske variablar kan finnast ved å addere forventningsverdien til kvar av dei. Det samla forventa talet på augo som terningane syner, vert då lik

$$\begin{aligned} &E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) + E(X_6) \\ &= 4 \cdot 3{,}5 + 5{,}5 + 15{,}5 = 35 < 40. \end{aligned}$$

Sidan summen av dei seks terningane er symmetrisk om forventningsverdien, kan vi konkludere med at det mest sannsynlege utfallet er at hendinga på eksperimentkortet ikkje vil inntreffe.

Vi ser vidare på det teoretiske sannsynet for at hendinga skal inntreffe, og Figur 2 syner korleis vi kan kome fram til dette. Programmeringskoden som er nytta, er gitt i Python. Vi nyttar tilsvarande metode som Johnson (2019, s. 107) skildrar, men koden er tilpassa eksperimentkortet og omsett frå R til Python. R er eit programmeringsspråk og ei programvare som vert nytta innanfor statistiske berekningar, medan Python er programmeringsspråket som vert nytta i vidaregåande skule. Vi har totalt $n = 6^4 \cdot 10 \cdot 30 = 388\,800$ moglege utfall for kast av desse terningane. Løkkene på figur 2 gir oss alle desse utfalla, og dei utfalla der summen av terningkasta er større enn eller lik 40 vert talde opp. Vi får deretter eit uttrykk for tal på gunstige utfall, delt på moglege utfall, der dei gunstige utfalla er alle utfalla slik at summen er 40 eller større, medan dei moglege utfalla er alle dei 388 800 utfalla. Det eksakte sannsynet vert 0,350.

Vi finn det empiriske sannsynet ved å bruke programmeringskoden vist på figur 3. Vi har gjennomført forsøket med 100, 1000 og 10 000 repetisjonar, høvesvis. Ved å køyre koden for 10 000 repetisjonar fekk vi eit empirisk sannsyn på 0,351. Dette eksperimentet kan gi ein illustrasjon av «store tals lov», der vi kan variere talet på repetisjonar. Vi ser frå Tabell 1 at etter kvart som vi aukar talet på repetisjonar, kjem vi stadig nærare det teoretiske sannsynet for forsøket.

```
teljar = 0
for r in range(1,7):
  for s in range(1,7):
    for t in range(1,7):
      for u in range(1,7):
        for v in range (1,11):
          for w in range (1,31):
            total = r+s+t+u+v+w
            if total>=40:
              teljar += 1
print(teljar/(6**4*10*30))
```

Figur 2: Figuren viser korleis ein kan rekne ut det teoretiske sannsynet for det andre eksperimentet.

```
import random
repetisjonar = 10000
teljar = 0
for i in range(1,repetisjonar+1):
  D6_1 = random.randint(1,6)
  D6_2 = random.randint(1,6)
  D6_3 = random.randint(1,6)
  D6_4 = random.randint(1,6)
  D10 = random.randint(1,10)
  D30 = random.randint(1,30)
  sum = D6_1+D6_2+D6_3+D6_4+D10+D30
  if sum>=40:
      teljar +=1
print(teljar/repetisjonar)
```

Figur 3: Figuren viser korleis ein kan rekne ut det empiriske sannsynet for det andre eksperimentet.

Tal på repetisjonar	Empirisk sannsyn
100	0,400
1000	0,368
10 000	0,351

Tabell 1: Utrekning av empirisk sannsyn for det andre eksperimentet, ved ulike val av repetisjonar.

Det å rekne ut empirisk og teoretisk sannsyn for denne hendinga er eit døme på ei problemstilling der programmering kan nyttast som eit hjelpemiddel i matematikkfaget, og kan knytast opp mot kompetansemålet etter 9. trinn, som seier at elevane skal «simulere utfall i tilfeldige forsøk og berekne sannsynet for at noko skal inntreffe, ved å bruke programmering» (Kunnskapsdepartementet, 2019a, s. 13). Om ein lar elevane velje tippekort etter magekjensla eller tilfeldig tipping, og gir dei kort områdingstid, kan ein i etterkant av gjennomføringa gå grundigare gjennom utrekningar knytte til hendinga. Medan det for elevane kan vere nokså greitt å kome fram til ei kvalifisert gjetting ved bruk av forventningsverdi, må det setjast av tid til å rekne på empirisk og teoretisk sannsyn ved hjelp av programmering. Dette er noko ein kan gjere anten før eller etter gjennomføringa. Dette kan vere ein sentral aktivitet i Matematikk S1, der elevane mellom anna skal «bruke digitale verktøy til å simulere og utforske utfall i stokastiske forsøk» (Kunnskapsdepartementet, 2019b, s. 5). Læraren kan også tilpasse hendinga og til dømes nytte færre terningar, slik at det vert lettare å halde oversikt og færre løkker å halde styr på. Ein kan då også rekne utan bruk av programmering i det heile.

I motsetning til det andre eksperimentkortet vist her er det felles for mange eksperimentkort at sannsynet for om hendinga vil inntreffe, eller ikkje, ligg nær kvarandre. Altså, når elevane arbeider med sannsyn og forventningsverdi gjennom terningspelet Borel, er ikkje svaret gitt for elevane, nettopp fordi utfalla av forsøka i stor grad vil variere. Difor vil spelarane ofte oppleve at utfallet med lågast sannsyn vert resultatet, og spelet gir såleis eit godt grunnlag for å kunne diskutere slump og sannsyn i spel. Dette er noko ein kan nytte vidare i arbeidet med «store tals lov».

Terningspelet Borel kan nyttast til å arbeide med kjerneelementet *resonnering og argumentasjon* i LK20 ved at læraren legg til rette for at elevane må diskutere, formulere eigne argument og forklaringar, finne samanhengar og grunngi kvifor dei meiner det dei gjer. Då kan elevane utvikle ei felles forståing for eksperimentkorta og etter kvart i sannsyn. Elevar som har erfaring med tekstprogrammering, vil kunne utforske korleis dei kan bruke programmering som eit verktøy for å rekne ut sannsynet for hendingane på eksperimentkorta. Elevane kan bryte ned hendingane i små delproblem og arbeide med å løyse kvart delproblem systematisk. På den måten kan elevane få god trening i algoritmisk tenking som ein del av problemløysingsprosessen. Slik kan læraren bruke Borel til å arbeide med kjerneelementet *utforsking og problemløysing* i LK20.

Borel – eit supplement til undervisninga i sannsyn

Borel er eit spel som skapar engasjement, og som er gøy å halde på med. I klasserommet kan vurderinga av eksperimentkorta appellere til intuisjon eller meir eller mindre kvalifiserte gjettingar. Ein kan gjere ei rask vurdering der ein er innom faglege argument, om ein trur at hendinga forklart på kortet kjem til å skje, eller kjenne på magekjensla eller tippe heilt tilfeldig. Vurderinga kan også basere seg på kva ein trur dei andre spelarane svarar, men dette har vi ikkje gått inn på i denne artikkelen. Læraren kan endre på reglane for å gjere spelet meir demokratisk, men også justere hendingane på eksperimentkorta basert på kunnskapsnivå og situasjon. På den måten kan spelet tilpassast det faglege nivået til ulike elevar. Sjølv om elevane ikkje alltid vil klare å rekne ut sannsynet på hendingane, vil dei kunne ha ein tanke om i kva grad dei trur at hendinga kjem til å inntreffe eller ikkje, og det kan leie til gode diskusjonar i klasserommet.

Terningspelet Borel finst førebels berre på engelsk, noko som kan vere ei utfordring for bruk i grunnskulen. Vi håpar på at spelet kjem på norsk i nær framtid, og at fleire vil sjå spelet både som relevant og gøy å halde på med!

Referansar

Borovcnik, M. & Peard, R. (1996). Probability. I A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (red.), *International handbook of mathematics education* (s. 239–288). Kluwer.

Johnson, R.W. (2019). Using the board game Borel to illustrate probability calculation. *Teaching Statistics*, *41*(3), 106–109. https://doi.org/10.1111/test.12201

Kunnskapsdepartementet (2019a). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nno

Kunnskapsdepartementet (2019b). *Læreplan i matematikk for samfunnsfag (MAT04-02)* Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT04-02.pdf?lang=nob

Lundström

Mäta och utforska tid i förskolan

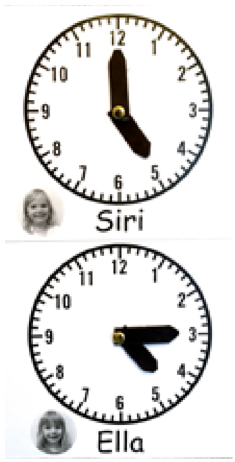
Att förstå olika aspekter av tid anses svårt för yngre barn. Mätningar innebär att jämföra storheter och att egenskaper hos föremål kan mätas och beräknas. Därför kan mätning av tid upplevas som mer abstrakt än att exempelvis mäta längd eller volym. I artikeln ges exempel på när barn i olika förskolor utmanas att utforska tid i lek och i samtal med andra barn och vuxna.

Barn ställer ofta frågan *Är det dags än?* till vuxna, och kanske svarar de *Inte ännu* eller *Snart*. Men hur förstår yngre barn ett sådant svar? Hur förstår de ett abstrakt begrepp som tid? Hur lär de sig att mäta tid? I matematik är tid en grundläggande dimension och tid mäter vi för att kunna bestämma *en exakt tid* eller *tiden mellan två tidpunkter*. Läroplanen för förskolan anger flera matematiska områden som barn ska utveckla förståelse för. Redan i förskolan får barn således erfarenheter av att mäta och uppskatta tid, samt att de får kommunicera sin begreppsliga förståelse för tid i samspel med andra barn och vuxna. En grundläggande utgångspunkt i denna artikel är att matematiskt kunnande grundläggs i sammanhang där barn i förskoleåldern möter matematik. En naturlig fråga att diskutera är då hur detta möte ska gå till. Vilka aktiviteter och material som har med tid och tidsuppfattning att göra ska barn få erfarenheter av?

Artikkelen har vært publisert i Nämnaren, nummer 1/2019.
Marita Lundström
Högskolan Väst
marita.lundstrom@hv.se

Att mäta och förstå tidpunkter och tidslängder

Att undervisa barn i förskolan om tid och tidsaspekter kan vara svårt. På avdelningen Ängen har lärarna hittat olika sätt att få barn att uppmärksamma och mäta tid och bekanta sig med mätverktyget klockan.



För att visa tiden för barnens hemgång har lärarna tillverkat en klocka till varje barn och bredvid dessa finns en vanlig fungerande väggklocka. Barnen kan jämföra tid genom att se på sin egen klocka när de ska gå hem och se hur mycket den riktiga klockan är. När jag besöker förskolan berättar lärarna på avdelningen för 3–5-åringar att barnen är noga med att föräldrarna ställer deras klocka varje dag så att de kan se vilken tid de ska gå hem. En effekt av detta är att barnen lär sig att identifiera ett exakt klockslag. När de jämför tiden på sin klocka och tiden som den riktiga klockan visar ges barnen också möjligheter till att jämföra och mäta både tid och tidslängder.

– *Vilken tid ska jag gå hem?* (exakt tidpunkt)
– *Hur lång tid är det kvar tills jag ska gå hem?* (tidslängd)

Barn möter begrepp som används för att fastställa tidpunkter när de får höra att de blir hämtade *Klockan tjugo minuter över fyra* (16:20) eller *Klockan fem* (17:00) samtidigt som de kan jämföra tiden på klockans urtavla och se hur visarna pekar. Med klockans hjälp får barnen ett matematiskt redskap att uppfatta tidsangivelser som vuxna använder.

En variant för att visa tiden för hemgång för de yngsta barnen är en tidsföljd där hela dagens aktiviteter finns med som bilder. Förskollärarna betonar att barnen känner igen bilderna, de går fram och pekar på bilden ”hem” när det är dags. Barnen förstår bilderna i tidsföljden som en slags klocka.

När ett barn frågar *Hur lång tid det är kvar till jag ska gå hem?* kan barnet få till svar *Snart* – eller det motsatta – *Det är lång tid kvar.* Andra tidsangivelser som används kan vara: *bara tio minuter kvar, kommer om en kvart* eller *om två timmar.* I kommunikationen använder den vuxne matematiska begrepp för att kommunicera och fastställa tidslängder eller exakta tidpunkter. Barn i förskoleåldern har kapacitet för att lära sig grundläggande matematik men en del barn får inte tillräckligt med kommunikativt stöd från sin omgivning. Genom att lärarna utmanar barnen att kommunicera begrepp som anger olika tidpunkter och tidslängder får alla barn rika erfarenheter av tid. Erfarenheterna är både språkliga och visuella genom att tiden ”görs synlig” med klockor i barnens höjd och att klockornas tid är relaterade till dem själva, det vill säga deras hemgång. Barnen får också rika tillfällen att bekanta sig med det mätverktyg som mäter tid – klockan.

Camilla Björklund och Hanna Palmér beskriver betydelsen av att barn får *matematisera* i förskolan, i betydelsen att barn skapar mening av världen omkring dem och att den upplevs som meningsfull. Med de egentillverkade klockorna och den riktiga klockan kan barnen jämföra olika aspekter av tid. De utgör matematiska redskap, mätverktyg, för att barnen ska utveckla sin förståelse för olika aspekter av tid och av att mäta tid.

Tidsföljder

Begrepp som används för att kommunicera tidsföljder på en förskola kan till exempel vara: ”*Nu* äter vi lunch, *sedan* ska vi vara ute på gården en stund” eller ”När vi har ätit klart mellanmålet går vi ut på gården igen”. Redan vid två-tre års ålder har barn en förmåga att uppfatta tidsföljder. Genom att barn får erfara rutiner i sin vardag utvecklar de kunskap om tidsföljder som är knutna till begrepp som anger tid. Ett väl synligt dagsschema eller veckoschema kan bidra till att tidsföljder görs synliga och att barnen kan förstå tid som ”en ström av händelser” som ständigt äger rum. Barn behöver därför många erfarenheter av exempelvis ”hur lång tid” en aktivitet tar. Därigenom utvecklas också barns förmåga till tidsuppfattning och förmågan att planera sin tid. Barns tidsuppfattning utvecklas genom samspel och interaktion i vardagssituationer. Det är därför viktigt att barn i förskoleåldern får tillfälle att uppmärksamma och kommunicera tid och tidsföljder i situationer som rör dem själva.

Tidsord relaterade till den dagliga verksamheten

Barn resonerar matematiskt i tidig ålder. Det matematiska språket kan barn inte tillägna sig isolerat utan deras kommunikativa förmåga hör ihop med matematisk begreppsbildning. Detta innebär att användningen av begreppsmässig kunskap utvecklas genom resonemang med andra. I förskolan möter barn ord som beskriver och handlar om tid. De kan relatera till ordningsföljder som handlar om tidsplanering, relativ tid som handlar om tidsorientering samt tidsuttryck som beskriver absolut tid. Några exempel:

– *ordningsföljder:* före, efter, först, sist, snart, senare, strax, i morgon
– *relativ tid:* en stund, ett ögonblick, en dag, en natt, ett dygn, en vecka
– *absolut tid:* en minut, två timmar, klockan fyra.

Genom att använda *tidsord* och förstå vad dessa betyder i kontextuella sammanhang lär sig barn också att överblicka tidsrymder. För att kunna mäta tid behöver barnen grundläggande insikter om att tiden inte är reversibel, det vill säga att tid fortgår genom att händelser läggs efter varandra. Tid kan därför aldrig ”gå tillbaka” men vi kan tala om tid i termer av ordning av händelser, exempelvis *nutid, dåtid* eller *framtid.*

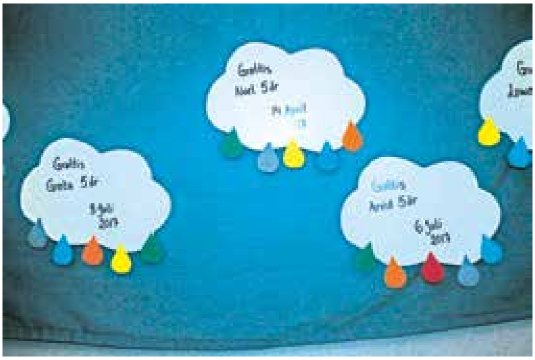
Samtal vid lunchbordet

I ett samtal mellan en lärare och ett barn på avdelningen Myran används begrepp som beskriver nutid, dåtid och framtid. Samtalet utspelar sig under lunchen när barnen börjar prata om sina födelsedagar. Rosalie vet att hon snart ska fylla år och hon frågar sin lärare Monika som sitter med vid bordet: *Hur många dagar är det kvar till min födelsedag?* Monika svarar: *Oj, låt mig se. Idag* (nutid) *är det den 29 april och din födelsedag är den 2 juni* (framtid). *Då måste det vara 34 dagar kvar.* Rosalie frågar: *Är det mycket … 34 dagar?* Monika svarar: *Kommer du ihåg när vi firade påsk* (dåtid) *och vi åt påsklunch? Det är ungefär så lång tid kvar till din födelsedag.* Genom att resonera om tidpunkter och ordningsföljder får barnet möjligheter att utveckla tidsperspektiv. I kommunikationen används tidsbegrepp som hjälper flickan att bestämma och uppskatta tid för händelser, ordningsföljder och exakta tidpunkter, eller tid mellan två tidpunkter.

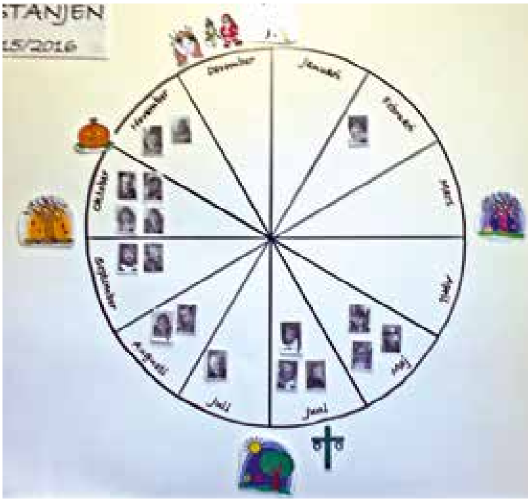
Födelsedagskalendrar på några förskolor

På avdelningen Myran står två flickor framför avdelningens födelsedagskalender. De tittar och jämför hur många år barnen på avdelningen ska fylla nästa gång. Barnen har fått vara med och tillverka korten med hjälp av en vuxen. På korten kan de se barnens fotografi och den siffra som anger hur många år de ska fylla. Födelsedagskorten sitter blandat utan någon särskild struktur. Flickorna kan jämföra sina åldrar genom att titta på siffrorna på korten, men det saknas information om deras födelsemånader och födelsedatum.

På avdelningen Ängen har lärarna gjort en kalender som små moln på en blå himmel, där antalet droppar visualiserar antal år som barnen ska fylla nästa gång. Informationen som anges i molnet är: *Greta 5 år, 8 juli 2017.* Dropparna kan ses som representationer för deras ålder och de kan räknas, men för att kunna jämföra sina födelsemånader behöver barnen vara läskunniga. Kalendern sitter på en vägg i ett av lekrummen där de vuxna inte är så ofta. Den är placerad tämligen högt och barnen behöver en stol för att kunna utläsa datum i de små molnen och jämföra sina åldrar.



På avdelningen Rödluvan är födelsedagskalendern placerad högt uppe vid taket. Det motiverar lärarna med att de minsta barnen inte kan låta den vara ifred. Här har kalendern till största delen ett socialt fokus och inte ett matematiskt.



På avdelningen Kastanjen har lärarna gjort en födelsedagskalender i form av ett cirkeldiagram. Varje månad har en "tårtbit" och i den månad som barnen fyller år finns deras fotografi. Cirkeln visar också exempel på årets högtider som exempelvis påsk, midsommar, lucia och julafton. I den här födelsedagskalendern kan barnen jämföra om det är fler barn som fyller år samma månad. De kan även se och relatera sin födelsedag genom att räkna tårtbitar: *Det är tre tårtbitar tills jag fyller år* eller uppskatta att det är lång tid kvar till födelsedagen genom att jämföra tårtbiten vid påsk och hur långt det är kvar till midsommar. Kalendern är uppsatt på en av väggarna i det stora rummet där de har samling varje dag och där de vuxna ofta befinner sig.

Vad och hur barn utforskar aspekter av tid

Tid är kanske inte det mest vanliga matematiska område som förskollärare väljer att undervisa om. När det finns en medvetenhet om *vad* och *hur* barn utforskar aspekter av tid kan barn ges rika tillfällen att utveckla sitt matematiska kunnande. För att förstå tidsbegrepp och redskap är det av betydelse att barnen kan utläsa information och att klockor och kalendrar placeras där de kan utforska dem. Förutom placeringen av redskapen är det också viktigt att tänka igenom

hur de utformas. På detta födelsedagskort är det ganska troligt att yngre barn har svårt att utläsa informationen *3 ÅR, 13/9 -15*.

Tid består av delar och helheter; ett år består av 12 månader och en vecka av sju dagar. På en förskola blev detta konkret då varje dags datumlapp sattes upp noggrant. Barnen tycket det var spännande – eller häftigt som de uttryckte det – att se så många dagar det var på ett helt år.

Matematik måste knyta an till de yngre barnens verklighet och i en födelsedagskalender där barnen är subjekt, ges de möjlighet att relatera tid som tidslängder och tidpunkter till andra barns födelsedagar. På en förskola fanns en kalender som sträckte sig runt ett rum, som en tidslinje med 365 dagar, där barnen kunde upptäcka tidsflödet dag för dag under ett helt år. Barnens födelsedagar och högtider var placerade längs tidslinjen. Ett sätt att förstå tid är att mäta när en händelse startar och slutar. Genom att utforma avdelningens födelsedagskalender som cirkulär, kan barnen upptäcka att månader, dagar, årstider och högtidsdagar återkommer.

Matematiska färdigheter utvecklas över tid och i kommunikation med andra. Det är därför viktigt att förskollärare ser födelsedagskalendern som ett matematiskt och kommunikativt redskap där barnen kan föra logiska resonemang. Genom utforskande samtal och matematiska redskap såsom tillverkade klockor och en födelsedagskalender ges de möjligheter till att utveckla sitt matematiska tänkande och sin förståelse för olika aspekter av tid i förskolan.

Litteratur

Björklund, C. & Palmér, H. (2018). *Matematikundervisning i förskolan. Att se världen i ljuset av matematik.* Natur och Kultur.

Boaler, J. (2009). *An elephant in the classroom. Helping children learn and love maths.* Souvenir Press.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publisher.

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D. & Barros, R. (2015). Assessing quantitative reasoning in young children. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(2–3), s. 178–196.

Askevold

Julekorger

Eg gler meg alltid til desember, då kan eg med godt samvit starte arbeidsdagen med å lage meg ei julekorg. Både som ein fin start på dei mørke dagene i desember, men og som eit matematisk puslespel. Kollegaene mine ser av og til rart på meg, men og litt spørjande, er dette matematikk? Eg vil påstå det, og nyttar eitkvart høve til å flette det inn i aktivitetar med studentar eller elever. Kva med å lage seg ein adventskalendar av julekorger, ei korg for kvar dag. Julekorga kan være ei gåve i seg sjølv, eller ein kan gøyme ein liten skatt i julekorga.

Det fyste matematiske området eg tenker på når det gjeld fletting av julekorger, er symmetri, geometriske figurar og problemløysing. Ser ein litt meir på julekorger, eller aktivitetar rundt dei, kan ein fint flette inn talrekke som Fibonaccitala. Julekorger er og ei fin form for etnomatematikk dei fleste kjenner, men ikkje tenkjer over det matematiske i.

Vidare vil eg ta for meg ulike julekorger og mønster ein kan eksperimentere med i aktivitetar med elevar. Eg har og laga eit dokument med mønster til julekorger, som du kan finne her: https://www.tangenten.no/filer/2022/julekorger.pdf. Du kan godt nytte desse til å lage dine eigne julekorger, men mykje av moroa, og det matematiske, kjem fram når ein lagar sine eigne mønster.

Figur 1

Artikkelen har vært publisert i Tangenten, nummer 4/2009.
Gjert Anders Askevold
Høgskulen på Vestlandet
gjert.anders.askevold@hvl.no

Mal

I arbeidet med julekorger kan det vare lurt å ha ein mal (sjå figur 1), som ein nyttar til å lage mønster ut frå, og som ein kan kopiere opp og lage fleire ulike mønster av. Malen er sett saman av eit kvadrat, med ei halvsirkel på eine sida. Kvadratet skal ein klippe opp i strimler og flette, det er på kvadratet mønsteret (eg kallar det vidare for mønsterflata) kjem fram i den ferdige julekorga. Storleiken på hjartet blir bestemt av kvadratet.

Når ein skal til å klippe opp strimlene ein skal flette, er det svært ofte teneleg å klippe litt opp på halvsirkelen, for å gjere flettinga lettare. Eventuelt kan ein «forlengje» kvadratet med eit rektangel, dette er for å gjere strimlene lenger og betre å flette med. (eg kallar rektangelet for klippefelt). Bredda på rektangelet har eg ofte på ca ½ cm,

Papirkvalitet

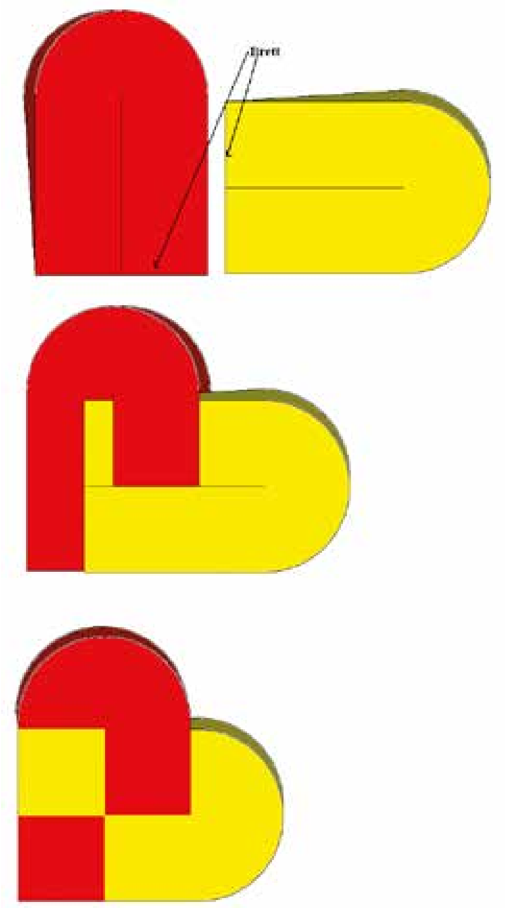
Ein kan lage julekorger av dei fleste papirtypar, ein kan til og med lage dei av stoff eller filt. Det viktige er at ein har to ulike fargar på papiret, gjerne litt «julete» fargar, som raudt og grønt. Sjølv nyttar eg ofte farga kopipapir. Kopipapir er ofte i A4 storleik, og set ofte litt avgrensingar med omsyn på storleiken av julekorgene.

Ein får svært fine korger av glansa papir, som ein kjøper i rullar, men ein kan like godt nytte julegåvepapir. Desse papirtypane kjøper ein ofte i rullar, før ein skal bruke dei bør ein ta dei ut av rullane og legge dei under noko tungt, slik at ikkje papiret krøllar seg, og lagar problem når ein skal til å flette korgene.

Når ein har malen (malane) klare, kan ein setje i gang å lage mønster. Dei fyste hjarta ein lagar med elevar kan godt være enkle. Med to eller tre strimle. Ein vil få fram fine symmetriske mønster med desse og, samstundes som ein får arbeida med prinsippet for fletting av julekorger. Når eleven har klart å lage desse, og sett det fine «sjakkmønsteret» ein får fram, kan ein gå i gang med fleire og meir avanserte mønster.

Fletting

Bruk malen og lag to «doble» flettestykker. Skal flettinga bli ei korg, er bretten vist på teikninga viktig. En treng alltid to flettestykker, i ulikt farga papir. Den enklaste korga å starte med, har to strimler som vist på figur 2. Når ein flettar plasserar ein dei to bitane, som vist på teikninga og flettar. Prinsippet er: Stikk den første gjennom, den neste trer ein over.

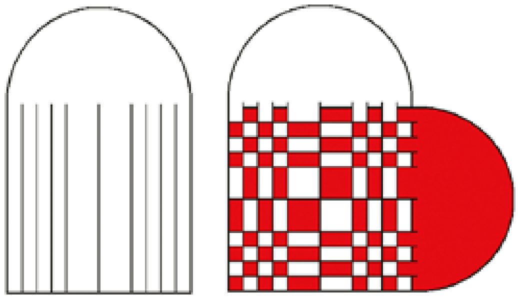


Figur 2

Rette strimlar

Til no har me arbeida med grunnforma, som er lik i dei fleste julekorger. Me er no klare til å lage fleire og meir avanserte mønster. Å lage mønster, kan gje spanande matematiske utfordringar og utforskingar. Kven kan lage det mest spanande mønsteret? Mønstera kan konstruerast med passar og linjal. Ein kan snakke om halvering, deling i tre, fire osv. Korleis kan ein konstruere det? Delelinjene skal alltid gå frå den nedste delen av mønsterflata opp mot halvsirkelen. Teknisk sett er det nok å klippe opp til der rektangelet startar. Men for å gjere flettinga enklare, klipper me opp klippeflata og.

Med like bredder får me «sjakkmønster» i julekorga. Med ulike bredder på strimlene, kan me få fram endå meir spanande mønster. Eit eksempel kan være julekorga i figur 3. I denne julekorga har strimlene bredde 1:2 i forhold til kvarandre. I tillegg til speilsymmetri, får me og ein fin rotasjonssymmetri fram i denne korga.

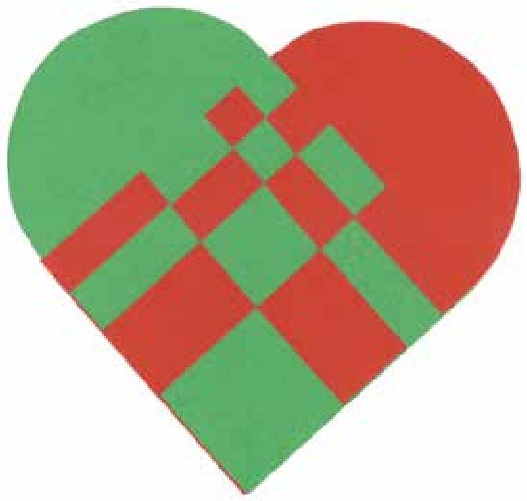


Figur 3

Kva med å nytte Fibonaccirekka som inspirasjon til ei julekorg? Fibonaccirekka startar med: 1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13… der det neste talet er summen av dei to føregåande. Om me let bredda på strimlane være 1 cm, 1 cm, 2 cm og 3 cm, kan me få fram mønsteret som vist på figur 4. Legg merke til symmetrien som kjem fram i den ferdige julekorga. Fiboanccirekka er berre ei av mange talrekker, kan ein nytte andre?

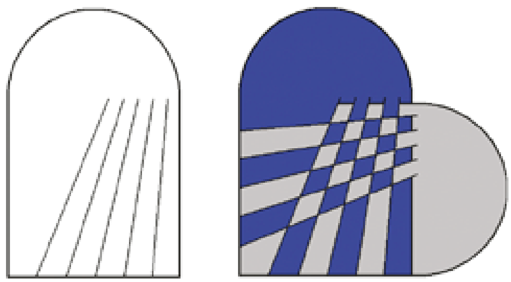
Perspektivisk mønster (anamorft julehjarte)

Ved å klippe på strimlene på skrå, endrar mønsteret karakter, og blir til eit fordreia sjakkmønster. Det ferdige mønsteret blir ein projeksjon av «sjakkmønsteret». Ein slik projeksjon blir kalla for ein anamorfose[1], som er eit kjent både



Figur 4

i kunsten og i perspektivteikning. Ser ein julekorga i figur 5 frå ein bestemt vinkel, vil me sjå sjakkmønsteret slik ein vanlegvis ser det. Anamorfe bileter kan ein knytte til perspektivteikning, vil du arbeide, eller lese meir, om anamorfe bileter, sjå *Matematikkdagshefte 2010*.

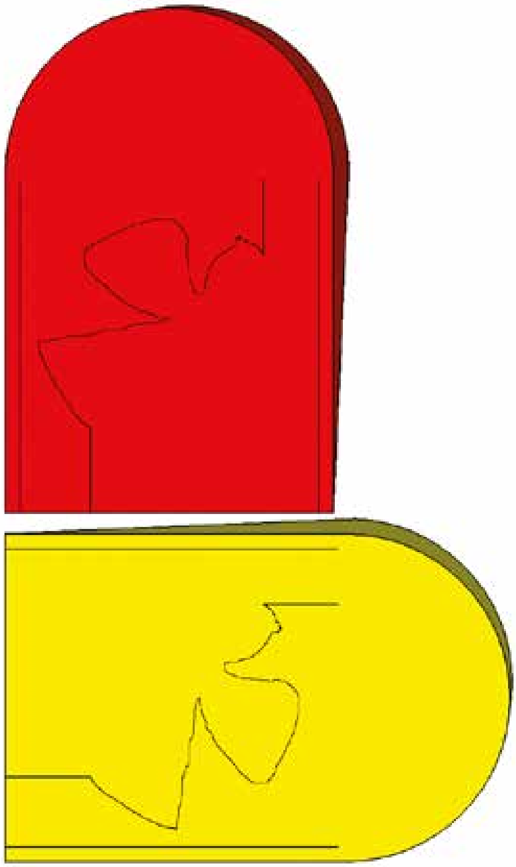


Figur 5

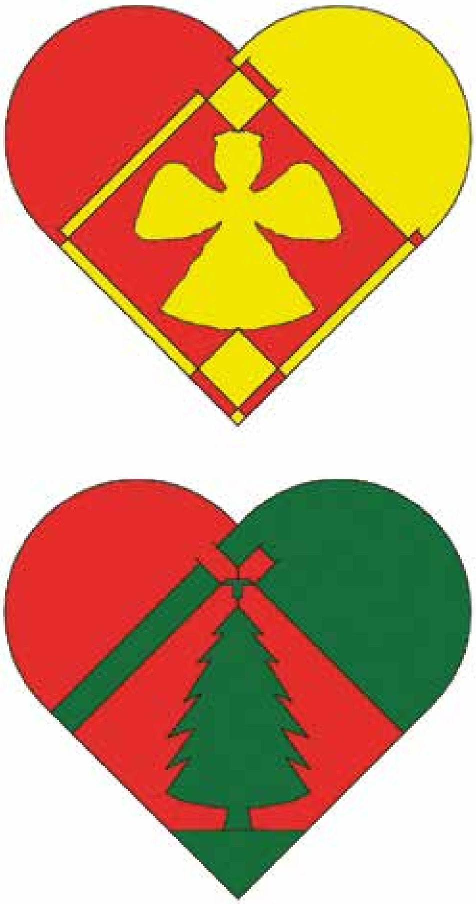
Speilsymmetriske julekorger

Ein siste variant av julekorgmønster eg vil ta med her, er dei der ein kan få fram symmetriske figurar som englar, juletre, lys osv. Desse ser imponerande ut, men er faktisk enkle å lage.

Ein startar med malen, og teiknar inn diagonalen på mønsterflata. Det er diagonalen som dannar symmetrilinja for mønsteret i den ferdige julekorga.



Figur 6



Figur 7

I figur 6 har eg teikna ein halv engel som ligg inntil symmetrilinja. For å kunne klippe ut strimler til fletting, teiknar (eventuelt konstruerar) eg ei linje frå endepunkta på engelen på diagonalen. Slik blir at mønsterflata blir delt i to "flettestrimler". Dei heiltrukne linjene i figur 6 er linjene ein skal klippe etter, medan dei grå stipla linjene er hjelpelinjer.

Når ein har klipt etter denne linja, kan ein flette ei korg med ein engel. Vil ein gjere korga litt meir spanande, kan ein klippe mønsterflata opp i fleire strimler. Når ein skal flette med slike asymmetriske grunnmønster (som ein halv engel), er det viktig å setje dei saman slik at mønsteret kjem rett fram, som vist i figur 7.

Kos deg med julekorgene, og lag deg nye mønster. Kun fantasien set grenser.

Note

1 En anamorfose er en forvridd projeksjon eller et fortegnet perspektiv, især et bilde som er formet slik at det blir forståelig bare når det blir betraktet på en spesiell måte eller fra et bestemt punkt. http://no.wikipedia.org/wiki/Anamorfose

Adventskalender

Denne kalenderen av Henrik Kirkegaard ble publisert i Tangenten, nummer 4/2003.

1

I skolebussen snakket noen elever om alderen på læreren. Forslagene var 24, 27, 31 og 39 år. Men alle gjettet feil, nemlig 1, 3, 6 og 9 år feil.

Hvor gammel var læreren?

2

En gang i november var natten 5½ time lengre enn dagen.

Hvor lang var dagen?

3

Hvis du snur en venstre-hånd-hanske på vrangen, er den fremdeles til venstre hånd?

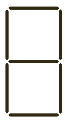
Hva med en strømpe?

4

Hvor stor forskjell er det mellom null komma ni og null komma ti?

5

Tall på skjermer er ofte bygget opp av små linjestykker slik:



Hvilket linjestykke blir oftest benyttet og hvilket minst i tallene 0–9?

6

Finn et firesifret tall som er likt lest fra høyre og fra venstre, og også lest på hodet og speilbildet er også det samme.

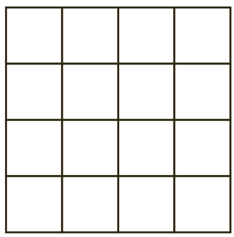
Finnes det flere svar?

7

Hvor mange ganger i løpet av et døgn passerer den store viseren på en klokke den lille?

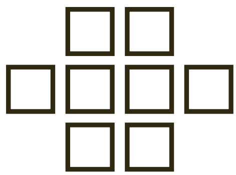
8

Hvor mange kvadrater er det i denne figuren?



9

Sett inn tallene fra 1 til 8 slik at ingen nabotall står ved siden av eller på skrå av hverandre!



10

Kan du lage 7 likesidede trekanter ved hjelp av 9 fyrstikker?

11

Hvor mange speilingsakser finnes det i en åttekant?

12

1, 4, 9 …

Hva er neste tall i tallrekken?

13

Finn forskjellen mellom summen av alle partallene fra og med 0 til og med 100 og summen av oddetallene fra og med 1 til og med 99.

14

Finn det minst mulige resultat hvis du må bruke disse tallene i et regnestykke:

2, 4, 5, 6 og 9

15

Det ligger 3 kort i en bunke. Rett over en dame ligger det en knekt. Rett under en dame ligger det en dame. Rett over en spar er det en spar. Rett under en spar er det en hjerter.

Hva ligger i bunnen?

16

Finn fire påfølgende hele tall som gir summen 178.

17

Hvor mange tall under 124 kan divideres med 2, 3 og 5?

18

3600, 1800, 900 …

Hva er neste tall i tallrekken?

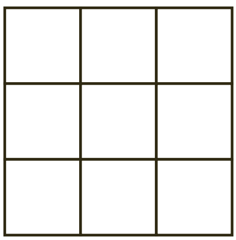
19

Sett inn regnetegn så oppgavene blir riktige!

3 3 3 3 = 1
3 3 3 3 = 2
3 3 3 3 = 3
3 3 3 3 = 4
3 3 3 3 = 5
3 3 3 3 = 6

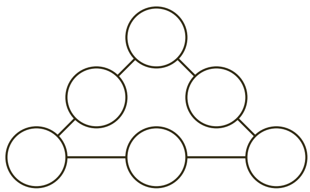
20

Hva er det største antall ruter du kan sette kryss i, uten å få 3 på rad?



21

Sett inn tallene 1, 2, 3, 4, 5 og 6 slik at summen av sidene i trekanten blir 10!



22

Da min mor var 33 år, var jeg 8 år.

Nå er hun dobbelt så gammel som meg.

Hvor gammel er jeg nå?

23

Hvor mange timer er det i år 2023?

24

Velg et tilfeldig tall. Pluss på 10, gang med 2, pluss på 4 og trekk fra det dobbelte av det opprinnelige tallet.

Prøv med et nytt tall.

Hva oppdager du?

Opsal, Smestad

Norske læreplaner (del 1)

Læreplaner er helt sentrale dokumenter i skolens virksomhet, og nye læreplaner får stor oppmerksomhet. Å studere tidligere tiders læreplaner er imidlertid også interessant – det kan stimulere til refleksjon rundt matematikkfagets rolle gjennom tidene, vise hvordan matematikkfaget har utviklet seg, og gi noen aha-opplevelser om at ting vi er opptatt av, kan ha vært vektlagt i over hundre år allerede. I en serie artikler vil vi se på læreplanene i regning/matematikk i norsk skole (for allmuen) fra 1739 til i dag.

Kort riss over norsk skolehistorie

Trondheim katedralskole regnes som Norges eldste skole, og ble sannsynligvis startet rundt 1080. Andre store byer (Oslo, Bergen og Hamar) fikk katedralskoler midt på 1100-tallet. Hovedmålgruppen for disse skolene var gutter som ville bli prester, og pensum var trivium (grammatikk, logikk og retorikk) og quadrivium (musikk, aritmetikk, geometri og astronomi).

Hilde Opsal
Høgskulen i Volda
ho@hivolda.no

Bjørn Smestad
Høgskulen i Volda
smestadb@hivolda.no

Matematiske emner blir første gang nevnt som undervisningstema i skoleforordningen av 1604 (Frøyland, 1965, s. 3). Det skulle undervises i De fire species (addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon), brøk, likninger med en ukjent og begynnelsesgrunnene til geometri. «Skulereformen av 1604 har fått vidtrekkjande verknad på det dansk-norske skuleverket, for denne skuleplan vart i det store og heile gjeldande i over 130 år, nemleg til den store skulereformen under Christian VI i 1739» (Kolsrud, 1962, s. 123). Ifølge Brun (1962, s. 50) var blant annet den pytagoreiske læresetningen en del av matematikken som skulle inngå. Lærebøkene på denne tiden var stort sett på latin. Men det som regnes som Norges første lærebok i matematikk, *Arithmetica Danica* fra 1645, ble skrevet på dansk (med innslag av norsk) for bruk ved Trondheim katedralskole av Tyge Hanssøn (Botten, 2009a, 2009b). I denne artikkelserien vil vi imidlertid konsentrere oss om skoleslag som skulle nå bredere lag av folket.

I tillegg til læreplaner var det også en del lover som ga viktige føringer. Kirkeordningslovene av 1537 og 1539 ga regler om undervisning, som en følge av reformasjonen (Haraldsø, 1989, s. 11). Fra 1719 (Fredrik IVs forordning) var alle fattige barn pålagt å møte i kirken for religiøs opplæring. I 1739 kom den første skoleloven som fastslo regler for undervisning av allmuen utenfor byene i Norge. Regning var en del av det barna skulle lære, sammen med kristendom, lesing og skriving – og elevene måtte undervises til de hadde «lærdt færdig at læse i Bog, og veed deres Christendom» (pkt. 38).

Ved utgangen av 1700-tallet var det fortsatt bare omtrent 100 skoler i norske bygder (Dokka, 1988, s. 20). Lover om Almueskoler kom i 1827 (om skoler på landet), 1848 (om skoler i Kiøbstæderne) og 1860 (om skoler på landet). Fra 1860 var faste skoler hovedordningen – før var omgangskole mer vanlig. I 1889 kom en ny skolelov hvor hensikten var å åpne muligheten for videre utdanning etter folkeskolen for flere. I folkeskoleloven i 1936 var enhetsskole et sentralt prinsipp – alle elever skulle gå i det samme skoleslaget og ha mulighet til å velge videre utdanning på grunnlag av dette. Sjuårig skolegang ble obligatorisk i folkeskolelovene av 1959, og i 1969 kom så Lov om grunnskolen, hvor skoleplikten var utvidet til 9 år. Fra 1997 ble grunnskolen 10-årig, og ny felles lov for grunnskolen og videregående opplæring kom i 1998 (opplæringslova).

Vi vil videre i artikkelserien fokusere på læreplanene.

Vår vektlegging

Alle læreplaner kommer med noen «slagord» som skal overbevise lærere, elever og andre om at den nye læreplanen er bedre enn den forrige. Dette kan være ord som «arbeidsskole», «dybdelæring» eller «kunnskapsløft». Oppegående og kritiske skolefolk kan naturligvis ikke ta slike ord og uttrykk for god fisk. For å vurdere læreplanene opp mot hverandre holder det ikke å se på hva de som innførte de enkelte læreplanene, påsto, en må gå til kildene og sammenlikne læreplanene selv. I disse artiklene vil vi vise eksempler på en slik analyse av læreplaner.

I omtalene av læreplanene vil vi konsentrere oss om noen temaer. For det første vil vi se på om læreplanene sier noe om *hvorfor* man skal lære matematikk, vi vil se på *hvilken* matematikk som er inkludert, og hva som fremheves om *arbeidsmåter* i faget. I tillegg vil vi se etter aspekter som nylig har vært fremme i diskusjonen om dybdelæring (Smestad, 2018): «at elevene skal få varig forståelse, at de skal se sammenhenger i fag og mellom fag, at elevene skal reflektere over egen læring, og at de skal kunne bruke det de har lært på ulike måter i kjente og ukjente situasjoner.»

Alle læreplanene er lett tilgjengelige på nettet, de fleste hos Nasjonalbiblioteket.[1] Vi håper at artiklene gir noen nye perspektiver i møte med læreplaner, og at artiklene kan være en inngang til å undersøke andre aspekter ved læreplanhistorien – og å gå til primærkildene heller enn å stole på sekundærkilder. Noen lærerstudenter kan også få lyst til å skrive en masteroppgave om læreplanhistorie.

I denne og kommende artikler vil vi fortelle om læreplanene vi har hatt siden 1739. Vi bruker ordet «læreplaner» i utvidet betydning: Vi tar med en forordning fra 1739 og deretter 1827- og 1889-lovene, som til å begynne med ikke hadde nasjonale, styrende læreplaner knyttet til seg. Etter det har alle lover blitt fulgt av mer eller mindre omfattende læreplandokumenter. Disse har hatt svært varierende omfang. Sidetallet sier litt om detaljnivået, og dermed noe om i hvor stor grad myndighetene har sett behov for å detaljstyre lærerne – selv om det hører med til historien at noen planer har hatt eksplisitte kommentarer om at lærerne selv må gjøre et utvalg av lærestoffet. En liten tabell (tabell 1) som viser utviklingen i matematikklæreplanenes omfang, kan derfor være på sin plass.

	1739	1889	1922/5	1939	1960	1971 Alt. 2	1974	1987	1997	2006	2020
Antall ord(o) / sider(s)	<10o	<20o	9s/7s	28s	42s	38s	15s	10s[2]	22s	13s	15s

Tabell 1 Ord- eller sidetall i matematikkdelene av læreplanene

Med forbehold om at det ville vært tryggere å måle i antall ord enn sider, så gir tabellen et inntrykk av at læreplanene nådde sitt klimaks, størrelsesmessig, da skolen skulle endres mye, med niårig skole fra 1960 og et radikalt nytt alternativ i 1971. Dette inntrykket styrkes av omfanget i 1997, da tiårig grunnskole ble innført. Men omfanget på læreplanene er nok også uttrykk for en mer generell holdning til hvor sterkt skolen skal styres fra nasjonalt hold.

Det kan også være interessant å se på hvordan timetallet i regning/matematikk har variert (se tabell 2)[3]. (De ulike planene har ulik fleksibilitet for avvik fra disse tallene. Det kan dessuten ha skjedd justeringer i løpet av en læreplans virketid.)

I byfolkeskolen i 1925 hadde jentene lavere uketimetall enn guttene: De hadde 4 timer regning i 5. og 6. klasse, mot guttenes 5 timer. I tabell 2 er guttenes timetall brukt.

Tabell 2 viser at det aldri har vært så mange timer obligatorisk matematikkundervisning for norske barn/ungdommer som det er fra 2020. Men planen fra 1925 la opp til mer undervisning i regning (for guttene) enn 2020-planen har, hvis man bare ser på de første sju årene. Skillet mellom by og land var stort på begynnelsen av 1900-tallet, men ble mindre i 1939 og helt borte fra 1969.

Nå vil vi gå over til å se på de enkelte læreplanene.

1739

Vi vil sitere én (lang) setning fra *Forordning Om Skolerne paa Landet i Norge* (figur 1):

> Vi Christian den Siette, af Guds Naade Konge til Danmark og Norge, de Venders og Gothers, Hertug udi Slesvig, Holsteen, Stormarn og Dytmersken, Græve udi Oldenborg og Delmenhorst; Giøre vitterligt, at som Forfarenheden viser, hvilken usigelig Skade Kirken og Landet derved tilvoxer, at Ungdommen. helst af den gemene Allmue, hidtil ey over alt har havt Leylighed nok, saaledes som skee burde, at oplæres i sin Christendoms Grund, samt i Læsen, Skriven og Reignen, og derover til Deels i saadan en ynkelig Uvidenhed er opvoxen, at de hverken i det Aandelige eller Legemlige veed rettelig at søge og befordre deres eget Beste: saa have Vi anseet det for een af de største Velgierninger

<table>
<tr><th></th><th>1889B</th><th>1889L</th><th>1922L</th><th>1925B</th><th>1939B</th><th>1939L</th><th>1960</th><th>1971
1974</th><th>1987</th><th>1997</th><th>2006</th><th>2020</th></tr>
<tr><td>1</td><td>120</td><td>45</td><td>54</td><td>120</td><td>86</td><td>60</td><td>86</td><td>83</td><td rowspan="3">305</td><td rowspan="4">399</td><td rowspan="7">812</td><td rowspan="4">560</td></tr>
<tr><td>2</td><td>120</td><td>45</td><td>54</td><td>120</td><td>86</td><td>68</td><td>86</td><td>83</td></tr>
<tr><td>3</td><td>120</td><td>45</td><td>54</td><td>120</td><td>114</td><td>68</td><td>86</td><td>111</td></tr>
<tr><td>4</td><td>90</td><td>45</td><td>54</td><td>150</td><td>114</td><td>68</td><td>114</td><td>111</td><td rowspan="3">305</td></tr>
<tr><td>5</td><td>90</td><td>45</td><td>54</td><td>150</td><td>114</td><td>68</td><td>114</td><td>83</td><td rowspan="3">328</td><td rowspan="3">328</td></tr>
<tr><td>6</td><td>120</td><td>45</td><td>54</td><td>150</td><td>143</td><td>68</td><td>114</td><td>83</td></tr>
<tr><td>7</td><td>90</td><td>45</td><td>54</td><td>150</td><td>143</td><td>68</td><td>114</td><td>111</td><td rowspan="3">305</td></tr>
<tr><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>143</td><td>111</td><td rowspan="3">314</td><td rowspan="3">313</td><td rowspan="3">313</td></tr>
<tr><td>9</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>143</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>SUM</td><td>750</td><td>315</td><td>378</td><td>960</td><td>798</td><td>465</td><td>998</td><td>777</td><td>916</td><td>1040</td><td>1125</td><td>1201</td></tr>
</table>

Tabell 2: Oppsummering av timetallet (i klokketimer) til regning/matematikk 1889–2020

> for Vore kiære og troe Undersaatter, og for en uforbigiengelig Nødvendighed for Landet, efter Vores Høyst Saligste Herr Faders høylovlig Ihukommelse Hans Exempel, at lade Danske Skoler over alt i Vor Rige Norge paa en bestandig Fod saaledes indrette, at alle og enhver, end og de fattigste Børn over alt paa Landet kunde tilstrækkeligen undervises om Troens Grund samt Salighedens Vey, Orden og Middeler, efter Guds Ord og den Evangeliske Kirkes sande i Børne Lærdommen korteligen forfattede Lære, *saa og i at læse, skrive og reigne, som saadanne Videnskaber, der ere alle og enhver, af hvad Stand og Vilkor de end maatte være, nyttige og fornødne,* og til den Ende allernaadigst at anbefale Vore Stifts-Amtmænd og Bisper over alt i Vor Rige Norge, saadanne Skolers Indrettelse, hvor de behøves, og det ey er gandske ugiørligt, saa snart mueligt, paa følgende Maade at besørge:


Vi Christian den Siette, af Guds Naade Konge til Danmark og Norge, de Venders og Gothers, Hertug udi Slesvig, Holsteen, Stormarn og Dytmersken, Grave udi Oldenborg og Delmenhorst: Giøre vitterligt, at som Forfarenheden viser, hvilken usigelige Skade Kirken og Landet derved tilvoxer, at Ungdommen helst af den gemeene Almue, hidtil ey over alt har havt Leylighed nok, saaledes som ikke burde, at oplæres i sin Christendoms Grund, samt i Læsen, Skriven og Reignen, og derover til Deels i saadan en ynkelig Uvidenhed er opvoxen, at de hverken i det Aandelige eller Legemlige veed rettelig at søge og befordre deres eget Beste: saa have Vi anseet det for een af de største Velgierninger for Vore kiære og troe Undersaatter, og for en uforbigiengelig Nødvendighed for Landet, efter Vores Høyst Saligste Herr Faders høylovlig Ihukommelse Hans Exempel, at lade Danske Skoler over alt i Vor Rige Norge paa en bestandig Fod saaledes indrette, at alle og enhver, end og de fattigste Børn over alt paa Landet kunde tilstrækkeligen undervises om Troens Grund samt Salighedens Vey, Orden og Middeler, efter Guds Ord og den Evangeliske Kirkes sande i Børne Lærdommen korteligen forfattede Lære, saa og i at læse, skrive og reigne, som saadanne Videnskaber, der ere alle og enhver, af hvad Stand og Vilkor de end maatte være, nyttige og fornødne, og til den Ende allernaadigst at anbefale Vore Stifts Amtmænd og Bisper over alt i Vor Rige Norge, saadanne Skolers Indrettelse, hvor de behøves, og det ey er gandske ugiørligt, saa snart mueligt, paa følgende Maade at besørge:

Figur 1: Fra *Forordning Om Skolerne paa Landet i Norge*.

Det er vi som har markert noen ord med kursiv. Dette er det som sies om hva barna skal lære om matematikk: De skal lære å regne, fordi det (sammen med å lese og skrive) er nyttig og nødvendig for alle og enhver, uansett hvilken stand de tilhører, og hvilke vilkår de lever under. Forordningen inneholder også regler om hva skoleholdere må kunne for å undervise barna: De må være minst 22 år gamle, kunne undervise barn i å lese, ha forstått sin katekisme, ha ulastelig vandel (og spesielt ikke banne, lyve, lide under drukkenskap, lidderlighet eller ufredelighet) og skrive og regne godt. Men dette med å skrive og regne godt var mindre viktig enn de tidligere punktene (pkt. 10).

Dokka (1988, s. 14) skriver at det å skulle lære å skrive og regne var avhengig av at foreldrene ønsket det, og at de var villige til å betale ekstra for det. «De frivillige tilleggsfagene skriving og regning uteble så å si overalt, både fordi lærerne hadde lite å hjelpe seg med og selv hadde liten ferdighet, og fordi foreldrenes interesse sviktet, særlig der hvor det ble krevd ekstra betaling av dem som deltok i tilleggsundervisningen» (Dokka, 1988, s. 24).

1827

I 1827 kom *Lov, angaaende Alumue-Skolevæsenet paa Landet.* I § 14 d) står det at elevene skal undervises i *Skriving og Regning*, og enhver skole bør være utstyrt med en *regnebog*. Selv om skolene ut fra denne loven skulle ha en regnebok, hadde de fleste skolene bare en veiledning til lærerne. Det førte ofte til at elevene ikke fikk øving i regning på egen hånd (Dokka, 1988, s. 35). Ribsskog (1941, s. 12) skriver at dette var en lov som bare sto på papiret i lang tid fremover. Lov om almueskolen i byene kom først i 1848.

Fra å være et fag der det ble vektlagt pugging av regler som ble innført av regnemestere, der målet var å gjøre regningen lettere og raskere, ble det på 1800-tallet mer vektlagt forståelse. Elevene skulle ikke bare løse oppgavene etter regler de hadde lært utenat (Ribsskog, 1941, s. 14). Ribsskog trekker frem Pestalozzi, som la vekt på å gjøre «undervisningen anskuelig», selv om ikke oppgavene hans var så enkle. Et eksempel på dette er følgende oppgave:

> 4 ganger 5.-delen av et ukjent tall er lik 6 ganger 7.-delen av 4 ganger 5.-delen av 70. Hva for et tall er det ukjente, og hvor mange ganger inneholder 11/12 av det søkte tallet det halve av 12? (s. 14).

I 1883 kom regneverket *Regneundervisningen* av overlærer Johan Nicolaisen, og året etter kom oppgavesamlingen Regneskolen. Dette førte til endret regneopplæring i allmueskolen og etter hvert også i andre skoleslag. Blant annet ble *reguladetri*[4] innført allerede i småskolen. Nicolaisen skriver selv at i valget han hadde mellom to formål med matematikkundervisningen: «fuld ferdighed i at løse de almindelig forekommende regneopgaver – eller evne til at forstaa de forskjellige talforbindelser og til at tænke de forelagte opgaver igjennom og derved finde løsningsmaaden – saa vilde den sidste ubetinget være at foretrække» (Nicolaisen, 1883, s. 1). Vi ser her at Nicolaisen mente at en helst burde legge opp til at elevene skulle forstå matematikken, mer enn bare å kunne regne det en hadde bruk for i det praktiske livet.

1889

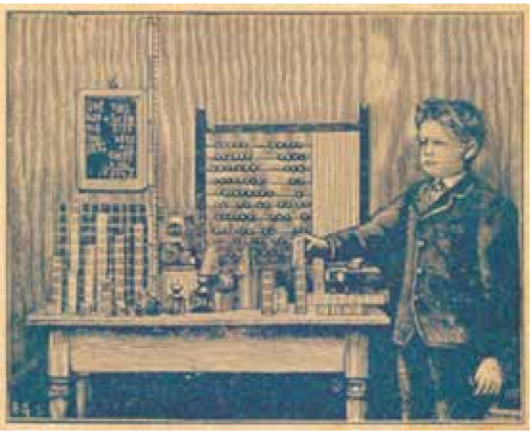
I skoleloven for byskolene var skolen syvårig. Elevene i første avdeling (7–10 år) hadde regning, elevene i andre avdeling (10–12 år) hadde regning og rumlære, og elevene i tredje avdeling (12–14 år) hadde regning. Mer ble ikke sagt om det faglige innholdet. Vi merker oss at det i § 65 presiseres at «Legemlig Straf maa ikke tildeles Piger over 10 Aar».

På landet ble elevene organisert i to avdelinger, 7–10 år og 10–14 år. Undervisningen var 12–15 uker i året og timetallet 30 (i første avdeling) og 35 (i andre avdeling). Regning var fag både i første og andre avdeling.

Lovene fastsatte at det skulle lages egne skoleplaner (lokale læreplaner) som fastsatte nærmere mål for undervisningen. Disse var nok av varierende omfang. Vi siterer alt som står om matematikkfagets innhold fra Skoleplan for Folkeskolerne i Dønnæs Skolekommune fra 1896 (Dønnes er en del av dagens Dønna kommune):

> 1ste afdeling – smaaskolen: Talrækken indtil 100. Kjendskab til de sædvanlig anvendte metriske enheder. Hovedregning: De fire regningsarter. (Opgaver og løsning under 100). Multiplikationstabellen ved rækketælling. Tavleregning med lette opgaver.
>
> 2den afdeling: Talsystemet, hele og decimale tal; det metriske system; lidt kjendskab til almindelig brøk.
>
> Hovedregning: De fire regningsarter med praktiske anvendelser. Blandede opgaver, her under reduktion til enheden anvendt til løsning af reguladetri- og procentberegningsopgaver.
>
> Beregning af regelmæssige flader og rum (kvadrater, rektangler, parallelogrammer og triangler) – kuber, prismer og pyramider.
>
> En tidsmæssig regnebog bør bruges. (s. 12)

En plan for Sandnes folkeskole fra 1899 kan kanskje gi en liten sammenlikning av lands- og byfolkeskolen, selv om vi måtte ha hatt tilgang til planer fra mange byer og landkommuner for å kunne gi en mer generell beskrivelse. Her ble regning og rumlæreundervisningen beskrevet over tre sider (s. 26–29), langt mer detaljert enn i Dønnæs. Men selv om det er mer detaljert, er det vanskelig å peke på konkrete forskjeller i hva elevene skulle lære. Målet ble oppgitt slik: «Færdighed i de fire regningsarter med hele tal, decimaltal og brøk. Fremdeles i anvendelse av det metriske system, i løsning af opgaver i de former, hvori de almindelig forekommer i det praktiske liv samt i beregning af simplere flader og legemer*» (s. 26). Stjernen er interessant – den peker til en fotnote om at fremgangsmåten i undervisningen i hovedsak skal følge «Regneundervisningen», som er den tidligere nevnte boka av Nicolaisen som kom i en rekke utgaver på



Figur 2 Illustrasjon fra Nicolaisens Regneundervisningen fra 1885.

slutten av 1800-tallet og begynnelsen av 1900-tallet. Samme bok ble henvist til i planene for skolene i Christiania (s. 16).

Innholdet på de ulike klassetrinn i planen fra Sandnes er skrevet slik at sammenhengene i faget kommer frem, her er et par eksempler: «… paa ethvert punkt bør fremgangsmaaden ved regning af almindelig brøk og med decimalbrøk sammenholdes med hinanden» (s. 28) og «Flademaalet gjennomgaaes, som forberedelse behandles udmaaling og beregning af parallelogrammer, trekanter samt af uregelmessige firkanter og af mangekanter ved at dele dem i trekanter» (s. 29).

Dokumentene viste hovedsakelig hva man skulle lære, ikke hvorfor. Fra Sandnes ser vi riktignok at oppgavene skulle gis på den form som de forekommer i det praktiske liv, og det sier noe om hvorfor man skulle lære det. De som har lyst på mer innsikt i hvordan regneundervisning kanskje ble gjennomført, kan altså lese Nicolaisens bok. Illustrasjonen i figur 2 (som var forsideillustrasjon) viser i hvert fall at konkreter, som kuleramme og klosser, sto sentralt i arbeidet. (En ren avsporing: Nicolaisen sto også bak tekst og melodi til sangen «Mot i brystet».)

Selv om vi i denne artikkelen ikke engang nådde frem til 1900-tallet, er det klare likhetstrekk å finne med senere tiders didaktikk, for eksempel vekt på forståelse og sammenheng. Det skulle imidlertid komme store endringer i faget utover på 1900-tallet, som vi vil diskutere i neste artikkel.

Noter

1 En side med lenker til alle læreplanene vi ser på i denne artikkelserien, ligger her: https://www.tangenten.no/laereplaner

2 I tilknytning til denne læreplanen i matematikk ble det laget *Veiledende årsplaner matematikk* – en bok på drøyt 100 sider som ble laget av grunnskolerådet på oppdrag fra departementet: https://urn.nb.no/URN:NBN:no-nb_digibok_2007080601100

3 For å lage tabellen har vi måttet gjøre en del forutsetninger. For 1889/1922/1925-planene har vi lagt til grunn 12 uker undervisning årlig på landet (og med sjudelt skole) og 40 uker i byene, og med 45 minutters skoletimer. For 1889 har vi brukt Dønnæs' og Sandnes' lokale planer. For 1939B har vi brukt planen for 168 uketimer totalt, og regnet 45 minutters skoletimer. For 1939L har vi brukt planen for sjudelt skole. For 1960 har vi brukt planen for seksdelt barneskole og for allmenn teoretisk ungdomsskole. Vi har antatt 45 minutters skoletimer også her. Fra 2006 ble timetallet oppgitt i hele timer, mens det tidligere ble oppgitt i 45-minuttersbolker. Her er dette omregnet til hele timer.

4 Reguladetri betyr «regel om tre», som man bruker når man ut fra tre kjente størrelser skal beregne en fjerde i to par størrelser som er proporsjonale.

Referanser

Botten, G. (2009a). Dypdykk i gammel bok. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning 20*(4), 49–51.

Botten, G. (2009b). *Min lidle norske regnebog: noen dypdykk i ei lærebok i matematikk fra 1645*. Universitetsforlaget.

Brun, V. (1962). *Regnekunsten i det gamle Norge*. Universitetsforlaget.

Dokka, H.-J. (1988). *En skole gjennom 250 år. Den norske allmueskole – folkeskole – grunnskole 1739–1989*. NKS-forlaget.

Frøyland, E. (1965). *Matematikk i skolen. Hvorfor – hva og hvordan?* [Hovedoppgave i pedagogikk]. Universitetet i Oslo.

Haraldsø, B. (red.). (1989). *Kirke – skole – stat: 1739–1989*. IKO-Forlaget.

Kolsrud, O. (1962). *Presteutdaningi i Noreg*. Scandinavian University Books/Universitetsforlaget.

Nicolaisen, J. (1883). *Regneundervisningen. Methodisk veiledning ved undervisningen i praktisk regning, navnlig i folkeskolen*. J. W. Cappelens Forlag.

Ribsskog, O.K. (1941). *Litt omkring rekneopplæringa i den danske skolen, fattigskolen, friskolen, almueskolen og folkeskolen i Norge*. Gyldendal Norske Forlag.

Smestad, B. (2018). Dybdelæring. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, *29*(4), 31–34.

Naylor

Overraskende kalkulatormønstre

Du kan bruke en kalkulator for å utforske mønstre, utvikle algebraisk tenkning … og oppdage nydelige overraskelser! Prøv disse morsomme oppgavene med elevene dine. Svarene og mange flere ideer til videre utforsking følger nedenfor.

A. Mystiske Enere

$1 \times 1 = 1$
$11 \times 11 = ?$
$111 \times 111 = ?$

Hva er neste regnestykke? Og hva blir svarene? Sjekk med kalkulator etter at du har tenkt over spørsmålene!
Hva er $111\ 111\ 111 \times 111\ 111\ 111$?

B. Finn et mønster

$9 \times 13 = 117$
$9 \times 124 = ?$
$9 \times 1235 = ?$
$9 \times 12\ 346 = ?$

Mike Naylor
DragonFjord puzzles
mike@dragonfjord.com

Hva er det neste regnestykket, og hva blir svarene?
Hva er $9 \times 12\ 345\ 679$?

C. 9-delsmysteriet

$1/9 = ?$
$2/9 = ?$
$3/9 = ?$
Finn mønsteret!
Hva skjer hvis du fortsetter til $9/9 = ?$
Hva med 10/9?
Hva med 23/9?
Kan du forutsi svaret? Hva er 52/9?

D. Brøker med «potens-iell»

Prøv disse brøkene med en kalkulator: 1/98 og 1/97
Hva ser du? Hva med 1/998 og 1/997?

E. Triks med 8

Prøv disse:
$1 \times 8 + 1 = ?$
$12 \times 8 + 2 = ?$
$123 \times 8 + 3 = ?$

Kan du finne mønsteret?

Hva skjer i neste steg?
Hva med 123 456 789 x 8 + 9?

F. Triks med 7

Når du deler på 7, får du et tallmønster som repeteres slik:
1/7 = 0,142857142857142857…

Hva med
2/7 ?
3/7 ?
4/7 ?
osv?

Svar og ideer for å utforske videre:

A. Mystiske Enere

$1111 \times 1111 = 1234321$
$11111 \times 11111 = 123454321$
$111111 \times 111111 = 12345654321$
…
$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$
Hvorfor?
Hvis du bruker en algoritme, kan du kanskje se hvordan det går …

$$\begin{array}{r}
111 \\
\underline{\times \quad 111} \\
111 \\
111\,. \\
\underline{+\ 111\,.\,.} \\
12321
\end{array}$$

B. Finn et mønster

$9 \times 13 = 117$
$9 \times 124 = 1116$
$9 \times 1235 = 11115$
$9 \times 12346 = 111114$
$9 \times 123457 = 1111113$
$9 \times 1234568 = 11111112$
$9 \times 12345679 = 111111111$

Flere mønstre?
Hvor mange enere er det i hvert svar?

Er det noen sammenheng med tallene i regnestykket?
Kan du si hva siste siffer i produktet blir, bare ved å se på tallene i regnestykket?

Avansert:
Hva er regnestykket *før* $9 \times 13 = 117$ i listen over?
Hva er steget etter 9×12345679?

C. 9-dels mysteriet

1/9 = 0,11111 …
2/9 = 0,22222 …
3/9 = 0,33333 …
4/9 = 0,44444 …
…
så er 9/9 = 0,99999…?
Er 0,9999… = 1? Hvis ikke, hva er 1 – 0,9999…?

$$\begin{array}{lr@{\qquad}lr}
10:9 = & & 23:9 = & \\
 & 1{,}0 & & 2{,}3 \\
+ & {,}10 & + & {,}23 \\
+ & {,}\ 10 & + & {,}\ 23 \\
+ & {,}\quad 10 & + & {,}\quad 23 \\
+ & {,}\qquad 10\ldots & + & {,}\qquad 23\ldots \\
\hline
 & 1{,}11111\ldots & & 2{,}55555\ldots
\end{array}$$

D. Brøker med «potens-iell»

1/98 = 0, 01 02 04 08 16 …
Mønsteret begynner med 01 etter komma. 01 dobles utover i rekken og gir potenser av 2.
1/97 har den samme strukturen med potenser av 3.
Mønsteret til 1/998 er nesten det samme som 1/98. Hva er forskjellen?
Hva med 1/9998?
Hva med 1/995?

E. Triks med 8

$1 \times 8 + 1 = 9$
$12 \times 8 + 2 = 98$
$123 \times 8 + 3 = 987$
Det ser ut som det er et mønster i svarene … tallene går ned fra 9.

Forsett mønsteret hele veien til
$123456789 \times 8 + 9$?

Et annet triks med 8-er:
$9 \times 9 + 7 = ?$
$98 \times 9 + 6 = ?$
$987 \times 9 + 5 = ?$
$9876 \times 9 + 4 = ?$

G. Triks med 7

Alle har samme siffer i desimalform som repeteres i denne rekkefølgen: 142857, men den repeterende enheten begynner på forskjellige steder i mønsteret.

1/7 = 0,142857…
2/7 = 0,285714…
3/7 = 0,428571…

Hva skjer når du fortsetter? Legg merke til at i mønsteret har vi 14, 28 og 57. To ganger 14 er 28, og to ganger 28 er nesten 57. Her fins det et fantastisk hemmelig mønster! Skriv 14. Under 14 skriver du 28 flyttet slik at siste sifferet er 2 desimalsteder til høyre fra siste sifferet til 14. Fortsett å doble og flytte mange ganger. (NB: Se på figuren for å se hvordan du skal plassere sifrene. Det siste sifferet flyttes 2 plasser, ikke det første sifferet.)

Figuren viser hvordan det ser ut når du legger sammen sifrene slik som du gjør det når du adderer et regnestykke.

Her finner vi mønsteret igjen! Mange repeterende desimaler har et lignende mønster. Hva kan du finne?

	1	4																
			2	8														
					5	6												
						1	1	2										
								2	2	4								
										4	4	8						
												8	9	6				
													1	7	9	2		
+															3	5	8	4
	1	4	2	8	5	7	1	4	2	8	5	7	…					

Shockey

Hva er problemet?

For over tjue år siden delte en student en matematikkoppgave med meg – hans datter, som gikk i sjuende klasse, hadde fått oppgaven på skolen:

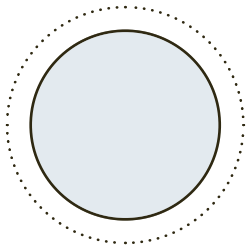
> Forestill deg at du binder et tau rundt jordas ekvator (vi antar at jorda er ei kule med jevn overflate). Hvis du knytter opp dette tauet og legger til 10 meter med ekstra tau, slik at tauet er like langt fra jordas ekvator overalt, ville ei flue være i stand til å gå under tauet?[1]

Allerede i 1928 skrev Dower (1928) at lærebøker ofte har et stort antall oppgaver som involverer voksenaktiviteter og i altfor liten grad har oppgaver som handler om behovene, aktivitetene og interessene til barn. Oppgaven med jorda og tauet handler nok ikke om barns behov – hvem plasserer et tau rundt jordas ekvator? Vi i lærerutdanningen bruker denne oppgaven til å diskutere med våre studenter ideer og begreper fra matematikkdidaktikken som ikke bør tas for gitt.

Tod Shockey
University of Toledo
todshockey@gmail.com

Oversatt av Bjørn Smestad.

Når studentene begynner å jobbe med oppgaven, havner oppmerksomheten med en gang på fluas størrelse. Studentenes intuisjon tilsier at det å legge til 10 meter tau er ubetydelig sammenliknet med omkretsen til jorda. Dagens studenter begynner «naturlig» å åpne søkemotorer på sine mobiltelefoner for å lete etter jordas omkrets, radius eller begge deler. Hvis søkene gir omkrets på 24 901 miles,[2] tenker studentene at en omgjøring er nødvendig siden oppgaven handler om en økning på 10 meter tau. Hvis søkene gir jordas omkrets som 40 075 km, oppleves gjerne ubetydeligheten av de 10 meterne enda sterkere.



Figur 1

Utregningen som gir oss størrelsen på mellomrommet mellom jorda og tauet, er differansen mellom lengdene av radien til den ytre (stiplede) sirkelen og radien til den indre sirkelen, se figur 1. Hvis vi bruker $C = 2\pi r$ for omkretsen av den indre sirkelen og $C_1 = 2\pi r_1$ for omkretsen av den ytre sirkelen, og husker at $C_1 = C + 10$, så får vi at $r=\frac{C}{2\pi}$ og $r_1=\frac{C+10}{2\pi}$ slik at $r_1-r=\frac{10}{2\pi}$. For studentene er resultatet overraskende.

Å endre på oppgaven

Nylig ble oppgaven endret:

> Forestill deg at du binder et tau rundt jordas ekvator (vi antar at jorda er ei kule med jevn overflate). Hvis du knytter opp dette tauet, hvor mye tau må du legge til slik at når tauet er like langt fra jordas ekvator overalt, vil mellomrommet være stort nok til at du kan spasere under tauet?[1]

Motivasjonen for dette var å personliggjøre oppgaven for lærerstudentene og introdusere dem for ideen om at en oppgave kan formuleres slik at den har en løsning som kan være «unik» for den enkelte problemløseren.

I neste nummer av Tangenten vil jeg diskutere ulike måter studentene tilnærmet seg denne oppgaven på. Jeg oppmuntrer leserne til i mellomtida å gi oppgaven som en utfordring til egne elever.

Noter

1 Jeg ble en gang irettesatt av en kollega fordi jeg brukte en så forferdelig oppgave med så mye utenforliggende og unødvendig informasjon. Ifølge min kollega er denne typen oppgaver det som er galt med matematikk. Det er ikke ei oppgave fra virkeligheten, men ei oppgave som gir et muligens kontraintuitivt resultat, i likhet med varianten som diskuteres senere i artikkelen.

2 Studentene i artikkelen er amerikanske, og bruker til dels måleenheter som miles, fot og tommer. Men også norske elever kan komme borti slike enheter når de leter opp informasjon på nettet. (O.a.)

3 Min kollega mislikte denne oppgaven like mye som den forrige versjonen.

NYTT FRA MATEMATIKKSENTERET

Matematikksenteret er en partner i lokalt utviklingsarbeid, vi forsker på matematikkundervisning og tilbyr forskningsbasert etter- og videreutdanning.

I dette nummeret skriver vi om:

- Planlegging av intensiv opplæring: En smakebit fra aktivitet om tid.
- Hva kan det være verdt å merke seg ved valg av oppgaver?
- En reise fra idé til plakat.

Vi har spisskompetanse på matematikkdidaktikk og jobber tett på lærere og elever. Vi er et bindeledd mellom praksis, forskning og utvikling. Vårt mål er at alle barn og unge skal erfare at matematikk er engasjerende, utfordrende og meningsfullt.

Besøk våre nettsider:

Matematikksenteret.no
Fagstoff og læringsressurser

MatteLIST.no
Oppgaver og aktiviteter for utforskning og problemløsning

Matematikk.org
Spill, oppgaver og fakta om matematikk

Alleteller.no
Vurderingsverktøy for talloppfatning og tallforståelse

Realfagsloyper.no
Kompetanseutvikling i realfagene

NTNU

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Planlegging av intensiv opplæring: En smakebit fra aktivitet om tid

Olaug Lona Svingen, universitetslektor ved Matematikksenteret NTNU

Skolene er pålagt å gi elevene på 1. – 4. trinn intensiv opplæring når de står i fare for å bli hengende etter. Men hvordan planlegge innhold i intensiv opplæring? Forskning og erfaringer fra praksisfeltet viser at «fasemodellen» er et godt verktøy for å planlegge innhold i den intensive opplæringen.

Kort om fasemodellen

Fasemodellen består av fire faser:

1) konkretiserende fase
2) visualiserende fase
3) abstraherende fase
4) oppsummerende fase

Fasemodellen (Lundqvist et al., 2011; Pilebro et al., 2010; Sterner, 2015) gir en forutsigbar struktur til opplæringen, hvor dere arbeider fra det konkrete til det abstrakte. Fasemodellen gir elevene mulighet til å fordype seg i begreper og matematiske ideer. Fasene utgjør en helhet, og det er ikke vanntette skott mellom hver fase. Det kan derfor være behov for å gå litt frem og tilbake mellom de ulike fasene. Læreren må planlegge innhold slik at aktivitetene i de ulike fasene bygger på hverandre og henger sammen. Elevene må få mulighet til å delta i utforskende aktiviteter hvor de kan bruke sin kreativitet og argumentere og resonnere for sine løsninger.

Den **konkretiserende fasen** tar utgangspunkt i et problem som elevene skal utforske, og det legges vekt på en undersøkende arbeidsmåte. Elevene tar i bruk konkrete representasjoner som de kan ta og føle på. Dette gir kroppslige erfaringer som de kan bygge videre på etter hvert som matematikken blir mer abstrakt.

I den **visualiserende fasen** beskriver elevene arbeidet de har gjort i den konkretiserende fasen visuelt. Her tar elevene i bruk tegninger, skriving eller andre visuelle representasjoner som for eksempel tabeller, tallinje og hundrerutenett. Denne delen av fasemodellen er viktig for at arbeidet i den konkretiserende fasen skal bli noe mer enn bare å gjøre noe med konkretene. Gjennom visualisering bygger man en bro mellom det konkrete og det abstrakte, og elevenes tankeprosesser kommer tydeligere frem.

I den **abstraherende fasen** knyttes det abstrakte matematiske språket til de to foregående fasene. Gjennom arbeidet i de to foregående fasene får symboler, matematiske lover og konvensjoner mening. I denne fasen frigjør elevene seg mer og mer fra det konkrete problemet man tok utgangspunkt i.

Fasemodellen avsluttes med den **oppsummerende fasen**. Her ser dere tilbake på arbeidet som er gjort i de tidligere fasene. Elevene oppsummerer hva de har lært og hva som har bidratt til ny forståelse. Den nye kunnskapen knyttes til andre matematiske områder, og elevene arbeider med varierte oppgaver og aktiviteter som befester det de har lært.

Et eksempel på aktivitet

Planlegging av innholdet i intensiv opplæring må ta utgangspunkt i elevens ståsted, og bygge på observasjoner og kartlegginger som er gjort. Samtale med elevene vil også være et viktig bidrag til å finne ut hvor elevene er i sin utvikling.

Vi har elever på 4. trinn som vi bekymrer oss for ettersom de i liten grad er fortrolige med klokka, både digitalt og analogt. Det ser også ut som de har liten oversikt og kontroll over hva som skjer på forskjellige ukedager og i løpet av en dag i livet deres, både hjemme og på skolen. Det er bekymringsfullt i forhold til kompetansemål for 2. trinn: «forklare korleis ein kan beskrive tid ved hjelp av klokke og kalender»

Med bakgrunn i denne beskrivelsen har jeg valgt et eksempel på aktivitet som er fin å bygge videre på gjennom de fire fasene: Elevene skal utforske følgende problemstilling: Hvordan ser onsdag i neste uke ut for en elev i vår klasse? I introduksjonen til oppgaven inviteres elevene til en samtale om hva som skjer på en «vanlig» onsdag. I denne samtalen blir man enda bedre kjent med elevene og hvilke ord og begreper de bruker om tid.

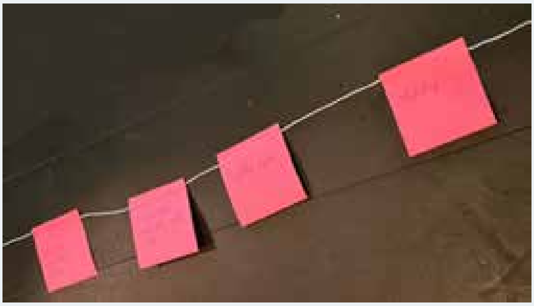
Planlegging av arbeid i den konkretiserende fasen

I denne fasen (konkretiserende fase) skal elevene gjøre fysiske erfaringer, som skal danne grunnlag for det videre arbeidet. I eksemplet har vi valgt å bruke tau og klistrelapper. Vi har gjort denne aktiviteten sammen med mange lærere, og de har løst aktiviteten på flere ulike måter. På figurene kan dere se to ulike tilnærminger til hvordan en «vanlig» onsdag kan representeres.

Figur 1 viser hvordan vi kan oppfatte tid som syklisk, noe som gjentar seg i et fast mønster. Timeviseren går to ganger rundt urskiva og utgjør et døgn. Neste døgn følger samme mønster, og vi sover og spiser til omtrent samme tid hver dag. En uke, en måned, årstider og år gjentas på nytt og på nytt.

Fiyur 2 viser hvordan tid kan oppfattes lineært. Vi fødes, lever vårt liv gjennom barndom,

Figur 1: Syklisk oppfattelse av tid.

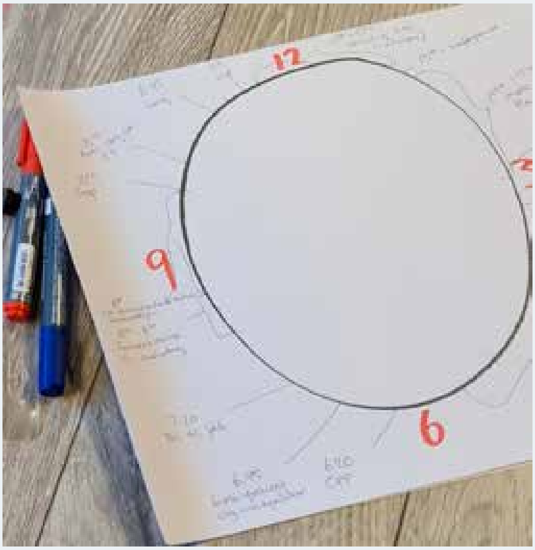


Figur 2: Lineær oppfattelse av tid.

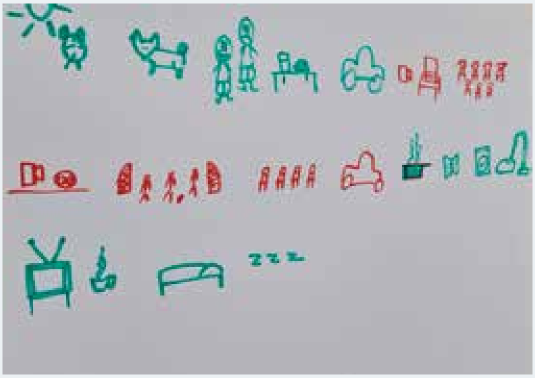
ungdomstid, voksenliv og alderdom, og til sist dør vi. Tid er en rekke hendelser som følger etter hverandre.

I løpet av denne aktiviteten dukker det opp flere problemstillinger som elevene kan reflektere rundt: Hvor lenge varer ulike aktiviteter? Når starter onsdag? Når de står opp, eller har onsdagen startet før de sto opp? Hvordan skal de ulike aktivitetene plasseres i forhold til hverandre? Når man oppfatter tid som syklisk, hvordan skal man framstille at timeviseren går to runder rundt urskiva? Hva er likt/ulikt med å tenke tid lineært eller syklisk? Underveis i aktiviteten må læreren støtte elevene slik at de får utforske på egne premisser og oppfordre elevene til å forklare hvordan de tenker. Sammen setter elevene ord på og utvikler sin forståelse for tid.

Før dere gjør aktiviteten sammen med elevene, vil det være nyttig å utforske litt selv. Gjennom egne erfaringer vil læreren være bedre forberedt på hvilke utfordringer elevene kan møte ved bruk av ulike konkreter. Hva skjer om tau og klistrelapper, erstattes med tellebrikker, Cuisinaire-staver, perlesnor (tellesnor), multilink kuber eller lignende? Hva vil være mest naturlig når disse konkretene blir brukt; syklisk eller lineær oppfattelse av tid?



Figur 3: Syklisk oppfattelse av tid.


Figur 4: Lineær oppfattelse av tid.

Planlegging av arbeid i den visualiserende fasen

I den visualiserende fasen omsettes arbeidet i den konkretiserende fasen om til visuelle representasjoner. Dere kan for eksempel bruke A3-ark og tusj. Noen elever vil kanskje velge å tegne og skrive nøyaktig det de har gjort i den konkretiserende fasen, mens andre elever vil endre noe med bakgrunn i diskusjoner som har vært i løpet av den konkretiserende fasen.

I denne fasen kan dere diskutere videre rundt problemstillinger fra den konkretiserende fasen. Andre problemstillinger elevene kan utfordres på er: Hva er klokka når du står opp, går på skolen, spiser middag, eller legger deg? Hvor lang tid er du på skolen? Hvor lang tid bruker du på å pusse tenner, trene, eller spise? Hvordan kan dere lage et best mulig bilde av hva som skjer på en «vanlig» onsdag? I denne fasen støtter læreren elevene i å se etter likheter og ulikheter mellom ulike visuelle representasjoner, og hvordan de gir ulike oppfattelser av onsdagen.

Hva skjer i denne fasen om A3-ark og tusj byttes ut med hundrerutenett, tallinje, diagram eller lignende? Hvilken oppfattelse av tid vil de ulike representasjonene fremme? Hvordan bidrar ulike representasjoner til forståelse av analog og digital klokke? Hvordan påvirker ulike representasjoner forståelsen av hvor lenge noe varer?

Hvilke aktiviteter man velger i de to neste fasene vil være avhengig både av elevenes forståelse og hva som er målet for den intensive opplæringen. I den abstraherende fasen kan det være oppgaver knyttet til analog og digital tid om målet er å kunne klokka. I starten vil elevene knytte klokkeslett til arbeidet de har gjort i de to foregående fasene, og etter hvert vil de kunne arbeide med klokka uten at det er direkte knyttet til konteksten de startet å arbeide i.

I denne teksten har jeg gitt eksempler på aktiviteter i de to første fasene i fasemodellen. Om dere vil lese om arbeid med de to siste fasene, se kompetanseutviklingspakkene «Matematikkvansker og tilpasset opplæring» på matematikksenteret.no. Der finner dere også et skjema dere kan ta i bruk i egen planlegging.

Referanser

Lundqvist, P., Nilsson, E.-G. S., & Sterner, G. (2011). Intensivundervisning med gott resultat. *Nämnaren*, *2011*(1), 44–50. http://ncm.gu.se/media/namnaren/npn/2011_1/4450_lundqvistmfl.pdf

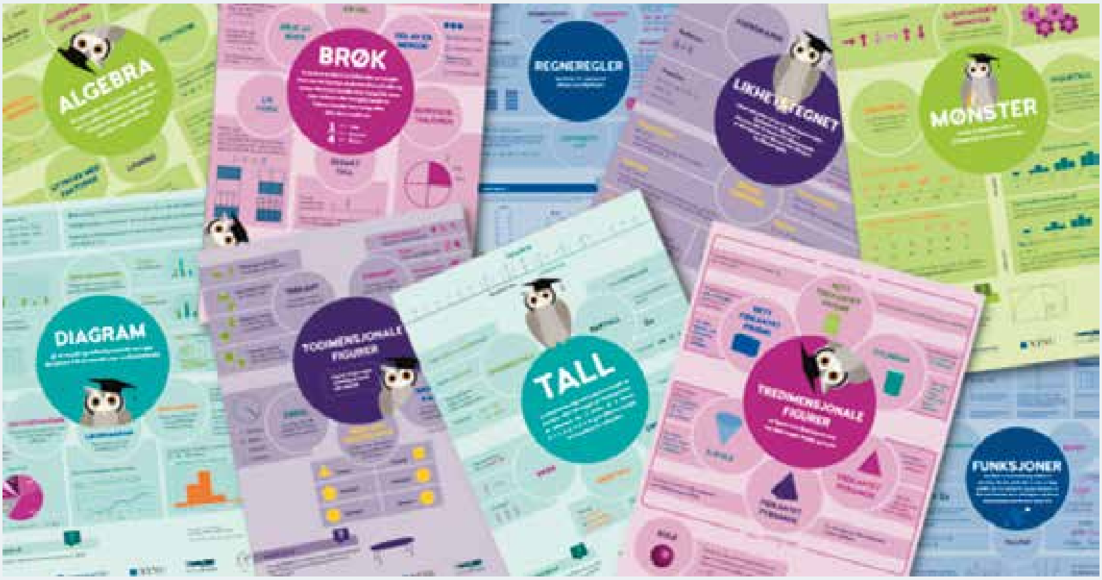
Pilebro, A., Skogberg, K., & Sterner, G. (2010). Intensivundervisning. *Nämnaren*, *2010*(4), 54–59. http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/5459_10_4.pdf

Sterner, G. (2015). *Tal, resonemang och representationer: En interventionsstudie i matematik i förskoleklass.* [Licentiatuppstas, Göteborgs universitet]. Institutionen för pedagogik och specialpedagogik.

Modulen «Intensiv opplæring»

Skjema for planlegging

En reise fra idé til plakat



Nærmere 2500 sett med ti matematikkplakater fra matematikk.org ble sendt ut til grunnskolene i juni. Etterspørselen er fortsatt stor. Kan «forfatterne» bak plakatene røpe suksessoppskriften?

Matematikksenteret har bare fått positive tilbakemeldinger på «plakatprosjektet», og merker stor pågang fra lærere som ønsker å bestille flere klassesett.

Arbeidsgruppen ved Matematikksenteret; May Renate Settemsdal, Anne-Gunn Svorkmo og Monica Rehaug, startet arbeidet med plakatene for to år siden. Først gikk de gjennom de gamle plakatene fra matematikk.org for å se hva de ønsket å ta med videre og hva de ønsket å endre, ut fra ny læreplan. Videre skisserte de utkast til 15 plakater med ulike matematiske tema, som til slutt ble redusert til 10 plakater.

– Det var viktig for oss å framheve matematikken som vi som arbeider på Matematikksenteret, står for. Målet var å lage plakater som motiverer og inspirerer elevene til å bli nysgjerrige, slik at de kan oppdage sammenhenger i faget på egen hånd. Samtidig skulle innholdet være så «bredt» at det favnet de yngste og de eldste elevene, forteller universitetslektor Monica Rehaug, som også er prosjektleder for Matematikk.org.

Arbeidsgruppa gikk grundig til verks; de søkte i lærebøker, leksikon, leste seg opp på forskning, tegnet, kladdet, og brukte tid på å finne gode, illustrerende eksempler.

– Det ble mange fine diskusjoner rundt hva som er det viktigste av det viktigste, og vi jobba hardt med formuleringer som skulle være korte og presise. Det ble mange «kill your darlings», sier Anne-Gunn Svorkmo, universitetslektor ved Matematikksenteret.

Etter hvert ble to utkast levert til grafisk designer Maiken Skogstad ved NTNU Grafisk senter. Da utkastene kom i retur med forslag til design – hadde designeren også en hel del innspill og spørsmål.

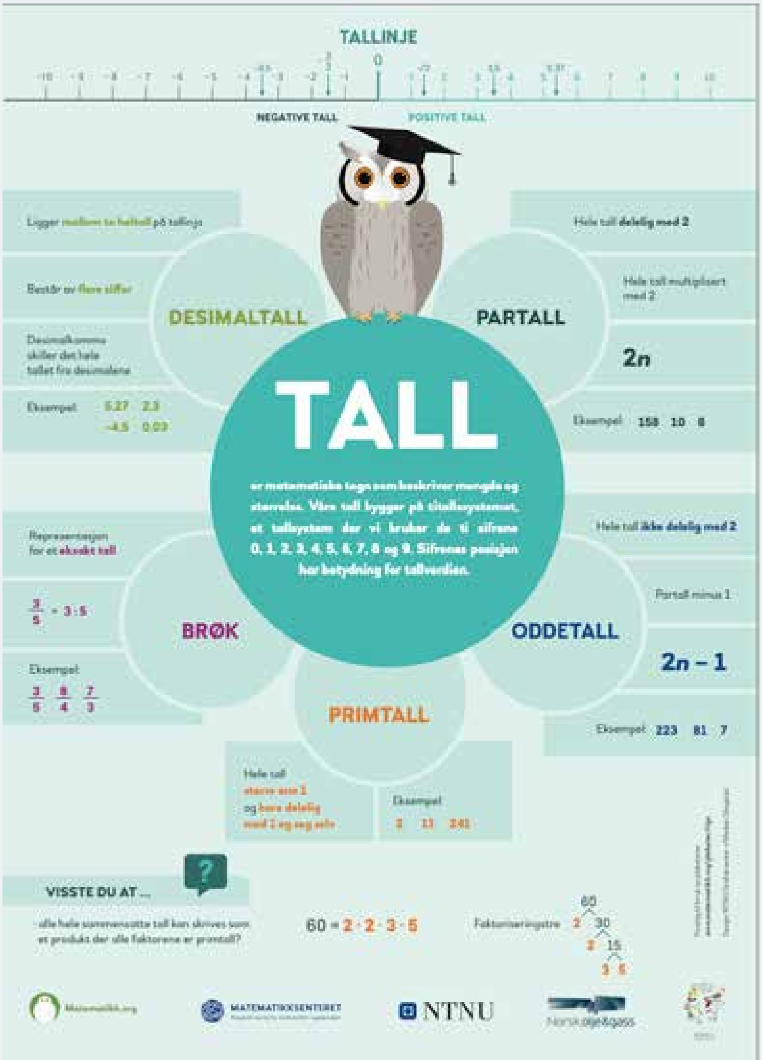
– Det var et helt nytt format å jobbe med. Vi hadde ikke vært tydelige nok, og måtte tenke på nytt slik at innholdet passet designet. Det var en øvelse å balansere det matematiske innholdet med det visuelle og brukervennlige, men det var utrolig morsomt og lærerikt! Samarbeidet mellom oss og designer fungerte veldig bra. Alle fikk brukt sin kompetanse, noe som gjør at vi er veldig fornøyde med de ti plakatene vi har laget, sier Svorkmo.

I dag henger plakatene i mange klasserom i Norge, forhåpentligvis til inspirasjon og glede for både elever og lærere.

– Vi håper at elevene kan bruke plakatene som et læremiddel, hente fakta fra plakatene når de trenger det og kanskje bruke de som grunnlag for diskusjon i klasserommet. Plakatene viser hvordan ulike tema i matematikk henger sammen og vi håper at elevene oppdager disse sammenhengene.

Her er arbeidsgruppa som jobbet fra idé til ferdig plakat. Fra venstre: May Renate Settemsdal, Monica Rehaug og Anne-Gunn Svorkmo.

Se film om hvordan plakatene ble til:



Plakatene kan passe for elever fra 1. til 10. trinn. For eksempel kan plakaten om tall brukes på 1. trinn ved introduksjon av partall og oddetall, og på 8. trinn om primtall og faktorisering.

Hva kan det være verdt å merke seg ved valg av oppgaver?

Anne-Gunn Svorkmo, universitetslektor ved Matematikksenteret NTNU

I oppgavebasen med kenguruoppgaver på nettsidene til Matematikksenteret, finnes det et mangfold av oppgaver med stor variasjon innenfor de fire hovedområdene tall, algebra, geometri og logikk. Siden i fjor har vi lagt inn over 100 nye oppgaver! Oppgavene passer for elever fra 1. - 10. trinn, og mange av dem er også egnet for elever på videregående skole.

Oppgavene i basen er samlet etter årstall for når de var med i Kengurukonkurransen og under kategoriene Pre-Ecolier (1.-3. trinn), Ecolier (4.-5. trinn), Benjamin (6.-8. trinn) og Cadet (9. -10.trinn). I hvert oppgavesett er oppgavene vektet etter 3, 4 og 5 poeng ut fra en antatt vanskegrad. Hvis oppgavene hadde vært sortert inn under hvert av de fire hovedområdene, ville det vært enklere å finne fram og velge oppgaver ut fra det du som lærer ønsker at elevene skal arbeide med. Vi jobber med saken, men enn så lenge, må du jakte på interessante og egnede oppgaver i oppgavesettene.

Når du som lærer velger oppgaver og problemstillinger som du ønsker at elevene skal arbeide med, på hvilket grunnlag tar du valget ditt? Hva ser du etter? Har du tenkt gjennom hva det kan være lurt å legge merke til? Mange kenguruoppgaver er problemløsningsoppgaver, og av den grunn er det ikke alltid like lett å få tak i kvaliteter ved oppgaven, vanskegraden eller den matematiske ideen oppgaven bygger på. Hvis du tar seg tid til å løse oppgaven, blir det som oftest enklere.

Når jeg skal velge oppgaver fra basen med kenguruoppgaver, ser jeg alltid etter den

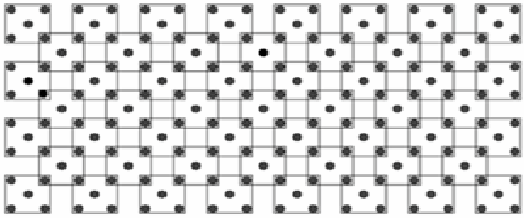
matematiske ideen og de muligheter som jeg ser for meg kan ligge i oppgaven. Jeg ser etter om den kan løses på ulike måter, om det er mulig å forenkle eller utvide problemstillingen som igjen gir rom for differensiering. Jeg vurderer også om oppgaven kan være en start på en matematisk diskusjon. I tillegg ser jeg etter om det er noe unikt ved oppgaven, om den er annerledes på noe vis, eller om den har en kvalitet av en eller annen art. Jeg prøver også å se for meg om konteksten i oppgaven kan fenge elevene.

Jeg vil vise eksempler på hva det er med enkelte oppgaver som gjør at de for meg peker seg ut som interessante.

Telle mange og telle riktig

I oppgaven *antall prikker* (neste side) er det er såpass mange prikker at elever vil oppleve det å telle én og én prikk som slitsomt. Det er litt av hensikten, og det er en styrke med oppgaven. En slik følelse er ofte et godt utgangspunkt som ofte tvinger elevene til å finne mer effektive måter å telle prikkene på. Prikkene er gruppert i 5-ere, men det er en utfordring at de overlapper hverandre. Jeg legger merke til at 5-erne

14 **Hvor mange prikker er det i figuren nedenfor?**



A) 180 B) 181 C) 182 D) 183 E) 265

Antall prikker, oppgave fra Ecolier 2014

kan grupperes og telles opp på flere måter, som igjen gir muligheter for å diskutere effektive og mindre effektive tellestrategier med elevene. Det å telle med 5 er for de fleste enkelt, og noen vil foretrekke å slå sammen to 5-ere til 10-ere som igjen kan danne 20-ere. Hva passer best for den enkelte elev, og hvorfor? Ut fra min forventning om at elevene kommer til å telle prikkene på ulike måter, kan jeg utfordre hver enkelt av dem på å utrykke den måten de har telt opp prikkene på, med tall og symboler. Her kan gjentatt addisjon og multiplikasjon opptre i samme regnestykke. Jeg ser for meg at det kan bli mange «lange» regnestykker, og da blir det naturlig å diskutere bruk av parenteser. Uansett hvordan de ulike regnestykkene vil se ut, vil svaret forhåpentligvis bli det samme. Det vet jeg vil fasinere noen av elevene.

Tallmønster

Tall i tallfølgen handler om mønster og system i tallfølger, og slik jeg ser det har oppgaven en liten finesse som gjør at den skiller seg ut. Den gjentagende sekvensen med tall i tallfølgen, starter ikke her på det første tallet. Elevene må etter å ha funnet flere tall i tallfølgen, vurdere hva som er den gjentakende sekvensen. Uansett hvordan elevene velger å finne tall nummer 2017 i tallfølgen, må de huske å ta hensyn til de tallene i følgen som ikke er med i den gjentagende sekvensen.

Sjakkruter

Jeg liker oppgaver som på en eller annen måte overrasker eller som er av typen «ser veldig triviell ut, men var ikke det likevel». Ved første øyekast kan det se ut som det er like mange svarte som hvite ruter i hver av de fem kvadratene i oppgaven *sjakkruter*. Et lite blikk på figur B, viser at det ikke kan stemme: Det svarte arealet er en rute mer enn det hvite arealet, og ettersom det er så få ruter, er det enkelt å se. Gjelder det for flere av kvadratene?

Kvadrat A, C og E har partall antall ruter, mens B og D har oddetall antall ruter. I enkelte flervalgsoppgaver kan noen svaralternativer elimineres ut fra et logisk resonnement. Jeg mener det er verdt å merke seg oppgaver hvor det i løs-

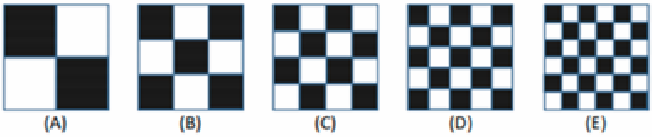
21 Tallene i tallfølgen 2, 3, 6, 8, 8, ... får vi på følgende måte:

De to første tallene er 2 og 3. Deretter får vi neste tall ved å ta siste siffer i produktet av de to foregående tallene.
Hvilket tall står som nummer 2017 i tallfølgen?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

Tall i tallfølgen, oppgave fra Cadet 2017

14 Fem like kvadrater er delt i mindre kvadrater.
Hvilket av de fem kvadratene har størst svart areal?



Sjakkruter, oppgave fra Benjamin 2019

ningsprosessen er naturlig å sammenligne noen av svaralternativene, som igjen kan gi rom for faglige samtaler og diskusjoner. Hva er likt, og hva er forskjellig? Figur B og figur D har det til felles at de har en svart rute mer enn antall hvite, og mulig at det for mange er opplagt at kvadrat B har det største svarte arealet. Hvis så er tilfellet, ville jeg ha utnyttet situasjonen og fått elevene til å argumentere for hvorfor B har det største svarte arealet av de to.

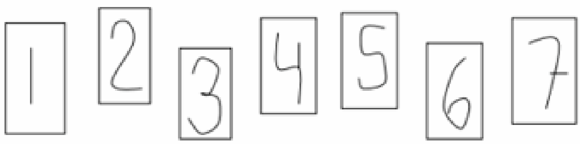
Trekking av kort

Tallkort er også en interessant oppgave i denne sammenhengen, både fordi den er satt inn i en kontekst som kan minne om et kortriks, og for at den åpner opp for matematiske resonnement rundt summen av partall og oddetall. Det er få tallkort det her er snakk om, og elevene kan skrive tallene på lapper og prøve seg fram ved å trekke. På den måten kommer elevene raskt i gang med oppgaven, og det gjør også diskusjonen om hvilke kort Eva og Lars kunne ha trukket. Noen elever vil kanskje gå fra å diskutere at hvis Lars trekker 4 og 5 vil summen bli 9, som er et oddetall, til å betrakte kortene som partall (p) og oddetall (o). Det spiller jo egentlig ingen rolle om tallene Lars trekker er 4 og 5 eller 2 og 7. Spørsmålet vil etter hvert dreie seg om hva som skjer hvis Lars trekker et partall og et oddetall. Et behov for en enkel generalisering er en kvalitet ved oppgaven jeg liker.

Tallkort ble i Kengurukonkurransen i 2008 valgt som en av oppgavene i alle oppgavesettene som på den tiden var fra 4. trinn til og med 3. klasse på videregående skole. Den gang var det også store diskusjoner om oppgaven var for vanskelig for elever på 4. og 5. trinn, men gjennomføringen viste at også yngre elever klarte å løse denne oppgaven, kanskje med andre strategier enn det eldre elever valgte.

Lykke til i jakten på interessante oppgaver fra basen med kenguruoppgaver!

18 Sju kort ligger i ei eske.
På hvert av kortene er det skrevet tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6 eller 7.



Eva trekker 3 kort fra eska og Lars trekker 2 kort. Da er det to kort igjen i eska. Eva ser på kortene sine og sier til Lars: «Jeg vet at summen av kortene dine er et partall».
Hva er summen av Eva sine kort?

A) 6 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

Tallkort, oppgave fra Ecolier, Benjamin, Cadet, Junior og Student 2008

LAMIS

Landslaget for matematikk i skolen
c/o Elin Unstad
Postboks 181
1371 Asker

post@lamis.no · www.lamis.no
Bankgiro: 7878 0500882 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Fra formålsparagrafen

Det er en demokratisk rett å få en matematikkundervisning som setter en i stand til å delta aktivt som borger i et demokrati. Derfor vil Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) sette fokus på matematikk for alle.

Styret for LAMIS

Leder
Renate Jensen, Vestland

Barnehage
Elisabeth Hast Rønnestad, Møre og Romsdal

Barnetrinnet
Hilde Svendsen, Viken

Mellomtrinn
Inger-Lise Risøy, Viken

Mellomtrinn/Ungdomstrinn
Svend Eidsten, Viken

Ungdomstrinn
Kari-Anne Bjørnø Rummelhoff, Viken

Videregående skole
Odd-Bjørn Lunde, Rogaland

Høgskole/universitet
Mona Røsseland, Vestland

Varamedlem (Barnetrinnet)
Henrik Kirkegaard, Møre og Romsdal

Medlemskontingent

450 kr for enkeltmedlem
200 kr for husstandsmedlemmer
300 kr for studenter/pensjonister
975 kr for skoler/institusjoner

Organisasjonssekretær

Elin Unstad, org.sek@lamis.no

Lederen har ordet

Renate Jensen

Kjære LAMIS-kollega!

Når dette bladet kommer i postkassen, er det snart jul. For mange elever og lærere har dette semesteret blitt kortere enn planlagt på grunn av streik. Et viktig spørsmål for mange er derfor hvordan prioriterer vi fremover for å gi elevene mulighet til motivasjon og mestring i matematikkundervisningen.

På årets Novemberkonferanse i Trondheim skal LAMIS sentralstyre ha to verksteder, hvor deltakerne vil bli kjent med et verktøy for å arbeide utforskende med ulike oppgavetyper. Hvilken organisering kan gi elevene mulighet til å utforske, våge å gjøre feil, resonnere, argumentere, kritisk vurdere og begrunne sine ideer og løsninger? Hva blir lærerrollen og hvordan snakke med elevene om deres rolle. På verkstedene vil vi blant annet bruke verktøyet i arbeid med flere oppgaver: en oppgave fra eksamen 2022, en aktivitet fra ressursen vår om FN sine bærekraftsmål og oppgave som gir mengdetrening. Vi håper å treffe mange medlemmer i Trondheim, og få til gode diskusjoner på våre verksteder.

Vi i LAMIS sentralstyre deltar i og følger debatten om eksamen i matematikk. I september ble en rapport publisert. En partssammensatt gruppe har utredet hvilke endringer og utviklinger som bør gjøres med eksamen videre. Gruppen var delt i sin innstilling, men mener at det fortsatt er behov for todelt eksamen, samt at det er behov for nye oppgavetyper som er i tråd med ny læreplan. De løfter noen spørsmål som krever videre utredning: hvordan regulere tilgang til hjelpemidler og hvordan ivareta behov for å kommunisere matematikk på ulike måter.

Mange lærere jeg treffer er opptatt av eksamen 2023. Ikke fordi eksamen styrer det daglige læringsarbeidet, men fordi eksamen er en materialisering av LK20. I vår var det noen som tok grunnskoleeksamen som privatist, og disse eksamensettene er det som brukes som eksempel på de tre ulike oppgavetypene som vil bli gitt til eksamen våren 2023. Læreplanene i matematikk krever at elevene kan argumentere, vurdere og kommunisere hvordan de løser ulike matematiske problemstillinger. Elevene skal mestre å løse eksamen med tilgang til hjelpemidler som de kjenner fra opplæringen. De skal selv velge løsningsstrategier og begrunnelser, om ikke noe annet blir presisert i oppgaveteksten eller i introduksjonen til oppgavekategorien. Kjerneelementene er tydelige i utforming av oppgavene. LAMIS ønsker å legge til rette for gode diskusjoner om eksamen på lokallagskvelder.

En annen viktig del av LAMIS sitt arbeid på denne tiden av året er det å forberede og gjennomføre UngeAbel-konkurransen. Vi er stolte og glade for å få lov til å drive denne konkurransen her i Norge. Det legges i disse dager ned mange timer i informasjonsarbeid, oppgaver, løsningsforslag, juryarbeid og det praktiske rundt konkurransen. UngeAbel er for basisgrupper på 9. trinn, og består av to innledende runder med oppgaver som skal løses samt en fordypningsoppgave. Fra november er den første runden i UngeAbel tilgjengelig for skolene. Vi jobber aktivt for god deltagelse fra alle fylker og håper på hjelp fra Tangenten sine lesere. Det er mulig å melde seg på og gjennomføre Runde 1 helt til 2. desember.

Til slutt vil jeg ønske deg en flott avslutning av dette første semesteret i barnehage/skole/studieåret.

Første utsending av undervisningsressurser til medlemmer

v/sentralstyret

Undervisningsressurser til medlemmer i LAMIS

Sendt til Orgsek på post@lamis.no

Aktiviteter til FNs bærekraftsmål

I september 2015 vedtok FN 17 nye bærekraftsmål som gjelder globalt – også for Norge. Danmarks Matematiklærerforening har laget undervisningsressurser basert på disse målene, med faget matematikk som hovedfokus. LAMIS har kjøpt rettighetene, og flere lokallag har oversatt og tilrettelagt dette materialet til norsk.

LAMIS-medlemmer – den 25. oktober sendte vi ut første e-post med nytt materiell til bruk i undervisningen.

Dette skoleåret kommer vi til å sende ut e-post med ressurser og aktiviteter vi utvikler til alle våre medlemmer. Utsendingen vil skje i oktober, desember, januar og april. Det blir blant annet aktiviteter til FN sine 17 bærekraftsmål og et verktøy for arbeid med utforskende oppgaver. Sentralstyret har samarbeidet med lokallagene i dette arbeidet.

E-posten 25. oktober inneholdt aktiviteter med lærerveiledning til fire bærekraftsmål.

FNs bærekraftsmål gir elevene innblikk i den verden vi lever i, og om hvordan matematisk kunnskap kan hjelpe oss å forstå og oppnå en fredeligere og mer bærekraftig verden. Den tverrfaglige ressursen har en fyldig lærerveiledning med mange ideer til planlegging av undervisningen. De ulike kapitlene gir en oversikt over kjerneelementer, matematiske kunnskapsområder og tverrfaglige temaer. Aktivitetene er utarbeidet for elever i grunnskolen, men kan også tilpasses barnehage og videregående skole.

VIKTIG:

Hvis du som medlem ikke har mottatt denne utsendelsen på e-post, er det viktig at vi får beskjed

Vi trenger hjelp til å oppdatere våre e-postlister. Hvis du har endret e-post gi oss beskjed. Vi trenger spesielt hjelp til å nå våre skolemedlemmer. Er din skole medlem, gi oss en e-postadresse til både skolen og gjerne også til en kontaktperson som kan formidle videre til alle matematikklærere ved skolen. Send melding til post@lamis.no, eller fyll inn skjemaet for oppdatering av e-postadresse på hjemmesiden vår – www.lamis.no

Lokallagssamling i Bergen

v/sentralstyret

Velkommen til lokallagssamling i Bergen den 14. og 15. januar 2023.

Selve lokallagssamlingen vil bli arrangert på Høgskolen på Vestlandet på Kronstad. Hvert lokallag kan sende to representanter til samlingen.

På lokallagssamlingen blir det informasjon og refleksjon om arbeidet som pågår i LAMIS. Vi legger opp til prosesser der dere får spille inn ideer både på det arbeidet som pågår i sentralstyret og på hvordan få gode lokallagskvelder rundt om i landet.

Vi planlegger for et spennende verksted ved Mona Røsseland. Verkstedet er basert på erfaringer fra et forskningsprosjekt; Teater i Matematikk (TIM), der målet var å utforske hvordan drama og bruk av roller kan være med å endre elevers opplevelse av matematikk. TIM-metodologi har søkelys på en matematikkundervisning som fremmer samarbeid, er kreativ og skaper et ufarlig matematikkmiljø gjennom bruk av teatrets arbeidsformer.

En del av TIM-prosjektet har oppmerksomhet på endring av samtalemønsteret i klasserommene ved bruk av rollekategorier. Aktuelle rollekategorier er: demokratisk leder (som har vilje til å lytte til ulike synspunkt, men til slutt bestemmer), skeptikeren (som ikke tar noe for gitt og stiller spørsmål ved antatte sannheter), nysgjerrigperen (som spør helt til hun forstår), megleren (som forsøker å dempe konflikter og ønsker å se det positive ved ulike forslag til løsning). Gjennom bruk av drama får elever og lærere prøvd nye roller og trening i å ta ulike rollekategorier. Målet er å anvende rollekategoriene i matematikkundervisninga slik at elevene får større ansvar for å spørre og evaluere, mens læreren får et ansvar for å skape gode dialoger i stedet for å stille alle spørsmål og evaluere alle innspill.

På samlingen vil vi også teste ut og diskutere et verktøy sentralstyret har utviklet – et verktøy for arbeid med utforskende oppgaver. Vi planlegger for å bruke både oppgaver fra eksamen, Unge-Abel og FN sine bærekraftsmål, og sammen teste hvordan verktøyet kan brukes sammen med elever på ulike klassetrinn før vi deler det med alle medlemmer i LAMIS.

Arbeidet med ny nettside for LAMIS er godt i gang, og vi gleder oss til å dele denne med dere i januar og få hjelp til de siste endringer før vi publiserer.

Søndagen blir det idemyldring om lokallagsarbeid. Vi vil også diskutere tekster til Tangenten, og vi vil utfordre dere i lokallagene til å prøve ut aktiviteter fra ressursen om FN sine bærekraftsmål og dele erfaringen på LAMIS sine sider i bladet.

Vi gleder oss til å se dere i Bergen.

Si takk og si ja, og bli med oss å klippe

Nei, vi ha'kke tid, for vi må finne skjegget

v/Henrik Kirkegaard

Julen nærmer seg med raske skritt og mørke morgener, og lyden av snøknirkende støvler høres fra elever på vei til skolen. Lyset strømmer ut av vinduer på skolen og viser all den herlige julepynten som ivrige hender har klippet og limt i førjulstiden.

Finnes det noe bedre enn å lage julepynt. La elevenes kreativitet utfolde seg i farget papir. Gi de mulighet til skaperglede og mestring i matematikktimene. Selv den mest krøllete stjerne blir fin med litt glitter og gulltråd. I tillegg til motivasjon og muligheten til å snakke matematikk, får elevene økt finmotorikk. De får mulighet til sosial læring der de får vise sider av seg selv vi vanligvis ikke ser i timene og de får bruke kunnskapene sine innenfor geometri og måling.

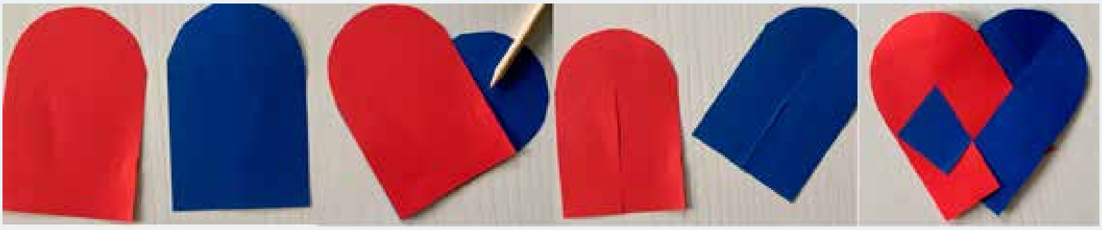
For å hjelpe deg med ideer har LAMIS på sine hjemmesider lagt ut forslag til mange juleaktiviteter. Her finner du garantert noe som passer for elevene dine. Er det en idé du liker, som ikke passer til klassetrinnet ditt, er det bare å vri litt på den. Da går det helt fint. Jeg opplever ofte at elevene er mye flinkere enn meg, og ser nye muligheter for det de holder på med. Finn en aktivitet og la elevene få lov å undersøke og utforske nye varianter.

Hvis du bor i nærheten av et LAMIS lokallag er du kanskje så heldig at de arrangerer en lokallagskveld med juleverksted. Eller du kan selv ta initiativ til en slik kveld. Vi i sentralstyret hjelper gjerne til – ta kontakt med leder@lamis.no.

Et eksempel på en aktivitet som kan brukes med barnehagebarn, elever og studenter er julehjerter. Velg en versjon som passer for dere.

Det er enkelt og fint å lage hjerter av to sirkler. Mine elever får ikke en masse A4-ark i en million forskjellige farger. Jeg har på forhånd valgt ut 4-5 farger. Når jeg har en annen juleaktivitet velger jeg litt andre farger. Da blir de ferdige produktene lettere «å se» i rommet, for alt blir selvfølgelig hengt opp.

Ta to A4-ark i hver sin farge. La elevene tegne en sirkel på hvert ark ved hjelp av et lokk fra pepperkakebokser, en tallerken eller noe annet som er sirkelfor-



met. Trenger det være to like store sirkler? Tja – prøv ☺

Det kan være lurt å ha ekstra sirkler liggende; men la endelig alle elevene få lov å klippe selv. Sirkelen brettes på midten og limes sammen. Klipp ut og lim på en hank fra arkene som blir til rest. Hvilken form må de klippe for å få en hank? Hvor lang bør den være?

En litt større utfordring kan det det være å lage et «enkelt-flettet» hjerte. Lag en mal av et kvadrat med en halvsirkel oppå. Det kan være lurt med et par ferdige maler. Når du og elevene klipper ut arket, skal det ikke være dobbelt. Flett de to halvdelene sammen og lim de løse ender. Klipp også ut en hank og lim på. Jo større mal, jo enklere å flette. Et A5-ark er glimrende å begynne med.

Mønsteret på malene kan være mer eller mindre komplisert. Her er det bare å prøve seg frem. Søk gjerne på nettet etter mønstre du kan videreutvikle. Hadde du tenkt å lage julekort med elevene, er det fint å lime et hjerte uten hank på et kort. Brett et A5-ark i kartong og lim på et hjerte i passende størrelse. Elevene skriver en julehilsen til bestemor eller bestefar på kortet og de er garantert en større julegave.

Det krever en del mer å flette et tradisjonelt hjerte. Her kan du bruke de samme malene som ovenfor; men her klippes de ut på et brettet ark. Mulighetene er endeløse. Du finner ganske mye i bøker og på nettet. Du kan også lese en artikkel fra Tangenten, om julekurver, med mange ulike eksempler. Du finner denne på vår hjemmeside. Det kan også være en god ide å søke på nettet etter en videosnutt av flettingen, hvis du er litt usikker på dette. Start helt enkelt først. Vær nøye med klippingen av mønsteret. Litt unøyaktighet og du får problemer når du fletter.

Riktig god fornøyelse!

Sommerkonferansen 2023

v/ Sommerkonferansekomiteen

Er vi flinke nok til å formidle matematikk i alle dens ulike manifestasjoner og sammenhenger? Mange elever opplever at de lærer «matematikk for matematikkens skyld.»

4.–6. august 2023 vil noen av landets beste formidlere dele sine ideer om hvordan vi i større grad kan integrere matematikken på kryss og tvers av emner og fag, og gjøre matematikken akkurat så praktisk, relevant og engasjerende som vi mattelærere selv synes det er. Tenker du nå: Ja, men det har jo jeg svart belte i fra før, ja da har vi heldigvis noen åpne verksteder igjen, så vil du dele dine beste undervisningsopplegg som verkstedholder, så send gjerne en e-post til tone.skori@gmail.com

Hold av helga, tips kolleger og go'snakk litt med rektor, så dere er klare når påmeldingen åpner i mars.

Vi som arrangerer vil gjøre vårt for at hele konferansen i seg selv også skal leve opp til visjonene for engasjerende, praktisk og relevant formidling av faget.

Konferansen avholdes i naturskjønne omgivelser på Sørmarka konferansehotell på Siggerud, like sør for Oslo. Mellom øktene vil det bli fine anledninger til å møtes uformelt og utveksle erfaringer, ettersom alle er samlet på samme sted, midt i skogen. Verdensmester i hukommelse og tallkunstner, Oddbjørn By (kjent fra TV og Memo-bøkene) vil binde det hele sammen som konferansier og underholder.

Fredag 4. august:

Den første dagen av konferansen blir det plenum, verksteder og LAMIS årsmøte, før vi avslutter dagen med middag på hotellet.

Lørdag 5. august:

Denne dagen starter vi med plenum og verksteder på hotellet. På ettermiddagen blir det sosial utflukt ispedd faglig påfyll og moro på Lillebru Gård like ved. På kvelden blir det en fullspekket festmiddag på hotellet.

Søndag 6. august:

Vi avslutter konferansen med plenum og verksteder på hotellet og en god lunsj. Håper vi sees!

Sommerkonferansekomiteen 2023 v/ Tone Skori, Hilde Eik Svendsen, Tove Branæs, Anders Baumberger og Hanan M. Abdelrahman

Løsningforslag til UngeAbel-oppgaven i Tangenten 3/22

v/ Marianne Maugesten, juryleder i UngeAbel

Trekanter

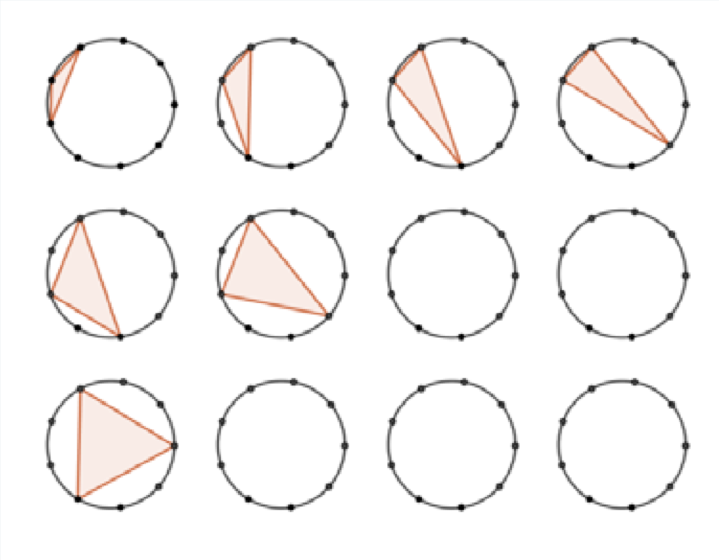
Det kan være lurt å jobbe litt systematisk, for å være sikker på å få med alle mulighetene.

Vi kan starte med trekanter der korteste side går mellom to nabopunkter. Det gir fire forskjellige trekanter.

Deretter går vi videre med trekanter der korteste side går mellom punkter i «avstand to» langs sirkelen. Det gir to forskjellige trekanter.

Og til slutt har vi én likesidet trekant der sidekantene går mellom punkter i «avstand tre» langs sirkelen.

Alt i alt finner vi altså sju forskjellige trekanter.



Oppgave fra UngeAbel

v/ Marianne Maugesten, juryleder i UngeAbel

Denne oppgaven er fra semifinalen i 2021.

SYNLIGE SIDER

Utstyr: Multilink-kuber.

Start med å undersøke én multilinkkube som står på et bord.

Vi kaller den siden som kuben står på for bunnen.

Hvor mange sider er synlige på kuben, altså den som ikke er bunnen?

NB: Vi antar at vi kan bevege oss rundt og betrakte den fra alle kanter.

Deretter undersøker vi to kuber, som er satt sammen. Disse kan stilles opp på bordet enten med én side i bunnen (stående) eller med to sider i bunnen (liggende).

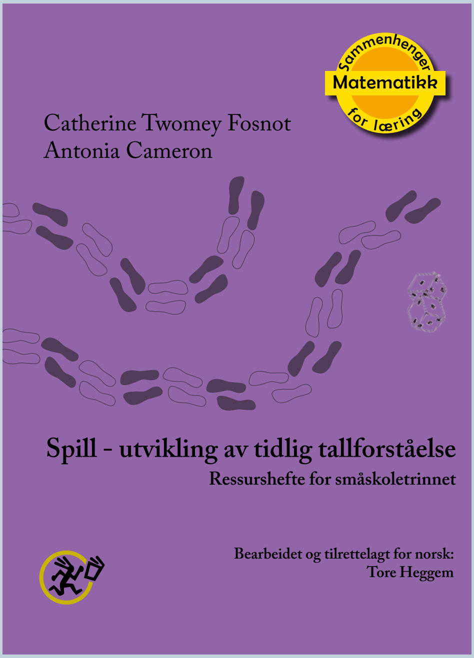
Hvor mange sider er nå synlige?

Fortsett med tre kuber, fire kuber osv ... Kubene skal alltid settes sammen som en stang, og plasseres liggende eller stående.

Fyll ut alle de hvite feltene i skjemaet på svararket.

Antall kuber	Bunn (stående type)	Synlige sider (stående type)	Bunn (liggende type)	Synlige sider (liggende type)
1	1	5		
2	1			
3	1			
4	1			
5	1			
6	1			
	1	97		
	1			299
n				

Fosnot-hefter oversatt til norsk

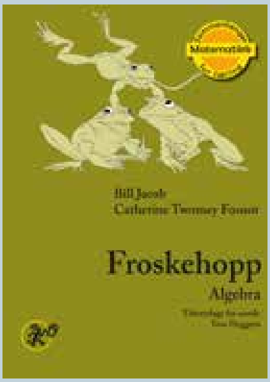


Spill

Utvikling av tidlig tallforståelse

Spill – utvikling av tidlig tallforståelse er et ressurshefte som kan brukes gjennom hele skoleåret. Det består av 24 spill som kan inngå i undervisningsopplegg eller brukes individuelt etter behov. Lek og spill er naturlig del av barns læring og brukes som motivasjon for å utvikle tallforståelse og automatisere tallfakta. Elevene samarbeider i spillene, de må dele strategier med hverandre. For hvert spill gis det oversikt over det aktuelle læringslandskapet og faglige mål. Utdrag fra elevsamtaler viser samspill mellom lærer og elever med muligheter til utvikling. Spillene passer best på første og andre trinn, men kan også brukes for litt eldre elever.

Bearbeidet og tilrettelagt for norsk ved Tore Heggem.



Andre hefter i serien

Froskehopp. Algebra gir elevene inngang til algebra og algebraiske uttrykk og symboler. Det er særlig rettet mot mellomtrinnet.
Arkitektprosjektet handler om areal, omkrets og volum. Det passer på grunnskolens mellom- og ungdomstrinn.

Hvert hefte koster 305,–

Caspar Forlag AS · www.caspar.no

Bestill hos ordre@fagbokforlaget.no

B
NORGE P.P. PORTO BETALT
DISTRIBUERT AV POSTEN NORGE
posten

Returadresse: Tangenten / Caspar Forlag AS, Kanalveien 51, 5068 Bergen